Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 507–525
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-507-525 УДК 517.968.72

ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ЯДРАМИ, ПРЕДСТАВИМЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ СТИЛТЬЕСА

© 2021 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. Исследуются абстрактные вольтерровы интегро-дифференциальные уравнения с ядрами интегральных операторов, представимых интегралами Стилтьеса. Представленные результаты базируются на подходе, связанном с исследованием однопараметрических полугрупп для линейных эволюционных уравнений. Приводится метод сведения исходной начальной задачи для модельного интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Доказывается существование сжимающей C_0-полугруппы. Получена оценка экспоненциального убывания полугруппы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В работе проводится исследование абстрактного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанное уравнение является операторной моделью линейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных, возникающего в теории вязкоупругости

$$u_{tt}(x,t) = \rho^{-1}\left[\mu\Delta u(x,t) + (\mu+\lambda)/3 \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u(x,t))\right] -$$

Работа выполнена в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем» при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований РФФИ (проект № 20-01-00288 А)..

$$-\int\limits_0^t K_1(t-\tau)\rho^{-1}\mu\left[\Delta u(x,\tau)+1/3\cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u(x,\tau))\right]d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t K_2(t-\tau)\rho^{-1}\lambda\left[1/3\cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u(x,\tau))\right]d\tau+f(x,t),$$

где $u=\vec{u}(x,t)\in\mathbb{R}^3$ — вектор малых перемещений вязкоупругой изотропной среды, заполняющей ограниченную область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$с гладкой границей ρ; постоянная плотность $\rho>0$; λ,μ — положительные параметры (коэффициенты Ламе), см. [3,13,20]. Будем предполагать, что на границе области Ω выполнены условия Дирихле $u|_{\partial\Omega}=0$. Функции ядер интегральных операторов $K_1(t)$, $K_2(t)$ — положительные невозрастающие суммируемые функции, характеризующие наследственные свойства среды. Предполагается, что ядра интегральных операторов представимы интегралами Стилтьеса, определенными ниже.

В настоящее время существует обширная литература, посвященная исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, возникающих в многочисленных приложениях (см., например, работы [2,3,7–10,12–22,24,25] и их библиографию).

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [2,16,22,24,25], посвященных спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений.

Подход к исследованию вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений, связанный с применением теории полугрупп, развивался в работах [12,14,15,21,22].

2. Определения. Обозначения. Постановка задачи

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор: $A^*=A\geqslant\kappa_0 I$ $(\kappa_0>0)$, действующий в пространстве H, имеющий ограниченный обратный. Путь B — самосопряженный неотрицательный оператор, действующий в пространстве H с областью определения $D(B)$, такой, что $D(A)\subseteq D(B)$, удовлетворяющий неравенствам $\|Bx\|\leqslant\kappa\|Ax\|$, $\kappa>0$ для любого $x\in\mathrm{Dom}\,(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2}+(A+B)\,u(t)-\int\limits_0^t K_1(t-s)Au(s)ds-\int\limits_0^t K_2(t-s)Bu(s)ds=f(t),\quad t\in\mathbb{R}_+,\quad t\in\mathbb{R}_+,\qquad(2.1)$$

$$u(+0)=\varphi_0,\quad u^{(1)}(+0)=\varphi_1,\qquad(2.2)$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K_i(t)$, $i=1,2$ имеют следующее представление:

$$K_i(t)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-t\tau}d\mu_i(\tau),\quad i=1,2.\qquad(2.3)$$

где $d\mu_i$, $(i=1,2)$ — положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ_i, соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса (см., например, [11]). Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\mu_i(\tau)}{\tau}<1,\quad i=1,2.\qquad(2.4)$$

Введем следующее обозначение:

$$M_i(t):=\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-t\tau}d\mu_i(\tau)}{\tau},\quad t\geqslant 0,\quad i=1,2.\qquad(2.5)$$

Положим

$$A_0 := \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_1(\tau)}{\tau}\right) A + \left(1 - \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_2(\tau)}{\tau}\right) B. \tag{2.6}$$

Из самосопряженности операторов A и B и условий (2.4) следует, что оператор A_0 является самосопряженным и положительным.

Отметим, что задачи вида (2.1), (2.2) являются операторными моделями задач, возникающих в теории вязкоупругости (см. [3, 13]) и теплофизике (см. [8, 12, 17, 19]). Результаты о спектральном анализе уравнения (2.1) в случае, когда ядра $K_i(t)$ представляют собой убывающие экспоненты, изложены в монографии [2].

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B и неравенства Гайнца (см. [5]) следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы $Q_1 := A^{1/2}A_0^{-1/2}$, $Q_2 := B^{1/2}A_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в H, а A_0^{-1} — ограниченный оператор.

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением* задачи (2.1), (2.2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t)$, $Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.2).

Через Ω_k обозначим пространства $L^2_{\mu_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженные нормами

$$||u||_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} ||u(s)||_H^2 d\mu_k(s)\right)^{1/2}.$$

3. Сведение исходной задачи к дифференциальному уравнению первого порядка

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралам в левой части уравнения (2.1), получаем уравнение следующего вида:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A_0u(t) + \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau)\right) A\frac{du(s)}{ds} ds + \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau)\right) B\frac{du(s)}{ds} ds =$$
$$= f(t) - \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau)A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau)B\right)\varphi_0. \tag{3.1}$$

Заметим, что $A = A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}$, $B = A_0^{1/2}Q_1^*Q_1A_0^{1/2}$; тогда уравнение (3.1) формально можно переписать в виде

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + A_0^{1/2}\left[A_0^{1/2}u(t) + \sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \left(\int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds\right) d\mu_k(\tau)\right] = f_1(t),$$

где

$$f_1(t) = f(t) - \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_1(\tau)A + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu_2(\tau)B\right)\varphi_0. \tag{3.2}$$

Введем новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t),$$

$$\xi_k(t,\tau) = \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_k A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \quad \tau \in \bigcup_{k=1}^{2} \operatorname{supp} \mu_k. \tag{3.3}$$

Тогда задача (2.1), (2.2) формально может быть приведена к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{2}\int\limits_0^\infty \dfrac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^*\xi_k(t,\tau)d\mu_k(\tau)\right] = f_1(t), \\ \dfrac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t), \\ \dfrac{d\xi_1(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1 A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_1(t,\tau), \\ \dfrac{d\xi_2(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2 A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_2(t,\tau), \end{cases} \tag{3.4}$$

где $t > 0$, $f_1(t)$ определяется формулой (3.2), $\tau \in \bigcup\limits_{k=1}^{2} \operatorname{supp}\mu_k$,

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0, \quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0} = 0, \quad k = 1,2. \tag{3.5}$$

Теперь, во-первых, мы должны превратить задачу (3.4), (3.5) в начальную задачу в некотором расширенном функциональном пространстве, в котором эта задача будет корректной; во-вторых, мы должны установить соответствие (не только формальное) между решением задачи (3.4), (3.5) и решением исходной задачи (2.1), (2.2).

4. Задача Коши в расширенном функциональном пространстве. Формулировка результатов

Сначала определим оператор $\tau\xi(\tau)$, присутствующий в третьем уравнении системы (3.4).

Рассмотрим сильно непрерывную мультипликативную полугруппу $L_k(t)$ в пространстве Ω_k (см. [15, с. 65]): $L_k(t)\xi(\tau) = e^{t\tau}\xi(\tau)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$, $t \geqslant 0$, $\tau \in \operatorname{supp}\mu_k$. Известно, что линейный оператор $\mathbb{T}_k\xi(\tau) = \tau\xi(\tau)$ в пространстве Ω_k с областью определения

$$D(T_k) = \{\xi \in \Omega_k : \tau\xi(\tau) \in \Omega_k\} \tag{4.1}$$

является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [15, с. 65]).

Замечание 4.1.

1. Для любого $\xi(\tau) \in \Omega_k$ при $t \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| \frac{e^{-t\tau}}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)\right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^\infty \frac{e^{-2t\tau}d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2} ||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{4.2}$$

2. Для любого $\xi \in D(T_k)$ справедливо неравенство

$$\left|\langle \tau\xi(\tau), \xi(\tau)\rangle_{\Omega_k}\right| \leqslant ||\tau\xi(\tau)||_{\Omega_k} ||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{4.3}$$

Действительно, достаточно применить неравенство Гельдера к интегралам в левой части неравенств (4.2), (4.3).

Введем операторы $\mathbb{B}_k : H \to \Omega_k$ $(k = 1,2)$, действующие следующим образом:

$$\mathbb{B}_k v = \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k v \quad k = 1,2, \quad \tau \in \operatorname{supp}\mu_k.$$

тогда сопряженные операторы имеют следующий вид: $\mathbb{B}_k^* : \Omega_k \to H$ $(k = 1,2)$,

$$\mathbb{B}_k^*\xi(\tau) = Q_k^* \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)d\mu_k(\tau), \quad k = 1,2.$$

Действительно, для любых $v \in D(\mathbb{B}_k)$, $\xi(\tau) \in \Omega_k$ справедлива цепочка равенств

$$\langle \mathbb{B}_k v, \xi(\tau)\rangle_{\Omega_k} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_{\Omega_k} = \int\limits_0^{+\infty} \left\langle \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k v, \xi(\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau) =$$

$$= \left\langle v, Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) d\mu_k(\tau)\right\rangle_H = \langle v, \mathbb{B}_k^* \xi(\tau)\rangle_H.$$

Введем гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{2} \Omega_k\right)$, снабженное нормой

$$\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))\|_{\mathbb{H}}^2 = ||v||_H^2 + ||\xi_0||_H^2 + \sum_{k=1}^{2} ||\xi_k(\tau)||_{\Omega_k}^2, \ \tau \in \bigcup_{k=1}^{2} \operatorname{supp} \mu_k,$$

которое будем называть расширенным гильбертовым пространством.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения

$$D(\mathbb{A}) = \Bigg\{ (v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \ \xi_0 + Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(\tau) d\mu_k(\tau) \in H_{1/2},$$

$$\xi_k(\tau) \in D(T_k), k = 1, 2 \Bigg\} =$$

$$= \{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2}, \ \xi_0 + \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \in H_{1/2}, \ \xi_k(\tau) \in D(T_k), \ k = 1, 2\},$$

действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \xi_2(\tau))^T =$$

$$= \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} Q_k^* \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(\tau) d\mu_k(\tau) \right], \ A_0^{1/2} v, \ Q_k A_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\tau}} v(t) - \tau \xi_k(t, \tau), \ k = 1, 2 \right)^T =$$

$$= \left(-A_0^{1/2} \left[\xi_0 + \sum_{k=1}^{2} \mathbb{B}_k^* \xi_k(\tau) \right], \ A_0^{1/2} v, \ \mathbb{B}_k A_0^{1/2} v(t) - \mathbb{T}_k \xi_k(t, \tau), \ k = 1, 2 \right)^T.$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ можно записать в виде следующей операторной матрицы:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_2^* \\ A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1 & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Введем гильбертово пространство $\mathbb{H}_0 = H \oplus \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{2} \Omega_k\right)$ и следующие операторы: $\mathbb{B} := (I, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)^T : H \to \mathbb{H}_0$, $\mathbb{B}^* := (I, \mathbb{B}_1^*, \mathbb{B}_2^*) : \mathbb{H}_0 \to H$ и $\mathbb{T} : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$, где

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{T}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{T}_2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Введем 4-х компонентные векторы вида

$$Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \xi_2(t, \tau)) \in \mathbb{H}, \quad z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in \mathbb{H}.$$

Теперь мы можем переписать систему (3.4), (3.5) в виде дифференциального уравнения первого порядка в расширенном функциональном пространстве. Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t), \tag{4.5}$$

$$Z(0) = z. \tag{4.6}$$

Определение 4.1. Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in \mathbb{H}$ называется *классическим решением* задачи (4.5), (4.6), если $v(t)$, $\xi_0(t) \in C^1((0,+\infty), H)$, $\xi_k(t,\tau) \in C^1((0,+\infty), H)$, $k = 1,2$, по переменной t для любого $\tau \in \bigcup\limits_{k=1}^{2} \operatorname{supp} \mu_k$, $Z(t) \in C([0,+\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (4.5) для любого $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (4.6).

Определение 4.2 (см. [5])**.** Линейный оператор A с областью определения, плотной в гильбертовом пространстве, называется *диссипативным*, если $\operatorname{Re}(Ax, x) \leqslant 0$ при $x \in D(A)$, и *максимально диссипативным*, если он диссипативен и не имеет нетривиальных диссипативных расширений.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда оператор* $\mathbb{A}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$ *с плотной областью определения* $D(\mathbb{A})$ *является максимально диссипативным.*

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда линейный оператор* $\mathbb{A}$ *является генератором сжимающей* C_0*-полугруппы* $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ *в пространстве* $\mathbb{H}$, *при этом решение задачи* (4.5), (4.6) *представимо в виде* $Z(t) = S(t)z$, $t > 0$, *и для любого* $z \in D(\mathbb{A})$ *справедливо энергетическое равенство*:

$$\frac{d}{dt}||S(t)z||^2_{\mathbb{H}} = -2\left(\int\limits_0^{+\infty} \tau||\xi_1(t,\tau)||^2_H d\mu_1(\tau) + \int\limits_0^{+\infty} \tau||\xi_2(t,\tau)||^2_H d\mu_2(\tau)\right). \tag{4.7}$$

Доказательства этих теорем проводятся аналогично доказательствам теорем 1 и 2 из работы [22].

5. Экспоненциальная устойчивость полугруппы $S(t)$

Перед формулировкой теоремы о об экспоненциальной устойчивости сформулируем два утверждения, необходимых для формулировки и доказательства этой теоремы.

Утверждение 5.1. *Существует такое* $\gamma > 0$, *что для всех* $p > 0$ *справедливо неравенство*

$$-\int\limits_0^{+\infty} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) + \gamma \int\limits_0^{+\infty} e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) \leqslant 0. \tag{5.1}$$

Из утверждения 5.1 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.2. *Пусть* $\xi_k(t,\tau) \in \Omega_k$, $k = 1,2$ *для всех* $t, \tau > 0$, *тогда существует такое* $\gamma > 0$, *что справедливо неравенство*

$$-\int\limits_0^{+\infty} \tau||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) + \gamma \int\limits_0^{+\infty} ||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) \leqslant 0. \tag{5.2}$$

Приведем результат об экспоненциальной устойчивости полугруппы $S(t)$, $t \geqslant 0$.

Теорема 5.1. *Пусть* $S(t)z$ *— решение задачи* (4.5), (4.6) *при* $t > 0$, *и пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда справедливо неравенство*

$$\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leqslant \sqrt{3}\|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t} \tag{5.3}$$

для любого $z \in \mathbb{H}$. *При этом* $\omega = \max\limits_{\beta > 0} \omega_\beta$, $\omega_\beta = \dfrac{1}{6}\min\left\{\dfrac{\gamma}{\gamma_1(\beta)}; \dfrac{1}{\gamma_2(\beta)}\right\}$,

$$\gamma_1(\beta) := \max_{k=1,2}\left\{\frac{3}{M(\beta)}\left[(3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1})\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + M_k(0)\left(1 + \frac{2}{3}M(\beta)\right)\|Q_k\|^2\right] + \frac{1}{2}\right\},$$

$$\gamma_2(\beta) := \frac{3}{M(\beta)} \max\left\{1,\ \frac{2}{\lambda_0} \cdot \max_{k=1,2}\left\{||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta)\right\}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}},$$

где $\gamma > 0$ определяется неравенством (5.1),

$$\lambda_0 = \inf_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in D(A_0)}} (A_0x, x), \quad M_k(\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau},\ k = 1, 2, \quad M(\beta) := \sum_{k=1}^{2} M_k(\beta).$$

6. Корректная разрешимость

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t) + F(t), \tag{6.1}$$

$$Z(0) = z. \tag{6.2}$$

Будем предполагать, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), 0, 0, 0)$, $f_1(t) = f(t) - (M_1(t)A + M_2(t)B)\varphi_0$, где $M_k(t)$, $k = 1, 2$ определяются формулами (2.5), вектор имеет вид $z = \left(\varphi_1, A_0^{1/2}\varphi_0, 0, 0\right)$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и одно из следующих условий*:

а). *вектор-функция* $A_0^{1/2} f(t) \in C([0, +\infty), H)$ *и векторы* $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$;

б). *вектор-функция* $f(t) \in C^1([0, +\infty), H)$, *функции* $M_k(t) \in C^1([0, +\infty))$, $k = 1, 2$, *векторы* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$.

Тогда задача (6.1), (6.2) *имеет единственное классическое решение* $Z(t) = (v(t),\ \xi_0(t),\ \xi_1(t,\tau),\ \xi_2(t,\tau))$, *где* $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2}u(t)$, $u(t)$ — *классическое решение задачи* (2.1), (2.2), *и справедлива оценка*

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\left\|u'(t)\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|Z(t)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant$$

$$\leqslant d\left[\left(\|\varphi_1\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2\right)e^{-2\omega t} + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}||f(s) - (M_1(s)A + M_2(s)B)\varphi_0||_H ds\right)^2\right] \tag{6.3}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1, и постоянной ω, определенной в формулировке теоремы 5.1.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3 из работы [22].

7. Спектральный анализ оператора $\mathbb{A}$

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (2.1), (2.2) с начальными условиями $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$ имеет представление

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda).$$

Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (2.1) и имеет вид

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}_1(\lambda)A - \hat{K}_2(\lambda)B, \tag{7.1}$$

где $\hat{K}_i(\lambda)$, $i = 1, 2$ — преобразования Лапласа ядер $K_i(t)$, $i = 1, 2$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} \frac{d\mu_i(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad i = 1, 2, \tag{7.2}$$

$\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Определение 7.1. Множество значений $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(\lambda)$, если для любого $\lambda \in R(L)$ оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена. Множество $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C}\backslash R(L) | L(\lambda)\, \textit{существует}\}$ называется *спектром* оператор-функции $L(\lambda)$.

Обозначим через $\sigma(\mathbb{A})$, $\sigma(\mathbb{T})$ спектры операторов $\mathbb{A}$ и $\mathbb{T}$, соответственно.

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия* (2.4). *Тогда* $\sigma(\mathbb{A})\backslash\sigma(\mathbb{T}) \subseteq \sigma(L)$, *невещественная часть спектра оператора* $\mathbb{A}$ *совпадает с невещественной частью спектра оператор-функции* L *и симметрична относительно вещественной оси.*

Структура и локализация спектра оператор-функции $L(\lambda)$ изучалась в работах [24, 25].

8. Доказательство теоремы 5.1

Перед тем как приступить к доказательству теоремы 5.1, докажем утверждения 5.1 и 5.2.

Доказательство утверждения 5.1. Разобьем следующий интеграл в сумму двух интегралов:

$$-\int\limits_0^{+\infty} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) = -\int\limits_0^{1} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) - \int\limits_1^{+\infty} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) =: I_1(p) + I_2(p),$$

Легко видеть, что

$$I_2(p) \leqslant -\int\limits_1^{+\infty} e^{-p\tau} d\mu_k(\tau).$$

По теореме о среднем существует такое $\xi \in (0,1)$, что

$$-\int\limits_0^{1} \tau e^{-p\tau} d\mu_k(\tau) = -\xi \int\limits_0^{1} e^{-p\tau} d\mu_k(\tau).$$

Таким образом, выбирая $\gamma = \xi/2$, получаем оценку (5.1). □

Доказательство утверждения 5.2. Из утверждения 5.1 следует существование такого $\gamma > 0$, что для всех $p > 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(-\tau e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2\right) d\mu_k(\tau) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$\lim_{p\to 0+} \left(-\tau e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma e^{-p\tau} ||\xi_k(t,\tau)||_H^2\right) = -\tau ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma ||\xi_k(t,\tau)||_H^2.$$

Следовательно, по теореме Фату, справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left(-\tau ||\xi_k(t,\tau)||_H^2 + \gamma ||\xi_k(t,\tau)||_H^2\right) d\mu_k(\tau) \leqslant 0,$$

из которого вытекает неравенство (5.2), т. к. $\xi_k(t,\tau) \in \Omega_k$, $k = 1, 2$, для всех $t, \tau > 0$. □

Замечание 8.1.

1. Для любого $\xi(\tau) \in \Omega_k$ при $\beta \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \left\| \frac{e^{-\tau\beta/2}}{\sqrt{\tau}} \xi(\tau) \right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} ||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{8.1}$$

2. Для любого $\xi \in D(T_k)$ справедливо неравенство

$$\left| \langle \tau\xi(\tau), \xi(\tau) \rangle_{\Omega_k} \right| \leqslant ||\tau\xi(\tau)||_{\Omega_k} ||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{8.2}$$

Действительно, достаточно применить неравенство Гельдера к интегралам в левой части неравенств (8.1), (8.2).

Доказательство теоремы 5.1. Учитывая сильную непрерывность полугруппы $S(t)$, достаточно доказать неравенство (5.3) для любого $z \in D(\mathbb{A})$. Фиксируем $z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \xi_{20}(\tau)) \in D(\mathbb{A})$ для любого $\tau > 0$ и обозначим $S(t)z = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t,\tau), \xi_2(t,\tau)) \in D(\mathbb{A})$.

Введем обозначение (энергию)

$$E(t) := \frac{1}{2}\|S(t)z\|^2_{\mathbb{H}}. \tag{8.3}$$

Принимая во внимание энергетическое равенство (4.7) и утверждение 5.2, получаем следующую оценку:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}\tau||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) \leqslant -\gamma\sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty}||\xi_k(t,\tau)||^2_H d\mu_k(\tau) = -\gamma\sum_{k=1}^{2}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}. \tag{8.4}$$

Для заданного $\beta \geqslant 0$ рассмотрим следующие функционалы:

$$\Phi_1(t,\beta) = -\left(\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\left\langle A^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_1(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_1(\tau) + \int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\left\langle B^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_2(\tau)\right),$$

$$\Phi_2(t) = \left\langle A_0^{-1/2}v(t), \xi_0(t)\right\rangle_H.$$

Отметим, что при сделанных предположениях функционалы $\Phi_1(t,\beta)$ и $\Phi_2(t)$ принимают вещественные значения. $\square$

Утверждение 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда справедливы неравенства*

$$|\Phi_1(t,\beta)| \leqslant \max\left\{1;\ 2\max_{k=1,2}\left\{\frac{1}{\lambda_0}||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta)\right\}\ \right\}E(t), \tag{8.5}$$

$$|\Phi_2(t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}E(t), \tag{8.6}$$

где $\lambda_0 = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in \mathrm{Dom}(A_0)}} (A_0x, x)$.

Доказательство. Согласно замечанию 8.1, при $k = 1, 2$ имеют место оценки

$$\int_0^{+\infty}\left\|\frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}}\xi(\tau)\right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant \left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-\beta\tau}d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}||\xi(\tau)||_{\Omega_k} = \sqrt{M_k(\beta)}||\xi(\tau)||_{\Omega_k}. \tag{8.7}$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}|\Phi_1(t,\beta)| \leqslant \Bigg(&\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\left|\left\langle A^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_1(t,\tau)\right\rangle_H\right|d\mu_1(\tau) + \\ &+\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\left|\left\langle B^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H\right|d\mu_2(\tau)\Bigg) = \\ &= \left(\int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\left|\left\langle (Q_1^{-1})^*A_0^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_1(t,\tau)\right\rangle_H\right|d\mu_1(\tau) + \right. \\ &\left. + \int_0^{+\infty}e^{-\beta\tau}\left|\left\langle (Q_2^{-1})^*A_0^{-1/2}v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H\right|d\mu_2(\tau)\right) \leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant ||v(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||Q_k^{-1}|| \int_0^\infty \left\| \frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}} \xi_k(t,\tau) \right\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||Q_k^{-1}|| \left(\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[||v(t)||_H^2 + \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||Q_k^{-1}|| \sqrt{M_k(\beta)} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \right)^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[||v(t)||_H^2 + 2 \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{\lambda_0} ||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta) ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \left[||v(t)||_H^2 + 2 \cdot \max_{k=1,2} \left\{ \frac{1}{\lambda_0} ||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta) \right\} \sum_{k=1}^{2} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant \max \left\{ 1;\ 2 \cdot \max_{k=1,2} \left\{ \frac{1}{\lambda_0} ||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta) \right\} \right\} E(t);$$

$$|\Phi_2(t)| \leqslant \left\| A_0^{-1/2} v(t) \right\|_H \|\xi_0(t)\|_H \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} \left(||v(t)||_H^2 + \|\xi_0(t)\|_H^2 \right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} E(t),$$

где $\lambda_0 = \inf\limits_{\substack{\|x\|=1,\\ x\in \mathrm{Dom}(A_0)}} (A_0 x, x)$. □

Лемма 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда для любого* $\beta \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t) \leqslant M(\beta) \left[\frac{||\xi_0||_H^2}{12} - \frac{||v||_H^2}{2} \right] + \sum_{k=1}^{2} \tilde{c}_k ||\xi_k||_{\Omega_k}^2, \tag{8.8}$$

где $\tilde{c}_k := (3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1}) \left\| Q_k^{-1} \right\|^2 + M_k(0) \|Q_k\|^2$, $M(\beta) := \sum\limits_{k=1}^{2} M_k(\beta)$.

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt}\Phi_1(t,\beta) = -\int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle A^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_k(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_1(\tau) -$$
$$- \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle B^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_2(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_2(\tau) - \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle A^{-1/2} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{d}{dt} \xi_k(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_1(\tau) -$$
$$- \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle B^{-1/2} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{d}{dt} \xi_2(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_2(\tau). \tag{8.9}$$

Оценим теперь выражения в правой части последнего равенства (8.9), используя уравнение (4.5) и замечание 8.1. Для первых двух слагаемых имеем

$$- \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle A^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_1(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_1(\tau) - \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle B^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_2(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_2(\tau) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{2} \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^* A_0^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_i(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_i(\tau) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} \int_0^\infty e^{-\beta\tau} \left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^* \xi_0(t), \frac{1}{\sqrt{\tau}} \xi_i(t,\tau) \right\rangle_H d\mu_i(\tau) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^*\sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)d\mu_k(\tau),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_i(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_i(\tau)=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left\langle \left(Q_i^{-1}\right)^*\xi_0(t),\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\xi_i(t,\tau)d\mu_i(\tau)\right\rangle_H+$$

$$+\left\langle \sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}Q_k^*\xi_k(t,\tau)d\mu_k(\tau),\sum_{i=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(Q_i^{-1}\right)\xi_i(t,\tau)d\mu_i(\tau)\right\rangle_H\leqslant$$

$$\leqslant \|\xi_0(t)\|_H\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}}\|\xi_i(t,\tau)\|_H d\mu_i(\tau)+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}}\|\xi_i(t,\tau)\|_H d\mu_i(\tau)\right)\left(\sum_{k=1}^{2}\|Q_k\|\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\tau}}\|\xi_k(t,\tau)\|_H d\mu_k(\tau)\right)\leqslant$$

$$\leqslant \|\xi_0(t)\|_H\sum_{k=1}^{2}\left\|Q_k^{-1}\right\|\left(\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau}d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\left(\int_0^\infty \frac{e^{-\beta\tau}d\mu_i(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}\|\xi_i(t,\tau)\|_{\Omega_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{2}\|Q_k\|\left(\int_0^\infty \frac{d\mu_k(\tau)}{\tau}\right)^{1/2}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{2}2\frac{\sqrt{M_k(\beta)}}{2\sqrt{3}}\|\xi_0(t)\|_H\sqrt{3}\left\|Q_k^{-1}\right\|\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{2}\left\|Q_i^{-1}\right\|\sqrt{M_i(\beta)}\|\xi_i(t,\tau)\|_{\Omega_i}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{2}\|Q_k\|\sqrt{M_k(0)}\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}\right)^2\right]\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{M_k(\beta)}{12}\|\xi_0(t)\|_H^2+3\left\|Q_k^{-1}\right\|^2\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2\right)+\sum_{k=1}^{2}\left(M_k(\beta)\left\|Q_k^{-1}\right\|^2+M_k(0)\|Q_k\|^2\right)\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\left[\frac{M_k(\beta)}{12}\|\xi_0(t)\|_H^2+\left((3+M_k(\beta))\left\|Q_k^{-1}\right\|^2+M_k(0)\|Q_k\|^2\right)\|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2\right]. \quad (8.10)$$

Приступим к оценке вторых двух слагаемых в формуле (8.9).

$$-\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle A^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{dt}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_1(\tau)-\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle B^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{dt}\xi_2(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_2(\tau)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_k^{-1}\right)^*A_0^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{d}{dt}\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{2}\int_0^{+\infty} e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_k^{-1}\right)^*A_0^{-1/2}v(t),\frac{1}{\tau}Q_kA_0^{1/2}v(t)\right\rangle_H d\mu_k(\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_0^\infty e^{-\beta\tau}\left\langle \left(Q_k^{-1}\right)^*A_0^{-1/2}v(t),\frac{1}{\sqrt{\tau}}\tau\xi_k(t,\tau)\right\rangle_H d\mu_k(\tau)\leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 \sum_{k=1}^{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta\tau} d\mu_k(\tau)}{\tau} + ||v(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \int_0^{\infty} e^{-\beta\tau} \tau ||Q_k^{-1}||_H \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}} ||\xi_k(t,\tau)||_H \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + \frac{||v(t)||_H}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{k=1}^{2} ||Q_k^{-1}||_H \int_0^{\infty} ||\xi_k(t,\tau)||_H \frac{e^{-\beta\tau/2}}{\sqrt{\tau}} d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + \frac{||v(t)||_H}{\sqrt{\lambda_0}} \sum_{k=1}^{2} ||Q_k^{-1}||_H \sqrt{M_k(\beta)} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + 2\sum_{k=1}^{2} \left[\frac{\sqrt{M_k(\beta)}}{\sqrt{2}} ||v(t)||_H \frac{||Q_k^{-1}||_H}{\sqrt{2\lambda_0}} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k} \right] \leqslant$$

$$\leqslant -||v(t)||_H^2 M(\beta) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} M_k(\beta) ||v(t)||_H^2 + \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{||Q_k^{-1}||_H^2}{2\lambda_0} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right] \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}||v(t)||_H^2 M(\beta) + \sum_{k=1}^{2} \left[\frac{||Q_k^{-1}||_H^2}{2\lambda_0} ||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \right]. \quad (8.11)$$

Объединяя оценки (8.10) и (8.11), получаем неравенство (8.8). □

Лемма 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда справедливо неравенство*

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t) \leqslant ||v(t)||_H^2 - \frac{3}{4}||\xi_0(t)||_H^2 + 2\sum_{k=1}^{2} ||Q_k||^2 M_k(0) ||\xi_k(t)||_{\Omega_k}^2. \quad (8.12)$$

Доказательство. Утверждение вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\frac{d}{dt}\Phi_2(t) = \frac{d}{dt}\left\langle A_0^{-1/2} v(t), \xi_0(t) \right\rangle_H = \left\langle A_0^{-1/2} \frac{d}{dt} v(t), \xi_0(t) \right\rangle_H + \left\langle A_0^{-1/2} v(t), \frac{d}{dt}\xi_0(t) \right\rangle_H =$$

$$= -||\xi_0(t)||_H^2 - \sum_{k=1}^{2} \left\langle \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} Q_k^* \xi_k(t,\tau) d\mu_k(\tau), \xi_0(t) \right\rangle_H + \left\langle A_0^{-1/2} v(t), A_0^{1/2} v(t) \right\rangle_H \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - ||\xi_0(t)||_H^2 + ||\xi_0(t)||_H \sum_{k=1}^{2} \|Q_k\| \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \|\xi_k(t,\tau)\|_H d\mu_k(\tau) \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - ||\xi_0(t)||_H^2 + 2\frac{||\xi_0(t)||_H}{2} \sum_{k=1}^{2} ||Q_k|| \sqrt{M_k(0)} \|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k} \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - ||\xi_0(t)||_H^2 + \frac{||\xi_0(t)||_H^2}{4} + \left(\sum_{k=1}^{2} ||Q_k|| \sqrt{M_k(0)} \|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k} \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant ||v(t)||_H^2 - \frac{3}{4}||\xi_0(t)||_H^2 + 2\sum_{k=1}^{2} ||Q_k||^2 M_k(0) \, \|\xi_k(t,\tau)\|_{\Omega_k}^2.$$

□

Определим вектор-функцию

$$\Phi(t) := \frac{3}{M(\beta)}\Phi_1(t) + \Phi_2(t),$$

для которой, согласно леммам 8.1 и 8.2, справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = \frac{3}{M(\beta)}\frac{d}{dt}\Phi_1(t) + \frac{d}{dt}\Phi_2(t) \leqslant \frac{||\xi_0||_H^2}{4} - \frac{3||v||_H^2}{2} + \sum_{k=1}^{2} \frac{3}{M(\beta)} \tilde{c}_k ||\xi_k||_{\Omega_k}^2 -$$

$$-\frac{3}{4}||\xi_0(t)||_H^2 + ||v(t)||_H^2 + 2\sum_{k=1}^{2} M_k(0)||Q_k||^2||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}||\xi_0(t)||_H^2 - \frac{1}{2}||v(t)||_H^2 + \sum_{k=1}^{2}\left(\frac{3}{M(\beta)}\tilde{c}_k + 2M_k(0)||Q_k||^2\right)||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2. \quad (8.13)$$

Введем обозначение

$$c_k := \frac{3}{M(\beta)}\tilde{c}_k + 2M_k(0)||Q_k||^2 =$$

$$= \frac{3}{M(\beta)}\left[(3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1})\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + M_k(0)\|Q_k\|^2\right] + 2M_k(0)||Q_k||^2 =$$

$$= \frac{3}{M(\beta)}\left[(3 + M_k(\beta) + (2\lambda_0)^{-1})\left\|Q_k^{-1}\right\|^2 + M_k(0)\|Q_k\|^2\right] + 2M_k(0)||Q_k||^2. \quad (8.14)$$

Из неравенства (8.13), в свою очередь, вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) + E(t) \leqslant \sum_{k=1}^{2}\left(c_k + \frac{1}{2}\right)||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 \leqslant \gamma_1\sum_{k=1}^{2}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2, \quad (8.15)$$

где $\gamma_1 := \max\limits_{k=1,2}\left(c_k + \frac{1}{2}\right)$, вектор-функция $E(t)$ определена формулой (8.3). Из утверждения 8.1 получаем оценку

$$|\Phi(t)| \leqslant \frac{3}{M(\beta)}|\Phi_1(t)| + |\Phi_2(t)| \leqslant \gamma_2 E(t), \quad (8.16)$$

где

$$\gamma_2 := \left[\frac{3}{M(\beta)}\max\left\{1,\ 2\cdot\max_k\left\{\frac{1}{\lambda_0}||Q_k^{-1}||^2 M_k(\beta)\right\}\right\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right].$$

Положим

$$\varepsilon := \min\left\{\frac{\gamma}{2\gamma_1}; \frac{1}{2\gamma_2}\right\}$$

и рассмотрим вектор-функцию $\Psi(t) := E(t) + \varepsilon\Phi(t)$.

Утверждение 8.2. *В принятых обозначениях справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}E(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant \frac{3}{2}E(t). \quad (8.17)$$

Доказательство.

1. Пусть $\varepsilon = \frac{\gamma}{2\gamma_1}$, тогда $\frac{\gamma}{2\gamma_1} \leqslant \frac{1}{2\gamma_2}$, и, следовательно, согласно неравенству (8.16) имеем

$$\frac{1}{2}E(t) = E(t) - \frac{1}{2\gamma_2}\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) - \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\Phi(t) =$$

$$= \Psi(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant E(t) + \frac{1}{2\gamma_2}\gamma_2 E(t) = \frac{3}{2}E(t)$$

2. Пусть $\varepsilon = \frac{1}{2\gamma_2}$. Тогда согласно неравенству (8.16) имеем

$$\frac{1}{2}E(t) = E(t) - \varepsilon\gamma_2 E(t) \leqslant \Psi(t) \leqslant E(t) + \varepsilon\gamma_2 E(t) = \frac{3}{2}E(t).$$

□

В свою очередь, из неравенств (8.4) и (8.16) вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = \frac{d}{dt}E(t) + \varepsilon\frac{d}{dt}\Phi(t) \leqslant -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 + \varepsilon\left(\gamma_1\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||_{\Omega_k}^2 - E(t)\right).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+\varepsilon E(t)\leqslant -\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}+\varepsilon\gamma_1\sum_{k=1}^{N}||\xi_k(t,\tau)||^2_{\Omega_k}. \tag{8.18}$$

Рассмотрим два случая:

1. Если $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$, то согласно (8.18) получим

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+\varepsilon E(t)\leqslant 0. \tag{8.19}$$

2. Если же $\varepsilon=\dfrac{1}{2\gamma_2}$, то $\dfrac{1}{2\gamma_2}\leqslant\dfrac{\gamma}{2\gamma_1}$, и, следовательно, согласно (8.18) будем иметь (8.19).

В соответствии с утверждением 8.2, получаем неравенство

$$\varepsilon E(t)\geqslant\frac{2}{3}\varepsilon\Psi(t). \tag{8.20}$$

Полагая $\omega=\dfrac{\varepsilon}{3}$, из неравенств (8.19) и (8.20) получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)+2\omega\Psi(t)\leqslant 0. \tag{8.21}$$

Из утверждения 5.2 следует, что функция $\Psi(t)>0$ непрерывна на при $t\geqslant 0$ и дифференцируема при $t>0$. Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы Гронуолла—Беллмана (см. [1, с. 46]), получаем

$$\int_0^t\frac{d\Psi(s)}{\Psi(s)}+2\omega t\leqslant 0. \tag{8.22}$$

Из неравенства (8.22) получаем

$$\Psi(t)\leqslant\Psi(0)e^{-2\omega t}. \tag{8.23}$$

Окончательно, учитывая утверждение 5.2 и неравенство (8.23), получаем неравенство (5.3):

$$\|S(t)z\|^2_{\mathbb{H}}=2E(t)\leqslant 4\Psi(t)\leqslant 4\Psi(0)e^{-2\omega t}\leqslant 6E(0)e^{-2\omega t}=3\,\|z\|^2_{\mathbb{H}}\,e^{-2\omega t}.$$

Теорема 5.1 доказана.

9. Доказательство теоремы 7.1

Перед тем как перейти к доказательству теоремы 7.1, сформулируем и докажем следующее предложение.

Предложение 9.1. *Пусть $\tilde H_k$ $(k=1,2)$ — гильбертовы пространства. Предположим, что $A_{11}^{-1}\in L(\tilde H_1)$, $A_{22}^{-1}\in L(\tilde H_2)$, $A_{12}\in L(\tilde H_2,\tilde H_1)$, $A_{21}\in L(\tilde H_1,\tilde H_2)$, $D_1:=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$, $D_1^{-1}\in L(\tilde H_1)$, и рассмотрим линейный оператор*

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix},$$

определенный в пространстве $\tilde H_1\oplus\tilde H_2$. Тогда оператор $\mathcal{A}^{-1}\in L\left(\tilde H_1\oplus\tilde H_2\right)$.

Доказательство. Если выполнены условия предложения 9.1, то легко проверить, что справедливо представление (факторизация типа Шура—Фробениуса, см. [6])

$$\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\left[\begin{pmatrix}I&A_{12}A_{22}^{-1}\\0&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_1&0\\0&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\A_{22}^{-1}A_{21}&I\end{pmatrix}\right]^{-1}=$$
$$=\begin{pmatrix}D_1^{-1}&-D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\\-A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1}&A_{22}^{-1}\left[I+A_{21}D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}\right]\end{pmatrix}\in L\left(\tilde H_1\oplus\tilde H_2\right). \tag{9.1}$$

Это и доказывает предложение. □

Доказательство теоремы 7.1. Оператор $\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}$ представим в виде следующего произведения:

$$\mathbb{A}-\lambda\mathbb{I}=\begin{pmatrix} -\lambda I & -A_0^{1/2} & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_1^* & -A_0^{1/2}\mathbb{B}_2^* \\ A_0^{1/2} & -\lambda I & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 A_0^{1/2} & 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0 \\ \mathbb{B}_2 A_0^{1/2} & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\lambda A_0^{-1} & -I & -\mathbb{B}_1^* & -\mathbb{B}_2^* \\ I & -\lambda I & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_1 & 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0 \\ \mathbb{B}_2 & 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}=$$

$$=: \mathbb{A}_0\mathbb{A}_1(\lambda)\mathbb{A}_0, \quad (9.2)$$

где $\mathbb{A}_0$ — обратимый оператор в пространстве $\mathbb{H}$, т. е. $\mathbb{A}_0^{-1}\in L(\mathbb{H})$. Применяя обозначения предложения 9.1 к оператор-функции $\mathbb{A}_1(\lambda)$, имеем $\tilde{H}_1=H$, $\mathbb{H}=\tilde{H}_1\oplus\tilde{H}_2=H\oplus\mathbb{H}_0$, где $\mathbb{H}_0:=H\oplus\left(\bigoplus\limits_{k=1}^{2}\Omega_k\right)$, $A_{11}=-\lambda A_0^{-1}$, $A_{12}=(-I,-\mathbb{B}_1^*,-\mathbb{B}_2^*)$, $A_{21}=(I,\mathbb{B}_1,\mathbb{B}_2)^T$, $D_1=:M(\lambda)=-\lambda A_0^{-1}-\lambda^{-1}I-\sum\limits_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*(\mathbb{T}_k+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_k$,

$$A_{22}=\begin{pmatrix} -\lambda I & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{T}_1-\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{T}_2-\lambda I \end{pmatrix}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3 из работы [22], можно показать, что введенные операторы удовлетворяют условиям предложения 9.1 для всех λ, т. е. $\lambda\neq 0$, $\lambda\notin\sigma(M(\lambda))$, $\lambda\notin\sigma(\mathbb{T}_k+\lambda I)$, $k=1,2$, и оператор-функция $\mathbb{A}_1(\lambda)$ допускает представление

$$\mathbb{A}_1(\lambda)=\begin{pmatrix} I & \lambda^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1} & \mathbb{B}_1^*(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1} \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} M(\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mathbb{T}_1+\lambda I) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\mathbb{T}_2+\lambda I) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^{-1} & I & 0 & 0 \\ -(\mathbb{T}_1+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1 & 0 & I & 0 \\ -(\mathbb{T}_2+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_1 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

где оператор-функция $M(\lambda)$ выражается через символ $L(\lambda)$ уравнения (2.1) следующим образом:

$$M(\lambda):=-\lambda A_0^{-1}-\lambda^{-1}I-\sum_{k=1}^{2}\mathbb{B}_k^*(\mathbb{T}_k+\lambda I)^{-1}\mathbb{B}_k=-\lambda^{-1}A_0^{-1/2}L(\lambda)A_0^{-1/2},$$

а $L(\lambda)$ определяется формулой (7.1). Таким образом, $\sigma(M(\lambda))=\sigma(L(\lambda))$, кроме того, $\sigma(\mathbb{T}_k)=\operatorname{supp}\mu_k$, $k=1,2$. Следовательно, согласно представлению (9.3), $\sigma(\mathbb{A})=\sigma(L)\cup\{0\}\cup\operatorname{supp}\mu_1\cup\operatorname{supp}\mu_2$. Кроме того, $\sigma(L(\lambda))=\sigma(M(\lambda))\in\{\lambda\in\mathbb{C}|\operatorname{Re}\lambda<0\}$, $L^*(\lambda)=L(\bar{\lambda})$ для любого $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$, следовательно, невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси и совпадает с невещественной частью спектра оператора $\mathbb{A}$. □

10. Пример

Рассмотрим ядра интегральных операторов следующего вида:

$$K_1(t)=\sum_{j=1}^{N}a_j\mathit{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t), \quad K_2(t)=\sum_{j=1}^{N}b_j\mathit{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,t)$$

где $0 < \alpha < 1$, $c_j > 0$, $\beta_j > 0$, $j = 1, \ldots, N$,

$$Э_{\alpha-1}(-\beta_j, t) := t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad j = 1, \ldots, N$$

— функции Работнова (см. [9]), $\Gamma(\cdot)$ — гамма функции Эйлера.

Рассмотрим преобразование Лапласа функции $Э_{\alpha-1}(-\beta_i, t)$:

$$\hat{Э}_{\alpha-1}(-\beta_i, t) = \frac{1}{\lambda^\alpha + \beta_i},$$

где λ^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ — главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси: $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha \arg \lambda}$, $-\pi < \arg \lambda < \pi$. Применяя обратное преобразование Лапласа к главной ветви многозначной функции $\hat{Э}_{\alpha-1}(-\beta_i, t)$, получаем следующее интегральное представление (см. [9]):

$$Э_{\alpha-1}(-\beta_j, t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda^\alpha + \beta_j} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t\tau} d\tau}{\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha}}.$$

Положим

$$d\mu_1(\tau) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha}} \right) d\tau,$$

$$d\mu_2(\tau) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha}} \right) d\tau.$$

Тогда

$$M_1(t) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_0^{+\infty} \frac{a_j e^{-t\tau} d\tau}{\tau(\tau^\alpha + 2\beta_j \cos \pi\alpha + \beta_j^2 \tau^{-\alpha})} = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(\frac{1}{\beta_j} - \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda(\lambda^\alpha + \beta_j)} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{a_j}{\beta_j} - a_j \int_0^t Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s) ds \right) = \sum_{j=1}^{N} a_j \int_t^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s) ds,$$

$$M_2(t) = \sum_{j=1}^{N} b_j \int_t^{+\infty} Э_{\alpha-1}(-\beta_j, s) ds,$$

а условия (2.4) примут вид

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j}{\beta_j} < 1, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{b_j}{\beta_j} < 1.$$

Введем новые переменные

$$v(t) := u'(t), \quad \xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t),$$

$$\xi_j(t, \tau) = \int_0^t \frac{e^{-(t-s)\tau}}{\sqrt{\tau}} Q_j A_0^{1/2} \frac{du(s)}{ds} ds, \quad t > 0, \quad \tau > 0, \quad j = 1, 2.$$

Тогда задача (2.1), (2.2) формально может быть приведена к следующей начальной задаче для системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{dv(t)}{dt} + A_0^{1/2}\left[\xi_0(t) + \dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\sum\limits_{j=1}^{N}\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{(a_jQ_1^*\xi_1(t,\tau) + b_jQ_2^*\xi_2(t,\tau))\,d\tau}{\sqrt{\tau}(\tau^\alpha + 2\beta_k\cos\pi\alpha + \beta_k^2\tau^{-\alpha})}\right] = f_1(t), \\ \dfrac{d\xi_0(t)}{dt} = A_0^{1/2}v(t), \\ \dfrac{d\xi_1(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_1A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_1(t,\tau), \\ \dfrac{d\xi_2(t,\tau)}{dt} = \dfrac{1}{\sqrt{\tau}}Q_2A_0^{1/2}v(t) - \tau\xi_2(t,\tau), \end{cases}$$

где $t > 0$, $\tau > 0$,

$$v(t)|_{t=0} = \varphi_1, \quad \xi_0(t)|_{t=0} = A_0^{1/2}\varphi_0, \quad \xi_k(t,\tau)|_{t=0} = 0, \quad k = 1, 2,$$

$$f_1(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{N}\left(\left(\int\limits_t^{+\infty}\text{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j, s)ds\right)(a_jA + b_jB)\varphi_0\right).$$

Оценка (6.3) принимает следующий вид:

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\left\|u'(t)\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\left\|Z(t)\right\|_{\mathbb{H}}^2 \leqslant d\left[\left(\|\varphi_1\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2\right)e^{-2\omega t} + \right.$$
$$\left. + \left(\int\limits_0^t e^{-\omega(t-s)}\left\|f(s) - \sum_{j=1}^{N}\left(\int\limits_s^{+\infty}\text{Э}_{\alpha-1}(-\beta_j,\tau)d\tau\right)(a_jA + b_jB)\varphi_0\right\|_H ds\right)^2\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954.
2. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
3. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
7. *Локшин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. — М.: МГУ, 1982.
8. *Лыков А. В.* Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса// В сб.: «Проблемы тепло- и массопереноса». — Минск: Наука и техника, 1976. — С. 9–82.
9. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
10. *Санчес Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
11. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. — М.: Наука, 1974.
12. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M.* Thermodynamics of materials with memory. Theory and applications. — New-York—Dordrecht—Heidelberg—London: Springer, 2012.
13. *Christensen R. M.* Theory of viscoelasticity. An introduction. — New York—London: Academic Press, 1971.
14. *Dafermos C. M.* Asymptotic stability in viscoelasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — *37*. — С. 297–308.
15. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroup for linear evolution equations. — New York: Springer, 1999.
16. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations// SIAM J. Math. Anal. — 2011. — *43*. — С. 2296–2306.
17. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* General theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31*. — С. 113–126.
18. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel: Birkhäuser, 2003.

19. *Miller R. K.* An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. — 1978. — *66.* — С. 313–332.
20. *Munoz Rivera J. E., Naso M. G., Vegni F. M.* Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — *286.* — С. 692–704.
21. *Pata V.* Stability and exponential stability in linear viscoelasticity // Milan J. Math. — 2009. — *77.* — С. 333–360.
22. *Rautian N. A.* Semigroups generated by Volterra integro-differential equations// Differ. Equ. — 2020. — *56*, № 9. — С. 1193–1211.
23. *Tretter C.* Spectral theory of block operator matrices and applications. — Imperial College Press: London, 2008.
24. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2019. — *239*, № 5. — С. 771–787.
25. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* On Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals// Differ. Equ. — 2021. — *57*, № 4. — С. 517–532.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-507-525 UDC 517.968.72

Semigroups of Operators Generated by Integro-Differential Equations with Kernels Representable by Stieltjes Integrals

© 2021 **V. V. Vlasov, N. A. Rautian**

Abstract. Abstract Volterra integro-differential equations with kernels of integral operators representable by Stieltjes integrals are investigated. The presented results are based on the approach related to the study of one-parameter semigroups for linear evolution equations. We present the method of reduction of the original initial-value problem for a model integro-differential equation with operator coefficients in a Hilbert space to the Cauchy problem for a first-order differential equation in an extended function space. The existence of the contractive C_0-semigroup is proved. An estimate for the exponential decay of the semigroup is obtained.

REFERENCES

1. R. Bellman, *Teoriya ustoychivosti resheniy differentsial'nykh uravneniy* [Stability Theory of Differential Equations], IL, Moscow, 1954 (Russian translation).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
3. A. A. Il'yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).

4. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
5. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
6. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. A. A. Lokshin and Yu. V. Suvorova, *Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyat'yu* [Mathematical Theory of Wave Propagation in Media With Memory], MGU, Moscow, 1982 (in Russian).
8. A. V. Lykov, "Nekotorye problemnye voprosy teorii teplomassoperenosa" [Some problematic issues of the theory of heat and mass transfer], In: *Problemy teplo- i massoperenosa* [Heat and Mass Transfer Problems], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976, pp. 9–82 (in Russian).
9. Yu. N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Hereditary Rigid Body Mechanics], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
10. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
11. V. I. Smirnov, *Kurs vysshey matematiki. T. 5* [Higher Mathematics Course. Vol. 5], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
12. G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, Springer, New-York—Dordrecht—Heidelberg—London, 2012.
13. R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*, Academic Press, New York–London, 1971.
14. C. M. Dafermos, "Asymptotic stability in viscoelasticity," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308.
15. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 1999.
16. A. Eremenko and S. Ivanov, "Spectra of the Gurtin–Pipkin type equations," *SIAM J. Math. Anal.*, 2011, **43**, 2296–2306.
17. M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, "General theory of heat conduction with finite wave speed," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
18. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel, 2003.
19. R. K. Miller, "An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory," *J. Math. Anal.*, 1978, **66**, 313–332.
20. J. E. Munoz Rivera, M. G. Naso, and F. M. Vegni, "Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory," *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **286**, 692–704.
21. V. Pata, "Stability and exponential stability in linear viscoelasticity," *Milan J. Math.*, 2009, **77**, 333–360.
22. N. A. Rautian, "Semigroups generated by Volterra integro-differential equations," *Differ. Equ.*, 2020, **56**, No. 9, 1193–1211.
23. C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, London, Imperial College Press, 2008.
24. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2019, **239**, No. 5, 771–787.
25. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "On Volterra integro-differential equations with kernels representable by Stieltjes integrals," *Differ. Equ.*, 2021, **57**, No. 4, 517–532.

V. V. Vlasov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru

N. A. Rautian
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru