Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 3 (2021). С. 427–441
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (Print)

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-427-441 УДК 517.53

# СЛАБЫЕ И СИЛЬНЫЕ АСИМПТОТИКИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ С «ПЕРЕМЕННЫМ» ВЕСОМ

© 2021 г. **А. И. АПТЕКАРЕВ**

Аннотация. Рассматриваются последовательности ортогональных многочленов с «переменными» (*varying*), т. е. зависящими от номера многочлена, весами. Получены расширения классов применимости известных асимптотических формул для больших номеров.

## ОГЛАВЛЕНИЕ



## 1. Введение

Пусть $P_n(x) = x^n + \ldots$ — последовательность ($n \in \mathbb{Z}_+$) многочленов, ортогональных по мере $\sigma(x)$ на отрезке $\Delta \subset \mathbb{R}$ ($\operatorname{supp}\sigma = \Delta$):

$$\int\limits_{\Delta} P_n(x) x^{\nu}\, d\sigma(x) = 0, \quad \nu = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1.1}$$

Асимптотическая теория ортогональных многочленов достаточно глубоко изучена и имеет широкое применение. Известен ряд асимптотических формул, которые с разной точностью описывают эти многочлены при больших $n$. Естественно, что для улучшения точности представления многочлена приходится накладывать более ограничительные условия на меры ортогональности.

Так называемые формулы *слабой асимптотики* справедливы для достаточно общих последовательностей $\{P_n(x)\}$. Эти асимптотики выражаются в виде слабой сходимости последовательности мер. Существуют два типа слабых асимптотик.

Дискретную вероятностную меру $\chi_{P_n}$, равнораспределенную в нулях $P_n(x) = \prod\limits_{j=1}^{n}(x - x_{j,n})$,

$$\chi_{P_n}(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta(x - x_{j,n}) \tag{1.2}$$

называют мерой, *считающей нули* ортогонального многочлена $P_n$ (*zero counting measure*). Эти меры слабо сходятся при $n \to \infty$:

$$\chi_{P_n}(x) \xrightarrow{\ *\ } \lambda(x) \tag{1.3}$$

к *экстремальной мере* $\lambda$, минимизирующей энергию $E_\mu$ логарифмического потенциала $V$ вероятностных мер $\mu$ с носителем на $\Delta$ (т. е. носителе меры ортогональности $\sigma$):

$$\exists!\ \lambda: \quad E_\mu := \int\limits_\Delta \int\limits_\Delta \ln \frac{d\mu(z)d\mu(t)}{|z-t|} \quad \longrightarrow \quad \inf_{\mu\geqslant 0,\, \operatorname{supp}\mu=\Delta,\, |\mu|=1}. \tag{1.4}$$

Эту меру также называют *равновесной мерой*, так как

$$V_\lambda(x) := \int\limits_\Delta \ln \frac{\lambda(t)}{x-t} = \omega, \quad \forall x \in \Delta, \tag{1.5}$$

где $\omega$ — *постоянная Робена*. Отметим, что в рассматриваемой ситуации (ортогональность на отрезке) слабая сходимость мер (1.3) влечет равномерную сходимость потенциалов

$$-\frac{1}{n}\ln|P_n(x)| = V_{\chi_{P_n}}(x) \rightrightarrows V_\lambda(x), \quad x \in K \Subset \Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta,$$

что эквивалентно асимптотике корня $n$-й степени:

$$|P_n(x)|^{1/n} \rightrightarrows \exp\{-V_\lambda(x)\} \tag{1.6}$$

и, в свою очередь, приводит к главному члену асимптотики $P_n(z)$ при $n\to\infty$:

$$P_n(z) = O(\exp\{-n\mathcal{V}_\lambda(z)\}),$$

где $\mathcal{V} = V + i\widetilde{V}$, а $\widetilde{V}$ — функция, гармонически сопряженная к $V$. Заметим также, что соотношение равновесия (1.5) позволяет выразить главный член асимптотики:

$$\exp\{-n\mathcal{V}_\lambda(z)\} = \left(\frac{\Phi_\Delta(z)}{\alpha}\right)^n, \qquad \alpha = e^\omega > 0, \tag{1.7}$$

где $\Phi_\Delta(z)$ — функция, конформно отображающая внешность отрезка $\Delta$ на внешность единичного круга

$$|\Phi_\Delta(z)| = 1, \quad z \in \Delta; \qquad \Phi_\Delta(z)|_{z\to\infty} = \alpha z + \dots,$$

а $\alpha^{-1} = e^{-\omega}$ — емкость отрезка $\Delta$ $(= \frac{1}{4}$ его длины). Наконец, отметим, что слабая асимптотика (1.3) имеет место для очень широкого класса мер ортогональности $\sigma \in \mathrm{Reg}$, называемого «*регулярные меры*» (детали см. в [35]), который даже включает в себя некоторые сингулярные меры. В частности, просто формируемым общим достаточным условием принадлежности меры ортогональности $\sigma \in \mathrm{Reg}$ является ее абсолютная непрерывность с положительным почти всюду на $\Delta$ весом:

$$d\sigma(x) = f(x)\,dx, \quad f(x) > 0, \quad x \in \Delta \quad \text{п.в.} \tag{1.8}$$

Другая формула слабой асимптотики связана с вероятностной мерой

$$p_n^2(x)d\sigma(x), \tag{1.9}$$

где $\{p_n\}$ — последовательность ортонормированных на $\Delta$ многочленов

$$\int\limits_\Delta p_n(x)\,p_m(x)\,d\sigma(x) = \delta_{n,m}, \tag{1.10}$$

которые связаны с (1.1) следующим образом:

$$p_n(z) = \gamma_n P_n(z) = \gamma_n(z^2 + \dots), \qquad \frac{1}{\gamma_n^2} := \inf_{Q_n(x)=x^n+\dots} \int\limits_\Delta |Q_n(x)|^2\,d\sigma(x). \tag{1.11}$$

Как доказал Е. А. Рахманов [12,13,32,33], при выполнении условия (1.8) для $\Delta = [a,b]$ справедливо

$$p_n^2(x)\,d\sigma(x) \quad \xrightarrow{*} \quad d\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \tag{1.12}$$

где $\lambda$ — та же самая равновесная мера (1.4), что и в правой части слабой асимптотики (1.3). Заметим, что считающая нули дискретная мера (1.2) и абсолютно непрерывная мера (1.9) — антиподы. Если первая из них вся равно распределена в нулях ортогонального многочлена, то производная второй зануляется в этих нулях. Тем не менее, они имеют одинаковый слабый предел. Из слабой сходимости (1.12) выводится более точная, чем асимптотика корня $n$-й степени (1.6), формула асимптотики отношения ортогональных многочленов (1.1):

$$\frac{P_{n+1}(z)}{P_n(z)} \quad \rightrightarrows \quad \frac{1}{\alpha}\Phi_\Delta(z), \quad z \in K \Subset \Omega, \tag{1.13}$$

а также доказывается существование и явный вид пределов при $n \to \infty$ коэффициентов $a_n$, $b_n$ рекуррентных соотношений для ортонормированных многочленов (1.10):

$$a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x) = xp_n. \tag{1.14}$$

Как мы уже отмечали выше, уточнение асимптотических формул (1.6), (1.13) обуславливает сужение класса (1.8) мер ортогональности. Следующий по точности тип асимптотик, так называемые *сильные асимптотики*, или *асимптотики типа Сегё*, справедливы при выполнении

$$\sigma \in S(\Delta): \quad \int_a^b \ln\sigma'(x)\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} > -\infty, \quad \Delta = [a,b] \tag{1.15}$$

— так называемого условия Сегё. Это условие, как и (1.8), накладывает ограничения на нули веса $f(x) = \sigma'(x)$ и не позволяет весу «зануляться», например, экспоненциальным образом, разрешая алгебраические «зануления».

При выполнении условия Сегё (1.15) справедливы (см. [14, 36]) следующие формулы (при $n \to \infty$).

- Внешняя асимптотика

$$\frac{P_n(z)}{(\alpha\Phi_\Delta(z))^n} \rightrightarrows F_{\mathring{f}}(z), \quad z \in K \Subset \Omega, \tag{1.16}$$

где $F$ — нормированная функция Сегё:

$$F_{\mathring{f}}(z) = \frac{D_{\mathring{f}}(\infty)}{D_{\mathring{f}}(z)}, \qquad D_f: \quad \begin{cases} D_f, D_f^{-1} \in H(\Omega), \\ |D_f|^2 = f \quad \text{на} \quad \Delta, \\ D_f(\infty) > 0 \end{cases} \tag{1.17}$$

для так называемого *тригонометрического веса*

$$\mathring{f}(z) := \sqrt{(x-a)(b-x)}f, \quad f := \sigma'. \tag{1.18}$$

Решение краевой задачи в (1.17) имеет вид

$$D_f(z) = \exp\left\{\sqrt{(a-z)(z-b)}\frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\ln f(x)\,dx}{(z-x)\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right\}. \tag{1.19}$$

- Асимптотика старшего коэффициента для (1.10), (1.11)

$$\gamma_n = \frac{4^n}{\sqrt{\pi}(b-a)^n D_f(\infty)}. \tag{1.20}$$

- Асимптотика $L_{2,f}$ нормы на отрезке

$$\left\|\frac{P_n(x)}{\alpha_n} - \left\{\Phi_\Delta^n(x)F_{\mathring{f}}(x) + \overline{\Phi_\Delta^n(x)F_{\mathring{f}}(x)}\right\}\right\|_{L_{2,f}} = o(1). \tag{1.21}$$

Дальнейшее уточнение сильных асимптотик требует больше ограничений на веса ортогональности, чем (1.15). Например, потребовав строгую положительность, непрерывность и гладкость типа Дини—Липшица для тригонометрического веса $\mathring{f}$, С. Н. Бернштейн в [6] доказал равномерную асимптотику на отрезке, т. е. стремление к нулю в формуле (1.21) идет не в $L_{2,f}(\Delta)$ норме, а в норме $C(\Delta)$. Из недавних достижений отметим разработанную П. Дейфтом с соавторами [23] технику получения глобальных асимптотических разложений для многочленов, ортогональных относительно аналитических, не обращающихся в нуль, весов. Также отметим давно известную открытую проблему о справедливости при условии Сегё (1.15) асимптотики (1.21) не только в норме $L_{2,f}$, но и в смысле сходимости почти всюду на отрезке $\Delta$. Эту гипотезу Т. Тао назвал *нелинейной теоремой Карлесона*, см. [30].

Настоящая работа посвящена асимптотическому анализу при больших $n$ последовательности многочленов $P_n(z) = z^n + \dots$, ортогональных на отрезке $\Delta = [a, b]$ относительно так называемых «переменных» (*varying*) весов, когда вес $f_n$ тоже зависит от номера (степени) многочлена $\{P_n\}$:

$$\int\limits_{\Delta} P_n(x) x^{\nu} f_n(x)\, dx = 0, \quad \nu = 0, \dots, n-1, \tag{1.22}$$

т. е. речь идет об обобщении (1.1), где $d\sigma(x) = f(x)dx$ не зависит от номера $n$.

Последовательности многочленов, удовлетворяющих (1.22), играют большую роль в современном анализе. В частности, к конструкциям типа (1.22) приводят так называемые *совместно* (*multiply*) *ортогональные* многочлены (см., например, [16]). В свою очередь, эти многочлены удовлетворяют рекуррентным соотношениям, обобщающим (1.14), коэффициенты которых служат потенциалами для дискретных операторов Шрёдингера на решетках и графах-деревьях (см. [4,5,19–22]). Поэтому основной интерес в данной статье представляет слабая асимптотика (1.12) абсолютно непрерывных мер, порождаемых нормированными многочленами

$$p_n(x) = \frac{1}{\gamma_n} P_n(x): \quad \int\limits_{\Delta} p_n^2(x) f_n(x)\, dx = 1. \tag{1.23}$$

Целью настоящей работы является расширение известного общего класса переменных весов $\{f_n\}$, в котором слабая асимптотика меры $p_n^2 f_n\, dx$ имеет место.

В следующем разделе мы введем необходимые понятия, в терминах которых будет сформулирован результат А. А. Гончара и Е. А. Рахманова [9, 26] о слабой сходимости считающей нули многочленов (1.22) меры $\chi_{P_n}$, см. (1.2). Также здесь мы определим общий класс переменных весов $\{f_n\}$, введенный В. Тотиком в [37,38], для которых им были исследованы асимптотики, обсуждаемые во введении, а также приведем его формулировку теоремы о слабой асимптотике меры $p_n^2 f_n\, dx$ и наше ее расширение. Затем мы посвятим раздел формулировкам теорем Тотика о сильной асимптотике и доказательству их переформулировок, с помощью которых мы в заключительном разделе передокажем их, а также докажем слабую асимптотику $p_n^2 f_n\, dx$, но уже в расширенном классе переменных весов $\{f_n\}$.

## 2. Слабые асимптотики многочленов, ортогональных с переменным весом

Среди приложений, мотивировавших исследования слабых асимптотик многочленов, ортогональных с переменным весом, можно выделить подход А. А. Гончара к моделированию наилучших рациональных аппроксимаций посредством многоточечных аппроксимаций Паде [7, 24], а также интерес к гипотезе Фройда о скорости роста коэффициентов рекуррентных соотношений (1.14) для многочленов, ортогональных относительно экспоненциальных весов $e^{-|x|^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, доказанной в итоге Е. Б. Саффом с соавторами [28]. В результате для описания слабого предела мер $\chi_{P_n}$ многочленов (1.22) были предложены экстремальные задачи для энергии логарифмического потенциала $V^{\mu}(x)$ мер $\mu$, $\operatorname{supp}\mu \in \Delta$, во внешнем поле $Q(x)$:

$$E_{\mu}^{Q} := \int\limits_{\Delta}\int\limits_{\Delta} \ln \frac{d\mu(x)d\mu(t)}{|x-t|} + 2\int\limits_{\Delta} Q(x), \tag{2.1}$$

где поле $Q$ предполагается непрерывным на отрезке $\Delta \subseteq \mathbb{R}$. В случае бесконечного $\Delta$ поле в окрестности бесконечности должно расти быстрее логарифма: $(Q(x) - \ln|x|) \to \infty$, $|x| \to \infty$.

Известно (см. [8, 25, 29], а также более поздние детальные монографии [11, 31, 34]):

$$\exists!\ \lambda^{Q}: \quad E_{\mu}^{Q} \longrightarrow \inf_{\mu \geqslant 0,\, \|\mu\|=1,\, \operatorname{supp}\mu = \Delta}. \tag{2.2}$$

В отличие от экстремальной меры (1.4), минимизирующей энергию (2.1) в отсутствие внешнего поля ($Q \equiv 0$), носитель меры $\lambda^{Q}$ не обязан совпадать с отрезком $\Delta$, и соотношения (1.5) превращаются в

$$V_{\lambda^{Q}}(x) + Q(x) \begin{cases} = \omega_n, & x \in \Delta^* := \operatorname{supp}\lambda^{Q}, \\ \geqslant \omega_n, & x \in \Delta \setminus \Delta^*. \end{cases} \tag{2.3}$$

**Замечание 2.1.** Для выпуклых вниз внешних полей $Q$ носитель $\Delta^*$ тоже оказывается отрезком $\Delta^* \subseteq \Delta$, и в соотношениях равновесия на $\Delta \setminus \Delta^*$ нестрогое неравенство $\geqslant$ превращается в строгое. Примером выпуклых вниз полей являются потенциалы мер, сосредоточенных на отрезках, не пересекающихся с $\Delta$.

Вернемся к многочленам $P_n(x)$, ортогональным относительно переменного веса $f_n(x)$, см. (1.22). Следуя [38], положим

$$f_n(x) =: w_n^{2n}(x)u^2(x), \quad x \in \Delta := [a,b]. \tag{2.4}$$

Рассмотрим экстремальную задачу (2.2) во внешнем поле

$$Q := -\ln w_n, \quad \lambda^Q =: \mu_{w_n}, \tag{2.5}$$

где через $\mu_{w_n}$ мы обозначим экстремальную меру в поле $w_n$. Из теоремы Гончара—Рахманова (см. [8, с. 121]) следует, что непрерывность $w_n$ на отрезке $\Delta$ влечет слабую сходимость меры, считающей нули $P_n$:

$$\chi_{P_n}(x) \xrightarrow{*} \mu_{w_n}(x). \tag{2.6}$$

Таким образом, для весов, не зависящих от $n$, слабая сходимость (2.6) превращается в сходимость (1.3) к мере, имеющей постоянный потенциал на отрезке $\Delta$. Также отметим, что ортогональность относительно переменных весов вида (2.4) и влияние внешнего поля на распределение нулей $P_n$ приводят к качественно новым эффектам, когда нули $P_n$ не заполняют весь отрезок $\Delta$ — носитель меры ортогональности, а заполняет лишь его часть $\Delta^* \subseteq \Delta$, $\Delta^* = \operatorname{supp}\mu_{w_n}$. Нетрудно доказать, что

$$w_n^2(x) = (b-x) \quad \Rightarrow \quad \Delta^* = (a^*, b^*), \quad \text{где} \quad a^* = a, \quad b^* = b - \frac{1}{9}(b-a).$$

Аналогично асимптотике корня $n$-й степени (1.6), для многочленов $P_n(x)$ (1.22), (2.4) в случае, когда $\Delta^*$ — отрезок, имеем

$$|P_n(x)|^{1/n} \underset{x\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta^*}{\rightrightarrows} \exp\{-V_{\mu_{w_n}}(x)\}. \tag{2.7}$$

Перейдем теперь к слабым асимптотикам типа (1.12) для ортонормированных многочленов $\{p_n\}$ с переменным весом (1.23).

Первый результат в этом направлении получил Г. Лопес Лагомасино [10, 27]. Для многочленов $p_n(x)$, ортонормированных на $\Delta = [a,b]$ относительно переменной меры

$$d\sigma_n(x) = \frac{d\sigma(x)}{|T_{2n}(x)|}, \tag{2.8}$$

где $d\sigma$ удовлетворяет условию

$$\sigma' > 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Delta,$$

а $\{T_{2n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — произвольная последовательность многочленов таких, что

$$T_{2n}(x) := \prod_{\nu=1}^{k}(x - x_{\nu,2n}), \quad k \leqslant 2n, \quad \{x_{\nu,2n}\} \subset \widetilde{\Delta} \Subset \mathbb{R},$$

и $\widetilde{\Delta} \cap \Delta = \varnothing$, справедливо

$$p_n^2(x)\,d\sigma_n(x) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{*}} \frac{1}{\pi}\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = d\lambda(x). \tag{2.9}$$

Таким образом, переменная мера (2.8) удовлетворяет условию (1.8), и для нее сохраняется слабая асимптотика (1.12), доказанная Е. А. Рахмановым для мер из класса (1.8), не зависящих от параметра $n$. Однако надо отметить, что этот замечательный результат до сих пор остается единственным, устанавливающим справедливость слабой сходимости (1.12), (2.9) для общего класса переменных мер ортогональности $\sigma$, удовлетворяющих условию (1.12):

$$\sigma_n' > 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Delta. \tag{2.10}$$

До сих пор наиболее общий класс переменных мер $\sigma_n$, сохраняющий слабую сходимость (2.9), был рассмотрен В. Тотиком в [37, 38]. Меры, составляющие этот класс, удовлетворяют следующим условиям.

- Мера $\sigma_n$ сосредоточена на отрезке $\Delta$, она абсолютно непрерывна с весом (2.4):
$$d\sigma_n(x) = f_n(x)\,dx, \quad f_n(x) = w_n^{2n}(x)u^2(x), \quad x \in \Delta := [a,b],$$
где $w_n$ положительна и непрерывна, а $u$ удовлетворяет условию Сегё (1.15) на $\Delta$:
$$w_n > 0, \quad w_n \in C(\Delta), \quad u \in S(\Delta). \tag{2.11}$$
- Экстремальная мера $\mu_{w_n}$ в задаче (2.2), (2.5) абсолютно непрерывна, ее носителем является отрезок $\Delta^* := \operatorname{supp}\mu_{w_n}$,
$$d\mu_{w_n}(x) = v_n(x)\,dx, \quad x \in \Delta^* = [a^*, b^*] \subseteq \Delta,$$
в точках которого справедлива оценка для $\mu'_{w_n} = v_n$:
$$\frac{1}{A}(x-a^*)^{\beta_0}(b^*-x)^{\beta_0} \leqslant v_n(x) \leqslant A(x-a^*)^{\beta}(b^*-x)^{\beta}, \quad x \in [a^*, b^*] \tag{2.12}$$
для некоторых констант $A$, $\beta > -1$ и $\beta_0$.
- Носители равновесной меры $\mu_{w_n}$ и меры ортогональности $\sigma_n$ должны совпадать:
$$\operatorname{supp}\mu_{w_n} := \Delta^* = \operatorname{supp}\sigma_n := \Delta. \tag{2.13}$$

При выполнении этих трех условий слабая сходимость (2.9) доказана в [37, теорема 14.1]. Отметим, что класс переменных весов (2.8) включается в класс Тотика.

В настоящей работе мы ссужаем ограничение (2.13) условий Тотика, добавляя требование:

- допускается несовпадение носителей $\sigma_n$ и $\mu_{w_n}$:
$$\Delta^* \subset \Delta.$$

В этом случае внешнее поле задачи (2.2) должно быть выпукло вниз на отрезке $\Delta$:
$$Q := -\ln w(x): \quad Q''(x) > 0, \quad x \in \Delta. \tag{2.14}$$
Отметим, что разрешение строгого включения в $\Delta^* \subsetneq \Delta$ при выполнении условия (2.14) существенно расширяет класс Тотика. Например, условию (2.14) удовлетворяют $w_n$, для которых внешние поля $Q = -\ln w_n$ являются логарифмическими потенциалами мер $\tilde{\mu}$ с компактными носителями $\widetilde{\Delta}$, не пересекающимися с $\Delta$:
$$Q = V_{\widetilde{\mu}}, \quad \operatorname{supp}\widetilde{\mu} =: \widetilde{\Delta} \Subset \mathbb{R}: \ \widetilde{\Delta} \cap \Delta = \varnothing.$$
В частности, в качестве $w_n$ можно взять вес Лопеса—Лагамасино (2.8), но многочлен $T$ переместить из знаменателя в числитель, при этом условие $\deg T \leqslant 2n$ можно заменить на $\exists\, \delta > 0$: $\deg T \leqslant \dfrac{1}{\delta}\, n$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $\{p_n\}$ — последовательность ортонормированных многочленов* (1.23) *на отрезке* $\Delta := [a,b]$:
$$\int\limits_{\Delta} p_n(x)\, p_m(x) f_n(x)\,dx = \delta_{n,m} \quad \forall\, m \leqslant n$$
*с переменным весом* (2.4):
$$f_n(x) = w_n^{2n}(x)u^2(x),$$
*удовлетворяющим условию* (2.11):
$$w_n > 0, \quad w_n \in C(\Delta), \quad \int\limits_{\Delta} \frac{\ln u(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} > -\infty.$$
*Пусть $\mu_{w_n}$ — экстремальная мера задачи* (2.2), (2.5) *с носителем* $\operatorname{supp}\mu_{w_n} = \Delta^* \subseteq \Delta$, *удовлетворяющая условию* (2.12), *причем в случае $\Delta^* \neq \Delta$ дополнительно выполняется* (2.14), *т. е. функция $\ln\dfrac{1}{w(x)}$ выпукла вниз на $\Delta$. Тогда имеет место слабый предел*
$$p_n^2(x)\, f_n(x)\,dx \ \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\longrightarrow}} \ \frac{1}{\pi}\, \frac{dx}{\sqrt{(x-a^*)(b^*-x)}}\bigg|_{\Delta^*}. \tag{2.15}$$

Заметим, что допредельные меры в левой части (2.15) и предельная мера в правой части имеют разные носители при $\Delta^* \neq \Delta$.

Доказательство теоремы 2.1 мы приведем в конце статьи. Оно существенно будет опираться на формулы сильной асимптотики Тотика, которые мы обсудим в следующем разделе.

## 3. Сильные асимптотики многочленов, ортогональных с переменным весом

Во введении мы сформулировали сильные асимптотики для многочленов, ортогональных относительно не зависящего от $n$ веса $f$: внешнюю (1.16), старшего коэффициента (1.20) и в $L_{2,f}$ норме на $\Delta$. Приведем аналогичные формулы из [37] для переменного веса $f_n$, удовлетворяющего условиям Тотика (2.11), (2.12), (2.13). Одновременно приводимые формулы Тотика будем преобразовывать к удобному для нас виду.

Для внешней асимптотики ортонормированных с переменным весом $f_n$ на $\Delta = [a, b]$ многочленов имеем (см. [37, теорема 14.3])

$$p_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Phi_\Delta^n(z) \left(D_{\mathring{f}}(z)\right)^{-1} (1 + o(1)), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta = \Omega. \tag{3.1}$$

Напомним, что $D_f$ — функция Сегё, определялась в (1.17) краевой задачей:

$$D_f: \quad \begin{cases} D_f, D_f^{-1} \in H(\Omega), \\ |D_f|^2 = f \quad \text{на} \quad \Delta, \\ D_f(\infty) > 0. \end{cases}$$

Тригонометрический вес (см. (1.18)) $\mathring{f}(x) := \sqrt{(x-a)(b-x)}\, f(x)$, а $\Phi_\Delta$ есть функция, отображающая $\Omega$ во внешность единичного круга, которая также определялась в (1.7) через комплексный потенциал $\mathcal{V}_\lambda$ равновесной без внешнего поля меры $\lambda$:

$$\Phi_\Delta(z) := \alpha_\Delta \exp\{-\mathcal{V}_\lambda(z)\}, \quad \Phi_\Delta(\infty) = \alpha_\Delta\, z + \dots, \quad \alpha_\Delta = e^{\omega_\Delta} > 0.$$

Аналогично, с учетом (2.3), определим функцию

$$\Phi_{\Delta, w_n}(z) := \exp\left\{-V_{\mu_{w_n}}(z) + \omega_n\right\}, \quad \Phi_{\Delta, w_n}(\infty) = \alpha_{\Delta, w_n}\, z + \dots. \tag{3.2}$$

Модули обеих функций, ввиду соотношений равновесия (1.5) и (2.3), удовлетворяют краевым условиям:

$$|\Phi_\Delta| = 1, \quad |\Phi_{\Delta, w_n}| = w_n \quad \text{на} \quad \Delta,$$

здесь также учли (2.13). Заметим, что функция

$$\mathcal{D} := \frac{\Phi_{\Delta, w_n} D_{w_n^2}}{\Phi_\Delta} \equiv 1. \tag{3.3}$$

Действительно, она удовлетворяет краевой задаче:

$$\mathcal{D}: \quad \begin{cases} \mathcal{D}, \mathcal{D}^{-1} \in H(\mathbb{C} \setminus \Delta), \\ |\mathcal{D}| = 1 \quad \text{на} \quad \Delta, \quad \mathcal{D}(\infty) > 0. \end{cases}$$

Отсюда, применяя к $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^{-1}$ принцип максимума модуля, заключаем, что $\mathcal{D} \equiv 1$, и с учетом мультипликативности функции Сегё

$$D_{\mathring{f}_n} = D_{w_n^{2n}} D_{u^2} D_{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

получаем

**Предложение 3.1.** *Формула* (3.1) *из* [37, теорема 14.3] *при $n \to \infty$ эквивалентна формуле*

$$p_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \Phi_{\Delta, w_n}^n(z) \left[D^{-1}_{u^2\sqrt{(x-a)(b-x)}}(z) + o(1)\right]. \tag{3.4}$$

Теперь обратимся к формуле для асимптотики старшего коэффициента $\gamma_n$ для ортонормированного с весом $f_n$ многочлена $p_n$. Имеем (см. [37, теорема 13.1])

$$\gamma_n = \frac{2^n(1 + o(1))}{\sqrt{\pi} G(w_n)^n G(u)}, \tag{3.5}$$

где

$$G(f) := \exp\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\ln f(x)\,dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\right\}.$$

Сравнив выражение для $G(f)$ с явным видом (1.19) для функции Сегё $D_f(z)$, заключаем, что

$$G(f) = D_{f^2}(\infty),$$

и, следовательно, с учетом (3.3),

$$G(w_n) = D_{w_n^2}(\infty) = \Phi_\Delta(\infty)/\Phi_{\Delta,w_n}(\infty) = 2\alpha_{\Delta,w_n},$$

получаем

**Предложение 3.2.** *Формула* (3.5) *из* [37, теорема 13.1] *при* $n\to\infty$ *эквивалентна формуле*

$$\gamma_n = \frac{(1+o(1))}{\alpha^n_{\Delta,w_n}\sqrt{\pi}D_{u^2}(\infty)}. \tag{3.6}$$

Можем сформулировать следующее следствие предложений 3.1 и 3.2.

**Следствие 3.1.** *Для многочленов* $P_n(z) = z^n + \dots$, *ортогональных с весом* $f_n$, *справедливо*

$$P_n(z) = \frac{1}{\gamma_n}p_n(z) = \left(\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}(z)\right)^n\left(F_\Delta(z)+o(1)\right) \quad \text{при} \quad n\to\infty, \tag{3.7}$$

*равномерно на компактах* $K \Subset \Omega$, *где* $F_\Delta$ *— нормированная функция Сегё* (1.17):

$$F_\Delta(z) := \frac{D_{\mathring{u}^2}(\infty)}{D_{\mathring{u}^2}(z)}, \quad \mathring{u}^2(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}\,u^2(x). \tag{3.8}$$

Наконец, рассмотрим асимптотику на отрезке $\Delta$ в норме $L_2[-1,1]$. Справедливо (см. [37, теорема 14.2]) при $n\to\infty$

$$\left\|p_n(x)w_n^n(x)u(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\cos\left((n+1/2)\arccos x - \pi/4 + n\Gamma_{w_n}(x)+\Gamma_u(x)\right)}{\sqrt[4]{(x-a)(b-x)}}\right\|_{L_2[-1,1]} = o(1), \tag{3.9}$$

где

$$\Gamma_f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Delta}\frac{\ln f(\xi)-\ln f(x)}{\xi - x}\left(\frac{(x-a)(b-x)}{(\xi-a)(b-\xi)}\right)^{1/2}d\xi.$$

Запишем эту формулу применительно к многочленам $P_n(x)$ со старшим коэффициентом 1. Имеем на $\Delta$

$$p_n w_n^n u = \frac{P_n\gamma_n u}{|\Phi_{\Delta,w_n}|^n} \simeq \frac{P_n}{|\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}|^n}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{u}{D_{u^2}(\infty)},$$

откуда при $n\to\infty$ получаем

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}(x)|^n} - \frac{\sqrt{2}D_{u^2}(\infty)}{u\sqrt[4]{(x-a)(b-x)}}\cos\left((n+\frac{1}{2})\arccos x - \frac{\pi}{4} + n\Gamma_{w_n}(x)+\Gamma_u(x)\right)\right\|_{L_{2,u^2}[a,b]} = o(1).$$

Заметим, что из (3.8) следует

$$\frac{\sqrt{2}\,D_{u^2}(\infty)}{u(x)\sqrt[4]{(x-a)(b-x)}} = 2|F_\Delta(x)|,$$

а из (3.3) имеем

$$\arccos x + \Gamma_{w_n}(x) = \arg\left(x+\sqrt{1-x^2}\right) - \arg D_{w_n^2} = \arg\Phi_{\Delta,w_n}(x),$$

$$\frac{1}{2}\arccos x - \frac{\pi}{4} + \Gamma_u(x) = \arg F_\Delta.$$

Таким образом, справедливо

**Предложение 3.3.** *Для эквивалентных формулам* (3.9) *на отрезке* $[a,b]$ *имеем при* $n\to\infty$
$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta,w_n}\Phi_{\Delta,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}[a,b]}=o(1) \tag{3.10}$$
*где*
$$\mathcal{F}_{\Delta,w_n}(x):=\left(\frac{\Phi_{\Delta,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta,w_n}(x)|}\right)^n F_\Delta(x)+\overline{\left(\frac{\Phi_{\Delta,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta,w_n}(x)|}\right)^n F_\Delta(x)}. \tag{3.11}$$

## 4. Асимптотики при наличии зон сталкивания равновесной меры

В этом разделе мы сформулируем и докажем асимптотики для многочленов, ортогональных с переменными весами, не удовлетворяющими условию (2.13), которое при этом заменяется на (2.14). Справедлива

**Теорема 4.1.** *Пусть* $P_n(x)=x^n+\dots$, $n\in\mathbb{Z}_+$ *— последовательность многочленов, ортогональных на отрезке* $\Delta$ *с переменным весом* $f_n:=w_n^{2n}u^2$, *удовлетворяющим условиям теоремы* 2.1, *т. е.* (2.11), (2.12) *выполнены, а вместо* (2.13) *требуется* (2.14): *выпуклость вниз поля* $Q=-\ln w_n(z)$ *в экстремальной задаче для равновесной меры* $\mu_{w_n}$. *Тогда*
$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}=o(1). \tag{4.1}$$

**Замечание 4.1.** В случае невыполнения (2.13) условие (2.14) обеспечивает то, что носитель $\mu_{w_n}$ является отрезком $\Delta^*=[a^*,b^*]$, не совпадающим с отрезком $\Delta$, носителем меры ортогональности $d\sigma_n(x)=f_n(x)\,dx$:
$$\Delta\setminus\Delta^*=\varnothing.$$
Поэтому, в отличие от (3.10), норма $L_{2,u^2}$ берется на отрезке $\Delta^*\subset\Delta$, и все функции, определяющие в (4.1) асимптотику, строятся по ограничению переменного веса на носитель равновесной меры:
$$f_n|_{\Delta^*}=\chi_{\Delta_n}f_n.$$
Действительно, выпуклость внешнего поля (2.14) влечет строгое неравенство на $\Delta\setminus\Delta^*$ в соотношениях равновесия (2.3):
$$V_{\mu_{w_n}}(x)-\ln w_n(x)\begin{cases}=\omega_n, & x\in\Delta^*:=\operatorname{supp}\mu_{w_n},\\ >\omega_n, & x\in\Delta\setminus\Delta^*.\end{cases} \tag{4.2}$$
Так как соотношения равновесия единственным образом определяют меру $\mu_{w_n}$ и константу равновесия $\omega_n$, то мера $\mu_{w_n}$ является экстремальной мерой для задач (4.2), рассмотренных на любом отрезке $\widetilde{\Delta}$: $\Delta^*\subseteq\widetilde{\Delta}\subseteq\Delta$ с внешним полем $-\ln w_n|_{\widetilde{\Delta}}$. Тем самым, для любого многочлена $\widetilde{P}_n(x)=x^n+\dots$, ортогонального на $\widetilde{\Delta}$ с весом $f_n|_{\widetilde{\Delta}}$, по теореме Гончара—Рахманова (см. (2.6), (2.7)) имеем
$$\begin{aligned}\left\|\frac{\widetilde{P}_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\right\|^2_{L_{2,u^2}(\Delta\setminus\Delta^*)}&\simeq\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\right\|^2_{L_{2,u^2}(\Delta\setminus\Delta^*)}\simeq O\left(e^{-2n(V_{\mu_{w_n}}+\omega_n)}w_n^{2n}\right)\simeq\\&\simeq O(\delta^n),\quad\exists\,\delta\in(0,1).\end{aligned} \tag{4.3}$$
В том числе (4.3) справедливо и для $\widetilde{P}_n=:P_n^*$, ортогонального на $\Delta^*$ с весом $f_n|_{\Delta^*}$. Кроме того, для этого многочлена $P_n^*$ ввиду [37, теорема 14.2] и предложения 3.3 имеем
$$\left\|\frac{P_n^*(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}=o(1). \tag{4.4}$$

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 4.1.

*Доказательство теоремы* 4.1. Мы будем следовать подходу из [1, 2, 15, 17, 39]. Распишем левую часть (4.1):

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|^2_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}=$$

$$=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n^2(x)\,u^2(x)\,dx}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^{2n}}-2\mathrm{Re}\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\overline{\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)}\,u^2(x)dx+\int\limits_{\Delta^*}|\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)|^2\,u^2dx=$$

$$=:I_1(P_n)-2\mathrm{Re}\,I_2(P_n)+I_3. \tag{4.5}$$

Рассмотрим $I_1(P_n)$. С учетом соотношений равновесия (2.3), (3.2) на $\Delta^*$ имеем

$$I_1(P_n)=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n^2(x)\,w_n^{2n}u^2(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}=\int\limits_{\Delta}\frac{P_n^2(x)\,f_n(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}-\int\limits_{\Delta\setminus\Delta^*}\frac{P_n^2(x)\,f_n(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}=:I_{1,1}(P_n)-I_{1,2}(P_n).$$

Экстремальное свойство ортогональных многочленов (*monic*) дает

$$I_{1,1}(P_n)\leqslant I_{1,1}(P_n^*),$$

при этом ввиду (4.3) существует $\delta\in(0,1)$ такое, что

$$I_{1,2}(P_n)\simeq I_{1,2}(P_n^*)=O(\delta^n).$$

Таким образом,

$$I_1(P_n)\lesssim I_1(P_n^*). \tag{4.6}$$

Перейдем к $I_2(P_n)$. Имеем

$$I_2(P_n)=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}\left\{\overline{\left(\frac{\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|}\right)^n\mathcal{F}_{\Delta^*}(x)}+\left(\frac{\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)}{|\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|}\right)^n\mathcal{F}_{\Delta^*}(x)\right\}u^2(x)dx=$$

$$=\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x))^n_{(+)}}\overline{(\mathcal{F}_{\Delta^*}(x))_{(+)}}\,u^2(x)dx+\int\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(x)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x))^n_{(-)}}\overline{(\mathcal{F}_{\Delta^*}(x))_{(-)}}\,u^2(x)dx=$$

$$=\oint\limits_{\Delta^*}\frac{P_n(\xi)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(\xi))^n}\,\overline{(\mathcal{F}_{\Delta^*}(\xi))}\,u^2(\xi)\,|d\xi|,$$

где через $(\Psi(\xi))_{(+/-)}$ обозначены верхние/нижние предельные граничные значения функции $\Psi(\xi)$, $\xi=x\pm iy$, $y\to\infty$. Обратимся к воспроизводящему свойству нормированной функции Сегё (3.8), (1.17) (см. [39, с. 165]):

$$\forall\,H(z)\in H_{2,\rho}(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta^*),\quad H(\infty)=\frac{1}{\nu}\oint\limits_{\Delta^*}H(\xi)\overline{F(\xi)}\rho(\xi)|d\xi|,$$

где

$$\nu=\oint\limits_{\Delta^*}|F(\xi)|^2\rho(\xi)|d\xi|,\quad F(z):=\frac{D_{\mathring{\rho}}(\infty)}{D_{\mathring{\rho}}(z)},\quad\begin{cases}D_{\mathring{\rho}},D_{\mathring{\rho}}^{-1}\in H(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Delta^*),\\ |D_{\mathring{\rho}}|^2=\rho\sqrt{(x-a^*)(b^*-x)}\quad\text{на}\quad\Delta^*,\\ D_{\mathring{\rho}}(\infty)>0.\end{cases}$$

Отсюда (так как $\Phi_{\Delta^*,w_n}(z)$ имеет непрерывные граничные значения на $\Delta^*$, и полагая $\rho:=u^2$) получаем

$$I_2(P_n)=\frac{P_n(\infty)}{(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(\infty))^n}\,\nu=\nu.$$

Следовательно, так как $P_n^*(z)$ — тоже многочлен, со старшим коэффициентом единица (*monic*), получаем

$$I_2(P_n)=I_2(P_n^*). \tag{4.7}$$

В итоге, подставляя (4.7) и (4.6) в (4.5), получаем

$$\left\|\frac{P_n(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)}\lesssim\left\|\frac{P_n^*(x)}{|\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)|^n}-\mathcal{F}_{\Delta^*,w_n}(x)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)},$$

что с учетом (4.4) доказывает теорему. □

Обратимся теперь к асимптотике старшего коэффициента ортонормированного относительно переменного веса многочлена в случае, когда условие (2.13) заменяется условием (2.14).

**Теорема 4.2.** *В условиях теоремы* 2.1 *имеет место следующая асимптотика старшего коэффициента* (3.6):

$$\gamma_n = \frac{1+o(1)}{\alpha_{\Delta^*,w_n}\sqrt{\pi}\, D_{u^2}(\infty)}. \tag{4.8}$$

*Доказательство теоремы* 4.2. Справедливость теоремы сразу следует из (3.6) и экстремального свойства ортогональных многочленов. Имеем

$$\frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}\gamma_n^2} = \frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}\int\limits_{\Delta} P_n^2(x)\, w_n^{2n} u^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}\int\limits_{\Delta} \left(P_n^*(x)\right)^2\, w_n^{2n} u^2(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Delta} \frac{\left(P_n^*(x)\right)^2 u^2(x)\,dx}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}\left|\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)\right|^{2n}} \simeq \frac{1}{\alpha^{2n}_{\Delta^*,w_n}}\int\limits_{\Delta^*} \left(P_n^*(x)\right)^2\, w_n^{2n} u^2(x)\,dx.$$

Теорема доказана. □

Перейдем к равномерной асимптотике ортогональных относительно переменного веса многочленов вне носителя равновесной меры $\Delta^*$ в случае замены (2.13) на (2.14).

**Теорема 4.3.** *В условиях теоремы* 2.1 *имеет место внешняя асимптотика*

$$\frac{P_n(z)}{\left(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(z)\right)^n} \rightrightarrows F_{\Delta^*}(z) \quad \textit{равномерно по} \quad z \in K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta^*. \tag{4.9}$$

*Доказательство теоремы* 4.3. Так как многочлены $P_n$ и $P_n^*$ имеют одинаковую $L_{2,u^2}$-асимптотику на $\Delta^*$ (см. (4.4) и (4.1)), имеем

$$\left\|\frac{P_n(x)-P_n^*(x)}{\left(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)\right)^n}\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)} = o(1).$$

Отсюда с помощью интегральной формулы Коши можно получить

$$\left\|\frac{P_n(x)-P_n^*(x)}{\left(\alpha_{\Delta^*,w_n}\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)\right)^n}\right\|_{C(K)} = o(1), \quad K \Subset \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta^*,$$

что с учетом следствия 3.1 (см. (3.7)) дает (4.9). Теорема доказана. □

Наконец, приведем доказательство теоремы 2.1.

*Доказательство теоремы* 2.1. Для упрощения обозначений (не ограничивая общности) мы будем считать, что $\Delta^* := [-1,1] \subset \Delta$. Из [37, теорема 14.2], см. (3.9), и предложения 3.3, см. (3.10), вытекает

$$\left\| p_n(x) f_n^{1/2} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}\cos\Big(n\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x) + \arg F_{\Delta^*}(x)\Big)\right\|_{L_{2,u^2}(\Delta^*)} = o(1).$$

Отсюда по неравенству треугольника $\forall h \in C(\Delta^*)$ получаем

$$\int\limits_{\Delta^*} p_n^2(x) f_n(x) h(x)\,dx - \frac{2}{\pi}\int\limits_{\Delta^*}\frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\cos^2\Big(n\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x) + \arg F_{\Delta^*}(x)\Big) = o(1).$$

Ввиду (4.3) в полученном выражении первый интеграл можно расширить на все $\Delta$. Во втором интеграле сделаем замену

$$\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x) = \theta, \quad \frac{d\arg\Phi_{\Delta^*,w_n}(x)}{dx} = d\theta,$$
$$x = \Psi(\theta), \quad dx = \Psi'(\theta)\,d\theta.$$

В результате имеем

$$\int\limits_{\Delta} p_n^2(x) f_n(x) h(x)\,dx \simeq \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \frac{h(\Psi(\theta))}{\sqrt{1-\Psi^2(\theta)}}\cos^2\Big(n\theta+\widetilde{\gamma}(\theta)\Big)\Psi'(\theta)\,d\theta, \quad \widetilde{\gamma}(\theta) := \arg\Big(F_{\Delta^*}(x(\theta))\Big).$$

Воспользуемся леммой:

**Лемма 4.1** (см. [3, лемма 2.1]). *Пусть* $g \in C(\mathbb{R})$, $g(\theta+\pi) = g(\theta)$, $H \in L^1(0,\pi)$, $\widetilde{\gamma} < \mathrm{const}$ *п.в. на* $[0,\pi]$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливо*

$$\int\limits_0^{\pi} g(n\theta+\gamma)H(\theta)\,d\theta \to \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g(\theta)\,d\theta \int\limits_0^{\pi} H(\theta)\,d\theta.$$

Таким образом, при $n \to \infty$

$$\int\limits_{\Delta} p_n^2(x)\, f_n(x)\, h(x)\,dx \to \frac{2}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} \frac{h(\Psi(\theta))\Psi'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{1-\Psi^2(\theta)}}\int\limits_0^{\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta.$$

Последний интеграл равен $\pi/2$, а в оставшемся интеграле делаем обратную замену. В итоге получаем

$$\int\limits_{\Delta} p_n^2(x)\, f_n(x)\, h(x)\,dx \to \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad n \to \infty.$$

Теорема 2.1 доказана. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аптекарев А. И.* Асимптотика полиномов совместной ортогональности в случае Анджелеско// Мат. сб. — 1988. — *136*, № 1. — С. 56–84.
2. *Аптекарев А. И.* Сильная асимптотика многочленов совместной ортогональности для систем Никишина// Мат. сб. — 1999. — *190*, № 5. — С. 3–44.
3. *Аптекарев А. И., Буяров В. С., Дегеза И. С.* Асимптотическое поведение $L_p$-норм и энтропии для общих ортогональных многочленов// Мат. сб. — 1994. — *185*, № 8. — С. 3–30.
4. *Аптекарев А. И., Денисов С. А., Ятцелев М. Л.* Дискретный оператор Шрёдингера на графе-дереве, потенциалы Анжелеско и их возмущения// Тр. МИАН. — 2020. — *311*. — С. 5–13.
5. *Аптекарев А. И., Лысов В. Г.* Многоуровневая интерполяция системы Никишина и ограниченность матриц Якоби на бинарном дереве// Усп. мат. наук. — 2021. — *76*, № 4. — С. 179–180.
6. *Бернштейн С. Н.* О многочленах, ортогональных на конечном отрезке// В сб.: «Собрание сочинений. Т. 2. Конструктивная теория функций [1931–1953]». — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 7–106.
7. *Гончар А. А.* О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций// Мат. сб. — 1978. — *105*, № 2. — С. 147–163.
8. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа// Тр. МИАН. — 1981. — *157*. — С. 31–48.
9. *Гончар А. А., Рахманов Е. А.* Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов// Мат. сб. — 1984. — *125*, № 1. — С. 117–127.
10. *Лопес Г. Л.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов и сходимости многоточечных аппроксимаций Паде// Мат. сб. — 1985. — *128*, № 2. — С. 216–228.
11. *Никишин Е. М., Сорокин В. Н.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. — М.: Наука, 1988.
12. *Рахманов Е. А.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов// Мат. сб. — 1977. — *103*, № 2. — С. 237–252.
13. *Рахманов Е. А.* Об асимптотике отношения ортогональных многочленов. II// Мат. сб. — 1982. — *118*, № 1. — С. 104–117.
14. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.
15. *Aptekarev A. I.* Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case// Sb. Math. — 1989. — *64*, № 1. — С. 57–84.
16. *Aptekarev A. I.* Multiple orthogonal polynomials// J. Comput. Appl. Math. — 1998. — *99*, № 1-2. — С. 423–447.
17. *Aptekarev A. I.* Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems// Sb. Math. — 1999. — *190*, № 5. — С. 631–669.

18. *Aptekarev A. I., Buyarov V. S., Dehesa J. S.* Asymptotic behavior of the $L_p$-norms and the entropy for general orthogonal polynomials// Russian Acad. Sci. Sb. Math. — 1995. — *82*, № 2. — С. 373–395.
19. *Aptekarev A. I., Denisov S. A., Yattselev M. L.* Discrete Schrödinger operator on a tree, Angelesco potentials, and their perturbations// Proc. Steklov Inst. Math. — 2020. — *311*. — С. 1–9.
20. *Aptekarev A. I., Denisov S. A., Yattselev M. L.* Self-adjoint Jacobi matrices on trees and multiple orthogonal polynomials// Trans. Am. Math. Soc. — 2020. — *373*, № 2. — С. 875–917.
21. *Aptekarev A. I., Lysov V. G.* Multilevel interpolation of a Nikishin system and boundedness of the Jacobi matrices on a binary tree// Russ. Math. Surv. — 2021. — *76*. — DOI: 10.1070/RM10017.
22. *Avni N., Breuer J., Simon B.* Periodic Jacobi matrices on trees// Adv. Math. — 2020. — *370*. — 107241.
23. *Deift P.* Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann—Hilbert approach. — Providence: Am. Math. Soc., 1999.
24. *Gonchar A. A.* On the speed of rational approximation of some analytic functionss// Sb. Math. — 1978. — *34*, № 2. — С. 131–145.
25. *Gonchar A. A., Rakhmanov E. A.* On the convergence of simultaneous Pade approximants for systems of functions of Markov type// Proc. Steklov Inst. Math. — 1983. — *157*. — С. 31–50.
26. *Gonchar A. A., Rakhmanov E. A.* Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials// Sb. Math. — 1986. — *53*, № 1. — С. 119–130.
27. *Lopes G. L.* On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoint Padé approximants// Sb. Math. — 1987. — *56*, № 1. — С. 207–219.
28. *Lubinsky D. S., Mhaskar H. N., Saff E. B.* A proof of Freud's conjecture for exponential weights// Constructive Approx. — 1988. — *4*. — С. 65–83.
29. *Mhaskar H. N., Saff E. B.* Extremal problems for polynomials with exponential weights// Trans. Am. Math. Soc. — 1984. — *285*. — С. 203–234.
30. *Muscalu C., Tao T., Thiele C.* Multi-linear multipliers associated to simplexes of arbitrary length// ArXiv. — 2007. — 0712.2420 [math.CA].
31. *Nikishin E. M., Sorokin V. N.* Rational approximations and orthogonality. — Providence: Am. Math. Soc., 1991.
32. *Rakhmanov E. A.* On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials// Sb. Math. — 1977. — *32*, № 2. — С. 199–213.
33. *Rakhmanov E. A.* On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II// Sb. Math. — 1983. — *46*, № 3. — С. 105–117.
34. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. — Berlin: Springer, 1997.
35. *Stahl H., Totik V.* General orthogonal polynomials. — New York: Cambridge University Press, 1992.
36. *Szegö G.* Orthogonal polynomials. — Providence: Am. Math. Soc., 1939.
37. *Totik V.* Weighted approximation with varying weight. — New York: Springer, 1994.
38. *Totik V.* Othogonal polynomials with respect to varying weights// J. Comput. Appl. Math. — 1998. — *99*, № 1-2. — С. 373–385.
39. *Widom H.* Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane// Adv. Math. — 1969. — *3*. — С. 127–232.

А. И. Аптекарев
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: aptekaa@keldysh.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-3-427-441 UDC 517.53

# Weak and Strong Asymptotics of Orthogonal Polynomials with «Varying» Weight

© 2021 **A. I. Aptekarev**

**Abstract**. We consider sequences of orthogonal polynomials with varying weights, i.e., depending on the number of the polynomial. We obtain extensions of applicability classes of well-known asymptotic formulas for large numbers.

## REFERENCES

1. A. I. Aptekarev, "Asimptotika polinomov sovmestnoy ortogonal'nosti v sluchae Andzhelesko" [Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1988, **136**, No. 1, 56–84 (in Russian).
2. A. I. Aptekarev, "Sil'naya asimptotika mnogochlenov sovmestnoy ortogonal'nosti dlya sistem Nikishina" [Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **190**, No. 5, 3–44 (in Russian).
3. A. I. Aptekarev, V. S. Buyarov, and I. S. Degeza, "Asimptoticheskoe povedenie $L_p$-norm i entropii dlya obshchikh ortogonal'nykh mnogochlenov" [Asymptotic behavior of the $L_p$-norms and the entropy for general orthogonal polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 8, 3–30 (in Russian).
4. A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, and M. L. Yattselev, "Diskretnyy operator Shredingera na grafe-dereve, potentsialy Anzhelesko i ikh vozmushcheniya" [Discrete Schrödinger operator on a tree, Angelesco potentials, and their perturbations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2020, **311**, 5–13 (in Russian).
5. A. I. Aptekarev and V. G. Lysov, "Mnogourovnevaya interpolyatsiya sistemy Nikishina i ogranichennost' matrits Yakobi na binarnom dereve" [Multilevel interpolation of a Nikishin system and boundedness of the Jacobi matrices on a binary tree], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2021, **76**, No. 4, 179–180 (in Russian).
6. S. N. Bernshteyn, "O mnogochlenakh, ortogonal'nykh na konechnom otrezke" [On orthogonal polynomials on a finite segment], In: *Sobranie sochineniy. T. 2. Konstruktivnaya teoriya funktsiy [1931–1953]* [Collected Works. Vol. 2. Constructive Function Theory [1931–1953]], AN SSSR, Moscow, 1954, pp. 7–106 (in Russian).
7. A. A. Gonchar, "O skorosti ratsional'noy approksimatsii nekotorykh analiticheskikh funktsiy" [On the speed of rational approximation of some analytic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1978, **105**, No. 2, 147–163 (in Russian).
8. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, "O skhodimosti sovmestnykh approksimatsiy Pade dlya sistem funktsiy markovskogo tipa" [On the convergence of simultaneous Pade approximations for systems of functions of Markov type], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1981, **157**, 31–48 (in Russian).
9. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, "Ravnovesnaya mera i raspredelenie nuley ekstremal'nykh mnogochlenov" [Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **125**, No. 1, 117–127 (in Russian).
10. G. L. Lopes, "Ob asimptotike otnosheniya ortogonal'nykh mnogochlenov i skhodimosti mnogotochechnykh approksimatsiy Pade" [On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoint Padé approximations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1985, **128**, No. 2, 216–228 (in Russian).
11. E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Ratsional'nye approksimatsii i ortogonal'nost'* [Rational Approximations and Orthogonality], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
12. E. A. Rakhmanov, "Ob asimptotike otnosheniya ortogonal'nykh mnogochlenov" [On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **103**, No. 2, 237–252 (in Russian).

13. E. A. Rakhmanov, “Ob asimptotike otnosheniya ortogonal’nykh mnogochlenov. II” [On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **118**, No. 1, 104–117 (in Russian).
14. G. Szegö, *Ortogonal’nye mnogochleny* [Orthogonal Polynomials], Fizmatgiz, Moscow, 1962 (Russian translation).
15. A. I. Aptekarev, “Asymptotics of simultaneously orthogonal polynomials in the Angelesco case,” *Sb. Math.*, 1989, **64**, No. 1, 57–84.
16. A. I. Aptekarev, “Multiple orthogonal polynomials,” *J. Comput. Appl. Math.*, 1998, **99**, No. 1-2, 423–447.
17. A. I. Aptekarev, “Strong asymptotics of multiply orthogonal polynomials for Nikishin systems,” *Sb. Math.*, 1999, **190**, No. 5, 631–669.
18. A. I. Aptekarev, V. S. Buyarov, and J. S. Dehesa, “Asymptotic behavior of the $L_p$-norms and the entropy for general orthogonal polynomials,” *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1995, **82**, No. 2, 373–395.
19. A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, and M. L. Yattselev, “Discrete Schrödinger operator on a tree, Angelesco potentials, and their perturbations,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, **311**, 1–9.
20. A. I. Aptekarev, S. A. Denisov, and M. L. Yattselev, “Self-adjoint Jacobi matrices on trees and multiple orthogonal polynomials,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2020, **373**, No. 2, 875–917.
21. A. I. Aptekarev and V. G. Lysov, “Multilevel interpolation of a Nikishin system and boundedness of the Jacobi matrices on a binary tree,” *Russ. Math. Surv.*, 2021, **76**, DOI: 10.1070/RM10017.
22. N. Avni, J. Breuer, and B. Simon, “Periodic Jacobi matrices on trees,” *Adv. Math.*, 2020, **370**, 107241.
23. P. Deift, *Orthogonal polynomials and random matrices: a Riemann—Hilbert approach*, Am. Math. Soc., Providence, 1999.
24. A. A. Gonchar, “On the speed of rational approximation of some analytic functions,” *Sb. Math.*, 1978, **34**, No. 2, 131–145.
25. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, “On the convergence of simultaneous Pade approximants for systems of functions of Markov type,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1983, **157**, 31–50.
26. A. A. Gonchar and E. A. Rakhmanov, “Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials,” *Sb. Math.*, 1986, **53**, No. 1, 119–130.
27. G. L. Lopes, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoint Padé approximants,” *Sb. Math.*, 1987, **56**, No. 1, 207–219.
28. D. S. Lubinsky, H. N. Mhaskar and E. B. Saff, “A proof of Freud’s conjecture for exponential weights,” *Constructive Approx.*, 1988, **4**, 65–83.
29. H. N. Mhaskar and E. B. Saff, “Extremal problems for polynomials with exponential weights,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1984, **285**, 203–234.
30. C. Muscalu, T. Tao, and C. Thiele, “Multi-linear multipliers associated to simplexes of arbitrary length,” *ArXiv*, 2007, 0712.2420 [math.CA].
31. E. M. Nikishin and V. N. Sorokin, *Rational Approximations and Orthogonality*, Am. Math. Soc., Providence, 1991.
32. E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials,” *Sb. Math.*, 1977, **32**, No. 2, 199–213.
33. E. A. Rakhmanov, “On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials. II,” *Sb. Math.*, 1983, **46**, No. 3, 105–117.
34. E. B. Saff and V. Totik, *Logarithmic Potentials with External Fields*, Springer, Berlin, 1997.
35. H. Stahl and V. Totik, *General Orthogonal Polynomials*, Cambridge University Press, New York, 1992.
36. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, Am. Math. Soc., Providence, 1939.
37. V. Totik, *Weighted Approximation with Varying Weight*, Springer, New York, 1994.
38. V. Totik, “Othogonal polynomials with respect to varying weights,” *J. Comput. Appl. Math.*, 1998, **99**, No. 1-2, 373–385.
39. H. Widom, “Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane,” *Adv. Math.*, 1969, **3**, 127–232.

A. I. Aptekarev
Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: aptekaa@keldysh.ru