Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 483–506
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-483-506 УДК 517.929 + 517.968.7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМИ ОПЕРАТОРАМИ РЕШЕНИЙ НА ОТКРЫТЫХ ОБЛАСТЯХ В $C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ И ПРОЦЕССЫ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

© 2021 г. **Х.-О. ВАЛЬТЕР**

Аннотация. Для автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием $x'(t) = f(x_t)$ мы строим непрерывный полупоток непрерывно дифференцируемых операторов решений $x_0 \mapsto x_t$, $t \geqslant 0$ на открытых множествах пространства Фреше $C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$. Для неавтономных уравнений это дает непрерывный процесс дифференцируемых операторов решения. В качестве приложения мы получаем процессы, которые включают все решения интегродифференциальных уравнений Вольтерра $x'(t) = \int\limits_0^t k(t,s)h(x(s))ds$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В этой статье мы рассматриваем начальную задачу

$$x'(t) = f(x_t), \tag{1.1}$$
$$x_0 = \phi \in U \tag{1.2}$$

для непрерывно дифференцируемого отображения $f : U \to \mathbb{R}^n$ на открытом подмножестве U пространства Фреше $C = C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$ непрерывных отображений $(-\infty,0] \to \mathbb{R}^n$ с топологией локально равномерной сходимости. Решение уравнения (1.1) на интервале $I \subset \mathbb{R}$ является таким непрерывным отображением $x : (-\infty,0]+I \to \mathbb{R}^n$, что все сегменты $x_t : (-\infty,0] \ni s \mapsto x(t+s) \in \mathbb{R}^n$,

$t \in I$ принадлежат U, а $x|_I$ дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (1.1) для всех $t \in I$. Решение начальной задачи (1.1)-(1.2) является решением на некотором интервале $I = [0, t_x)$, $0 < t_x \leqslant \infty$, которое удовлетворяет $x_0 = \phi$. Уравнение (1.1) обобщает известные автономные дифференциальные уравнения с запаздыванием или функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием (см. $[2, 3]$), где U — подмножество банахова пространства $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $r > 0$, и охватывает примеры с неограниченным запаздыванием, включая случаи переменного запаздывания, зависящего от неизвестной функции. В части I (разделы 2–5) ниже мы покажем, что начальная задача (1.1)-(1.2) корректна и максимальные решения $x = x^\phi$ определяют непрерывный полупоток Σ на U равенством

$$\Sigma(t, \phi) = x_t^\phi,$$

где все операторы решения $\Sigma(t, \cdot)$ непрерывно дифференцируемы и их производные определяются как решения вариационных уравнений.

В части II (разделы 6-7) мы рассматриваем неавтономные уравнения

$$x'(t) = g(t, x_t), \tag{1.3}$$

где $g : \mathbb{R} \times C \supset V \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема. В разделе 6 результаты части I дают непрерывный процесс непрерывно дифференцируемых операторов решения.

Среди приложений распространены интегродифференциальные уравнения Вольтерра

$$x'(t) = \int_0^t k(t, s) h(x(s)) ds, \quad t > 0, \tag{1.4}$$

где $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n \times n}$, а $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируема. Уравнение (1.4) может быть рассмотрено как неавтономное дифференциальное уравнение с неограниченным максимальным запаздыванием, зависящим от времени $d(t) = t$ в момент времени $t > 0$, так как $x'(t)$ зависит от значений x при $t - t = 0 < s < t$ [6]. В разделе 7 мы ищем такое непрерывно дифференцируемое отображение $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$, чтобы решения уравнения (1.4) также являлись решениями уравнения (1.3), которое, в свою очередь, описывает процесс объединения всех решений интегро-дифференциального уравнения Вольтерра.

Построение полупотока Σ, связанного с уравнением (1.1), является упрощенной версией конструкции из [14]. Оно проводится известным образом через интегральное уравнение для решений начальной задачи (1.1)-(1.2) с начальными данными в виде параметров. Однако, используя пространство Фреше C как пространство состояний, необходимо действовать аккуратно. Для этого мы вводим понятие непрерывной дифференцируемости. Результат будет представлен в двух вариантах, соответственно, в смысле непрерывной дифференцируемости (1) по Микалю и Бастиани и (2) в смысле Фреше. Вкратце опишем C^1_{MB}-гладкость в случае (1) и C^1_F-гладкость в случае (2). Для непрерывного отображения $f : V \supset U \to W$, где V и W — топологические векторные пространства, $U \subset V$ открыто, C^1_{MB}-гладкость означает, что существуют все производные по направлениям

$$Df(u)v = \lim_{0 \neq t \to 0} \frac{1}{t}(f(u + tv) - f(u))$$

и что отображение

$$U \times V \ni (u, v) \mapsto Df(u)v \in W$$

непрерывно. Под C^1_F-гладкостью будем понимать существование всех производных по направлению, а также что всякое отображение $Df(u) : V \to W$, $u \in U$ линейно и непрерывно, и что отображение $Df : U \ni u \mapsto Df(u) \in L_c(V, W)$ непрерывно в силу топологии β равномерной сходимости на ограниченных множествах векторного пространства $L_c(V, W)$ непрерывных линейных отображений $V \to W$.

В случае банахового пространства C^1_F-гладкость эквивалентна известной непрерывной дифференцируемости, основанной на производных по Фреше, а для конечномерных пространств C^1_F-гладкость и C^1_{MB}-гладкость, естественно, эквивалентны. В общем случае C^1_F-гладкость является более сильным свойством. Подробнее о C^1_{MB}-гладких, но C^1_F-негладких отображений см., например, [16].

Мотивация для получения результатов в обоих случаях заключается в том, что при работе с исчислением в топологических векторных пространствах C^1_{MB}-гладкость кажется довольно распространенной, тогда как в нашем приложении к интегродифференциальному уравнению Вольтерра мы получаем соответствующее уравнение (1.3) с отображением g, которое на самом деле C^1_F-гладкое.

Автономные уравнения вида (1.1), которые получаются из интегродифференциальных уравнений Вольтерра (1.4), как и выше, через уравнение вида (1.3), являются дифференциальными уравнениями с неограниченным запаздыванием, зависящим от неизвестной функции, которые частично «хорошие», в отличие от примеров дискретного запаздывания, как

$$x'(t) = F(x(t-d)), \quad d = d(x(t)),$$

где F и $d : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ непрерывно дифференцируемы. В последнем случае непрерывно дифференцируемые операторы решения существуют на многообразии пространства Фреше $C^1 = C^1((-\infty, 0], \mathbb{R})$ непрерывно дифференцируемых отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, наделенном топологией локально-равномерной сходимости отображений и их производных [14, 17]. Этот случай схож со случаем ограниченного запаздывания, когда уравнения с дискретным запаздыванием, зависящим от неизвестной функции, определяют непрерывно дифференцируемый оператор решения на многообразиях банаховых пространств $C^1([-r, 0, \mathbb{R}^n)$, $r > 0$, в то время как другие уравнения, особенно с ограниченным распределенным запаздыванием, зависящим от неизвестной функции, определяют хорошие операторы решения на открытых подмножествах пространства состояний $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $r > 0$, которые известны из уравнений с постоянным запаздыванием (см. примеры в [7]).

Детали аппарата анализа, основанного на C^1_{MB}-гладкости, можно найти в [4, разделы I.1–I.4]. После дополнительного раздела 8 мы приводим простые дополнительные факты о C^1_F-гладкости. Доказательства приведены в [17].

Необходимо предупредить читателя, что гипотезы о непрерывной дифференцируемости являются ограничивающими, возможно, удивительным образом: из C^1_{MB}-гладкости отображения $f : C \supset U \to \mathbb{R}^n$ следует, что f имеет *локально ограниченное запаздывание* в следующем смысле:

(lbd) *Для любого $\phi \in U$ существует окрестность $N \subset U$ ϕ, $d > 0$, такая, что для любых χ, ψ из N таких, что*

$$\chi(t) = \psi(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [-d, 0],$$

имеем $f(\chi) = f(\psi)$.

Это утверждение можно доказать аналогично [14, утверждение 1.1].

Приведем также очевидное преимущество пространств Фреше C по сравнению с банаховыми пространствами непрерывных функций $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$, которые использовались как пространства состояний (см. [5, 8, 11, 13]): пространство C не исключает отрезки решений в силу роста или условий интегрируемости на $-\infty$. Напомним, что линейное автономное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием в общем случае может иметь решения с произвольно быстрым экспоненциальным ростом на $-\infty$.

Подробнее о дифференциальных уравнениях с запаздыванием с областями решения в пространствах Фреше отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$ см. [11, 12].

Обозначения и предварительные соображения. Через $\mathbb{R}^{n\times n}$ обозначим векторное пространство $n \times n$-матриц с вещественными элементами. Основные свойства топологических векторных пространств можно найти в [10]. Произведения топологических векторных пространств всегда снабжены топологией произведения. Для равномерной непрерывности нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 1.1 (см. [17, утверждение 2.1]). *Пусть T — топологическое пространство, W — топологическое векторное пространство, M — метрическое пространство с метрикой d, $g : T \times M \supset U \to W$ непрерывно, $U \supset \{t\} \times K$, $K \subset M$ компактно. Тогда g равномерно непрерывно на $\{t\} \times K$ в следующем смысле*: *для всякой окрестности N точки 0 из W найдутся окрестность T_N точки t в T и $\epsilon > 0$ такие, что для всех $t' \in T_N$, всех $\hat{t} \in T_N$, всех $k \in K$, и всех $m \in M$ таких, что*

$$d(m, k) < \epsilon \quad \textit{and} \quad (t', k) \in U, \quad (\hat{t}, m) \in U$$

справедливо

$$g(t', k) - g(\hat{t}, m) \in N.$$

Векторное пространство непрерывных линейных отображений $V \to W$ между топологическими векторными пространствами обозначим через $L_c(V, W)$. Множества

$$U_{N,B} = \{A \in L_c(V, W) : AB \subset N\},$$

где N — окрестность точки 0 в W, а $B \subset V$ ограничено, образуют локальную базу в $0 \in L_c(V, W)$ в топологии β равномерной сходимости на ограниченных множествах.

Пространство Фреше F — локально-выпуклое топологическое векторное пространство, полное и метризуемое. Топология на нем задается системой полунорм $|\cdot|_j$, $j \in \mathbb{N}$, которые являются разделяющими в том смысле, что если $|v|_j = 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$, то $v = 0$. Множества

$$N_{j,k} = \left\{v \in F : |v|_j < \frac{1}{k}\right\}, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad k \in \mathbb{N},$$

образуют локальную базу в нуле. Если последовательность полунорм возрастает, то множества

$$N_j = \left\{v \in F : |v|_j < \frac{1}{j}\right\}, \quad j \in \mathbb{N},$$

образуют локальную базу в нуле.

Произведения пространств Фреше, замкнутые подпространства пространств Фреше, а также банаховы пространства — являются пространствами Фреше.

Для некоторой кривой и непрерывного отображения c интервала $I \subset \mathbb{R}$ положительной длины в пространство Фреше F определим *касательный вектор* $t \in I$ формулой

$$c'(t) = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{1}{h}(c(t+h) - c(t)),$$

если этот предел существует. Согласно [4, глава I], назовем кривую *непрерывно дифференцируемой* если в каждой ее точке существует касательный вектор, а отображение

$$c' : I \ni t \mapsto c'(t) \in F$$

непрерывно.

Для непрерывного отображения $f : V \supset U \to F$, где V и F — пространства Фреше, а $U \subset V$ открыто, при $u \in U, v \in V$ *производную по направлению* определим формулой

$$Df(u)v = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{1}{h}(f(u + hv) - f(u)),$$

если этот предел существует. Если для $u \in U$ все производные по направлению $Df(u)v$, $v \in V$ существуют, то отображение $Df(u) : V \ni v \mapsto Df(u)v \in F$ называется *производной функции* f в точке u.

Для непрерывного отображения $f : U \to F$, где V, W, F — пространства Фреше, $U \subset V \times W$ открыто, определим стандартным способом *частные производные*. Например, $D_1 f(v, w) : V \to F$ определяется формулой

$$D_1 f(v, w)\hat{v} = \lim_{0 \neq h \to 0} \frac{1}{h}(f(v + h\hat{v}, w) - f(v, w)).$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими пространствами Фреше: для $n \in \mathbb{N}$ и $T \geqslant 0$, $C_T = C((-\infty, T], \mathbb{R}^n)$ обозначает пространство Фреше непрерывных отображений $(-\infty, T] \to \mathbb{R}^n$ с полунормами, определенными формулами

$$|\phi|_{T,j} = \max_{T-j \leqslant t \leqslant T} |\phi(t)|, \quad \phi \in C_T \quad \text{и} \quad j \in \mathbb{N},$$

которые образуют топологию локально равномерной сходимости. Аналогично рассмотрим пространство $C_\infty = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, в котором

$$|\phi|_{\infty,j} = \max_{-j \leqslant t \leqslant j} |\phi(t)|.$$

В случае, если $T = 0$, используем обозначение $C = C_0$, $|\cdot|_j = |\cdot|_{0,j}$. В разделе 7, посвященном интегродифференциальным уравнениям Вольтерра, нам потребуется пространство Фреше C^1_∞

непрерывно дифференцируемых отображений $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с полунормами, определенными формулой $|\phi|_{\infty,1,j} = |\phi|_{\infty,j} + |\phi'|_{\infty,j}$. Пространство C^1 является аналогичным пространством непрерывно дифференцируемых отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$.

В дальнейшем нам потребуются следующие банаховы пространства: при $n \in \mathbb{N}$ и $T > 0$ C_{0T} обозначает банахово пространство непрерывных отображений $[0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$|\phi| = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} |\phi(t)|,$$

где $C_{0T,0}$ — замкнутое подпространство всех $\phi \in C_{0T}$ таких, что $\phi(0) = 0$.

Оценочные отображения

$$E_T : C_T \times (-\infty, T] \to C \quad \text{и} \quad E_\infty : C_\infty \times \mathbb{R} \to C,$$

заданные по формуле $(\phi, t) \mapsto \phi_t$, непрерывны (см. [14, утверждение 3.1]) и линейны по первому аргументу. Отображение

$$Ev_{\infty,1} : C^1_\infty \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad Ev_{\infty,1}(\phi, t) = \phi(t),$$

является C^1_F-гладким вместе с

$$DEv_{\infty,1}(\phi, t)(\hat{\phi}, t_*) = \hat{\phi}(t) + t_* \phi'(t)$$

как композиция отображения E^{10}_∞ из утверждения 8.8 (см. [17, утверждение 10.1 (iii)]), являющегося C^1_F-гладким, с отображением $C \ni \phi \mapsto \phi(0) \in \mathbb{R}^n$, которое является линейным и непрерывным. Формула производной также следует из утверждения 8.8 ([17, утверждение 10.1 (iii)]).

Для $0 \leqslant S < T \leqslant \infty$ отображение продолжения $P_{ST} : C_S \to C_T$, которое задается формулой $(P_{ST}\phi)(t) = \phi(t)$ при $t \leqslant S$ и $(P_{ST}\phi)(t) = \phi(S)$ при $t > S$, предполагается линейным и непрерывным. То же самое выполнено для $Z_T : C_{0T,0} \to C_T$, которое задается формулой

$$(Z_T\phi)(t) = \phi(t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (Z_T\phi)(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant 0.$$

Отображения

$$I_T : C_{0T} \to C_{0T,0}, \quad (I_T\phi)(t) = \int\limits_0^t \phi(s)ds,$$

и

$$J_T : C_{0T,0} \times C \ni (\chi, \phi) \mapsto P_{0T}\phi + Z_T\chi \in C_T$$

предполагаются линейными и непрерывными.

Переформулируем начальную задачу (1.1)-(1.2) как задачу о неподвижной точке следующим образом: предположим, что x — решение уравнения (1.1) на $[0,T]$ для некоторого $T > 0$, причем $x_0 = \phi \in U$. Тогда $[0,T] \ni s \to x_s \in C$ непрерывно (используем $x_s = E_T(x,s)$) и

$$x(t) - \phi(0) = \int\limits_0^t f(x_s)ds \quad \text{для всех} \quad t \in [0,T].$$

Определим $\eta \in C_{0T,0}$ по формуле $\eta(t) = x(t) - \phi(0)$. Тогда

$$x_{|(-\infty,T]} = Z_T\eta + P_{0T}\phi,$$

и

$$\eta(t) = \int\limits_0^t f((Z_T\eta)_s + (P_{0T}\phi)_s)ds \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.5}$$

что является уравнением неподвижной точки для $\eta \in C_{0T,0}$ с параметром $\phi \in U \subset C$.

Часть I

В следующих разделах 2–5 мы рассмотрим открытое множество $U \subset C$ и отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$, являющееся C^1_*-гладким, где $* = MB$ или $* = F$.

2. Оператор подстановки

Пусть в этом разделе $T > 0$. Положим

$$\mathrm{dom}_T = \{\xi \in C_T : \xi_t \in U \text{ для всех } t \in [0,T]\}$$

и пусть $F_T : C_T \supset \mathrm{dom}_T \to C_{0T}$ задается формулой

$$F_T(\xi)(t) = f(\xi_t) \qquad (= f(E_T(\xi,t))).$$

Утверждение 2.1. dom_T *открыто, а* F_T *непрерывно.*

Доказательство.

1. (Открытость.) Пусть $\phi \in \mathrm{dom}_T$. В силу непрерывности E_T для любого $t \in [0,T]$ существуют открытые окрестности N_t точки ϕ в C_T и V_t точки t в $\mathbb{R}$, такие что $\psi_s = E_T(\psi,s) \in U$ для любого $\psi \in N_t$, $s \in V_t \cap [0,T]$. В силу компактности существует конечное подмножество $\tau \subset [0,T]$ такое, что $[0,T] \subset \bigcup_{t\in\tau} V_t$. Тогда $\bigcap_{t\in\tau} N_t$ является окрестностью ϕ в dom_T.

2. (Непрерывность.) Пусть заданы $\phi \in \mathrm{dom}_T$ и $\epsilon > 0$. Применим утверждение 1.1 к непрерывному отображению

$$\mathrm{dom}_T \times [0,T] \ni (\psi,t) \mapsto f(E_T(\psi,t)) \in \mathbb{R}^n$$

и к компактному множеству $\{\phi\} \times [0,T]$. Отсюда следует, что существует окрестность V точки ϕ в dom_T такая, что для всех $\psi \in V$ и $t \in [0,T]$

$$\epsilon > |f(E_T(\psi,t)) - f(E_T(\phi,t))|.$$

Следовательно, $\epsilon > |F_T(\psi) - F_T(\phi)|$. □

Поскольку J_T непрерывно, мы заключаем, что множество

$$\mathcal{O}_T = \{(\eta,\phi) \in C_{0T,0} \times C : J_T(\eta,\phi) \in \mathrm{dom}_T\}$$

открыто. Уравнение неподвижной точки (1.5) выглядит следующим образом:

$$\eta = (I_T \circ F_T)(J_T(\eta,\phi)) \tag{2.1}$$

для $(\eta,\phi) \in \mathcal{O}_T$.

Утверждение 2.2. F_T *является* C^1_**-гладким, причем* $(DF_T(\phi)\chi)(t) = Df(\phi_t)\chi_t$.

Доказательство.

1. Случай $* = MB$.

1.1. Определим

$$\Delta : \mathrm{dom}_T \times C_T \to C_{0T}$$

формулой $\Delta(\phi,\chi)(t) = Df(\phi_t)\chi_t$. Это выражение имеет смысл, поскольку для всех ϕ,χ из C_T отображение

$$[0,T] \ni t \mapsto Df(E_T(\phi,t))E_T(\chi,t) \in \mathbb{R}^n$$

непрерывно в силу непрерывности E_T и гипотезы о том, что f является C^1_{MB}-гладким.

Докажем, что Δ непрерывна: пусть заданы $\phi \in \mathrm{dom}_T$ и $\chi \in C_T$. Пусть также $\epsilon > 0$. Заметим, что для всех $\psi \in \mathrm{dom}_T$ и всех $\rho \in C_T$ мы имеем

$$|\Delta(\psi,\rho) - \Delta(\phi,\chi)| = \max_{0\leqslant t\leqslant T} |Df(\psi_t)\rho_t - Df(\phi_t)\chi_t)|.$$

Отображение

$$\mathrm{dom}_T \times C_T \times [0,T] \ni (\psi,\rho,t) \mapsto Df(\psi_t))\rho_t \in \mathbb{R}^n$$

непрерывно (см. замечания выше), следовательно, оно равномерно непрерывно на компакте $\{\phi\} \times \{\chi\} \times [0,T]$. Существует окрестность N_ϵ точки (ϕ,χ) из $\mathrm{dom}_T \times C_T$ такая, что для всех $(\psi,\rho) \in N_\epsilon$ и всех $t \in [0,T]$

$$|Df(\psi_t)\rho_t - Df(\phi_t)\chi_t| < \epsilon.$$

Отсюда следует, что для всех $(\psi,\rho) \in N_\epsilon$

$$|\Delta(\psi,\rho) - \Delta(\phi,\chi)| \leqslant \epsilon.$$

1.2. (Производные по направлению.) Пусть заданы $\phi \in \mathrm{dom}_T$, $\chi \in C_T$. Выберем $r > 0$ так, чтобы $\phi + [-r, r]\chi \in \mathrm{dom}_T$. Для $0 < |h| < r$

$$\left|\frac{1}{h}(F_T(\phi + h\chi) - F_T(\phi)) - \Delta(\phi, \chi)\right| = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left|\frac{1}{h}(f(\phi_t + h\chi_t) - f(\phi_t)) - Df(\phi_t)\chi_t\right| =$$

$$= \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left|\frac{1}{h}\int_0^1 Df(\phi_t + \theta h\chi_t)h\chi_t d\theta - Df(\phi_t)\chi_t\right| = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left|\int_0^1 \left[Df(\phi_t + \theta h\chi_t) - Df(\phi_t)\right]\chi_t d\theta\right|.$$

Отображение

$$[0, T] \times (-r, r) \times [0, 1] \ni (t, h, \theta) \mapsto Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t \in \mathbb{R}^n$$

непрерывно (в силу равенства $Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t = Df(E_T(\phi + \theta h\chi, t))E_T(\chi, t)$, непрерывности E_T и гипотезы о том, что f is C^1_{MB}-гладкое), следовательно, оно равномерно непрерывно на компакте $[0, T] \times \{0\} \times [0, 1]$. Пусть $\epsilon > 0$. Тогда существует $\delta_\epsilon \in (0, r)$ такое, что для всех $t \in [0, T]$, $h \in (-\delta_\epsilon, \delta_\epsilon)$, $\theta \in [0, 1]$ будем иметь

$$\epsilon > |Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t - Df(\phi_t + \theta \cdot 0 \cdot \chi_t)\chi_t| = |Df(\phi_t + \theta h\chi_t)\chi_t - Df(\phi_t)\chi_t|.$$

Отсюда следует, что для $0 < |h| < \delta_\epsilon$

$$\left|\frac{1}{h}(F_T(\phi + h\chi) - F_T(\phi)) - \Delta(\phi, \chi)\right| < \epsilon.$$

Таким образом, $DF_T(\phi)\chi$ существует и равно $\Delta(\phi, \chi)$. Используя шаг 1.1, мы получаем, что F_T является C^1_{MB}-гладким.

2. В случае $* = F$ получаем, что f является C^1_{MB}-гладким по утверждению 8.2 (см. [17, следствие 3.2 (i)]), а F_T также является C^1_{MB}-гладким в силу шага 1 выше. Снова по утверждению 8.2 (см. [17, следствие 3.2 (i)]) нам осталось показать, что отображение

$$C_T \supset \mathrm{dom}_T \ni \phi \mapsto DF_T(\phi) \in L_c(C_T, C_{0T})$$

непрерывно в топологии β равномерной сходимости на ограниченных подмножествах C_T. По замечанию 8.1, для этого надо сделать следующее: имея заданные $\xi \in \mathrm{dom}_T$, окрестность V точки 0 из C_{0T} и ограниченное подмножество $B \subset C_T$, нам нужно найти такую окрестность N точки ξ из dom_T, что для всех $\tilde{\xi} \in N$ и всех $\hat{\xi} \in B$

$$[DF_T(\tilde{\xi}) - DF_T(\xi)]\hat{\xi} \in V.$$

Предположим, что $V = \{\phi \in C_{0T} : |\phi| < \delta\}$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда соотношение выше следует из неравенства

$$\delta > |\{[DF_T(\tilde{\xi}) - DF_T(\xi)]\hat{\xi}\}(t)| = |Df(\tilde{\xi}_t)\hat{\xi}_t - Df(\xi_t)\hat{\xi}_t|. \tag{2.2}$$

для всех $\tilde{\xi} \in N$, всех $\hat{\xi} \in B$ и всех $t \in [0, T]$.

2.1. Пусть теперь даны $\xi \in \mathrm{dom}_T$, ограниченное множество $B \subset C_T$ и $\delta > 0$. Докажем, что

$$B_C = \{E_T(\hat{\xi}, t) \in C : \hat{\xi} \in B, 0 \leqslant t \leqslant T\}$$

ограничено. Пусть $j \in \mathbb{N}$. Нам необходимо показать, что полунорма $|\cdot|_j$ ограничена на B_C. Выберем целое $k \geqslant j + T$. Полунорма $|\cdot|_{T,k}$ на C_T ограничена на B. Для каждого $\hat{\xi} \in B$ и каждого $t \in [0, T]$ и в силу

$$|E_T(\hat{\xi}, t)|_j = \max_{-j \leqslant s \leqslant 0} |\hat{\xi}(t + s)| \leqslant \max_{-j \leqslant w \leqslant T} |\hat{\xi}(w)| \leqslant |\hat{\xi}|_{T,k}$$

получаем, что $|\cdot|_j$ ограничено на B_C.

2.2. Для каждого $\tilde{\xi} \in \mathrm{dom}_T$, $\hat{\xi} \in B$, и $t \in [0, T]$ имеем

$$\{Df(\tilde{\xi}_t) - Df(\xi_t)\}\hat{\xi}_t = \{Df(E_T(\tilde{\xi}, t)) - Df(E_T(\xi, t))\}E_T(\hat{\xi}, t),$$

причем $E_T(\hat{\xi}, t) \in B_C$. Поскольку f C^1_F-гладко, а E_T непрерывно, композиция

$$Q : C_T \times \mathbb{R} \supset \mathrm{dom}_T \times [0, T] \ni (\tilde{\xi}, t) \mapsto Df(E_T(\tilde{\xi}, t)) \in L_c(C, \mathbb{R}^n)$$

непрерывна в топологии β на $L_c(C,\mathbb{R}^n)$. Пусть $W=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<\delta\}$. Множество

$$U_{W,B_C}=\{A\in L_c(C,\mathbb{R}^n) : AB_C\subset W\}$$

является окрестностью точки 0 из $L_c(C,\mathbb{R}^n)$ в топологии β. Применим утверждение 1.1 (см. [17, утверждение 2.1]) к отображению Q и компакту $\{\xi\}\times[0,T]$. Отсюда следует, что существует окрестность N точки ξ из $\mathrm{dom}_T\subset C_T$ такая, что для каждого $\tilde{\xi}\in N$ и для всех $t\in[0,T]$ разница

$$Q(\tilde{\xi},t)-Q(\xi,t)=Df(E_T(\tilde{\xi},t))-Df(E_T(\xi,t))$$

вложена в U_{W,B_C}. То есть

$$\mathbb{R}^n\supset W\ni\{Df(E_T(\tilde{\xi},t))-Df(E_T(\xi,t))\}\hat{\beta}=\{Df(\tilde{\xi}_t)-Df(\xi_t)\}\hat{\beta}_t \tag{2.3}$$

для всех $\tilde{\xi}\in N$, всех $t\in[0,T[]$ и всех $\hat{\beta}\in B_C\subset C$. Для каждого $\tilde{\xi}\in N$, $t\in[0,T[]$ и $\hat{\xi}\in B$ имеем $(\hat{\beta}=)\ \hat{\xi}_t\in B_C$. Используя соотношение (2.3), мы получаем неравенство (2.2). $\square$

Отсюда следует, что отображение $B_T:\mathcal{O}_T\to C_{0T,0}$, которое задается формулой

$$B_T(\eta,\phi)=(I_T\circ F_T)(J_T(\eta,\phi)),$$

является C^1_*-гладким.

3. Равномерные сжатия и локальные решения

Для того, чтобы показать, что некоторые ограничения на B_T при достаточно малом $T>0$ являются равномерными сжатиями, заметим сначала, что при $T>0$ и $(\eta,\phi),(\hat{\eta},\phi)\in\mathcal{O}_T$ имеем

$$\begin{aligned}|B_T(\hat{\eta},\phi)-B_T(\eta,\phi)| &= |I_T(F_T(J_T(\hat{\eta},\phi)))-I_T(F_T(J_T(\eta,\phi)))| =\\ &= |I_T\{F_T(J_T(\hat{\eta},\phi))-F_T(J_T(\eta,\phi))\}| =\\ &\leqslant T\max_{0\leqslant t\leqslant T}|\{F_T(J_T(\hat{\eta},\phi))-F_T(J_T(\eta,\phi))\}(t)|\end{aligned}$$

и для всех $t\in[0,T]$

$$\{F_T(J_T(\hat{\eta},\phi))-F_T(J_T(\eta,\phi))\}(t)=f((P_{0T}\phi)_t+(Z_T\hat{\eta})_t)-f((P_{0T}\phi)_t+(Z_T\eta)_t).$$

В случае, когда отрезок между аргументами f принадлежит U, последнее слагаемое равняется

$$\int_0^1 Df((P_{0T}\phi)_t+(Z_T\eta)_t+\theta[(Z_T\hat{\eta})_t-(Z_T\eta)_t])[(Z_T\hat{\eta})_t-(Z_T\eta)_t]d\theta.$$

Утверждение 3.1. *Пусть $\phi\in\mathrm{dom}_T$. Существует $T=T_\phi>0$, окрестность $V=V_\phi$ точки ϕ из dom_T, $\epsilon=\epsilon_\phi>0$ и $j=j_\phi\in\mathbb{N}$ такие, что для всех $S\in(0,T]$, всех $\chi\in V$, всех η и $\tilde{\eta}$ из $C_{0S,0}$ таких, что $|\eta|<\epsilon$ и $|\tilde{\eta}|<\epsilon$, а также всех $w\in[0,S]$ и всех $\theta\in[0,1]$ выполнено*

$$(P_{0S}\chi)_w+(Z_S\eta)_w+\theta[(Z_S\tilde{\eta})_w-(Z_S\eta)_w]\in U \tag{3.1}$$

и

$$|Df((P_{0S}\chi)_w+(Z_S\eta)_w+\theta[(Z_S\tilde{\eta})_w-(Z_S\eta)_w])[(Z_S\tilde{\eta})_w-(Z_S\eta)_w)]\leqslant 2j\,|\tilde{\eta}-\eta|.$$

Доказательство.

1. Пусть $\phi\in U$. Так как f C^1_{MB}-гладко, отображение $U\times C\ni(\chi,\eta)\mapsto Df(\chi)\eta\in\mathbb{R}^n$ непрерывно. Тогда существуют окрестности V' точки ϕ из U и N точки 0 из C такие, что

$$|Df(\chi)\eta|=|Df(\chi)\eta-Df(\phi)0|<1\quad\text{для всех}\quad\chi\in V',\eta\in N.$$

Существует $j=j_N\in\mathbb{N}$ такое, что

$$\left\{\zeta\in C : |\zeta|_j<\frac{1}{j}\right\}\subset N.$$

2. В силу непрерывности отображения

$$\mathbb{R}\ni t\mapsto E_\infty(P_{0\infty}\phi,t)\in C$$

в точке $t = 0$ с учетом $E_\infty(P_{0\infty}\phi, 0) = \phi$ существует $T > 0$ такое, что $E_\infty(P_{0\infty}\phi, t) \in V'$ для всех $t \in [0, T]$. Непрерывное отображение

$$\alpha : C \times C_{0T,0} \times [0, T] \ni (\chi, \eta, t) \mapsto E_\infty(P_{0\infty}\chi, t) + E_T(Z_T\eta, t) \in C$$

удовлетворяет $\alpha(\phi, 0, t) = E_\infty(P_{0\infty}\phi, t) \in V'$ для всех $t \in [0, T]$ и равномерно непрерывно на компакте $\{\phi\} \times \{0\} \times [0, T]$. Отсюда следует, что существуют окрестность V точки ϕ из V' и $\epsilon > 0$ такие, что

$$E_\infty(P_{0\infty}\chi, t) + E_T(Z_T\eta, t) = \alpha(\chi, \eta, t) \in V'$$

для всех $\chi \in V$, $\eta \in C_{0T,0}$, $|\eta| < \epsilon$, и $t \in [0, T]$. Заметим, что $E_\infty(P_{0\infty}\chi, t) = E_T(P_{0T}\chi, t)$ для описанных выше χ и t.

3. Пусть $0 < S < T$ и $\chi \in V$, $\eta \neq \tilde{\eta}$ из $C_{0S,0}$ такие, что $|\eta| < \epsilon$ и $|\tilde{\eta}| < \epsilon$. Пусть $0 \leqslant w \leqslant S$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Тогда

$$|P_{ST}\eta| \leqslant |\eta| < \epsilon \quad \text{и} \quad |P_{ST}\tilde{\eta}| \leqslant |\tilde{\eta}| < \epsilon.$$

В силу выпуклости,

$$|P_{ST}\eta + \theta[P_{ST}\tilde{\eta} - P_{ST}\eta]| < \epsilon.$$

Выбор V и ϵ на шаге 2 дает

$$V' \ni E_\infty(P_{0\infty}\chi, w) + E_T(Z_T(P_{ST}\eta + \theta[P_{ST}\tilde{\eta} - P_{ST}\eta]), w).$$

В силу $0 \leqslant w \leqslant S$,

$$E_T(Z_T P_{ST}\eta, w) = (Z_S\eta)_w, \qquad E_T(Z_T P_{ST}\tilde{\eta}, w) = (Z_S\tilde{\eta})_w$$

и

$$\begin{aligned} E_T(Z_T(P_{ST}\eta + \theta[P_{ST}\tilde{\eta} - P_{ST}\eta]), w) = \\ = E_T(Z_T P_{ST}\eta, w) + \theta[E_T(Z_T P_{ST}\tilde{\eta}, w) - E_T(Z_T P_{ST}\eta, w)] = \\ = (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w]. \end{aligned}$$

Используя это и тот факт, что $E_\infty(P_{0\infty}\chi, w) = (P_{0S}\chi)_w$, мы получаем

$$U \supset V' \ni (P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w].$$

4. Для

$$\zeta = \frac{1}{2j|\eta - \tilde{\eta}|}(\tilde{\eta} - \eta) \in C_{0S,0}$$

имеем

$$\begin{aligned} |(Z_S\zeta)_w|_j &= \max_{-j \leqslant t \leqslant 0} |(Z_S\zeta)(w + t)| = \max_{w - j \leqslant s \leqslant w} |(Z_S\zeta)(s)| \leqslant \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant s \leqslant S} |(Z_S\zeta)(s)| = \max_{0 \leqslant s \leqslant S} |\zeta(s)| = |\zeta| < \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

следовательно, $(Z_S\zeta)_w \in N$. Используя это и результаты шага 3, мы получаем

$$\begin{aligned} 1 > |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w])(Z_S\zeta)_w| = \\ = |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w])\frac{1}{2j|\eta - \tilde{\eta}|}(Z_S(\tilde{\eta} - \eta))_w| = \\ = |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w])\frac{1}{2j|\eta - \tilde{\eta}|}((Z_S\tilde{\eta})_w - (Z_S\eta)_w)|, \end{aligned}$$

откуда следует оценка в утверждении. □

Пусть даны $\phi \in U$, $T = T_\phi > 0$, выпуклая окрестность $V = V_\phi$ точки ϕ из U, $\epsilon = \epsilon_\phi > 0$ и $j = j_\phi \in \mathbb{N}$ из утверждения 3.1.

Утверждение 3.2. *Для каждого $S \in (0, T)$, $\chi \in V$, η и $\tilde{\eta}$ из $C_{0S,0}$ таких, что $|\eta| < \epsilon$ и $|\tilde{\eta}| < \epsilon$, выполнено*

$$(\eta, \chi) \in \mathcal{O}_S \ (\tilde{\eta}, \chi) \in \mathcal{O}_S \quad \text{и} \quad |B_S(\tilde{\eta}, \chi) - B_S(\eta, \chi)| \leqslant 2jS|\tilde{\eta} - \eta|.$$

Доказательство. Пусть $S \in (0,T)$, $\chi \in V$, η и $\tilde\eta$ из $C_{0S,0}$ такие, что $|\eta| < \epsilon$ и $|\tilde\eta| < \epsilon$. Соотношение (3.1) для $0 \leqslant w \leqslant S$, где $\theta = 0$ и $\theta = 1$, дает $(\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S$ и $(\tilde\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S$. Более того, для каждого $\theta \in [0,1]$,

$$\mathrm{dom}_S \ni P_{0S}\chi + Z_S\eta + \theta[Z_S\tilde\eta - Z_S\eta] = J_S(\eta,\chi) + \theta[J_S(\tilde\eta,\chi) - J_s(\eta,\chi)]. \tag{3.2}$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} |B_S(\tilde\eta,\chi) - B_S(\eta,\chi)| &= |I_S[F_S(J_S(\tilde\eta,\chi)) - F_S(J_S(\eta,\chi))]| \leqslant \\ &\leqslant S \max_{0\leqslant w\leqslant S} |F_S(J_S(\tilde\eta,\chi))(w) - F_S(J_S(\eta,\chi))(w)| = \\ &= S|F_S(J_S(\tilde\eta,\chi)) - F_S(J_S(\eta,\chi))|. \end{aligned}$$

Поскольку F_S C^1_{MB}-гладкая, из соотношения (3.2) для всех $\theta \in [0,1]$ мы получаем, что последнее слагаемое равно

$$S\left|\int_0^1 DF_S(J_S(\eta,\chi) + \theta[J_S(\tilde\eta,\chi) - J_S(\eta,\chi)])[J_S(\tilde\eta,\chi) - J_S(\eta,\chi)]d\theta\right| =$$

$$= S\left|\int_0^1 DF_S(P_{0S}\chi + Z_S\eta + \theta[Z_S\tilde\eta - Z_S\eta])[Z_S\tilde\eta - Z_S\eta]d\theta\right| \leqslant$$

$$\leqslant S \max_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\bigl(\max_{0\leqslant w\leqslant S} |Df((P_{0S}\chi)_w + (Z_S\eta)_w + \theta[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w])[(Z_S\tilde\eta)_w - (Z_S\eta)_w]|\bigr) \leqslant$$

$$\leqslant S\cdot 2j\cdot|\tilde\eta - \eta| \qquad \text{(в силу утверждения 3.1)}.$$

□

Утверждение 3.3. $\lim\limits_{S\searrow 0} B_S(0,\phi) = 0.$

Доказательство. Используем

$$|B_S(0,\phi)| = |I_S(F_S(J_S(0,\phi)))| \leqslant S|F_S(J_S(0,\phi))| = S \max_{0\leqslant w\leqslant S}|f((P_{0S}\phi)_w)| \leqslant S \max_{0\leqslant w\leqslant T}|f((P_{0T}\phi)_w)|.$$

□

Утверждение 3.4. *Существует $S_\phi \in (0,T_\phi)$ и открытая окрестность W_ϕ точки ϕ в V_ϕ такая, что для всех $\chi \in W_\phi$, всех $S \in (0,S_\phi]$, всех $\eta \in C_{0S,0}$ и $\tilde\eta \in C_{0S,0}$ таких, что $|\eta| \leqslant \dfrac{\epsilon_\phi}{2}$ и $|\tilde\eta| \leqslant \dfrac{\epsilon_\phi}{2}$, выполнено*

$$(\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S,\ (\tilde\eta,\chi) \in \mathcal{O}_S,$$

$$|B_S(\eta,\chi)| < \frac{\epsilon_\phi}{2} \quad \text{и} \quad |B_S(\tilde\eta,\chi) - B_S(\eta,\chi)| \leqslant \frac{1}{2}|\tilde\eta - \eta|.$$

Доказательство.

1. Выберем $S_\phi \in (0,T_\phi)$ так, чтобы

$$|B_S(0,\phi)| < \frac{\epsilon_\phi}{8} \quad \text{для всех} \quad S \in (0,S_\phi],$$

что возможно в силу утверждения 3.3, а также

$$2jS_\phi < \frac{1}{2}.$$

Так как B_{S_ϕ} непрерывна, то существует открытая окрестность W_ϕ точки ϕ в V_ϕ такая, что для всех $\chi \in W_\phi$

$$|B_{S_\phi}(0,\chi) - B_{S_\phi}(0,\phi)| < \frac{\epsilon_\phi}{8}.$$

2. Пусть теперь задано $S \in (0,S_\phi]$. Для каждого $\chi \in W_\phi$ и $t \in [0,S]$

$$B_S(0,\chi)(t) = \int_0^t f((P_{0S}\chi)_w)dw = \int_0^t f((P_{0S_\phi}\chi)_w)dw = B_{S_\phi}(0,\chi)(t).$$

Используя это (для χ и ϕ), получим

$$|B_S(0,\chi)-B_S(0,\phi)|\leqslant|B_{S_\phi}(0,\chi)-B_{S_\phi}(0,\phi)|<\frac{\epsilon_\phi}{8}.$$

3. Пусть заданы $\chi\in W_\phi$, $\eta\in C_{0S,0}$, $\tilde\eta\in C_{0S,0}$ так, что $|\eta|\leqslant\frac{\epsilon_\phi}{2}$ и $|\tilde\eta|\leqslant\frac{\epsilon_\phi}{2}$. По утверждению 3.2

$$|B_S(\tilde\eta,\chi)-B_S(\eta,\chi)|\leqslant 2jS|\tilde\eta-\eta|\leqslant\frac{1}{2}\tilde\eta-\eta|.$$

Более того,

$$\begin{aligned}|B_S(\eta,\chi)| &\leqslant |B_S(\eta,\chi)-B_S(0,\chi)|+|B_S(0,\chi)-B_S(0,\phi)|+|B_S(0,\phi)|<\\ &< \frac{1}{2}|\eta|+\frac{\epsilon_\phi}{8}+\frac{\epsilon_\phi}{8}\leqslant\frac{1}{2}\frac{\epsilon_\phi}{2}+\frac{2\epsilon_\phi}{8}=\frac{\epsilon_\phi}{2}.\end{aligned}$$

□

Пусть задано $S\in(0,S_\phi]$. В случае $*=MB$ результат о равномерном сжатии [14, теорема 7.2] можно применить к отображению

$$\{\eta\in C_{0S,0}:|\eta|<\epsilon_\phi\}\times W_\phi\ni(\eta,\chi)\mapsto B_S(\eta,\chi)\in C_{0S,0},$$

где $M=M_\phi=\{\eta\in C_{0S,0}:|\eta|\leqslant\frac{\epsilon_\phi}{2}\}$. В случае $*=F$ теорему 8.7 (см. [17, теорема 5.2]) можно применить к такому же отображению и на том же самом множестве M. Это следует из того, что соотношение

$$B_S(\eta,\chi)=\eta\in M,\quad \chi\in W_\phi$$

определяет отображение

$$W_\phi\ni\chi\mapsto\eta_\chi\in C_{0S,0},$$

которое является C^1_*-гладким. Так как отображения P_{0S} и Z_S линейны и непрерывны, то отображение

$$\Sigma_\phi:W_\phi\ni\chi\mapsto P_{0S}\chi+Z_S\eta_\chi\in C_S$$

является C^1_*-гладким. Используя это и непрерывные линейные отображения $E_S(\cdot,t):C_S\to C$, $0\leqslant t\leqslant S$, получим, что каждое отображение

$$W_\phi\ni\chi\mapsto E_S(\Sigma_\phi(\chi),t)\in C,\quad 0\leqslant t\leqslant S,$$

является C^1_*-гладким. Отображение

$$[0,S]\times W_\phi\ni(t,\chi)\mapsto E_S(\Sigma_\phi(\chi),t)\in C$$

непрерывно.

Утверждение 3.5. *Пусть заданы $S\in(0,S_\phi]$ и $\chi\in W_\phi$. Отображение $x=x^{(\chi)}=\Sigma_\phi(\chi)$ является решением уравнения* (1.1) *на* $[0,S]$, *причем* $x_0=\chi$.

Доказательство. $x=\Sigma_\phi(\chi)\in C_S$ непрерывно, причем

$$x_0=\Sigma_\phi(\chi)_0=(P_{0S}\chi)_0+(Z_S\eta_\chi)_0=\chi+0=\chi.$$

При $0\leqslant t\leqslant S$

$$\begin{aligned}x(t) &= (P_{0S}\chi)(t)+(Z_S\eta_\chi)(t)=\chi(0)+\eta_\chi(t)=\\ &= \chi(0)+B_S(\eta_\chi,\chi)(t)=\chi(0)+\int_0^t f((P_{0S}\chi+Z_S\eta_\chi)_w)dw=\\ &= \chi(0)+\int_0^t f(E_S(\Sigma_\phi(\chi),w))dw.\end{aligned}$$

Последнее подынтегральное выражение непрерывно. Это следует из того, что сужение $x|_{[0,S]}$ непрерывно дифференцируемо, причем $(x|_{[0,S]})'(t)=f((\Sigma_\phi(\chi))_t)=f(x_t)$ при всех $t\in[0,S]$. □

Из замечаний перед утверждением 3.5 можно видеть, что все отображения

$$W_\phi \ni \chi \mapsto x_t^{(\chi)} \in C, \quad 0 \leqslant t \leqslant S,$$

являются C^1_*-гладкими, и что непрерывно отображение

$$[0,S] \times W_\phi \ni (t,\chi) \mapsto x_t^{(\chi)} \in C.$$

Утверждение 3.6 (единственность). *Пусть x — решение уравнения* (1.1) *на интервале I и $\tilde{x}$ — решение уравнения* (1.1) *на интервале $\tilde{I}$, причем интервалы одинаковой длины, и* $0 = \min I = \min \tilde{I}$, $x_0 = \tilde{x}_0$. *Тогда $x(t) = \tilde{x}(t)$ на $I \cap \tilde{I}$.*

Доказательство.

1. Докажем, что существует $\tau > 0$ такое, что $[0,\tau] \subset I \cap \tilde{I}$ и $x(t) = \tilde{x}(t)$ для всех $t \leqslant \tau$. Пусть $\phi = x_0$ $(= \tilde{x}_0 \in U)$. Рассмотрим $T_\phi, \epsilon_\phi, S_\phi$ такие же, как в утверждении 3.4. В силу непрерывности существует $\tau = S \in (0, S_\phi] \cap I \cap \tilde{I}$ такое, что при $0 \leqslant t \leqslant S$

$$|x(t) - \phi(0)| < \frac{\epsilon_\phi}{2} \quad \text{и} \quad |\tilde{x}(t) - \phi(0)| < \frac{\epsilon_\phi}{2}.$$

Введем

$$\begin{aligned} y &= x|_{(-\infty,S]} - P_{0S}\phi, \quad \eta = y|_{[0,S]} \in C_{0S,0}, \\ \tilde{y} &= \tilde{x}|_{(-\infty,S]} - P_{0S}\phi, \quad \tilde{\eta} = \tilde{y}|_{[0,S]} \in C_{0S,0}. \end{aligned}$$

Тогда

$$|\eta| < \frac{\epsilon_\phi}{2} \quad \text{и} \quad |\tilde{\eta}| < \frac{\epsilon_\phi}{2},$$

и при $0 \leqslant t \leqslant S$

$$B_S(\eta,\phi)(t) = \int_0^t f((P_{0S}\phi)_w + (Z_S\eta)_w)dw = \int_0^t f(x_w)dw = x(t) - \phi(0) = \eta(t).$$

Следовательно, $B_S(\eta,\phi) = \eta$. Аналогично, $B_S(\tilde{\eta},\phi) = \tilde{\eta}$. Согласно утверждению 3.4

$$|\tilde{\eta} - \eta| = |B_S(\tilde{\eta},\phi) - B_S(\eta,(\phi)| \leqslant \frac{1}{2}|\tilde{\eta} - \eta|,$$

что дает $\tilde{\eta} = \eta$ и, следовательно, $\tilde{x}(t) = x(t)$ на $[0,S] = [0,\tau]$.

2. Интервал $J = I \cap \tilde{I}$ имеет положительную длину, причем $\min J = 0$. Предположим, что $x(u) \neq \tilde{x}(u)$ для некоторого $u \in J$. Тогда $0 < u$ и, по непрерывности, $t_J = \inf\{t \in J : x(t) \neq \tilde{x}(t)\} < u \leqslant \sup J$. На $(-\infty, t_J]$ имеем $x(t) = \tilde{x}(t)$, поскольку каждая окрестность t_J содержит $t > t_J$ в J, причем $x(t) \neq \tilde{x}(t)$. Непрерывно дифференцируемая функция $y : (-\infty, \sup\, J - t_J) \to \mathbb{R}^n$, заданная формулой $y(t) = x(t + t_J)$, удовлетворяет

$$y'(t) = x'(t + t_J) = f(x_{t+t_J}) = f(y_t)$$

для $0 \leqslant t < \sup\, J - t_J$ (с правой производной в точке $t = 0$). Аналогично, функция $\tilde{y} : (-\infty, \sup\, J - t_J) \to \mathbb{R}^n$, заданная формулой $y(t) = \tilde{x}(t + t_J)$, является решением уравнения (1.1) на $[0, \sup\, J - t_J)$ и $y_0 = \tilde{y}_0$. Из шага 1 доказательства получаем, что $y(t) = \tilde{y}(t)$ на интервале $[0,\tau]$, где $0 < \tau < \sup\, J - t_J$. Отсюда следует, что $x(t) = \tilde{x}(t)$ на $[t_J, t_J + \tau]$, что противоречит определению t_J. □

4. Полупоток непрерывно дифференцируемых операторов решений

Теперь будем действовать, как в [14, раздел 5], приводя доказательства для удобства читателя. Максимальное решение начальной задачи (1.1)-(1.2), заданное начальным условием $x_0 = \phi \in U$, определяется следующим образом. Положим

$$t_\phi = \sup\{t > 0 : \text{существует решение уравнения (1.1) на } [0,t] \text{ с } x_0 = \phi\} \leqslant \infty.$$

В силу утверждения 3.5 выполнено $0 < t_\phi$. Используя утверждение 3.6, мы получаем решение x^ϕ уравнения (1.1) на $[0, t_\phi)$, причем $x_0^\phi = \phi$ в силу

$$x^\phi(t) = x(t)$$

для $0 < t < t_\phi$, где x — любое решение уравнения (1.1) на $[0, t']$, где $t < t' < t_\phi$ и $x_0 = \phi$.

Легко проверить, что всякое решение уравнения (1.1) на некотором интервале I положительной длины с $\min I = 0$ и $x_0 = \phi$ является сужением x^ϕ.

Положим

$$\Omega = \{(t,\phi) \in [0,\infty) \times U : t < t_\phi\}$$

и определим $\Sigma : \Omega \to U$ формулой $\Sigma(t,\phi) = x_t^\phi$.

Утверждение 4.1 (полупоток). $\{0\} \times U \subset \Omega$, $\Sigma(0,\phi) = \phi$ *для всех* $\phi \in U$, *и если* $(t,\phi) \in \Omega$ *и* $(s,\Sigma(t,\phi)) \in \Omega$, *то*

$$(s+t,\phi) \in \Omega \quad \textit{и} \quad \Sigma(s,\Sigma(t,\phi)) = \Sigma(s+t,\phi).$$

Доказательство. Для каждого $\phi \in U$, $0 < t_\phi$ $(0,\phi) \in \Omega$ и $\Sigma(0,\phi) = x_0^\phi = \phi$. Пусть $(t,\phi) \in \Omega$ и $(s,\Sigma(t,\phi)) \in \Omega$. Пусть $x = x^\phi$, $\psi = x_t$, $y = x^\psi$. Определим $\xi : (-\infty, s+t] \to \mathbb{R}^n$ формулой $\xi(u) = y(u-t)$. Для $u \leqslant t$ получим

$$\xi(u) = y(u-t) = \psi(u-t) = x_t(u-t) = x(u).$$

В частности, $\xi_0 = \phi$ и $\xi'(u) = f(\xi_u)$ для $0 \leqslant u \leqslant t$ (с правой производной в точке $u = 0$). При $t < u \leqslant t+s$

$$\xi'(u) = y'(u-t) = f(y_{u-t}) = f(\xi_u).$$

Отсюда следует, что ξ является сужением x^ϕ. Следовательно, $s+t < t_\phi$, или $(s+t,\phi) \in \Omega$, и

$$\Sigma(s+t,\phi) = \xi_{s+t} = y_s = \Sigma(s,\psi) = \Sigma(s,\Sigma(t,\phi)).$$

□

Для $t \geqslant 0$ и $\Omega_t = \{\phi \in U : (t,\phi \in \Omega\} \neq \varnothing$ рассмотрим оператор решения

$$\Sigma_t : \Omega_t \to U,$$

заданный формулой $\Sigma_t(\phi) = \Sigma(t,\phi)$.

Утверждение 4.2. *Для каждого* $(t,\phi) \in \Omega$ *существует открытая окрестность* $N \subset U$ *точки* ϕ *и* $\epsilon > 0$, *причем* $[0,t+\epsilon) \times N \subset \Omega$, $\Sigma|_{[0,t+\epsilon)\times N}$ *непрерывна и* $\Sigma_t|_N$ *является* C^1_**-гладкой.*

Доказательство.

1. Пусть задана $(t,\phi) \in \Omega$. В силу замечаний после утверждения 3.5 получаем, что точка $t = 0$ содержится во множестве

$$\begin{aligned} A \;=\; &\{s \in [0,t_\phi) : \text{существует открытая окрестность } V_s \subset U \text{ точки } \phi \\ &\text{и } \epsilon_s > 0 \text{ где } [0,s+\epsilon_s) \times V_s \subset \Omega,\ \Sigma|_{[0,s+\epsilon_s)\times V_s} \text{ непрерывна,} \\ &\text{и } \Sigma_s|_{V_s}\ C^1_* - \text{гладкая}\}. \end{aligned}$$

Пусть $t_A = \sup A \leqslant t_\phi$. Остается доказать, что $t_A = t_\phi$.

2. Пусть $t_A < t_\phi$. Положим $\psi = \Sigma(t_A,\phi)$. Снова в силу замечаний после утверждения 3.5 существуют открытая окрестность $W \subset U$ точки ψ и $\tau > 0$ такое, что $[0,\tau] \times W \subset \Omega$, для которых $\Sigma|_{[0,\tau]\times W}$ непрерывна и все $\Sigma_u|_W$, $0 \leqslant u \leqslant \tau$, являются C^1_*-гладкими. Линия потока $[0,t_\phi) \ni s \mapsto x_s^\phi \in U$ непрерывна (заметим, что $x_s^\phi = E_u(x^\phi|_{(-\infty,u]}, s)$ при $0 \leqslant s < u < t_\phi$, а E_u непрерывна). Отсюда следует, что существует

$$t_0 \in A \cap \left(t_A - \frac{\tau}{2}, t_A\right) \quad \text{где} \quad x_{t_0}^\phi \in W.$$

Из $t_0 \in A$ получаем, что найдутся открытая окрестность $N_0 \subset U$ точки ϕ и $\epsilon_0 > 0$ такие, что $[0,t_0+\epsilon_0) \times N_0 \subset \Omega$, причем $\Sigma|_{[0,t_0+\epsilon_0)\times N_0}$ непрерывна, и $\Sigma_{t_0}|_{N_0}$ C^1_*-гладкая. В силу непрерывности и $x_{t_0}^\phi \in W$ получаем $\Sigma_{t_0}(N_0) \subset W$. При $t_0 < u < t_A + \dfrac{\tau}{2}$ и $\chi \in N_0$,

$$0 < u - t_0 < \tau \quad \text{и} \quad \Sigma_{t_0}(\chi) \in W,$$

что дает $(u,\chi) = ((u-t_0)+t_0,\chi) \in \Omega$ и

$$\Sigma(u,\chi) = \Sigma(u-t_0, \Sigma(t_0,\chi)).$$

Отсюда следует, что $\Sigma|_{(t_0,t_A+\frac{\tau}{2})\times N_0}$ непрерывна, что в сочетании с непрерывностью сужения $\Sigma|_{[0,t_0+\epsilon_0)\times N_0}$ доказывает, что сужение Σ на $\left[0, t_A+\dfrac{\tau}{2}\right)\times N_0$ непрерывно.

3. При $u = t_A + \dfrac{\tau}{4}$ и $\chi \in N_0$,

$$\Sigma(u,\chi) = \Sigma(u - t_0, \Sigma(t_0,\chi)) = \Sigma_{u-t_0}\circ\Sigma_{t_0}(\chi),$$

где $0 < u - t_0 < \tau$. Напомним, что $\Sigma_{t_0}(N_0)\subset W$. Отсюда следует, что $\Sigma_u|_{N_0}$ C^1_*-гладкая. В сочетании с результатами шага 2 доказательства заключаем, что $u > t_A$ принадлежит A, что противоречит тому, что $t_A = \sup A$. □

Следствие 4.3. *Полупоток Σ непрерывен, каждое множество Ω_t, $t\geqslant 0$, открыто в X_f, и каждый оператор решения Σ_t, где $t\geqslant 0$ и $\Omega_t\neq\varnothing$, является C^1_*-гладким.*

Доказательство. Пусть даны $t\geqslant 0$ и $\phi\in\Omega_t$. Тогда $(t,\phi)\in\Omega$, и для выбранного N в силу утверждения 4.2 мы получаем $N\subset\Omega_t$. Это показывает, что $\Omega_t\subset U$ — открытое подмножество C. Дальнейшие рассуждения очевидным образом вытекают из утверждения 4.2. □

5. Линеаризованные операторы решений и вариационное уравнение

Для $\phi\in U$ производные $D\Sigma_t(\phi): C\to C$, $0\leqslant t < t_\phi$, задаются вариационным уравнением. Для доказательства нам потребуется следующая версия утверждения 5.5 из [14].

Утверждение 5.1. *Пусть $\phi\in U$, $0\leqslant t<t_\phi$, $\hat\phi\in C$ и $s\leqslant 0$. Тогда*

$$\begin{aligned}(D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(s) &= \hat\phi(t+s) \quad \textit{если} \quad t+s\leqslant 0,\\ (D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(s) &= (D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat\phi)(0) \quad \textit{если} \quad 0\leqslant t+s.\end{aligned}$$

Доказательство. Каждое линейное отображение

$$ev_s : C\ni\psi\mapsto\psi(s)\in\mathbb{R}^n,\quad s\leqslant 0,$$

непрерывно. Пусть $\phi\in U$, $0\leqslant t<t_\phi$, $\hat\phi\in C$, $s\leqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned}(D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(s) &= ev_s(D\Sigma_t(\phi)\hat\phi) = D(ev_s\circ\Sigma_t)(\phi)\hat\phi =\\ &= D\{\Omega_t\ni\tilde\phi\mapsto x_t^{\tilde\phi}(s)\in\mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi =\\ &= D\{\Omega_t\ni\tilde\phi\mapsto x^{\tilde\phi}(t+s)\in\mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi.\end{aligned}$$

В случае $0\leqslant t+s$ множество $\Omega_t\subset\Omega_{t+s}$ есть открытая окрестность ϕ в U и

$$\begin{aligned}D\{\Omega_t\ni\tilde\phi\mapsto x^{\tilde\phi}(t+s)\in\mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi &= D\{\Omega_t\ni\tilde\phi\mapsto x^{\tilde\phi}_{t+s}(0)\in\mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi =\\ &= D(ev_0\circ\Sigma_{t+s})(\phi)\hat\phi =\\ &= ev_0(D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat\phi) = (D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat\phi)(0),\end{aligned}$$

в то время как в случае $t+s\leqslant 0$

$$\begin{aligned}D\{\Omega_t\ni\tilde\phi\mapsto x^{\tilde\phi}(t+s)\in\mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi &= D\{\Omega_t\ni\tilde\phi\mapsto\tilde\phi(t+s)\in\mathbb{R}^n\}(\phi)\hat\phi =\\ &= D\,ev_{t+s}(\phi)\hat\phi = ev_{t+s}(\hat\phi) = \hat\phi(t+s).\end{aligned}$$

□

Теперь мы следуем [14, раздел 6]. Для $\phi\in U$ определим отображение $v^{\phi,\hat\phi}:(-\infty,t_\phi)\to\mathbb{R}^n$ формулой

$$\begin{aligned}v^{\phi,\hat\phi}(t) &= (D\Sigma_t(\phi)\hat\phi)(0) \quad \text{при} \quad 0\leqslant t<t_\phi,\\ v^{\phi,\hat\phi}(t) &= \hat\phi(t) \quad \text{при} \quad t<0.\end{aligned}$$

Утверждение 5.2. *Пусть даны $\phi \in U$ и $\hat{\phi} \in C$. Рассмотрим отображение $v = v^{\phi,\hat{\phi}}$. Для каждого $t \in [0, t_\phi)$*

$$v_t = D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi} \in C.$$

В частности, $v_0 = \hat{\phi}$. Отображение v непрерывно, сужение $v : (-\infty, t_\phi) \to \mathbb{R}^n$ на интервале $[0, t_\phi)$ дифференцируемо, и

$$v'(t) = Df(x_t^\phi)v_t \quad \textit{для каждого} \quad t \in [0, t_\phi)$$

с правой производной в точке $t = 0$.

Доказательство.

1. Пусть $\phi \in U$, $\hat{\phi} \in C$, $0 \leqslant t < t_\phi$. Для $s \leqslant 0$, $0 \leqslant t + s$ по утверждению 5.1 имеем

$$v_t(s) = v(t+s) = (D\Sigma_{t+s}(\phi)\hat{\phi})(0) = (D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s),$$

а при $s \leqslant 0$, $t + s < 0$

$$v_t(s) = v(t+s) = \hat{\phi}(t+s) = (D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s).$$

Объединяя это, получим $v_t = D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi}$. Заметим, что $D\Sigma_0(\phi)\hat{\phi} = \hat{\phi}$. Из того, что каждая область $v_t = D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi}$, $0 \leqslant t < t_\phi$, принадлежит C, вытекает, что v непрерывна.

2. Пусть даны $t > 0$ и $\Omega_t \neq \varnothing$. Для $\phi \in \Omega_t$ рассмотрим отображение

$$\eta^\phi : [0, t] \ni s \mapsto x^\phi(s) - \phi(0) \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что $\eta^\phi \in C_{0t,0}$ и

$$P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi = x^\phi|_{(-\infty,t]},$$

откуда вытекает, что

$$(P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi)_s = x_s^\phi \in U \quad \text{при} \quad 0 \leqslant s \leqslant t.$$

Отсюда следует, что $P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi \in \mathrm{dom}_t$. Тогда (η^ϕ, ϕ) принадлежит области $\mathcal{O}_t$ отображения B_t. Отображение $Y_t : \Omega_t \ni \phi \mapsto \eta^\phi \in C_{0t,0}$ удовлетворяет

$$\begin{aligned} Y_t(\phi)(s) &= \eta^\phi(s) = x^\phi(s) - \phi(0) = \int\limits_0^s f(x_u^\phi)du = \int\limits_0^s f((P_{0t}\phi + Z_t\eta^\phi)_u)du = \\ &= \int\limits_0^s f(E_t(P_{0t}\phi + Z_tY_t(\phi), u))du = I_t(F_t(P_{0t}\phi + Z_tY_t(\phi)))(s) \end{aligned}$$

для всех $\phi \in \Omega_t$ и $s \in [0, t]$, следовательно,

$$Y_t(\phi) = I_t(F_t(J_t(Y_t(\phi), \phi))) \qquad (= B_t(Y_t(\phi), \phi)) \quad \text{для всех} \quad \phi \in \Omega_t. \tag{5.1}$$

3. Докажем, что отображение Y является C_*^1-гладким и

$$v^{\phi,\hat{\phi}}(s) = (DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) + (P_{0t}\hat{\phi})(s) \quad \text{для всех} \quad s \in [0, t], \phi \in \Omega_t, \hat{\phi} \in C.$$

В силу шага 2 имеем $(Y_t(\phi), \phi) \in \mathcal{O}_t$ для всех $\phi \in \Omega_t$. С помощью оператора сдвига

$$\Delta_t : C \to C_t, \quad (\Delta_t\phi)(s) = \phi(s - t),$$

и оператора сужения

$$R_t : C_t \to C_{0t}, \quad R_t\chi = \chi|_{[0,t]},$$

которые являются линейными и непрерывными, получим

$$Y_t(\phi) = R_t(\Delta_t \circ \Sigma_t(\phi) - P_{0t}\phi) \quad \text{для всех} \quad \phi \in \Omega_t.$$

Это доказывает, что отображение Y_t является C_*^1-гладким и для всех $\phi \in \Omega_t$, $\hat{\phi} \in C$, $s \in [0, t]$,

$$\begin{aligned} (DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) &= (R_t\Delta_t D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s) - (R_tP_{0t}\hat{\phi})(s) = \\ &= (D\Sigma_t(\phi)\hat{\phi})(s - t) - \hat{\phi}(0) = \\ &= (D\Sigma_s(\phi)\hat{\phi})(0) - \hat{\phi}(0) = \quad \text{(см. утверждение 5.1)} \\ &= v^{\phi,\hat{\phi}}(s) - \hat{\phi}(0) = v^{\phi,\hat{\phi}}(s) - P_{0t}\hat{\phi}(s). \end{aligned}$$

Для всех $s \leqslant t$ и $\phi \in \Omega_t$, $\hat{\phi} \in C$ мы получаем

$$(P_{0t}\hat{\phi})(s) + (Z_t DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) = v^{\phi,\hat{\phi}}(s). \tag{5.2}$$

4. Дифференцирование уравнения (5.1) дает

$$DY_t(\phi)\hat{\phi} = I_t DF_t(J_t(Y_t(\phi),\phi))J_t(DY_t(\phi)\hat{\phi},\hat{\phi}) \qquad \text{для всех} \quad \phi \in \Omega_t, \hat{\phi} \in C. \tag{5.3}$$

Для таких ϕ и $\hat{\phi}$, а также для любого $s \in [0,t]$

$$\begin{aligned}
v^{\phi,\hat{\phi}}(s) &= (DY_t(\phi)\hat{\phi})(s) + \hat{\phi}(0) = \quad \text{(см. шаг 3)} \\
&= \int_0^s Df((P_{0t}\phi)_u + (Z_t Y_t(\phi))_u)((P_{0t}\hat{\phi})_u + (Z_t DY_t(\phi)\hat{\phi})_u)du + \hat{\phi}(0) = \\
&\qquad \text{(в силу уравнения (5.3) и утверждения 2.2)} \\
&= \int_0^s Df(x_u^{\phi})v_u^{\phi,\hat{\phi}}du + \hat{\phi}(0) \quad \text{(в силу уравнения (5.2))}.
\end{aligned}$$

Дифференцирование при $t > 0$ дает

$$(v^{\phi,\hat{\phi}})'(t) = Df(x_t^{\phi})v_t^{\phi,\hat{\phi}}.$$

В точке $s = 0$ мы получаем

$$(v^{\phi,\hat{\phi}})'(0) = Df(x_0^{\phi})v_0^{\phi,\hat{\phi}} = Df(\phi)\hat{\phi}$$

с правой производной. □

Часть II

6. Процессы для неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием

В этом разделе удобно использовать обозначение $C_n = C((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$. Пусть заданы множество $V \subset \mathbb{R} \times C_n$ и отображение $g : V \to \mathbb{R}^n$. Решение уравнения (1.3),

$$x'(t) = g(t, x_t),$$

на интервале $I \subset \mathbb{R}$ является отображением $x : (-\infty,0] + I \to \mathbb{R}^n$ таким, что $(t,x_t) \in V$ для всех $t \in I$, ограничение $x|_I$ дифференцируемо, а уравнение (1.3) выполняется для всех $t \in I$ (в случае, когда I имеет минимум t_0 с правой производной в t_0). Для $(t_0,\phi) \in V$ решение начальной задачи

$$x'(t) = g(t, x_t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0, \quad x_{t_0} = \phi, \tag{6.1}$$

является решением x уравнения (1.3) на некотором интервале $[t_0, t_e)$, $t_0 < t_e \leqslant \infty$, которое удовлетворяет $x_{t_0} = \phi$.

Обозначим через $p_n : C_{n+1} \to C_n$ непрерывное линейное отображение, исключающее первый компонент. Для V и g, как указано выше, определим область

$$U_g = \{\psi \in C_{n+1} : (\psi_1(0), p_n\psi) \in V\}$$

и отображение $f_g : C_{n+1} \supset U_g \to \mathbb{R}^{n+1}$ формулой

$$f_g(\psi) = (1, g(\psi_1(0), p_n\psi)),$$

так что автономное дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f_g(y_t), \tag{6.2}$$

записанное в компонентах $y = (y_1, z) = (r, z)$, сводится к системе

$$\begin{aligned}
r'(t) &= 1, \\
z'(t) &= g(r(t), z_t).
\end{aligned}$$

Для заданного $t \in \mathbb{R}$ определим $t_* \in C_1$ по формуле $t_*(u) = t + u$.

Утверждение 6.1.

1. *Если* $x : (-\infty, t_x) \to \mathbb{R}^n$ *является решением на* $[t_0, t_x)$ *начальной задачи* (6.1), *тогда отображение* $(-\infty, t_x - t_0) \ni s \mapsto (s + t_0, x(s + t_0)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *является решением на* $[0, t_x - t_0)$ *начальной задачи*

$$r'(s) = 1 \quad \text{для} \quad s \geqslant 0, \quad r_0 = t_{0*}, \tag{6.3}$$

$$z'(s) = g(r(s), z_s) \quad \text{для} \quad s \geqslant 0, \quad z_0 = \phi. \tag{6.4}$$

2. *Если* $y = (r, z)$ *является решением на* $[0, t_y)$ *начальной задачи* (6.3)-(6.4), *тогда* $x : (-\infty, t_0 + t_y) \to \mathbb{R}^n$, *заданное формулой* $x(\tau) = z(\tau - t_0)$, *является решением на* $[t_0, t_0 + t_y)$ *начальной задачи* (6.1).

Доказательство.

1. Пусть дано решение $x : (-\infty, t_x) \to \mathbb{R}^n$ на $[t_0, t_x)$ начальной задачи (6.1). Определим $y : (-\infty, t_x - t_0) \to \mathbb{R}^{n+1}$, $y = (r, z)$ с $z : (-\infty, t_x - t_0) \to \mathbb{R}^n$ и $r = y_1$ соотношениями

$$r(t) = t + t_0 \quad \text{при} \quad t < t_x - t_0,$$

$$z(t) = x(t + t_0) \quad \text{для всех} \quad t < t_x - t_0.$$

Для $0 \leqslant t < t_x - t_0$ мы получаем $(y_1(t), z_t) = (r(t), z_t) = (t + t_0, x_{t+t_0}) \in V$. Это дает $y_t \in U_g$ для $0 \leqslant t < t_x - t_0$. Очевидно, $r'(s) = 1$ для $0 \leqslant s < t_x - t_0$ (с правой производной при $s = 0$) и $r_0 = t_{0*}$. Также для $u \leqslant 0$

$$z_0(u) = z(u) = x(u + t_0) = x_{t_0}(u) = \phi(u),$$

следовательно, $z_0 = \phi$. Для $0 \leqslant s < t_x - t_0$ мы получаем

$$z'(s) = x'(s + t_0) = g(s + t_0, x_{s+t_0}) = g(r(s), z_s)$$

с правой производной при $s = 0$.

2. Пусть дано решение $y = (r, z)$ на $[0, t_y)$ начальной задачи (6.3)-(6.4), и определим $x : (-\infty, t_0 + t_y) \to \mathbb{R}^n$ как $x(\tau) = z(\tau - t_0)$. Имеем $r(s) = s + t_0$ для $0 \leqslant s < t_y$. Для $t_0 \leqslant \tau < t_0 + t_y$ из $y_{\tau - t_0} \in U_g$ получаем, что $(\tau, x_\tau) = (r(\tau - t_0), z_{\tau - t_0})$ принадлежит V. Также

$$x'(\tau) = z'(\tau - t_0) = g(r(\tau - t_0), z_{\tau - t_0}) = g(\tau, x_\tau)$$

(с правыми производными в t_0 и в 0, соответственно), а при $u \leqslant 0$

$$x_{t_0}(u) = x(t_0 + u) = z(t_0 + u - t_0) = z(u) = \phi(u).$$

$\square$

Предположим теперь, что V открыто, а g C^1_*-гладко. Тогда $U_g \subset C_{n+1}$ открыто как прообраз V при непрерывном линейном отображении, а отображение $f_g : C_{n+1} \supset U_g \to \mathbb{R}^{n+1}$ является C^1_*-гладким. Отсюда следует, что решения уравнения (6.2) определяют непрерывный полупоток $\Sigma_g : [0, \infty) \times C_{n+1} \supset \Omega_g \to C_{n+1}$ на U_g, со всеми C^1_*-гладкими операторами решения. Множество

$$\mathrm{dom} : \{(t, t_0, \phi) \in \mathbb{R}^2 \times C_n : t_0 \leqslant t, \ (t - t_0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g\}$$

является открытым подмножеством множества $\{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leqslant t\} \times C_n$, поскольку оно является прообразом Ω_g при непрерывном отображении в $[0, \infty) \times C_{n+1}$, и *процесс* $P : \{(t, t_0) \in \mathbb{R}^2 : t_0 \leqslant t\} \times C_n \supset \mathrm{dom} \to C_n$, заданный формулой

$$P(t, t_0, \phi) = p_n \Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi)$$

непрерывен. Для каждого $t \geqslant t_0$ с $\varnothing \neq \Omega_{g, t - t_0} \subset U_g \subset C_{n+1}$ непустое множество

$$\mathrm{dom}_{t, t_0} = \{\phi \in C_n : (t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}\} = \{\phi \in C_n : (t_{0*}, \phi) \in \Omega_{g, t - t_0}\}$$

открыто, и отображение

$$P(t, t_0, \cdot) : C_n \supset \mathrm{dom}_{t, t_0} \to C_n$$

является C^1_*-гладким.

Следствие 6.2 (максимальные решения, единственность). *Для каждого* $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ *существует решение* $x = x^{t_0, \phi}$ *начальной задачи* (6.1) *такое, что любое другое решение той же начальной задачи является ограничением* x, *и* $P(t, t_0, \phi) = x_t$.

Доказательство.

1. Пусть задано $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$. Первая часть утверждения следует из результатов для автономного уравнения (6.2) с помощью утверждения 6.1.

2. Имеем $t_0 \leqslant t$ и $(t - t_0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g$. Пусть $y : (-\infty, t_y) \to \mathbb{R}^{n+1}$ обозначает максимальное решение начальной задачи

$$y'(s) = f_g(y_s) \quad \text{при} \quad s \geqslant 0, \quad y_0 = (t_{0*}, \phi), \tag{6.5}$$

и запишем $y = (r, z)$ с $r = y_1$. Тогда

$$P(t, t_0, \phi) = p_n \Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi) = z_{t-t_0}.$$

Утверждение 6.1 говорит, что $\tilde{x} : (-\infty, t_0 + t_y) \to \mathbb{R}^n$, заданное по формуле

$$\tilde{x}(\tau) = z(\tau - t_0),$$

является решением на $[t_0, t_0 + t_y)$ задачи (6.1). Согласно первой части утверждения $\tilde{x}$ является ограничением максимального решения x начальной задачи (6.1), поэтому

$$P(t, t_0, \phi) = z_{t-t_0} = \tilde{x}_t = x_t.$$

□

Следствие 6.3. *Для всех* $(t_0, \phi) \in V$, $(t_0, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ *и* $P(t_0, t_0, \phi) = \phi$, *и для всех* $t_0 \leqslant t \leqslant s$ *с* $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ *и* $(s, t, P(t, t_0, \phi)) \in \mathrm{dom}$ *выполнено*

$$(s, t_0, \phi) \in \mathrm{dom} \quad \text{и} \quad P(s, t_0, \phi) = P(s, t, P(t, t_0, \phi)).$$

Доказательство.

1. Для $(t_0, \phi) \in V$ имеем $(t_{0*}, \phi) \in U_g$, следовательно, $(0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g$. Из этого следует, что $(t_0, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ и $P(t_0, t_0, \phi) = p_n \Sigma_g(0, t_{0*}, \phi) = \phi$.

2. Предположим, что $t_0 \leqslant t \leqslant s$, $(t, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ и $(s, t, P(t, t_0, \phi)) \in \mathrm{dom}$. Тогда $(t - t_0, t_{0*}, \phi) \in \Omega_g$. Поскольку решение начальной задачи (6.3) задается выражением $r(s) = s + t_0$, мы видим, что первый компонент r_{t-t_0} $\Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi)$ удовлетворяет

$$r_{t-t_0}(u) = r(t - t_0 + u) = (t - t_0 + u) + t_0 = t + u = t_*(u) \quad \text{для всех} \quad u \leqslant 0,$$

или $r_{t-t_0} = t_*$. Из этого следует, что

$$\Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi) = (t_*, P(t, t_0, \phi)).$$

Используя это и $(s, t, P(t, t_0, \phi)) \in \mathrm{dom}$, получаем

$$(s - t, \Sigma_g(t - t_0, t_{0*}, \phi)) = (s - t, t_*, P(t, t_0, \phi)) \in \Omega_g.$$

Теперь свойства Σ_g дают

$$(s - t_0, t_{0*}, \phi) = ((s - t) + (t - t_0), t_{0*}, \phi) \in \Omega_g,$$

следовательно, $(s, t_0, \phi) \in \mathrm{dom}$ и

$$\begin{aligned} P(s, t_0, \phi) &= p_n \Sigma_g(s - t_0, t_{0*}, \phi) = p_n \Sigma(s - t, \Sigma(t - t_0, t_{0*}, \phi)) = \\ &= p_n \Sigma_g(s - t, t_*, P(t, t_0, \phi)) = P(s, t, P(t, t_0, \phi)). \end{aligned}$$

□

7. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра

Рассмотрим интегродифференциальное уравнение Вольтерра (1.4),

$$x'(t) = \int_0^t k(t, s) h(x(s)) ds$$

с непрерывно дифференцируемыми $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n \times n}$ и $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Для $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n \times n}$, заданного как $K(t, s) = k(t, t + s)$, мы можем написать

$$x'(t) = \int_{-t}^0 k(t, t + s) h(x(t + s)) ds = \int_{-t}^0 K(t, s) h(x_t(s)) ds, \tag{7.1}$$

где $x_t \in C$. Решение уравнения (7.1) должно быть непрерывным отображением $x : (-\infty, t_e) \to \mathbb{R}^n$, $0 < t_e \leqslant \infty$, ограничение которого на интервал $(0, t_e)$ дифференцируемо и удовлетворяет уравнению (7.1). Мы ищем такое отображение $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$, чтобы каждое решение уравнения (7.1) также являлось решением на $(0, t_e)$ уравнения (1.3),

$$x'(t) = g(t, x_t).$$

Чтобы избежать сложных рассуждений с отрезками решений, мы используем *нечетное продолжающее отображение*

$$P_o : C \to C_\infty,$$

заданное как $P_o\phi(s) = \phi(s)$ для $s \leqslant 0$ и $P\phi(s) = 2\phi(0) - \phi(-s)$ для $0 < s$. Отображение P_o линейно и непрерывно. Мы могли бы также использовать постоянное продолжение для данной цели. Нечетное продолжение имеет преимущество в том, что оно определяет непрерывное линейное отображение $C^1 \to C^1_\infty$. Это играет роль при рассмотрении неавтономных уравнений с дискретным запаздыванием, таких как *уравнение пантографа*

$$x'(t) = a\, x(\lambda t) + b\, x(t)$$

с $0 < \lambda < 1$.

Далее рассмотрим оператор подстановки

$$S_H : C_\infty \ni \phi \mapsto H \circ \phi \in C_\infty,$$

который определен для каждого непрерывного отображения $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, оператор линейного интегрирования

$$I : C_\infty \to C^1_\infty,$$

заданный как $(I\psi)(u) = \int\limits_{-u}^{0} K(u,s)\psi(s)ds$, и оператор

$$J : C^1_\infty \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

заданный как

$$J(\psi, t) = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)\psi(s)ds = Ev_{\infty,1}(I\psi, t).$$

Определим $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$g(t, \phi) = J((S_h \circ P_o)(\phi), t) = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)h((P_o\phi)(s))ds$$

и заметим, что для каждого решения $x : (-\infty, t_e) \to \mathbb{R}^n$ уравнения (7.1) при всех $t \in (0, t_e)$ имеем

$$g(t, x_t) = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)h((P_o x_t)(s))ds = \int\limits_{-t}^{0} K(t,s)h(x_t(s))ds.$$

Чтобы показать, что отображение g является C^1_F-гладким, напомним, что оценочное отображение $Ev_{\infty,1}$ является C^1_F-гладким. Следовательно, отображение J является C^1_F-гладким, если линейное отображение I непрерывно. Отсюда следует, что отображение g является C^1_F-гладким при условии, что I непрерывно, а S_h является C^1_F-гладким. Следующие предложения устанавливают эти оставшиеся свойства гладкости.

Утверждение 7.1. *Линейное отображение I непрерывно.*

Доказательство. Воспользуемся соотношениями

$$|I\psi|_{\infty,j} \;=\; \max_{-j\leqslant u\leqslant j} \left| \int\limits_{-u}^{0} K(u,s)\psi(s)ds \right| \leqslant |j| \max_{-j\leqslant u\leqslant j, -j\leqslant s\leqslant j} |K(u,s)||\psi|_{\infty,j},$$

$$\begin{aligned}(I\psi)'(u) &= -K(u,u)\psi(u) + \int\limits_{-u}^{0} \partial_1 K(u,s)\psi(s)ds,\\ |(I\psi)'|_{\infty,j} &\leqslant \max_{-j\leqslant u\leqslant j}|K(u,u)||\psi|_{\infty,j} + |j| \max_{-j\leqslant u\leqslant j, -j\leqslant s\leqslant j}|\partial_1 K(u,s)||\psi|_{\infty,j}\end{aligned}$$

для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\psi \in C_\infty$. □

Утверждение 7.2. *Если $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно, то и отображение S_H непрерывно. В случае, когда H непрерывно дифференцируемо, отображение S_H является C^1_F-гладким, с*

$$(DS_H(\phi)\chi)(t) = DH(\phi(t))\chi(t).$$

Доказательство.

1. Для $j \in \mathbb{N}$ зададим

$$N_j = \left\{\phi \in C_\infty : |\phi|_{\infty,j} < \frac{1}{j}\right\}.$$

Пусть H непрерывно. Пусть $\phi \in C_\infty$. Для непрерывности S_H в ϕ нужно, чтобы для каждого $j \in \mathbb{N}$ существовал $k \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $\chi \in C_\infty$ с $\chi \in \phi + N_k$ имеем $S_H(\chi) \in S_H(\phi) + N_j$. Пусть задано $j \in \mathbb{N}$. Выберем компактную окрестность W точки $\phi([-j,j])$. Поскольку H равномерно непрерывно на W, существует $\delta > 0$ такое, что $|H(y) - H(x)| < \dfrac{1}{j}$ для всех x, y в W таких, что $|y - x| < \delta$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ с $k \geqslant j$ и $\dfrac{1}{k} < \delta$ и $\chi([-j,j]) \subset W$ для всех $\chi \in C_\infty$ с $|\chi - \phi|_{\infty,k} < \dfrac{1}{k}$ (или, что эквивалентно, $\chi \in \phi + N_k$). Для таких χ и всех $s \in [-j,j]$ получаем

$$|H(\chi(s)) - H(\phi(s))| < \frac{1}{j},$$

следовательно, $S_H(\chi) \in S_H(\phi) + N_j$.

2. Пусть H непрерывно дифференцируемо.

2.1. (Существование производных по направлениям.) Пусть даны $\phi \in C_\infty$ и $\chi \in C_\infty$. Определим $A(\phi,\chi) \in C_\infty$ как $A(\phi,\chi)(s) = DH(\phi(s))\chi(s)$. Достаточно показать, что для любого $j \in \mathbb{N}$ выполнено

$$|t^{-1}(S_H(\phi + t\chi) - S_H(\phi)) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} \to 0 \quad \text{при} \quad 0 \neq t \to 0.$$

Пусть задано $j \in \mathbb{N}$. Для всех действительных $t \neq 0$

$$\begin{aligned}&|t^{-1}(S_H(\phi + t\chi) - S_H(\phi)) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} =\\ &= \max_{-j\leqslant s\leqslant j}|t^{-1}(H(\phi(s) + t\chi(s)) - H(\phi(s))) - DH(\phi(s))\chi(s)| =\\ &= \max_{-j\leqslant s\leqslant j}\left|\int\limits_0^1 (DH(\phi(s) + ut\chi(s))\chi(s) - DH(\phi(s))\chi(s))du\right| \leqslant\\ &\leqslant \max_{-j\leqslant s\leqslant j}\max_{|v|\leqslant|t|}|DH(\phi(s) + v\chi(s)) - DH(\phi(s)||\chi(s)| \leqslant\\ &\leqslant |\chi|_{\infty,j}\max_{-j\leqslant s\leqslant j}\max_{|v|\leqslant|t|}|DH(\phi(s) + v\chi(s)) - DH(\phi(s)|.\end{aligned}$$

Так как DH непрерывен, мы можем использовать рассуждения из шага 1 доказательства и вывести из предыдущей оценки, что

$$\lim_{0\neq t\to 0}|t^{-1}(S_H(\phi + t\chi) - S_H(\phi)) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} = 0.$$

2.2. Каждое отображение $DS_H(\phi) : C_\infty \ni \chi \mapsto A(\phi,\chi) \in C_\infty$, $\phi \in C_\infty$, линейно. Непрерывность следует из оценок $|A(\phi,\chi)|_{\infty,j} \leqslant \max\limits_{-j\leqslant s\leqslant j}|DH(\phi(s))||\chi|_{\infty,j}$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и всех $\chi \in C_\infty$.

2.3. Осталось показать, что $DS_H : C_\infty \ni \phi \mapsto DS_H(\phi) \in L_c(C_\infty, C_\infty)$ непрерывно относительно топологии β на $L_c(C_\infty, C_\infty)$. Пусть $B \subset C_\infty$ ограничено и пусть $j \in \mathbb{N}$. Согласно замечанию 8.1 (см. [17, замечание 2.2 (iii)]) мы должны найти целое число $k \geqslant j$ такое, что

$$DS_H(\psi)\chi - DS_H(\phi)\chi = A(\psi,\chi) - A(\phi,\chi) \in N_j \quad \text{для всех} \quad \psi \in \phi + N_k \quad \text{и} \quad \chi \in B.$$

Согласно [10, теорема 1.37], $b_j = \sup\limits_{\chi \in B} |\chi|_{\infty,j} < \infty$. Используя рассуждения из шага 1 доказательства, можно найти целое число $k \geqslant j$ такое, что для всех $\psi \in \phi + N_k$ имеем

$$\max_{-j \leqslant s \leqslant j} |DH(\psi(s)) - DH(\phi(s))| < \frac{1}{jb_j}.$$

Для таких ψ и всех $\chi \in B$ получаем

$$\begin{aligned} |A(\psi,\chi) - A(\phi,\chi)|_{\infty,j} &\leqslant \max_{-j \leqslant s \leqslant j} |DH(\psi(s)) - DH(\phi(s))||\chi|_{\infty,j} \leqslant \\ &\leqslant \max_{-j \leqslant s \leqslant j} |DH(\psi(s)) - DH(\phi(s))| b_j < \frac{1}{j}, \end{aligned}$$

или

$$A(\psi,\chi) - A(\phi,\chi) \in N_j \quad \text{для всех} \quad \psi \in \phi + N_k \quad \text{и} \quad \chi \in B.$$

□

Следствие 7.3. *Отображение $g : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$, заданное как $g(t,\phi) = J((S_h \circ P_o)(\phi), t)$, является C^1_F-гладким.*

Результаты предыдущего раздела применяются к неавтономному уравнению (1.3) с g из предыдущего следствия и дают непрерывный процесс операторов решения $P(t,t_0)$, которые определены на открытых подмножествах C, и которые являются C^1_F-гладкими.

8. Приложение: Равномерная сходимость непрерывных линейных отображений на ограниченных подмножествах, C^1_F-гладкость

Пусть V, W — топологические векторные пространства над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. На $L_c = L_c(V,W)$ топология β равномерной сходимости на ограниченных множествах определяется следующим образом. Для окрестности N точки 0 в W и ограниченного множества $B \subset V$ окрестность $U_{N,B}$ точки 0 в L_c определяется как

$$U_{N,B} = \{A \in L_c : TB \subset N\}.$$

Каждое конечное пересечение таких множеств U_{N_j,B_j}, $j \in \{1,\ldots,J\}$, содержит множество того же вида из-за вложения

$$\bigcap_{j=1}^{J} U_{N_j,B_j} \supset \left\{T \in L_c : T\left(\bigcup_{j=1}^{J} B_j\right) \subset \bigcap_{j=1}^{J} N_j\right\}$$

в силу того, что конечные объединения ограниченных множеств ограничены, а конечные пересечения окрестностей 0 являются окрестностями 0. Тогда топология β — это множество всех $O \subset L_c$ обладающих таким свойством, что для каждого $A \in O$ существует окрестность N точки 0 в W и ограниченное множество $B \subset V$ с $A + U_{N,B} \subset O$.

Мы называем отображение A из топологического пространства T в L_c *β-непрерывным* в точке $t \in T$, если оно непрерывно в t относительно топологии β на L_c.

Замечание 8.1 (см. [17, замечание 2.2 (iii)]). Чтобы проверить β-непрерывность отображения $A : T \to L_c$, где T — топологическое пространство, в некоторой точке $t \in T$ нужно показать, что для ограниченного подмножества $B \subset V$ и окрестности N точки 0 в W существует такая окрестность N_t точки t в T, что для всех $s \in N_t$ мы имеем $(A(s) - A(t))(B) \subset N$.

В случае, если T имеет счетные базы окрестностей, отображение A β-непрерывно в $t \in T$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $T \ni t_j \to t$ имеем $A(t_j) \to A(t)$. Для $A(t_j) \to A(t)$ нам нужно, чтобы для ограниченного подмножества $B \subset V$ и окрестности N точки 0 в W существовало $J \in \mathbb{N}$ такое, что

$$(A(t_j) - A(t))(B) \subset N \quad \text{для всех целых чисел} \quad j \geqslant J.$$

Утверждение 8.2 (см. [17, следствие 3.2 (i)]). *Пусть F и G — пространства Фреше, $U \subset F$ открыто. Отображение $g : U \to G$ является C^1_F-гладким тогда и только тогда, когда оно является C^1_{MB}-гладким с β-непрерывным $U \ni u \mapsto Dg(u) \in L_c(F,G)$.*

Непрерывные линейные отображения $L : F \to G$ между пространствами Фреше являются C^1_F-гладкими, поскольку они C^1_{MB}-гладкие с постоянной производной $DL(u) = L$ для всех $u \in F$, и дифференцирование $g \mapsto Dg$ C^1_F-отображений $U \to G$ линейно.

Следующие два утверждения включены для удобства, но не используются в разделах 2–7.

Утверждение 8.3 (см. [17, следствие 3.2 (ii)]). *В случае, если E — конечномерное нормированное пространство, каждое C^1_{MB}-отображение $g : E \supset U \to G$ является C^1_F-гладким.*

Для случаев отображений в бесконечномерных банаховых пространствах, которые являются C^1_{MB}-гладкими, но не C^1_F-гладкими, см. [16].

Утверждение 8.4 (см. [17, утверждение 4.2]). *Для банаховых пространств F and G и $U \subset F$ открытое отображение $g : F \supset U \to G$ является C^1_F-гладким тогда и только тогда, когда существует непрерывное отображение $D_g : U \to L_c(F, G)$ такое, что для любых $u \in U$ и*

$$\begin{gathered} \text{для каждого } \epsilon > 0 \text{ существует } \delta > 0 \text{ такое, что} \\ |g(v) - g(u) - D_g(u)(v - u)| \leqslant \epsilon |v - u| \quad \text{для всех} \quad v \in U \quad \text{с} \quad |v - u| < \delta. \end{gathered} \tag{F}$$

В этом случае $D_g(u)v$ является производной по направлению $Dg(u)v$ для всех $u \in U, v \in F$.

Утверждение 8.5 (правило цепи, см. [17, утверждение 4.3]). *Если $g : F \supset U \to G$ и $h : G \supset V \to H$ являются C^1_F-отображениями, с $g(U) \subset V$, тогда также $h \circ g$ является C^1_F-отображением.*

Утверждение 8.6 (см. [17, утверждение 4.4]). *Пусть даны пространства Фреше F_1, F_2, G. Для непрерывного отображения $g : F_1 \times F_2 \supset U \to G$, где U — открытое множество, следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Для всех $(u_1, u_2) \in U$ и всех $v_k \in F_k$, $k \in \{1, 2\}$, g имеет частную производную $D_k g(u_1, u_2)v_k \in G$, все отображения*

$$D_k g(u_1, u_2) : F_k \to G, \quad (u_1, u_2) \in U, \quad k \in \{1, 2\},$$

линейны и непрерывны, и отображения

$$U \ni (u_1, u_2) \mapsto D_k g(u_1, u_2) \in L_c(F_k, G), \quad k \in \{1, 2\},$$

β-непрерывны.

2. *g является C^1_F-гладким.*

В таком случае для всех $(u_1, u_2) \in U$, $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$

$$Dg(u_1, u_2)(v_1, v_2) = D_1 g(u_1, u_2)v_1 + D_2 g(u_1, u_2)v_2.$$

Теорема 8.7 (см. [17, теорема 5.2]). *Пусть заданы пространство Фреше T, банахово пространство B, открытые множества $V \subset T$ и $O_B \subset B$, а также C^1_F-отображение $A : V \times O_B \to B$. Предположим, что для замкнутого множества $M \subset O_B$ выполнено $A(V \times M) \subset M$, а A — равномерное сжатие в том смысле, что существует $k \in [0, 1)$ такое, что*

$$|A(t, x) - A(t, y)| \leqslant k|x - y|$$

для всех $t \in V, x \in O_B$, $y \in O_B$. Тогда отображение $g : V \to B$, заданное как $g(t) = A(t, g(t)) \in M$, является C^1_F-гладким.

Утверждение 8.8 (см. [17, утверждение 10.1 (iii)] для $T = \infty$). *Отображение*

$$E^{10}_\infty : C^1_\infty \times \mathbb{R} \to C, \quad E^{10}_\infty(\phi, t) = \phi_t,$$

является C^1_F-гладким и

$$\begin{aligned} D_1 E^{10}_\infty(\phi, t)\hat{\phi} &= \hat{\phi}_t, \\ D_2 E^{10}_\infty(\phi, t)t_* &= t_*(\phi')_t. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bastiani A.* Applications différentiables et varietés de dimension infinie// J. Anal. Math. — 1964. — *13.* — С. 1–114.
2. *Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H.-O.* Delay equations: functional-, complex- and nonlinear analysis. — New York: Springer, 1995.
3. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to Functional Differential Equations. — New York: Springer, 1993.
4. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1982. — *7.* — С. 65–222.
5. *Hino Y., Murakami S., Naito T.* Functional Differential Equations with Infinite Delay. — Berlin: Springer, 1991.
6. *Krisztin T. Личное общение.*
7. *Krisztin T., Walther H. O.* Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay// Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. — 2017. — *49.* — С. 95–112.
8. *Matsunaga H., Murakami S., Nagabuchi Y., Nguyen V. M.* Center manifold theorem and stability for integral equations with infinite delay// Funkcial. Ekvac. — 2015. — *58.* — С. 87–134.
9. *Michal A. D.* Differential calculus in linear topological spaces// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1938. — *24.* — С. 340–342.
10. *Rudin W.* Functional analysis. — New York: McGraw-Hill, 1973.
11. *Schumacher K.* Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1978. — *67.* — С. 315–335.
12. *Sengadir T.* Semigroups on Fréchet spaces and equations with infinite delay// Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. — 2007. — *117.* — С. 71–84.
13. *Walther H.-O.* Differential equations with locally bounded delay// J. Differ. Equ. — 2012. — *252.* — С. 3001–3039.
14. *Walther H. O.* Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2016. — *48.* — С. 507–537.
15. *Walther H. O.* Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — *85.* — С. 1–29.
16. *Walther H. O.* Maps which are continuously differentiable in the sense of Michal and Bastiani but not of Fréchet// Contemp. Math. Fundam. Directions. — 2017. — *63.* — С. 543–556.
17. *Walther H. O.* Differentiability in Fréchet spaces and delay differential equations// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2019. — *13.* — С. 1–44.

Hans-Otto Walther
Mathematisches Institut, Universität Gießen, Gießen, Germany
E-mail: Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-483-506 UDC 517.929 + 517.968.7

Delay Differential Equations with Differentiable Solution Operators on Open Domains in $C((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ and Processes for Volterra Integro-Differential Equations

© 2021 **H.-O. Walther**

Abstract. For autonomous delay differential equations $x'(t) = f(x_t)$ we construct a continuous semiflow of continuously differentiable solution operators $x_0 \mapsto x_t$, $t \geqslant 0$, on open subsets of the Fréchet space $C((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$. For nonautonomous equations this yields a continuous process of differentiable solution operators. As an application, we obtain processes which incorporate all solutions of Volterra integro-differential equations $x'(t) = \int_0^t k(t,s)h(x(s))ds$.

REFERENCES

1. A. Bastiani, "Applications différentiables et varietés de dimension infinie," *J. Anal. Math.*, 1964, **13**, 1–114.
2. O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M. Verduyn Lunel, and H.-O. Walther, *Delay equations: functional-, complex- and nonlinear analysis*, Springer, New York, 1995.
3. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1993.
4. R. S. Hamilton, "The inverse function theorem of Nash and Moser," *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 1982, **7**, 65–222.
5. Y. Hino, S. Murakami, and T. Naito, *Functional Differential Equations with Infinite Delay*, Springer, Berlin, 1991.
6. T. Krisztin, *Personal communication*.
7. T. Krisztin and H. O. Walther, "Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay," *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2017, **49**, 95–112.
8. H. Matsunaga, S. Murakami, Y. Nagabuchi, and V. M. Nguyen, "Center manifold theorem and stability for integral equations with infinite delay," *Funkcial. Ekvac.*, 2015, **58**, 87–134.
9. A. D. Michal, "Differential calculus in linear topological spaces," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1938, **24**, 340–342.
10. W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
11. K. Schumacher, "Existence and continuous dependence for functional-differential equations with unbounded delay," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1978, **67**, 315–335.
12. T. Sengadir, "Semigroups on Fréchet spaces and equations with infinite delay," *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 2007, **117**, 71–84.
13. H.-O. Walther, "Differential equations with locally bounded delay," *J. Differ. Equ.*, 2012, **252**, 3001–3039.
14. H. O. Walther, "Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2016, **48**, 507–537.
15. H. O. Walther, "Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, **85**, 1–29.
16. H. O. Walther, "Maps which are continuously differentiable in the sense of Michal and Bastiani but not of Fréchet," *Contemp. Math. Fundam. Directions*, 2017, **63**, 543–556.
17. H. O. Walther, "Differentiability in Fréchet spaces and delay differential equations," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2019, **13**, 1–44.

Hans-Otto Walther
Mathematisches Institut, Universität Gießen, Gießen, Germany
E-mail: Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de