Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 455–471
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-455-471 УДК 517.98

О ВЫЧИСЛЕНИИ НОРМЫ МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА В ИДЕАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2021 г. **Э. Г. БАХТИГАРЕЕВА, М. Л. ГОЛЬДМАН**

Аннотация. Работа содержит доказательство общих результатов о вычислении норм монотонных операторов, действующих из одного идеального пространства в другое при условии согласования свойств выпуклости и вогнутости оператора и норм в идеальных пространствах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Работа посвящена обоснованию некоторых общих результатов о вычислении нормы монотонного оператора, действующего из одного нормированного (в более общем варианте — квазинормированного) идеального пространства в другое и обладающего свойством выпуклости, которое согласовано со свойствами выпуклости и вогнутости (квази)норм идеальных пространств. Понятие идеального пространства измеримых функций обобщает конструкцию банахова функционального пространства, введенную К. Беннеттом и Р. Шарпли [6]. Общие вопросы теории идеальных структур и банаховых функциональных пространств рассмотрены в книгах Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [1], С. Г. Крейна, Ю. И. Петунина и Е. М. Семенова [2], а также Й. Берга и Й. Лефстрема [7] и Х. Трибеля [3].

В данной работе мы используем определения и общие свойства идеальных пространств, представленные в работе [4]. Здесь отметим, что (квази)норма $\|\cdot\|_X$ в идеальном пространстве X обладает свойствами монотонности: если функция f измерима и $|f| \leqslant g \in X$, то $f \in X$, $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$; также $\|f\|_X < \infty \Rightarrow |f| < \infty$ почти всюду и, кроме того, если $0 \leqslant f_m \leqslant f_{m+1}$, $f_m \to f$ $(m \to \infty)$ почти всюду, то $\|f\|_X = \lim\limits_{m\to\infty} \|f_m\|_X$ (свойство Фату). В [4] доказано, в частности, что идеальное пространство полно, т. е. является (квази)банаховым, а также описаны идеальные оболочки для конусов функций со свойствами монотонности.

В данной работе при обосновании результатов о вычислении нормы оператора мы обобщаем и модифицируем подход, развитый в работе В. И. Буренкова и М. Л. Гольдмана [8]. Мы приводим также пример применения общих формул при вычислении нормы интегрального оператора. Ряд приложений доказанных здесь общих результатов в теории весовых пространств Лоренца и при вычислении ассоциированных норм на конусах функций со свойствами монотонности приведен в работе [5]. Отметим, что некоторые другие подходы к задачам такого типа развиты в работах А. Гогатишвили и В. Д. Степанова [9,10].

Структура работы такова. В разделе 2 сформулированы основные определения и приведены результаты о вычислении нормы оператора на конусе убывающих неотрицательных функций в идеальном пространстве как в невырожденном случае, так и при наличии вырождения (теорема 2.1). Леммы, необходимые для доказательства этой теоремы, рассмотрены в разделе 3. Раздел 4 содержит доказательство теоремы 2.1 и некоторых ее следствий. В разделе 5 приведены обобщения полученных результатов на более общие конусы функций с условиями монотонности (теорема 5.1). В разделе 6 рассмотрен пример применения общих результатов для вычисления нормы интегрального оператора со свойством выпуклости.

2. Общие теоремы о нормах операторов на конусах функций со свойствами монотонности

Пусть (M, Σ_M, β), (N, Σ_N, γ) — пространства с неотрицательными σ-аддитивными полными мерами β, γ; $S(M, \Sigma_M, \beta)$, $S(N, \Sigma_N, \gamma)$ — пространства вещественнозначных измеримых функций.

Говорят, что норма в идеальном пространстве $X \subset S(M, \Sigma_M, \beta)$ является *порядково непрерывной*, если

$$\{x_m \in X, m \in \mathbb{N};\ 0 \leqslant x_m \downarrow 0 \quad \beta - \text{a.e.}\} \Rightarrow \|x_m\|_X \downarrow 0. \tag{2.1}$$

Идеальное пространство $X \subset S(M, \Sigma_M, \beta)$ называется *l_p-вогнутым* для некоторого $p \in \mathbb{R}_+$, если

$$\left(\sum_m \|x_m\|_X^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\left(\sum_m |x_m|^p\right)^{1/p}\right\|_X. \tag{2.2}$$

Идеальное пространство $Y \subset S(N, \Sigma_N, \gamma)$ называется *l_q-выпуклым* для некоторого $q \in \mathbb{R}_+$, если

$$\left\|\left(\sum_m |y_m|^q\right)^{1/q}\right\|_Y \leqslant \left(\sum_m \|y_m\|_Y^q\right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

Это означает, что сходимость рядов в правой части (2.2) или (2.3) влечет сходимость рядов в левой части, и выполняются соответствующие неравенства.

Отметим, что любое нормированное идеальное пространство l_1-выпуклое, и l_q-выпуклость для $0 < q < 1$ приводит к неравенству треугольника в следующем виде:

$$\|f + g\|_Y \leqslant \left(\|f\|_Y^q + \|g\|_Y^q\right)^{1/q} \leqslant 2^{1/q-1}\left(\|f\|_Y + \|g\|_Y\right). \tag{2.4}$$

Действительно, согласно неравенству Йенсена для $0 < q < 1$

$$|f + g| \leqslant |f| + |g| \leqslant \left(|f|^q + |g|^q\right)^{1/q}.$$

Далее, применение (2.3) и неравенства Гёльдера (для двух слагаемых) влечёт

$$\|f + g\|_Y \leqslant \left\|\left(|f|^q + |g|^q\right)^{1/q}\right\|_Y \leqslant \left(\|f\|_Y^q + \|g\|_Y^q\right)^{1/q} \leqslant 2^{1/q-1}\left(\|f\|_Y + \|g\|_Y\right).$$

Отметим также, что пространство $Y = L_q(N, \gamma)$, $0 < q < \infty$, является l_ρ-выпуклым для любого $\rho \in (0, q]$ (см. лемму 4.1 ниже), и оно l_p-вогнутое для любого $p \in [q, \infty)$.

Рассмотрим конус $D \subset X$ неотрицательных функций с условием

$$f, g \in D;\ \alpha, \beta \geqslant 0 \Rightarrow \alpha f + \beta g \in D.$$

Оператор $T : D \to Y$ называется *l_r-выпуклым* при $0 < r < \infty$, если $\forall f_m \in D$, $m \in \mathbb{Z}$ таких, что $\left(\sum\limits_m f_m^r\right)^{1/r} \in D$,

$$\left|T\left[\left(\sum_m f_m^r\right)^{1/r}\right]\right| \leqslant \left(\sum_m |Tf_m|^r\right)^{1/r} \tag{2.5}$$

почти всюду на M; и $\forall f \in D$; $\alpha \geqslant 0 \Rightarrow T[\alpha f] = \alpha T[f]$.

Отметим, что l_1-выпуклость оператора T совпадает с сублинейностью:

$$\left| T\left[\left(\sum_m f_m\right)\right]\right| \leqslant \left(\sum_m |Tf_m|\right).$$

Оператор T называется *монотонным*, если

$$\{f, g \in D;\, 0 \leqslant f \leqslant g \quad \beta - \text{a.e.}\} \Rightarrow \{0 \leqslant Tf \leqslant Tg \quad \gamma - \text{a.e.}\}. \tag{2.6}$$

Примером l_r-выпуклого монотонного оператора является оператор

$$T\,[f] = (L[f^r])^{1/r},$$

где L — сублинейный монотонный оператор. Более того, эта формула иллюстрирует соответствие между l_r-выпуклым и сублинейным операторами.

Мы будем рассматривать случай $M = J := (a,b)$, $-\infty \leqslant a, b \leqslant \infty$, с неотрицательной борелевской мерой β и сужениями оператора на следующие конусы неотрицательных убывающих непрерывных слева функций на $J := (a,b)$:

$$\Omega = \{g \in X :\, 0 \leqslant g \downarrow;\, g(t) = g(t-0),\, t \in (a,b)\},$$
$$\dot{\Omega} = \left\{g \in \Omega :\, \lim_{t\to b-0} g(t) = 0\right\}. \tag{2.7}$$

Определим нормы сужений оператора:

$$\|T\|_\Omega = \sup\{\|T[g]\|_Y : g \in \Omega,\, \|g\|_X \leqslant 1\}, \tag{2.8}$$

$$\|T\|_{\dot{\Omega}} = \sup\left\{\|T[g]\|_Y : g \in \dot{\Omega},\, \|g\|_X \leqslant 1\right\}. \tag{2.9}$$

Обозначим

$$\dot{\Omega}_0 := \left\{\chi_{(a,t]} : a < t < b\right\},\ \Omega_0 := \dot{\Omega}_0 \bigcup \chi_{(a,b)}; \tag{2.10}$$

$$F(x,t) = T\left[\chi_{(a,t]}\right](x),\ a < t < b; \quad F(x,b) = T\left[\chi_{(a,b)}\right](x). \tag{2.11}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $0 < p \leqslant q \leqslant r < \infty$; $X \subset S(J,\beta)$ — *идеальное* l_p-*вогнутое пространство с порядково непрерывной (квази)нормой;* $Y \subset S(N,\gamma)$ — *идеальное* l_q-*выпуклое пространство, и* $T : \Omega \to Y$ — l_r-*выпуклый монотонный оператор.*

1. *Тогда справедливы соотношения*

$$\|T\|_{\dot{\Omega}} = \|T\|_{\dot{\Omega}_0} := \sup_{a<t<b}\left[\|F(\cdot,t)\|_Y \|\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1}\right]. \tag{2.12}$$

2. *При выполнении дополнительного условия невырожденности*

$$\|\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \tag{2.13}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_\Omega = \|T\|_{\dot{\Omega}} = \|T\|_{\dot{\Omega}_0} := \sup_{a<t<b}\left[\|F(\cdot,t)\|_Y \|\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1}\right]. \tag{2.14}$$

3. *При наличии вырождения*

$$\|\chi_{(a,b)}\|_X < \infty \tag{2.15}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_\Omega = \|T\|_{\Omega_0} := \max\left\{\|T\|_{\dot{\Omega}_0}, \|F(\cdot,b)\|_Y \|\chi_{(a,b)}(\cdot)\|_X^{-1}\right\}, \tag{2.16}$$

см. (2.11).

Замечание 2.1. Отметим, что в невырожденном случае (2.13)

$$\|\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \Rightarrow \Omega = \dot{\Omega},$$

так как

$$\left\{0 \leqslant g \downarrow,\, \lim_{t\to b-0} g(t) > 0\right\} \Rightarrow g \notin X. \tag{2.17}$$

Это означает, что в случае (2.13) справедливо равенство $\|T\|_\Omega = \|T\|_{\dot\Omega}$. Поэтому для вычисления $\|T\|_\Omega$ применима формула (2.12). Таким образом, справедливо соотношение (2.14), и часть 2 теоремы 2.1 следует из ее части 1.

Замечание 2.2. При доказательстве теоремы 2.1 мы сначала докажем общее утверждение, составляющее часть 3 этой теоремы. Затем отметим те упрощения (весьма значительные), которые возникают в этом рассуждении при доказательстве части 1 теоремы, причем независимо от выполнения или нарушения условия невырожденности (2.13). Эти упрощения связаны с тем, что в части 1 теоремы рассматривается конус $\dot\Omega$ вместо общего конуса Ω, см. (2.7).

3. Леммы

Лемма 3.1. *Пусть* $0 < q < s < \infty$; ω, ψ — *неотрицательные функции на* (a,b), $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, $\omega\uparrow$, $\psi\downarrow$; $\omega, \psi, \psi' \in C(a,b)$, $\psi(a) > \psi(b)$. *Определим*

$$\omega(a) := \lim_{t\to a+0}\omega(t),\ \omega(b) := \lim_{t\to b-0}\omega(t),\ \psi(a) := \lim_{t\to a+0}\psi(t),\ \psi(b) := \lim_{t\to b-0}\psi(t).$$

Если $\psi(b) = 0$, *то полагаем* $C := 0$. *Если* $\psi(b) > 0$, *то полагаем, что выполнено условие* $C := \omega(b)\psi(b) < \infty$. *Для* $r \in [q,s]$ *введем оператор*

$$A_r(a,b) = \left\{\int\limits_{(a,b)} \omega(t)^r \left(-d\left[\psi(t)^r\right]\right)\right\}^{1/r}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\left\{C^s + A_s(a,b)^s\right\}^{1/s} \leqslant \left\{C^q + A_q(a,b)^q\right\}^{1/q}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Полагаем $A_q(a,b) < \infty$.

1. Вначале рассмотрим случай $b \in (a,\infty]$, $\psi(b) = 0$.

$$A_s(a,b)^s = \int\limits_{(a,b)} \omega^s\left(-d\left[(\psi^q)^{s/q}\right]\right) = \frac{s}{q}\int\limits_{(a,b)} \omega^s\psi^{s-q}\left(-d\left[\psi^q\right]\right) = \frac{s}{q}\int\limits_{(a,b)} [\omega\psi]^{s-q}\omega^q\left(-d\left[\psi^q\right]\right).$$

Отметим, что возрастание ω^q вместе с условием $\psi(b) = 0$ влечёт

$$[\omega(t)\psi(t)]^{s-q} \leqslant \left[\int\limits_{[t,b)} \omega(\tau)^q\left(-d\left[\psi(\tau)^q\right]\right)\right]^{s/q-1},\ t \in (a,b).$$

Поэтому

$$A_s(a,b)^s \leqslant \frac{s}{q}\int\limits_{(a,b)}\left[\int\limits_{[t,b)} \omega(\tau)^q\left(-d\left[\psi(\tau)^q\right]\right)\right]^{s/q-1}\omega(t)^q\left(-d\left[\psi(t)^q\right]\right) =$$

$$= \int\limits_{(a,b)}\left(-d\left[\left(\int\limits_{[t,b)} \omega(\tau)^q\left(-d\left[\psi(\tau)^q\right]\right)\right)^{s/q}\right]\right) = \left[\int\limits_{(a,b)} \omega^q\left(-d\left[\psi^q\right]\right)\right]^{s/q} = A_q(a,b)^s.$$

2. Теперь пусть $b \in \mathbb{R}_+$, $\psi(b) > 0$, $C = \omega(b)\psi(b) < \infty$. Мы продолжаем функции ω, ψ на $[b, b+1)$ так, что $\omega(\tau) = \omega(b)$, $\tau \in [b, b+1)$; $\psi(\tau)\downarrow$, $\psi(b+1) = 0$. Далее применяем результат, полученный на первом шаге, на интервале $(a, b+1)$ и получаем

$$A_s(a,b+1) \leqslant A_q(a,b+1). \tag{3.3}$$

Далее,

$$A_s(a,b+1)^s = A_s(a,b)^s + \int\limits_{[b,b+1)} \omega(t)^s\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right) =$$

$$= A_s(a,b)^s + \omega(b)^s \int\limits_{[b,b+1)} (-d\,[\psi(t)^s]) = A_s(a,b)^s + \omega(b)^s\psi(b)^s.$$

Аналогично, $A_q(a,b+1)^q = A_q(a,b)^q + \omega(b)^q\psi(b)^q$, и (3.3) приводит к (3.2).

3. Рассмотрим последний случай $b=\infty$, $\psi(\infty)>0$. Для этого применим полученное выше неравенство в случае $b<\infty$, $\psi(b)>0$:

$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s(a,b)^s\}^{1/s} \leqslant \{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q(a,b)^q\}^{1/q}.$$

Затем перейдем к пределу при $b\to+\infty$. Тогда

$$\{\omega(\infty)^s\psi(\infty)^s + A_s(a,\infty)^s\}^{1/s} \leqslant \{\omega(\infty)^q\psi(\infty)^q + A_q(a,\infty)^q\}^{1/q}.$$

□

Замечание 3.1. Оценка (3.2) остается верной в случае замены C константой $D\in(C,\infty)$.

Доказательство. При $A,B>0$, $0<q<s<\infty$ рассмотрим функцию $\varphi(x) = (x^s+A^s)^{1/s}(x^q+B^q)^{-1/q}, x\in\mathbb{R}_+$.

1. Если $A\leqslant B$, то $\varphi(x)\leqslant (x^s+B^s)^{1/s}(x^q+B^q)^{-1/q}\leqslant 1$, $x\in\mathbb{R}_+$.

2. Пусть $A>B$. Тогда $\varphi(0)=AB^{-1}>1$. Более того,

$$\varphi'(x) = (x^s+A^s)^{1/s-1}(x^q+B^q)^{-1/q-1}x^{q-1}(x^{s-q}B^q - A^s).$$

Таким образом, функция φ убывает от $\varphi(0)>1$ до $\varphi(x_1)<1$, $x_1=(A^sB^{-q})^{1/(s-q)}$, затем возрастает до $\varphi(+\infty)=1$. Поэтому если $\varphi(x_0)\leqslant 1$ для некоторого $x_0>0$, то $\varphi(x)\leqslant 1$ для всех $x\geqslant x_0$. Далее, обозначим $A=A_s(a,b)$, $B=A_q(a,b)$ и заметим, что согласно (3.2)

$$\varphi(C) = (C^s + A_s(a,b)^s)^{1/s}\,(C^q + A_q(a,b)^q)^{-1/q} \leqslant 1.$$

Поэтому для любого $D\geqslant C$ имеем $\varphi(D)\leqslant 1$. □

Лемма 3.2. *Пусть*

$$\omega_m,\ \psi_m\geqslant 0,\ m\in\mathbb{Z};\ \omega_m\uparrow,\ \psi_m\downarrow.$$

Определим

$$\omega_\infty = \lim_{m\to+\infty}\omega_m,\ \psi_\infty = \lim_{m\to+\infty}\psi_m,\ C := \omega_\infty\cdot\psi_\infty. \tag{3.4}$$

Здесь мы полагаем, что

$$\psi_\infty = 0 \Rightarrow C=0;\ \psi_\infty>0\Rightarrow C<\infty.$$

Тогда при $0<q<s<\infty$

$$\left\{C^s + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^s\left(\psi_m^s - \psi_{m+1}^s\right)\right\}^{1/s} \leqslant \left\{C^q + \sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^q\left(\psi_m^q - \psi_{m+1}^q\right)\right\}^{1/q}. \tag{3.5}$$

Оценка (3.5) *остается верной при замене* C *константой* $D\in(C,\infty)$.

Доказательство. Введем функцию $\psi\in C^1(\mathbb{R}_+)$, $0\leqslant\psi\downarrow$; $\psi(2^m)=\psi_m, m\in\mathbb{Z}$.

Далее, для $n\in\mathbb{N}$ введем функцию $\omega(n,\cdot)\in C(\mathbb{R}_+)$ на $[2^m,2^{m+1}]$, $m\in\mathbb{Z}$, следующим образом:

$$\omega(n,t) = \begin{cases}\omega_m,\ 2^m\leqslant t\leqslant 2^{m+1}-2^{m-1}/n;\\ \text{линейная при } 2^{m+1}-2^{m-1}/n\leqslant t\leqslant 2^{m+1}.\end{cases}$$

Отметим, что

$$\psi(\infty) := \lim_{t\to+\infty}\psi(t) = \lim_{m\to+\infty}\psi_m = \psi_\infty.$$

Если $\psi_\infty=0$, то полагаем $C=0$. Далее, если $\omega_\infty = \lim\limits_{m\to+\infty}\omega_m<\infty$, то имеем $\omega(n,\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty}\omega(n,t) = \omega_\infty<\infty$ (ω_∞ не зависит от $n\in\mathbb{N}$), и мы полагаем $C:=\omega(n,\infty)\psi(\infty) = \omega_\infty\psi_\infty<\infty$. Согласно (3.2) справедливо неравенство

$$I_n := \left\{C^s + \int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(n,t)^s\,(-d\,[\psi(t)^s])\right\}^{1/s} \leqslant J_n := \left\{C^q + \int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(n,t)^q\,(-d\,[\psi(t)^q])\right\}^{1/q}.$$

Отметим, что $\{\omega(n,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ — убывающая последовательность, и

$$\lim_{n\to+\infty}\omega(n,t)=\omega(\infty,t)=\omega_m,\ t\in[2^m,2^{m+1}),\quad m\in\mathbb{Z}.$$

Поэтому по теореме Леви о монотонной сходимости можно перейти к пределу при $n\to+\infty$ в последнем неравенстве, что влечёт

$$I_\infty:=\left\{C^s+\int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(\infty,t)^s\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right)\right\}^{1/s}\leqslant J_\infty:=\left\{C^q+\int\limits_{\mathbb{R}_+}\omega(\infty,t)^q\left(-d\left[\psi(t)^q\right]\right)\right\}^{1/q}.$$

Но

$$I_\infty:=\left\{C^s+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\int\limits_{[2^m,2^{m+1})}\omega(\infty,t)^s\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right)\right\}^{1/s}=\left\{C^s+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^s\int\limits_{[2^m,2^{m+1})}\left(-d\left[\psi(t)^s\right]\right)\right\}^{1/s},$$

что совпадает с левой частью (3.5). Аналогично,

$$J_\infty=\left\{C^q+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^q\int\limits_{[2^m,2^{m+1})}\left(-d\left[\psi(t)^q\right]\right)\right\}^{1/q}=\left\{C^q+\sum_{m\in\mathbb{Z}}\omega_m^q\left(\psi_m^q-\psi_{m+1}^q\right)\right\}^{1/q}.$$

Эти суждения приводят к (3.5). □

Следствие 3.1. *Пусть*

$$\omega_m,\,\psi_m\geqslant 0,\ m\in\{0,1,\dots,m_0+1\},\ \omega_m\uparrow,\ \psi_m\downarrow,\ C=\omega_{m_0+1}\cdot\psi_{m_0+1}.\tag{3.6}$$

Тогда при $0<q\leqslant s<\infty$

$$\left\{C^s+\sum_{m=0}^{m_0}\omega_m^s\left(\psi_m^s-\psi_{m+1}^s\right)\right\}^{1/s}\leqslant\left\{C^q+\sum_{m=0}^{m_0}\omega_m^q\left(\psi_m^q-\psi_{m+1}^q\right)\right\}^{1/q}.\tag{3.7}$$

Оценка (3.7) *верна при* $m_0=\infty$ *с константой*

$$C=\omega_\infty\cdot\psi_\infty,\quad \omega_\infty=\lim_{m\to+\infty}\omega_m,\quad \psi_\infty=\lim_{m\to+\infty}\psi_m;\quad \infty\cdot 0:=0.$$

Эта оценка остается справедливой в случае замены C *константой* $D\in(C,\infty)$.

Действительно, в (3.5) полагаем $\omega_m=0$, $\psi_m=\psi_0$, $m\leqslant -1$; если $m_0<\infty$,

$$\omega_m=\omega_{m_0+1},\quad \psi_m=\psi_{m_0+1},\quad m\geqslant m_0+2,$$

тогда (3.5) влечет (3.7).

Замечание 3.2. Мы получили дискретные оценки (3.5) и (3.7) как следствия интегральной оценки (3.2). Для приложений полезно показать, что (3.2), в свою очередь, можно получить из дискретных оценок. Для этого достаточно потребовать, чтобы ω была непрерывной слева, а ψ — непрерывной справа на (a,b). Для полноты изложения приведем соответствующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть* $0<q<s<\infty$; ω,ψ — *неотрицательные функции на* (a,b); $-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$, $\omega\uparrow$, $\psi\downarrow$; ω *непрерывна слева на* (a,b), ψ *непрерывна справа на* (a,b); $\psi(b)<\psi(a)<\infty$. *Определим*

$$\omega(a):=\lim_{t\to a+0}\omega(t),\quad \omega(b):=\lim_{t\to b-0}\omega(t),\quad \psi(a):=\lim_{t\to a+0}\psi(t),\quad \psi(b):=\lim_{t\to b-0}\psi(t).$$

Если $\psi(b)=0$, *полагаем* $C:=0$. *Если* $\psi(b)>0$, *требуем, чтобы* $C:=\omega(b)\psi(b)<\infty$. *При* $r\in[q,s]$ *введем* $A_r(a,b)$ *формулой* (3.1). *Тогда выполнена оценка* (3.2).

Доказательство.

1. Сначала мы получим некоторые полезные равенства для интеграла Лебега—Стилтьеса (в рассматриваемом здесь случае он совпадает с интегралом Римана—Стилтьеса). Для любого $r \in \mathbb{R}_+$, $a \leqslant t < \tau < b$ и убывающей на (a, b) непрерывной справа в точке t (отметим, что в точке $t = a$ это происходит автоматически, так как $\psi(a) = \psi(a+0)$) функции ψ выполнено равенство

$$\int\limits_{(t,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.8}$$

Действительно,

$$\int\limits_{(t,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \lim_{\rho\to t+0} \int\limits_{[\rho,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \lim_{\rho\to t+0} [\psi(\rho)^r - \psi(\tau)^r] = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r.$$

Здесь мы используем равенство

$$\int\limits_{[\rho,\tau]} (-d\,[\psi^r]) = \psi(\rho)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.9}$$

Это следует из определения интеграла Римана—Стилтьеса, поскольку все интегральные суммы интеграла по отрезку $[\rho, \tau]$ совпадают с правой частью этой формулы. Таким образом, выполнено (3.8).

Переходя к пределу в этой формуле при $t = a$, $\tau \to b - 0$, получаем

$$\int\limits_{(a,b)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \psi(a)^r - \psi(b)^r. \tag{3.10}$$

Для любого $r \in \mathbb{R}_+$, $a < t < \tau \leqslant b$ и убывающей на (a, b) непрерывной слева в точке τ (отметим, что в точке $\tau = b$ это происходит автоматически, так как $\psi(b) = \psi(b-0)$) функции ψ выполнено равенство

$$\int\limits_{[t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.11}$$

Действительно,

$$\int\limits_{[t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to\tau-0} \int\limits_{[t,\rho]} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to\tau-0} [\psi(t)^r - \psi(\rho)^r] = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r.$$

Более того, если функция ψ непрерывна слева в точке τ и непрерывна справа в точке t, то

$$\int\limits_{(t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r. \tag{3.12}$$

Применяя (3.11), мы приходим к

$$\int\limits_{(t,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to t+0} \int\limits_{[\rho,\tau)} (-d\,[\psi(t)^r]) = \lim_{\rho\to t+0} [\psi(\rho)^r - \psi(\tau)^r] = \psi(t)^r - \psi(\tau)^r.$$

Положим, что $A_q(a, b) < \infty$ (в противном случае в (3.2) нечего доказывать). Если $\omega(a) > 0$, это предположение влечёт $\psi(a) < \infty$. Действительно, функция ω возрастает на (a, b), таким образом, $\omega(t) \geqslant \omega(a)$, $t \in (a, b)$, и

$$A_q(a,b)^q = \int\limits_{(a,b)} \omega^q\,(-d\,[\psi^q]) \geqslant \omega(a)^q \int\limits_{(a,b)} (-d\,[\psi^q]) = \omega(a)^q\,[\psi(a)^q - \psi(b)^q]\,.$$

Случай $\omega(a) = 0$ будет рассмотрен на пятом шаге ниже.

2. Вначале рассмотрим случай $0 < \omega(a) = \omega(b)$. Тогда $\omega(t) = \omega(b)$, $t \in [a, b)$, поэтому формула (3.10) с $r = s$ и $r = q$ приводит к равенству:

$$A_s^s = \omega(b)^s \int_{(a,b)} (-d[\psi(t)^s]) = \omega(b)^s [\psi(a)^s - \psi(b)^s],$$

$$\{\omega(b)^s \psi(b)^s + A_s^s\}^{1/s} = \omega(b)\psi(a) = \{\omega(b)^q \psi(b)^q + A_q^q\}^{1/q}.$$

3. Пусть $0 < \omega(a) < \omega(b) < \infty$. При $1 < d < \omega(b)/\omega(a)$ выберем $t_m \in [a, b)$ следующим образом: $t_0 = a$, $t_1 = \sup\{t > a : \omega(t) \leqslant d\omega(a)\}$,

$$\begin{aligned} &t_{m+1} = \sup\{t > a : \omega(t) \leqslant d\omega(t_m + 0)\}, \ m = 1, 2, \ldots, m_0 - 1; \\ &\omega(t_{m_0} + 0) < \omega(b) \leqslant d\omega(t_{m_0} + 0). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} &1. \quad t_{m+1} > t_m, \ m = 0, 1, \ldots, m_0; \\ &2. \quad \omega(t_m + 0) \leqslant \omega(t) \leqslant d\omega(t_m + 0), t \in \delta_m := (t_m, t_{m+1}], \\ &m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1; \\ &3. \quad \omega(t) > d\omega(t_m + 0), \ \forall t \in (t_{m+1}, b); \ m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Таким образом, $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m_0} < t_{m_0+1} := b$.

Теперь получим оценки для A_s^s, A_q^q. Обозначим $\delta_m := (t_m, t_{m+1}]$, $m = 0, 1, \ldots, m_0 - 1$, $\delta_{m_0} = (t_{m_0}, t_{m_0+1})$.

$$A_s^s = \int_{(a,b)} \omega^s (-d[\psi^s]) = \sum_{m=0}^{m_0-1} \int_{\delta_m} \omega^s (-d[\psi^s]) + \int_{(t_{m_0}, b)} \omega^s (-d[\psi^s]).$$

Функция ω^s возрастает, так что

$$A_s^s \leqslant \sum_{m=0}^{m_0-1} \omega(t_{m+1})^s \int_{\delta_m} (-d[\psi^s]) + \omega(b)^s \int_{(t_{m_0}, b)} (-d[\psi^s]) = \sum_{m=0}^{m_0} \omega(t_{m+1})^s [\psi(t_m)^s - \psi(t_{m+1})^s] \leqslant$$

$$\leqslant d^s \sum_{m=0}^{m_0} \omega(t_m + 0)^s [\psi(t_m)^s - \psi(t_{m+1})^s].$$

На втором шаге мы учли, что ψ непрерывна справа на (a, b) и $\psi(b - 0) = \psi(b)$, так что формулы (3.8) при $0 \leqslant m \leqslant m_0 - 1$ и (3.12) при $m = m_0$ применимы. Тогда, согласно (3.12) с $t = t_{m_0}$, $\tau = b$, $r = s$ получаем

$$\int_{(t_{m_0}, b)} (-d[\psi^s]) = \psi(t_{m_0})^s - \psi(b)^s = \psi(t_{m_0})^s - \psi(t_{m_0+1})^s.$$

На последнем шаге мы применяем (3.13). Обозначим

$$\omega_m := \omega(t_m + 0), \quad \psi_m := \psi(t_m), \quad m = 0, \ldots, m_0; \quad \omega_{m_0+1} := \omega(b), \quad \psi_{m_0+1} := \psi(b).$$

Тогда

$$A_s^s \leqslant d^s \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^s \left[\psi_m^s - \psi_{m+1}^s\right]. \tag{3.15}$$

Аналогично,

$$A_q^q = \int_{(a,b)} \omega^q (-d[\psi^q]) = \sum_{m=0}^{m_0-1} \int_{\delta_m} \omega^q (-d[\psi^q]) + \int_{(t_{m_0}, b)} \omega^q (-d[\psi^q]),$$

$$A_q^q = \sum_{m=0}^{m_0} \int_{\delta_m} \omega^q (-d[\psi^q]) \geqslant \sum_{m=0}^{m_0} \omega(t_m + 0)^q [\psi(t_m)^q - \psi(t_{m+1})^q],$$

так что
$$A_q^q \geqslant \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^q \left[\psi_m^q - \psi_{m+1}^q\right]. \tag{3.16}$$
Теперь применим (3.7) с $C = \omega_{m_0+1} \cdot \psi_{m_0+1} = \omega(b)\psi(b)$ и получим
$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s^s\}^{1/s} \leqslant \left\{d^s\omega(b)^s\psi(b)^s + d^s \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^s \left[\psi_m^s - \psi_{m+1}^s\right]\right\}^{1/s} \leqslant$$
$$\leqslant d\left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + \sum_{m=0}^{m_0} \omega_m^q \left[\psi_m^q - \psi_{m+1}^q\right]\right\}^{1/q} \leqslant d\left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q^q\right\}^{1/q}.$$
Таким образом,
$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s^s\}^{1/s} \leqslant d\left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q^q\right\}^{1/q}.$$
В последнем неравенстве все слагаемые в $\{\}$ не зависят от $d > 1$. Тогда переход к пределу при $d \to 1+0$ приводит к (3.2).

4. Пусть $0 < \omega(a) < \omega(b) = \infty$. В этом случае мы полагаем, что $\psi(b) = 0$, $C = 0$. Для любого $d > 1$ определим t_m, $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$ формулами (3.13) со свойствами (3.14) для $m \in \mathbb{N}_0$ (в этом случае $m_0 = \infty$). Таким образом, выполнены оценки (3.15), (3.16). Более того, здесь $\psi_\infty = \psi(b) = 0$. Применение (3.7) с $C = 0$, $m_0 = \infty$ влечёт
$$A_s \leqslant dA_q,\ \forall d > 1 \Rightarrow A_s \leqslant A_q.$$

5. Осталось рассмотреть случай $\omega(a) = 0$, $\psi(a) \leqslant \infty$. Без ограничения общности считаем, что $\omega(\delta) > 0$, $\psi(\delta) < \infty$, $\delta \in (a, b)$. Для любого $\delta \in (a, b)$ верна оценка
$$\{\omega(b)^s\psi(b)^s + A_s^s(\delta, b)\}^{1/s} \leqslant \left\{\omega(b)^q\psi(b)^q + A_q^q(\delta, b)\right\}^{1/q}, \tag{3.17}$$
которая была доказана выше (с δ вместо a). Отметим, что $A_r(\delta, b) \to A_r(a, b)$ $(\delta \to a+0)$ при $r = q$, $r = s$.

Таким образом, мы получаем (3.2), переходя к пределу при $\delta \to a + 0$ в (3.17). □

4. Доказательство теоремы 2.1. Следствия

4.1. Доказательство теоремы 2.1.

1. Докажем часть 3 этой теоремы, т. е. получим формулу (2.16). Пусть
$$a < t_m < t_{m+1} < b, \quad m \in \mathbb{Z}; \quad \lim_{m\to-\infty} t_m = a, \quad \lim_{m\to+\infty} t_m = b.$$

Для функции $g \in \Omega$ рассмотрим ее «ступенчатую мажоранту» $\tilde{g}$:
$$\tilde{g}(u) = \sum_m g(t_m)\chi_{\Delta_m}(u); \quad \Delta_m = (t_m, t_{m+1}], \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{4.1}$$
Отметим, что для любого $u \in (a, b)$, $s > 0$, выполнено $\chi_{\Delta_m}(u)^s = \chi_{\Delta_m}(u)$, и
$$\tilde{g}(u) = \left(\sum_m g(t_m)^s\chi_{\Delta_m}(u)^s\right)^{1/s}, \tag{4.2}$$
так как слагаемые в (4.1) не пересекаются, и для каждого $u \in (a, b)$ только одно слагаемое не равно нулю. Обозначим
$$B := \lim_{u\to b-0} g(u); \quad 0 \leqslant c_m(s) = \left(g(t_{m-1})^s - g(t_m)^s\right)^{1/s}. \tag{4.3}$$
Тогда для любого $u \in (a, b)$, $s > 0$,
$$\tilde{g}(u) = \left(\sum_m c_m(s)^s\chi_{(a,t_m]}(u)^s + B^s\chi_{(a,b)}(u)^s\right)^{1/s}, \tag{4.4}$$

Равенство (4.4) следует из (4.2) после применения преобразования Абеля в форме
$$\sum_{m=l}^{n} e_m\left(d_{m+1}-d_m\right)=\sum_{m=l}^{n}\left(e_m-e_{m+1}\right)d_{m+1}+e_{n+1}d_{n+1}-e_l d_l, \tag{4.5}$$
если мы положим
$$e_m=g(t_m)^s, \quad d_m=\chi_{(a,t_m]}(u)^s=\chi_{(a,t_m]}(u)$$
и учтём, что
$$\lim_{n\to+\infty}\left(e_{n+1}d_{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(g(t_{n+1})^s\chi_{(a,t_{n+1}]}(u)^s\right)=B^s\chi_{(a,b)}(u)^s;$$
$$\lim_{l\to-\infty}\left(e_l d_l\right)=\lim_{l\to-\infty}\left(g(t_l)^s\chi_{(a,t_l]}(u)^s\right)=0.$$
Далее, переходя к пределу в (4.5) при $n\to+\infty$, $l\to-\infty$ и используя равенство
$$\sum_m\left(e_m-e_{m+1}\right)d_{m+1}=\sum_m\left(e_{m-1}-e_m\right)d_m,$$
получаем (4.4).

Согласно (4.4) с $s=r$ имеем $\tilde g(u)=\left(f(u)^r+h(u)^r\right)^{1/r}$;
$$f(u)=\left(\sum_m c_m(r)^r\chi_{(a,t_m]}(u)^r\right)^{1/r}; \quad h(u)=B\chi_{(a,b)}(u).$$

Здесь $0\leqslant g\leqslant\tilde g$, и для монотонного l_r-выпуклого оператора T выполнено:
$$0\leqslant T[g]\leqslant T[\tilde g]\leqslant\left(T[f]^r+T[h]^r\right)^{1/r}.$$

Далее, согласно (2.5) с $f_m=c_m(r)\chi_{(a,t_m]}(u)$, $m\in\mathbb{Z}$,
$$T[f]^r\leqslant\sum_m c_m(r)^r T\left[\chi_{(a,t_m]}\right]^r; \quad T[h]^r=B^rT\left[\chi_{(a,b)}\right]^r.$$

Поэтому
$$0\leqslant T[g](x)\leqslant T[\tilde g](x)\leqslant\left\{\sum_m c_m(r)^rF(x,t_m)^r+B^rF(x,b)^r\right\}^{1/r}. \tag{4.6}$$

При $0<q<r$ мы применяем следствие 3.1 леммы 3.2 с $s=r$, $\omega_m=F(x,t_m)\uparrow$, $\psi_m=g(t_{m-1})\downarrow$. Таким образом,
$$c_m(r)^r=g(t_{m-1})^r-g(t_m)^r=\psi_m^r-\psi_{m+1}^r;$$
$$c_m(q)^q=g(t_{m-1})^q-g(t_m)^q=\psi_m^q-\psi_{m+1}^q.$$

Здесь $A=\lim\limits_{m\to+\infty}\omega_m=\lim\limits_{m\to+\infty}F(x,t_m):=F_0(x,b)$; $B=\lim\limits_{m\to-\infty}\psi_m=g(b-0)$, см. (4.3). Отметим, что $\chi_{(a,t]}\leqslant\chi_{(a,b)}$, $t\in(a,b)$. Поэтому
$$F(x,t)\leqslant F(x,b),\ t\in(a,b) \quad\Rightarrow\quad F_0(x,b)\leqslant F(x,b). \tag{4.7}$$

Итак,
$$C\equiv AB=F_0(x,b)B\leqslant F(x,b)B\equiv D,$$
и мы приходим к (3.5) с $s=r$ и заменой C на D в наших обозначениях:
$$\left\{\sum_m c_m(r)^rF(x,t_m)^r+B^rF(x,b)^r\right\}^{1/r}\leqslant\left\{\sum_m c_m(q)^qF(x,t_m)^q+B^qF(x,b)^q\right\}^{1/q}.$$

Согласно (4.6) имеем
$$0\leqslant T[g](x)\leqslant\left\{\sum_m\left[g(t_{m-1})^q-g(t_m)^q\right]F(x,t_m)^q+B^qF(x,b)^q\right\}^{1/q}. \tag{4.8}$$

Отметим, что в случае $q=r$ (4.8) совпадает с (4.6).

Неравенство (4.8) и l_q-выпуклость пространства Y влекут

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \left\{\sum_m [g(t_{m-1})^q - g(t_m)^q]\,\|F(\cdot,t_m)\|_Y^q + B^q\|F(\cdot,b)\|_Y^q\right\}^{1/q}$$

для любого $g \in \Omega$. Применим оценки

$$\|F(\cdot,t_m)\|_Y = \|T[\chi_{(a,t_m]}]\|_Y \leqslant \|T\|_{\dot\Omega_0}\|\chi_{(a,t_m]}\|_X \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\|\chi_{(a,t_m]}\|_X,$$
$$\|F(\cdot,b)\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\|\chi_{(a,b)}\|_X$$

и получим

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\left\{\sum_m [g(t_{m-1})^q - g(t_m)^q]\,\|\chi_{(a,t_m]}\|_X^q + B^q\|\chi_{(a,b)}\|_X^q\right\}^{1/q}.$$

При $p \leqslant q$ отсюда согласно следствию 3.1 леммы 3.2 с q вместо s и p вместо q имеем

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\left\{\sum_m [g(t_{m-1})^p - g(t_m)^p]\,\|\chi_{(a,t_m]}\|_X^p + B^p\|\chi_{(a,b)}\|_X^p\right\}^{1/p}.$$

Поэтому

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\left\{\sum_m c_m(p)^p\|\chi_{(a,t_m]}\|_X^p + B^p\|\chi_{(a,b)}\|_X^p\right\}^{1/p}.$$

Рассмотрим неотрицательные функции

$$\varphi_m = c_m(p)\chi_{(a,t_m]};\quad \varphi = \left(\sum_m \varphi_m^p\right)^{1/p};\quad \zeta = B\chi_{(a,b)}.$$

Тогда

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\left\{\sum_m \|\varphi_m\|_X^p + \|\zeta\|_X^p\right\}^{1/p}.$$

l_p-вогнутость пространства X влечёт

$$\left\{\sum_m \|\varphi_m\|_X^p + \|\zeta\|_X^p\right\}^{1/p} \leqslant \left\|\left(\sum_m \varphi_m^p + \zeta^p\right)^{1/p}\right\|_X,$$

так что для $g \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\left\|\left(\sum_m \varphi_m^p + \zeta^p\right)^{1/p}\right\|_X =$$
$$= \|T\|_{\Omega_0}\left\|\left(\sum_m c_m(p)^p\chi_{(a,t_m]}^p + B^p\chi_{(a,b)}^p\right)^{1/p}\right\|_X = \|T\|_{\Omega_0}\|\tilde g\|_X.$$

На последнем шаге применяем равенство (4.4) при $s = p$. Следовательно, для любого $g \in \Omega$ мы получаем неравенство

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\|\tilde g\|_X, \tag{4.9}$$

где $\tilde g$ — «ступенчатая мажоранта» (4.1).

Далее, для $n = 1, 2, 3, \ldots$ строим последовательности $\{t_m(n)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ таким образом, что соответствующие ступенчатые функции $\tilde g_n$ вида (4.1) образуют невозрастающую последовательность, всюду стремящуюся к заданной функции $g \in \Omega$. По свойству порядковой непрерывности (квази)нормы в пространстве X имеем

$$\|\tilde g_n\|_X \to \|g\|_X\ (n \to \infty).$$

Теперь воспользуемся неравенством (4.9) с $\tilde{g}_n$ вместо $\tilde{g}$ и перейдём к пределу при $n \to \infty$. В результате получаем неравенство

$$\|T[g]\|_Y \leqslant \|T\|_{\Omega_0}\|g\|_X, \quad g \in \Omega, \tag{4.10}$$

так что $\|T\|_\Omega \leqslant \|T\|_{\Omega_0}$. Обратное очевидно, потому что при предположении (2.15) имеет место вложение $\Omega_0 \subset \Omega$. Таким образом, получаем равенство (2.16).

2. В условиях части 1 теоремы 2.1 имеем

$$g \in \dot{\Omega} \Rightarrow B := \lim_{t \to b-0} g(t) = 0.$$

Поэтому достаточно положить $B = 0$ (соответственно, $\psi = 0$) в приведенных выше рассуждениях. При этом все слагаемые, содержащие функцию $\chi_{(a,b)}$, имеют множитель $B = 0$ и, следовательно, пропадают независимо от выполнения или нарушения условия невырожденности (2.13). В итоге получим $\|T\|_{\dot{\Omega}_0}$ вместо $\|T\|_{\Omega_0}$ в (4.9), (4.10), так что $\|T\|_{\dot{\Omega}} \leqslant \|T\|_{\dot{\Omega}_0}$. Обратное очевидно, так как имеет место вложение $\dot{\Omega}_0 \subset \dot{\Omega}$. Следовательно, мы приходим к (2.12).

Замечание 4.1. Итак, доказаны часть 1 и часть 3 теоремы 2.1. С учетом замечания 2.1 видим, что теорема 2.1 полностью доказана.

Замечание 4.2. Во многих случаях имеет место равенство (4.7):

$$F_0(x,b) = F(x,b) \quad \gamma - \text{п.в.}, \tag{4.11}$$

что приводит к $\|T\|_{\Omega_0} = \|T\|_{\dot{\Omega}_0}$ согласно (2.12).

Например, (4.11) выполняется для любого ограниченного линейного оператора $T : X \to Y$. Действительно, для любого $\{t_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$; $t_m \uparrow b$ $(m \uparrow +\infty)$

$$\|F(\cdot,b) - F(\cdot,t_m)\|_Y = \left\|T\left[\chi_{(a,b)} - \chi_{(a,t_m)}\right]\right\|_Y \leqslant \|T\| \left\|\chi_{(t_m,b)}\right\|_X \to 0\,(m \uparrow +\infty).$$

Здесь мы учитываем, что $\chi_{(t_m,b)} \downarrow 0\,(m \uparrow +\infty)$, а идеальное пространство X имеет порядково непрерывную (квази)норму. Далее,

$$0 \leqslant F(x,b) - F_0(x,b) \leqslant F(x,b) - F(x,t_m), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, для идеального пространства Y имеем

$$\|F(\cdot,b) - F_0(\cdot,b)\|_Y \leqslant \|F(\cdot,b) - F(\cdot,t_m)\|_Y.$$

Это влечёт $\|F(\cdot,b) - F_0(\cdot,b)\|_Y = 0 \Rightarrow$ (4.11).

Замечание 4.3. Есть случаи, когда равенство (4.11) не выполнено. Например, рассмотрим случай $N = J = (a,b)$, $T_0[g](x) = g(b-0)\chi_J(x)$, $g \in G$. Тогда

$$T_0[g](x) = 0, \quad g \in \dot{\Omega}_0 \Rightarrow \|T_0\|_{\dot{\Omega}_0} = 0; \quad T_0[\chi_J] = \chi_J \Rightarrow \|T_0\|_{\Omega_0} = \frac{\|\chi_J\|_Y}{\|\chi_J\|_X} > 0.$$

4.2. Следствия.

Следствие 4.1. *Пусть* $0 < p \leqslant min\{q,r\} < \infty$; $X \subset S(J,\beta)$ — *идеальное* l_p-*вогнутое пространство с порядково непрерывной* (*квази*)*нормой, и выполнено условие* (2.13). *Пусть* $Y = L_q(N,\gamma)$, *и* T — l_r-*выпуклый монотонный оператор. Тогда выполнено равенство* (2.14).

Следствие 4.2. *Пусть* $0 < p \leqslant min\{q,r\} < \infty$; $X \subset S(J,\beta)$ — *идеальное* l_p-*вогнутое пространство с порядково непрерывной* (*квази*)*нормой, и выполнено условие* (2.15). *Пусть* $Y = L_q(N,\gamma)$, *и* T — l_r-*выпуклый монотонный оператор. Тогда выполнено равенство* (2.16).

Для доказательства этих следствий нам понадобится лемма о свойствах выпуклости пространств Лебега.

Лемма 4.1. *Пусть* $0 < q < \infty$. *Тогда* $Y = L_q(N,\gamma)$ — *идеальное* l_ρ-*выпуклое пространство для любых* $\rho \in (0,q]$.

Доказательство. Обозначим
$$A = \left\| \left(\sum_m |y_m|^\rho \right)^{1/\rho} \right\|_Y . \tag{4.12}$$
Покажем,что
$$A \leqslant \left(\sum_m \|y_m\|_Y^\rho \right)^{1/\rho} . \tag{4.13}$$
При $\rho = q$ имеем
$$A^q = \int_N \sum_m |y_m|^q d\gamma = \sum_m \int_N |y_m|^q d\gamma = \sum_m \|y_m\|_Y^q,$$
так что (4.13) является равенством. Пусть теперь $0 < \rho < q$. Тогда
$$A^q = \int_N \left(\sum_m |y_m|^\rho \right) \left(\sum_l |y_l|^\rho \right)^{q/\rho - 1} d\gamma = \sum_m \int_N |y_m|^\rho \left(\sum_l |y_l|^\rho \right)^{\frac{q-\rho}{\rho}} d\gamma.$$
Затем применим неравенство Гёльдера к каждому члену со степенями $p = q/\rho > 1$ и $p' = q/(q-\rho)$, $1/p + 1/p' = 1$, и получим
$$A^q \leqslant \sum_m \left(\int_N |y_m|^q d\gamma \right)^{\rho/q} \left(\int_N \left(\sum_l |y_l|^\rho \right)^{q/\rho} d\gamma \right)^{\frac{q-\rho}{q}} = A^{q-\rho} \sum_m \left(\int_N |y_m|^q d\gamma \right)^{\rho/q} .$$
Поэтому
$$A^\rho \leqslant \sum_m \left(\int_N |y_m|^q d\gamma \right)^{\rho/q} = \sum_m \|y_m\|_Y^\rho .$$
Таким образом, получаем неравенство (4.13), что означает l_ρ-выпуклость идеального пространства $Y = L_q(N, \gamma)$. □

Доказательство следствий 4.1 *и* 4.2. Обозначим $\rho = min\{q, r\}$. Тогда $p \leqslant \rho \leqslant r$. Согласно лемме 4.1 пространство $Y = L_q(N, \gamma)$ — l_ρ-выпуклое, и мы можем применить теорему 2.1 с ρ вместо q. Таким образом, выполнено равенство (4.13) для $Y = L_q(N, \gamma)$. Доказательство следствия 4.2 аналогично. □

5. Обобщение условий монотонности

Аналогичные результаты справедливы для конусов функций со свойствами монотонности относительно заданной положительной функции $k \in C(J)$. Определим
$$\Omega_k \equiv \Omega(X, k) = \{g \in X : g \geqslant 0,\ g(t)/k(t) \downarrow;\ g(t) = g(t-0),\ t \in (a, b)\}, \tag{5.1}$$
$$\dot\Omega_k \equiv \dot\Omega(X, k) = \{g \in \Omega_k :\ g(t)/k(t) \to 0, t \to b-0\} \tag{5.2}$$
(в этих обозначениях при $k(t) \equiv 1$ имеем: $\Omega_1 = \Omega$, $\dot\Omega_1 = \dot\Omega$, см. (2.7)). Обозначим
$$\begin{aligned} &\dot\Omega_{k,0} \equiv \dot\Omega_0(X, k) = \left\{ k\chi_{(a,t]} : a < t < b \right\}, \\ &\Omega_{k,0} \equiv \Omega_0(X, k) = \dot\Omega_{k,0} \cup \left\{ k\chi_{(a,b)} \right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Теорема 5.1. *Пусть* $0 < p \leqslant q \leqslant r < \infty$; $X \subset S(J, \beta)$ — *идеальное* l_p*-вогнутое пространство с порядково непрерывной* (*квази*)*нормой*; $Y \subset S(N, \gamma)$ — *идеальное* l_q*-выпуклое пространство, и* $T : \Omega_k \to Y$ — l_r*-выпуклый монотонный оператор.*

1. *Тогда справедливы соотношения*
$$\|T\|_{\dot\Omega_k} = \|T\|_{\dot\Omega_{k,0}} := \sup_{a<t<b} \left[\|F_k(\cdot, t)\|_Y \|k(\cdot)\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1} \right], \tag{5.4}$$

где
$$F_k(x, t) = T[k\chi_{(a,t]}](x), \quad a < t < b. \tag{5.5}$$

2. *При выполнении дополнительного условия невырожденности*

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \tag{5.6}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_{\Omega_k} = \|T\|_{\dot{\Omega}_k} = \|T\|_{\dot{\Omega}_{k,0}} = \sup_{a<t<b} \left[\|F_k(\cdot,t)\|_Y \|k(\cdot)\chi_{(a,t]}(\cdot)\|_X^{-1}\right]. \tag{5.7}$$

3. *При наличии вырождения*

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X < \infty \tag{5.8}$$

справедливы соотношения

$$\|T\|_{\Omega_k} = \|T\|_{\Omega_{k,0}} := \max\left\{\|T\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}, \|F_k(\cdot,b)\|_Y \|k\chi_{(a,b)}(\cdot)\|_X^{-1}\right\}, \tag{5.9}$$

где

$$F_k(x,b) = T[k\chi_{(a,b)}](x). \tag{5.10}$$

Замечание 5.1. Отметим, что в невырожденном случае

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X = \infty \quad \Rightarrow \quad \Omega_k = \dot{\Omega}_k, \tag{5.11}$$

так как

$$\left\{0 \leqslant g/k \downarrow, \lim_{t\to b-0}[g(t)/k(t)] > 0\right\} \quad \Rightarrow \quad g \notin X. \tag{5.12}$$

Это означает, что в случае (5.6) справедливо равенство $\|T\|_{\Omega_k} = \|T\|_{\dot{\Omega}_k}$. Поэтому для вычисления $\|T\|_{\Omega_k}$ применима формула (5.4). Таким образом, справедливо соотношение (5.7), и часть 2 теоремы 5.1 следует из ее части 1.

Доказательство. Формально эта теорема более общая, чем теорема 2.1, но мы можем легко свести её к теореме 2.1.

Рассмотрим l_r-выпуклый монотонный оператор $T : \Omega(X,k) \to Y$. Определим

$$X_k := \{f \in S(J,\beta) : kf \in X\} = \{f = g/k : g \in X\}, \quad \|f\|_{X_k} = \|g\|_X. \tag{5.13}$$

Тогда у нас есть эквивалентность:

$$g \in \Omega(X,k) \quad \Leftrightarrow \quad f = g/k \in \Omega(X_k,1); \quad \|f\|_{X_k} = \|kf\|_X. \tag{5.14}$$

см. (5.1), (5.2), (5.13). Поэтому

$$\|T\|_{\Omega(X,k)} = \sup\left\{\frac{\|T[g]\|_Y}{\|g\|_X} : 0 \neq g \in \Omega(X,k)\right\} = \sup\left\{\frac{\|T[kf]\|_Y}{\|f\|_{X_k}} : 0 \neq f \in \Omega(X_k,1)\right\}.$$

Отметим, что X_k, как и X, является идеальным l_p-вогнутым пространством с порядково непрерывной (квази)нормой, а оператор

$$T_k : \Omega(X_k,1) \to Y; \quad T_k[f] := T[kf], \quad f \in \Omega(X_k,1),$$

— l_r-выпуклый вместе с оператором T. Замечание 5.1 при этом примет вид замечания 2.1. Таким образом, применима теорема 2.1, и мы получаем все утверждения теоремы 5.1. □

6. Приложения. Вычисление нормы интегрального оператора на конусе функций со свойством монотонности

Рассмотрим здесь одно приложение общих результатов, приведенных в разделах 2–5, а именно: вычисление нормы интегрального оператора на конусе функций со свойством монотонности. В нашей статье [5] представлено множество других приложений этих общих результатов в теории весовых пространств Лоренца, при вычислении ассоциированных норм на конусах монотонных функций и т. д.

Пусть $K = K(x,\tau)$ — неотрицательная измеримая функция переменных $(x,\tau) \in N \otimes J$, где $(N;\gamma)$ и $(J;\mu)$ — пространства с неотрицательной σ-конечной σ-аддитивной мерой γ и неотрицательной борелевской мерой μ на $J = (a,b)$.

$$T_{r\mu}[f](x) = \left(\int\limits_{(a,b)} K(x,\tau)|f(\tau)|^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad r \in (0,\infty). \tag{6.1}$$

Это l_r-выпуклый монотонный оператор. При $r = 1$ его сужение на множество неотрицательных μ-измеримых функций совпадает с сужением линейного интегрального оператора

$$T[f](x) = \int\limits_{(a,b)} K(x,\tau) f(\tau) d\mu(\tau). \tag{6.2}$$

Здесь применимы результаты разделов 2–5. В частности, для сужения оператора $T_{r\mu}$ на конус Ω_k применение теоремы 5.1 дает следующие результаты.

Теорема 6.1. *Пусть $0 < p \leqslant q \leqslant r < \infty$; $X \subset S(J,\beta)$ — идеальное l_p-вогнутое пространство с порядково непрерывной* (*квази*)*нормой*; *$Y \subset S(N,\gamma)$ — l_q-выпуклое идеальное пространство, и*

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X = \infty. \tag{6.3}$$

Тогда

$$\|T_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}} := \sup_{a<t<b} \left\{ \|T_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}]\|_Y \|k\chi_{(a,t]}\|_X^{-1} \right\}. \tag{6.4}$$

Здесь

$$T_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}](x) = \int\limits_{(a,t]} K(x,\tau) k(\tau)^r d\mu(\tau), \quad x \in N. \tag{6.5}$$

В случае

$$\|k\chi_{(a,b)}\|_X < \infty \tag{6.6}$$

имеем $\|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_k} = \|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}$ (см. (6.4)),

$$\|T_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \max \left\{ \|T_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}; \quad \|T_{r\mu}[k\chi_{(a,b)}]\|_Y \|k\chi_{(a,b)}\|_X^{-1} \right\}. \tag{6.7}$$

Замечание 6.1. Для сужения на конус $\Omega = \Omega_1$ неотрицательных убывающих непрерывных слева функций необходимо принять $k(\tau) = 1$ в (6.3)–(6.7).

Замечание 6.2. В случае $Y = L_q(N,\gamma)$ результаты теоремы 6.1 остаются верными, если $0 < p \leqslant \min\{q,r\} < \infty$, см. следствия 4.1 и 4.2.

Замечание 6.3. В качестве конкретизации оператора (6.1) рассмотрим случай, когда $(N,\gamma) = (J,\gamma)$ с неотрицательной мерой Бореля γ на $J = (a,b)$, и $T_{r\mu}$ совпадает с обобщенным оператором типа Харди

$$A_{r\mu}[f](x) = \left(\int\limits_{(a,x]} |f(\tau)|^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad x \in (a,b). \tag{6.8}$$

Тогда

$$A_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}](x) = \left(\int\limits_{(a,x]} k(\tau)^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad x \leqslant t,$$

$$A_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}](x) = \left(\int\limits_{(a,t]} k(\tau)^r d\mu(\tau) \right)^{1/r}, \quad x > t, \tag{6.9}$$

и мы имеем равенства в случае (6.3):

$$\|A_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \|A_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}} := \sup_{a<t<b} \left\{ \left\|A_{r\mu}[k\chi_{(a,t]}]\right\|_Y \left\|k\chi_{(a,t]}\right\|_X^{-1} \right\}; \tag{6.10}$$

в случае (6.6) формула (6.10) остается верной для $\|A_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_k}$, но

$$\|A_{r\mu}\|_{\Omega_k} = \max \left\{ \|A_{r\mu}\|_{\dot{\Omega}_{k,0}}; \quad \left\|A_{r\mu}[k\chi_{(a,b)}]\right\|_Y \left\|k\chi_{(a,b)}\right\|_X^{-1} \right\}. \tag{6.11}$$

Благодарности

Исследование (все разделы, кроме раздела 6) выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00087) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук. Результаты раздела 6 получены в Российском университете дружбы народов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
2. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.
3. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
4. *Bakhtigareeva E. G., Goldman M. L.* Construction of an optimal envelope for a cone of nonnegative functions with monotonicity properties// Proc. Steklov Inst. Math. — 2016. — *293*. — C. 37–55.
5. *Bakhtigareeva E. G., Goldman M. L.* Calculation of the norms for monotone operators on the cones of functions with monotonicity properties// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — C. 857–874.
6. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — Boston: Acad. Press, 1988.
7. *Berg J., Löfström J.* Interpolation spaces. An Introduction. — Berlin: Springer, 1976.
8. *Burenkov V. I., Goldman M. L.* Calculation of the norm of a positive operator on the cone of monotone functions// Proc. Steklov Inst. Math. — 1995. — *210*. — C. 47–65.
9. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *68*, № 4. — C. 597–664.
10. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction theorems for operators on the cone of monotone functions// Russ. Math. Surv. — 2013. — *405*, № 1. — C. 156–172.

Э. Г. Бахтигареева
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: bakhtigareeva-eg@rudn.ru

М. Л. Гольдман
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: seulydia@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-455-471 UDC 517.98

On Calculation of the Norm of a Monotone Operator in Ideal Spaces

© 2021 **E. G. Bakhtigareeva, M. L. Goldman**

Abstract. This paper contains the proof of general results on the calculation of the norms of monotone operators acting from one ideal space to another under matching convexity and concavity properties of the operator and the norms in ideal spaces.

REFERENCES

1. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. S. G. Kreyn, Yu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolyatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of Linear Operators], Nauka, M., 1978 (in Russian).
3. Kh. Tribel', *Teoriya interpolyatsii. Funktsional'nye prostranstva. Differentsial'nye operatory* [Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
4. E. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, "Construction of an optimal envelope for a cone of nonnegative functions with monotonicity properties," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, **293**, 37–55.
5. E. G. Bakhtigareeva and M. L. Goldman, "Calculation of the norms for monotone operators on the cones of functions with monotonicity properties," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 857–874.
6. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Acad. Press, Boston, 1988.
7. J. Berg and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer, Berlin, 1976.
8. V. I. Burenkov and M. L. Goldman, "Calculation of the norm of a positive operator on the cone of monotone functions," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, **210**, 47–65.
9. A. Gogatishvili and V. D. Stepanov, "Reduction theorems for weighted integral inequalities on the cone of monotone functions," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **68**, No. 4, 597–664.
10. A. Gogatishvili and V. D. Stepanov, "Reduction theorems for operators on the cone of monotone functions," *Russ. Math. Surv.*, 2013, **405**, No. 1, 156–172.

E. G. Bakhtigareeva
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: bakhtigareeva-eg@rudn.ru

M. L. Goldman
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: seulydia@yandex.ru