Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 408–421

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-408-421 УДК 517.984

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ С НЕИНТЕГРИРУЕМЫМИ РЕГУЛЯРНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© 2021 г. **В. А. ЮРКО**

Аннотация. Дается краткий обзор результатов по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков с неинтегрируемыми регулярными особенностями. Установлены свойства спектральных характеристик, доказаны теоремы о полноте корневых функций в соответствующих пространствах, теоремы о разложении и равносходимости, приводится решение обратной спектральной задачи для этого класса операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Светлой памяти Николая Дмитриевича Копачевского.

1. Введение

Цель статьи — дать краткий обзор результатов по спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков с неинтегрируемыми регулярными особенностями. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x)+\sum_{j=0}^{n-2}\Big(\frac{\nu_j}{(x-a)^{n-j}}+q_j(x)\Big)y^{(j)}(x)=\lambda y(x),\ n\geqslant 2,\ 0\leqslant x\leqslant T\leqslant\infty, \tag{1.1}$$

где $0\leqslant a<T$, ν_j — комплексные числа, а $q_j(x)$ — комплекснозначные функции, условия на которые будут даны позднее. Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_n$ — корни характеристического многочлена

$$\delta(\mu):=\sum_{j=0}^{n}\nu_j\prod_{k=0}^{j-1}(\mu-k),\ \nu_n:=1,\ \nu_{n-1}:=0,$$

причем для определенности $\mu_k-\mu_j\neq sn$ $(s=0,\pm1,\pm2,\ldots)$, $\operatorname{Re}\mu_1<\ldots<\operatorname{Re}\mu_n$ (остальные случаи вносят незначительные изменения). Спектральные свойства операторов зависят от расположения чисел $\mu_1,\ldots,\mu_n$ на комплексной плоскости. Обозначим $\theta_{\nu j}:=n-1-\operatorname{Re}(\mu_n-\mu_1)-j+\nu$.

Дифференциальные уравнения с неинтегрируемыми особенностями возникают в различных разделах математики и приложениях. К уравнению (1.1) также сводятся дифференциальные уравнения с точками поворота, например, уравнение $z^{(n)}(t)=\lambda r(t)z(t)$, $r(t)\sim\alpha t^{\gamma}$, $t\to 0$, и многие другие (см. [1, 8, 10]). Уравнение (1.1) является в некотором смысле каноническим для широкого класса

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-01-00102).

уравнений с особенностями и точками поворота. При $n = 2$ прямые и обратные спектральные задачи для операторов с особенностями изучены достаточно полно. Случай $n > 2$ является существенно более трудным. Именно этому случаю и посвящен настоящий обзор, хотя приведенные результаты верны и для $n = 2$.

Исследованию дифференциальных операторов при $n > 2$ с *интегрируемыми* коэффициентами посвящена обширная литература (см. [2, 3, 5] и библиографию в них). Наличие неинтегрируемой особенности вносит значительные качественные изменения в исследовании прямых и обратных спектральных задач. Важную роль в спектральной теории дифференциальных операторов играют специальные фундаментальные системы решений (ФСР), обладающие требуемыми аналитическими и асимптотическими свойствами. При построении таких ФСР для уравнения (1.1) возникают существенные трудности. В частности, в отличие от уравнений без особенностей, важной и технически сложной задачей является получение асимптотических свойств множителей Стокса, связывающих построенные ФСР. Существенную роль в прямых и обратных задачах для уравнения (1.1) играет также введенная в [9] так называемая *матрица Вейля*. Опираясь на свойства построенных ФСР, множителей Стокса и матрицы Вейля, проведено исследование спектральных свойств операторов с неинтегрируемыми особенностями, доказаны теоремы о полноте корневых функций в соответствующих пространствах, теоремы о разложении и равносходимости, получено решение обратной спектральной задачи для этого класса операторов.

Несколько слов о структуре статьи. В разделах 2-3 исследуется уравнение (1.1) при $a = 0$, т. е. в случае, когда особенность находится на конце интервала. При этом в разделе 2 изучается случай полуоси, а раздел 3 посвящен случаю конечного интервала. В разделе 4 исследуется более трудный случай $a > 0$, когда особенность лежит внутри интервала. Для удобства читателя изложение материала в разделах 2-4 независимо друг от друга.

Этот краткий обзор не претендует на полноту. В нем изложены только основные результаты по спектральной теории дифференциальных операторов с неинтегрируемыми регулярными особенностями для случая $n > 2$. Более подробную информацию можно найти в работах, приведенных в библиографическом списке. Отметим, что в последнее время появились важные работы [6,7], в которых исследуются дифференциальные системы с неинтегрируемыми регулярными особенностями.

2. Дифференциальные операторы на полуоси

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell y := y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \Big(\frac{\nu_j}{x^{n-j}} + q_j(x)\Big) y^{(j)} = \lambda y, \tag{2.1}$$

на полуоси $x > 0$. Положим $q_{\nu j}(x) := \begin{cases} q_j^{(\nu)}(x) & \text{при } x \geqslant 1, \\ q_j^{(\nu)}(x) x^{\theta_{\nu j}} & \text{при } x < 1. \end{cases}$

Будем говорить, что $q_j(x) \in W_j$, если функции $q_j^{(\nu)}(x)$ абсолютно непрерывны при $\nu = \overline{0, j-1}$ и $q_{\nu j}(x) \in L(0, \infty)$ при $0 \leqslant \nu \leqslant j \leqslant n-2$. Будем говорить,что $\ell \in V$, если $q_j(x) \in W_j$.

Построим специальные ФСР для уравнения (2.1) и установим свойства множителей Стокса для этих систем. Построение проводится в три этапа.

1) Рассмотрим «простейшее» уравнение без спектрального параметра:

$$\ell_0 y := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\nu_j}{x^{n-j}}\, y^{(j)}(x) = y(x) \tag{2.2}$$

в комплексной x-плоскости. Пусть $x = r\exp(i\varphi)$, $r > 0$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$, $x^\mu := \exp(\mu(\ln r + i\varphi))$, а Π_- — x-плоскость с разрезом по полуоси $x \leqslant 0$. Пусть числа c_{j0}, $j = \overline{1, n}$ выбраны так, чтобы

$$\prod_{j=1}^{n} c_{j0} = (\det[\mu_j^{\nu-1}]_{j,\nu=\overline{1,n}})^{-1}.$$

Тогда функции

$$C_j(x) = x^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk} x^{nk}, \quad c_{jk} = c_{j0}\Big(\prod_{s=1}^{k} \delta(\mu_j + sn)\Big)^{-1} \tag{2.3}$$

являются решениями уравнения (2.2). В силу (2.3) функции $C_j(x)$ являются регулярными в области Π_- и $\det[C_j^{(\nu-1)}(x)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1$.

Обозначим $\varepsilon_k = \exp\bigl(\frac{2\pi i(k-1)}{n}\bigr)$, $S_k = \bigl\{x : \arg x \in \bigl(\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\bigr)\bigr\}$, $S_1^* = \bar{S}_{n-1}$, $S_k^* = \bar{S}_{n-2k+1} \cup \bar{S}_{n-2k+2}$, $k = \overline{2,n}$, $Q_k = \bigl\{x : \arg x \in \bigl[\max\bigl(-\pi, (-2k+2)\frac{\pi}{n}\bigr), \min\bigl(\pi, (2n-2k+2)\frac{\pi}{n}\bigr)\bigr]\bigr\}$, $k = \overline{1,n}$.

При $x \in S_k^*$ уравнение (2.2) имеет решения типа Йоста $e_k(x)$, $k = \overline{1,n}$ вида $e_k^{(\nu-1)}(x) = \varepsilon_k^{\nu}\exp(\varepsilon_k x) z_{k\nu(x)}$, $\nu = \overline{0,n-1}$, где функции $z_{k\nu}(x)$ являются решениями интегральных уравнений (2.4):

$$z_{k\nu}(x) = 1 + \frac{1}{n}\int_x^{\infty}\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^{\nu+1}\varepsilon_k^{-\nu}\exp((\varepsilon_k - \varepsilon_j)(t-x))\Bigr)\Bigl(\sum_{m=0}^{n-2}\nu_m\varepsilon_k^m t^{m-n} z_{km}(t)\Bigr)\,dt \tag{2.4}$$

(здесь $\arg t = \arg x$, $|t| > |x|$). Разложим $e_k(x)$ по ФСР $\{C_j(x)\}_{j=\overline{1,n}}$:

$$e_k(x) = \sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}^0 C_j(x). \tag{2.5}$$

В частности, это дает аналитическое продолжение для $e_k(x)$ в Π_-. Функции $e_k(x)$ образуют ФСР уравнения (2.2), причем $\det[e_k^{(\nu-1)}(x)]_{k,\nu=\overline{1,n}} = \det[\varepsilon_k^{\nu-1}]_{k,\nu=\overline{1,n}}$. Имеет место асимптотическая формула

$$e_k^{(\nu-1)}(x) = \varepsilon_k^{\nu-1}\exp(\varepsilon_k x)(1 + O(x^{-1})), \quad |x| \to \infty,\ x \in Q_k. \tag{2.6}$$

Отметим, что формулы (2.6) при $x \in S_k^*$ очевидны. Однако удается доказать, что (2.6) действуют в более широких секторах Q_k, что является важным для дальнейшего исследования фактом.

Лемма 2.1. *Справедливы соотношения*

$$\beta_{kj}^0 = \beta_{1j}^0\varepsilon_k^{\mu_j}, \quad j,k = \overline{1,n}, \tag{2.7}$$

$$\prod_{j=1}^{n}\beta_{1j}^0 = (\det[\varepsilon_k^{\mu_j}]_{k,j=\overline{1,n}})^{-1}\det[\varepsilon_k^{j-1}]_{k,j=\overline{1,n}} \neq 0. \tag{2.8}$$

Доказательство. В самом деле, при $\arg x \in \bigl(-\pi, \pi - \frac{2\pi s}{n}\bigr)$ имеем

$$e_k(\varepsilon^s x) = \sum_{j=1}^{n}\beta_{kj}^0(\varepsilon^s)^{\mu_j}C_j(x). \tag{2.9}$$

Из построения функций $e_k(x)$ следует, что $e_1(\varepsilon^s x) = e_{s+1}(x)$. Подставляя (2.5) и (2.9) в это равенство и сравнивая соответствующие коэффициенты, получаем (2.7). После этого (2.8) становится очевидным. $\square$

Формулы (2.6) дают связи между множителями Стокса β_{kj}^0, что сыграет важную роль при изучении свойств множителей Стокса для уравнения (2.1).

2) Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$\ell_0 y = \lambda y = \rho^n y, \quad x > 0. \tag{2.10}$$

Очевидно, что если $y(x)$ — решение уравнения (2.2), то $y(\rho x)$ удовлетворяет (2.10). Положим $C_j(x,\lambda) = \rho^{-\mu_j}C_j(\rho x) = x^{\mu_j}\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_{jk}(\rho x)^{nk}$. Функции $C_j(x,\lambda)$ являются целыми по λ решениями уравнения (2.10), причем $\det[C_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1$.

В каждом секторе $S_{k_0} = \bigl\{\rho : \arg\rho \in \bigl(\frac{k_0\pi}{n}, \frac{(k_0+1)\pi}{n}\bigr)\bigr\}$ корни R_k уравнения $R^n = 1$ можно занумеровать так, чтобы $\mathrm{Re}(\rho R_1) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n)$, $\rho \in S_{k_0}$. Ясно, что $R_k = \exp(2i\pi\omega_k/n)$, где ω_k — перестановка чисел $\overline{0,n-1}$, своя для каждого сектора. Из вышеизложенного вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *В каждом секторе S_{k_0} дифференциальное уравнение* (2.2) *имеет ФСР $B_0 = \{y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ такую, что $y_k(x,\rho) = y_k(\rho x)$, $y_k(x) = e_{\omega_k+1}(x)$,*

$$\bigl|y_k^{(\nu)}(x,\rho)(\rho R_k)^{-\nu}\exp(-\rho R_k x) - 1\bigr| \leqslant \frac{M_0}{|\rho|x}, \quad \rho \in \bar{S}_{k_0}, \quad |\rho|x \geqslant 1, \quad \nu = \overline{0,n-1},$$

$$\det\bigl[y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)\bigr]_{k,\nu=\overline{1,n}} \equiv \rho^{n(n-1)/2}\Omega, \quad \Omega := \det\bigl[R_k^{\nu-1}\bigr]_{k,\nu=\overline{1,n}} \neq 0,$$

$$y_k(x,\rho)=\sum_{j=1}^{n} b^0_{kj}\rho^{\mu_j}C_j(x,\lambda),\quad b^0_{kj}=\beta^0_{1j}R_k^{\mu_j},\ \beta^0_{1j}\neq 0,$$

где константа M_0 *зависит только от* ν_j.

3) Построим теперь ФСР уравнения (2.1) методом возмущений. Обозначим

$$C^*_j(x,\lambda)=\det[C_k^{(\nu)}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2};\,k=\overline{1,n}\setminus n-j+1},$$

$$y^*_j(x,\rho)=(-1)^{n-j}\big(\rho^{(n-1)(n-2)/2}\Omega\big)^{-1}\det\big[y_k^{(\nu)}(x,\rho)\big]_{\nu=\overline{0,n-2};\,k=\overline{1,n}\setminus j},$$

$$F_{k\nu}(\rho x)=\begin{cases} R_k^{\nu}\exp(\rho R_k x), & |\rho|x>1,\\ (\rho x)^{\mu_1-\nu}, & |\rho|x\leqslant 1,\end{cases}\qquad F^*_k(\rho x)=\begin{cases}\exp(-\rho R_k x), & |\rho|x>1,\\ (\rho x)^{n-1-\mu_n}, & |\rho|x\leqslant 1,\end{cases}$$

$$U^0_{k\nu}(x,\rho)=y_k^{(\nu)}(x,\rho)(\rho^{\nu}F_{k\nu}(\rho x))^{-1},\qquad U^{0,*}_k(x,\rho)=y^*_k(x,\rho)(F^*_k(\rho x))^{-1},$$

$$g(x,t,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_j(x,\lambda)C^*_{n-j+1}(t,\lambda)=\frac{1}{\rho^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}y_j(x,\rho)y^*_j(t,\rho),$$

$$J_m(\rho)=|\rho|^{\mathrm{Re}(\mu_1-\mu_n)}\int_0^{|\rho|^{-1}}t^{\theta_n-m}|q_m(t)|\,dt+|\rho|^{m-n+1}\int_{|\rho|^{-1}}^{\infty}|q_m(t)|\,dt,\ J(\rho)=\sum_{m=0}^{n-2}J_m(\rho).$$

Имеют место оценки $|U^0_{k\nu}(x,\rho)|\leqslant M_1$, $|U^{0,*}_k(x,\rho)|\leqslant M_1$, $x\geqslant 0$, $\rho\in\bar S_{k_0}$,

$$\Big|\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}}g(x,t,\lambda)\Big|\leqslant M_2\sum_{j=1}^{n}|x^{\mu_j-\nu}t^{n-1-\mu_j}|,\quad |\rho x|\leqslant C_0,\ t\leqslant x,$$

$$J(\rho)\leqslant\frac{Q}{|\rho|},\ |\rho|\geqslant 1,\quad Q:=\sum_{m=0}^{n-2}\int_0^{\infty}|q_{0m}(t)|\,dt,$$

где M_1 зависит от ν_j, а M_2 — от ν_j и C_0.

Пусть функции $S_j(x,\lambda)$ являются решениями интегральных уравнений

$$S_j^{(\nu)}(x,\lambda)=C_j^{(\nu)}(x,\lambda)-\int_0^x\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}}g(x,t,\lambda)\Big(\sum_{m=0}^{n-2}q_m(t)S_j^{(m)}(t,\lambda)\Big)\,dt,\ \nu=\overline{0,n-1}.$$

Тогда $S_j(x,\lambda)$ — целые по λ решения уравнения (2.1), причем $\det\big[S_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)\big]_{j,\nu=\overline{1,n}}\equiv 1$,

$$S_j^{(\nu)}(x,\lambda)=O(x^{\mu_j-\nu}),\ (S_j(x,\lambda)-C_j(x,\lambda))x^{-\mu_j}=o(x^{\mu_n-\mu_1}),\quad x\to 0.$$

Пусть $S_{k_0,\alpha}=\{\rho:\ \rho\in S_{k_0},\ |\rho|>\alpha\}$, $\rho_0=2M_1Q+1$. При $k=\overline{1,n}$, $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$ рассмотрим систему интегральных уравнений

$$U_{k\nu}(x,\rho)=U^0_{k\nu}(x,\rho)+\sum_{m=0}^{n-2}\int_0^{\infty}A_{k\nu m}(x,t,\rho)U_{km}(t,\rho)\,dt,\ x\geqslant 0,\ \nu=\overline{0,n-1},\tag{2.11}$$

где

$$A_{k\nu m}(x,t,\rho)=\frac{q_m(t)F_{km}(\rho t)}{\rho^{n-1-m}F_{k\nu}(\rho x)}\begin{cases}-\displaystyle\sum_{j=1}^{k}F_{j\nu}(\rho x)U^0_{j\nu}(x,\rho)F^*_j(\rho t)U^{0,*}_j(t,\rho), & t\leqslant x,\\ \displaystyle\sum_{j=k+1}^{n}F_{j\nu}(\rho x)U^0_{j\nu}(x,\rho)F^*_j(\rho t)U^{0,*}_j(t,\rho), & t>x.\end{cases}$$

Имеет место оценка $\displaystyle\sum_{m=0}^{n-2}\int_0^{\infty}|A_{k\nu m}(x,t,\rho)|\,dt\leqslant M_1J(\rho)\leqslant\frac{M_1Q}{|\rho|}$. Поэтому система (2.11) при $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$ имеет единственное решение, причем равномерно по $x\geqslant 0$

$$U_{k\nu}(x,\rho)-U^0_{k\nu}(x,\rho)=O(\rho^{-1}),\quad \rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}.\tag{2.12}$$

Теорема 2.2. *При* $x>0$, $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$ *существует фундаментальная система решений дифференциального уравнения* (2.1) $B=\{Y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ *вида* $Y_k^{(\nu)}(x,\rho)=\rho^{\nu}F_{k\nu}(\rho x)U_{k\nu}(x,\rho)$, *где функции* $U_{k\nu}(x,\rho)$ *являются решениями системы* (2.11) *и верно* (2.12). *Функции* $Y_k^{(\nu)}(x,\rho)$ *при* *каждом* $x > 0$ *регулярны по* $\rho \in S_{k_0,\rho_0}$, *непрерывны по* $\rho \in \bar{S}_{k_0,\rho_0}$ *и* $\det\left[Y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)\right]_{k,\nu=\overline{1,n}} = \rho^{n(n-1)/2}\Omega(1+O(\rho^{-1}))$ *при* $|\rho|\to\infty$. *Функции* $Y_k(x,\rho)$ *удовлетворяют соотношению*

$$Y_k(x,\rho) = y_k(x,\rho) - \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^{k} y_j(x,\rho)y_j^*(t,\rho)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{n-2} q_m(t)Y_k^{(m)}(t,\rho)\Big)\,dt +$$
$$+\frac{1}{\rho^{n-1}}\int_x^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^{n} y_j(x,\rho)y_j^*(t,\rho)\Big)\Big(\sum_{m=0}^{n-2} q_m(t)Y_k^{(m)}(t,\rho)\Big)\,dt.$$

Справедливо представление

$$Y_k(x,\rho) = \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\rho)S_j(x,\lambda), \tag{2.13}$$

причем

$$b_{kj}(\rho) = b^0_{kj}(\rho)\rho^{\mu_j}(1+O(\rho^{-1})), \quad |\rho|\to\infty,\ \rho\in\bar{S}_{k_0,\rho_0}. \tag{2.14}$$

В доказательстве нуждается лишь асимптотическая формула (2.14) для множителей Стокса $b_{kj}(\rho)$ из (2.13), которая является наиболее важным фактом в теореме. Пусть ρ фиксировано, $x \leqslant |\rho|^{-1}$. Имеем

$$\left.\begin{aligned} U^0_{k0}(x,\rho) &= \sum_{j=1}^{n} b^0_{kj}(\rho x)^{\mu_j-\mu_1}\hat{C}_j(x,\lambda),\\ U_{k0}(x,\rho) &= \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\rho)(\rho)^{-\mu_1}x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

где $\hat{C}_j(x,\lambda) = x^{-\mu_j}C_j(x,\lambda)$, $\hat{S}_j(x,\lambda) = x^{-\mu_j}S_j(x,\lambda)$, $\hat{S}_j(0,\lambda) = \hat{C}_j(0,\lambda) = c_{j0} \neq 0$. Из (2.15) имеем

$$U_{k0}(x,\rho) - U^0_{k0}(x,\rho) = \sum_{j=1}^{n}\Big(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{kj}\rho^{\mu_j-\mu_1}\Big)x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda) +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} b^0_{kj}(\rho x)^{\mu_j-\mu_1}(\hat{S}_j(x,\lambda) - \hat{C}_j(x,\lambda)). \tag{2.16}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{F}_{k1}(x,\rho) &= U_{k0}(x,\rho) - U^0_{k0}(x,\rho),\\ \mathcal{F}_{k,s+1}(x,\rho) &= \Big(\mathcal{F}_{ks}(x,\rho) - \mathcal{F}_{ks}(0,\rho)\hat{S}_s(x,\lambda)c_{s0}^{-1}\Big)x^{\mu_s-\mu_{s+1}},\ s=\overline{1,n-1}. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

Лемма 2.2. *Справедливы соотношения*

$$(b_{ks}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{ks}\rho^{\mu_s-\mu_1})c_{s0} = \mathcal{F}_{ks}(x,\rho), \quad s=\overline{1,n}, \tag{2.18}$$

$$\mathcal{F}_{ks}(x,\rho) = ((U_{k0}(x,\rho) - U^0_{k0}(x,\rho)) - \sum_{j=1}^{s-1}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{kj}\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda))x^{\mu_1-\mu_s},\ s=\overline{1,n}. \tag{2.19}$$

Доказательство. При $s=1$ равенство (2.18) следует из (2.16) при $x=0$, а равенство (2.19) очевидно. Предположим теперь, что (2.18), (2.19) доказаны для $s=1,\dots,N-1$. Тогда

$$\Big((U_{k0}(x,\rho) - U^0_{k0}(x,\rho)) - \sum_{j=1}^{N-1}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{kj}\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda))\Big)x^{\mu_1-\mu_N} =$$
$$= \Big((U_{k0}(x,\rho) - U^0_{k0}(x,\rho)) - \sum_{j=1}^{N-2}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{kj}\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_1}\hat{S}_j(x,\lambda))\Big)x^{\mu_1-\mu_{N-1}}x^{\mu_{N-1}-\mu_N} -$$
$$-(b_{k,N-1}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{k,N-1}\rho^{\mu_{N-1}-\mu_1})\hat{S}_{N-1}(x,\lambda)x^{\mu_{N-1}-\mu_N} = \mathcal{F}_{kN}(x,\rho),$$

т. е. верно (2.19) при $s=N$. Теперь равенство (2.16) запишем в виде

$$\mathcal{F}_{kN}(x,\rho) = \sum_{j=N}^{n}(b_{kj}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{kj}\rho^{\mu_j-\mu_1})x^{\mu_j-\mu_N}\hat{S}_j(x,\lambda) + \sum_{j=1}^{n}(b^0_{kj}(\rho x)^{\mu_j-\mu_1}(\hat{S}_j(x,\lambda) - \hat{C}_j(x,\lambda))x^{\mu_1-\mu_N}.$$

Отсюда находим $\mathcal{F}_{kN}(0,\rho) = (b_{kN}(\rho)\rho^{-\mu_1} - b^0_{kN}\rho^{\mu_N-\mu_1})c_{N0}$, т. е. верно (2.18) при $s=N$. Лемма 2.2 доказана. $\square$

Соотношение (2.11) при $\nu = 0$ запишем в виде

$$\mathcal{F}_{k1}(x,\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- \int_0^x (\sum_{j=1}^n (U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho))(\rho t)^{n-1-\mu_n} V_k(t,\rho)\,dt + \\ + \int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho))F_j^*(\rho t)\Big) V_k(t,\rho)\,dt\Big), \quad (2.20)$$

где $V_k(t,\rho) = \sum\limits_{m=0}^{n-2} q_m(t)\rho^m F_{km}(\rho t)U_{km}(t,\rho)$. Так как при $t \leqslant x \leqslant |\rho|^{-1}$

$$\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho) = \rho^{\mu_n-\mu_1}x^{-\mu_1}t^{1-n+\mu_n}g(x,t,\lambda),$$

то получаем

$$\Big|\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big| \leqslant M_3|(\rho x)^{\mu_n-\mu_1}|, \ 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant |\rho|^{-1}. \quad (2.21)$$

Лемма 2.3. *Имеют место равенства*

$$\mathcal{F}_{ks}(0,\rho) = \rho^{\mu_s-\mu_1-n+1}c_{s0}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{js}^0 F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big) V_k(t,\rho)\,dt, \quad (2.22)$$

$$\mathcal{F}_{ks}(x,\rho) = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- x^{\mu_1-\mu_s}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)(\rho t)^{n-1-\mu_n} V_k(t,\rho)\,dt - \\ - \sum_{\ell=1}^{s-1} x^{\mu_\ell-\mu_s}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{j\ell}^0 \rho^{\mu_\ell-\mu_1}(\hat{S}_\ell(x,\lambda) - \hat{C}_\ell(x,\lambda))F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big) V_k(t,\rho)\,dt + \\ + \int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n \Big(\sum_{\xi=s}^n b_{j\xi}^0 \rho^{\mu_\xi-\mu_1}\hat{C}_\xi(x,\lambda)\Big) F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big) V_k(t,\rho)\,dt\Big), \ x \leqslant |\rho|^{-1}. \quad (2.23)$$

Доказательство. При $s = 1$ равенства (2.22), (2.23) следуют из (2.20) с учетом (2.15). Предположим теперь, что (2.22), (2.23) доказаны при $s = 1, \ldots, N$. Тогда, используя (2.17), вычисляем

$$\mathcal{F}_{k,N+1}(x,\rho) = (\mathcal{F}_{kN}(x,\rho) - \mathcal{F}_{kN}(0,\rho) = \hat{S}_N(x,\lambda)c_{N0}^{-1})x^{\mu_N-\mu_{N+1}} = \\ = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- x^{\mu_1-\mu_{N+1}}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^n (U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)(\rho t)^{n-1-\mu_n} V_k(t,\rho)\,dt - \\ - \sum_{\ell=1}^{N-1} x^{\mu_\ell-\mu_{N+1}}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{j\ell}^0 \rho^{\mu_\ell-\mu_1}(\hat{S}_\ell(x,\lambda) - \hat{C}_\ell(x,\lambda))F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big) V_k(t,\rho)\,dt + \\ + x^{\mu_N-\mu_{N+1}}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n \Big(\sum_{\xi=N}^n b_{j\xi}^0 \rho^{\mu_\xi-\mu_1}x^{\mu_\xi-\mu_N}\hat{C}_\xi(x,\lambda) - b_{jN}^0\rho^{\mu_N-\mu_{N+1}}\hat{C}_N(x,\lambda) - \\ - b_{jN}^0\rho^{\mu_N-\mu_{N+1}}(\hat{S}_N(x,\lambda) - \hat{C}_N(x,\lambda))\Big) F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho))V_k(t,\rho)\,dt\Big) = \\ = \frac{1}{\rho^{n-1}}\Big(- x^{\mu_1-\mu_{N+1}}\int_0^x \Big(\sum_{j=1}^n U_{j0}^0(x,\rho)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big)(\rho t)^{n-1-\mu_n} V_k(t,\rho)\,dt - \\ - \sum_{\ell=1}^{N} x^{\mu_\ell-\mu_{N+1}}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b_{j\ell}^0 \rho^{\mu_\ell-\mu_1}(\hat{S}_\ell(x,\lambda) - \hat{C}_\ell(x,\lambda))F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big) V_k(t,\rho)\,dt + \\ + \int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n \Big(\sum_{\xi=N+1}^n b_{j\xi}^0 \rho^{\mu_\xi-\mu_1}x^{\mu_s-\mu_{N+1}}\hat{C}_\xi(x,\lambda)\Big) F_j^*(\rho t)U_j^{0,*}(t,\rho)\Big) V_k(t,\rho)\,dt\Big),$$

т. е. (2.23) верна при $s = N+1$. Теперь при $x \to 0$ из (2.23) при $s = N+1$ с учетом (2.21) получаем (2.22) при $s = N+1$. Лемма 2.3 доказана. □

Из равенств (2.18), (2.22) находим

$$b_{ks}(\rho)\rho^{-\mu_s} - b^0_{ks} = \frac{1}{\rho^{n-1}}\int_0^\infty \Big(\sum_{j=k+1}^n b^0_{js}F^*_j(\rho t)U^{0,*}_j(t,\rho)\Big)V_k(t,\rho)\,dt. \tag{2.24}$$

Используя (2.24) и (2.12), получаем оценку $b_{ks}(\rho)\rho^{-\mu_s} - b^0_{ks} = O(J(\rho)) = O(\rho^{-1})$, $|\rho|\to\infty$, $\rho\in\bar S_{k_0}$, т. е. верно (2.14). Теорема 2.2 доказана.

Отметим, что имеют место оценки $|Y^{(\nu)}_k(x,\rho)(\rho R_k)^{-\nu}\exp(-\rho R_k x) - 1)| \leqslant \frac{M_4}{|\rho|}$, $x\geqslant 1$, $\rho\in\bar S_{k_0,\rho_0}$.

Обозначим $\Gamma_{\pm1} := \{\pm\lambda\geqslant 0\}$. Через $\Pi_{\pm1}$ обозначим λ-плоскость с разрезом вдоль $\Gamma_{\pm1}$.

Теорема 2.3.

1. *Уравнение* (2.1) *имеет ФСР* $\Phi_k(x,\lambda)$, $k=\overline{1,n}$, *такую что* $\Phi_k(x,\lambda)\sim c_{k0}x^{\mu_k}$, $x\to0$, $\Phi_k(x,\lambda) = O(\exp(\rho R_k x))$, $x\to\infty$, $\rho\in S_{k_0}$, *причем* $\det[\Phi^{(\nu-1)}_k(x,\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}\equiv 1$, $\Phi_k(x,\lambda) = S_k(x,\lambda)+\sum\limits_{j=k+1}^n M_{kj}(\lambda)S_j(x,\lambda)$. *Матрица* $M(\lambda)=\det[M_{kj}(\lambda)]_{k,j=\overline{1,n}}$, *где* $M_{kj}(\lambda)=\delta_{kj}$ $(k\geqslant j)$ *называется матрицей Вейля для* ℓ.
2. *Функции* $M_{kj}(\lambda)$ *регулярны в* $\Pi_{(-1)^{n-k}}$ *исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов* Λ'_{kj} *и непрерывны в* $\overline{\Pi_{(-1)^{n-k}}}$ *за исключением ограниченных множеств* Λ_{kj}.
3. $M_{kj}(\lambda) = O(\rho^{\mu_j-\mu_k})$ *при* $|\lambda|\to\infty$.
4. *Функции* $M_{sk}(\lambda) - M_{s,s+1}(\lambda)M_{s+1,k}(\lambda)$ *регулярны при* $\lambda\in\Gamma_{(-1)^{n-s}}\setminus\Lambda$, *где* $\Lambda := \cup_{s,k}\Lambda_{sk}$.

Обратная задача ставится следующим образом: по заданной матрице Вейля $M(\lambda)$ найти дифференциальный оператор ℓ.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи. Для этого наряду с ℓ рассмотрим оператор $\tilde\ell$ того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde q_j(x)$. Условимся, что если некоторый символ b обозначает объект, относящийся к ℓ, то $\tilde b$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\tilde\ell$, и $\hat b := b-\tilde b$.

Теорема 2.4. *Если* $M(\lambda)=\tilde M(\lambda)$, *то* $\ell=\tilde\ell$.

Используя полученные результаты и метод спектральных отображений, получим теперь алгоритм решения этой нелинейной обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Центральную роль здесь будет играть так называемое *основное уравнение обратной задачи.*

Обозначим $Y=[\delta_{j,k-1}]_{j=\overline{1,n-1},k=\overline{1,n}}$, $E=[\delta_{jk}]_{j,k=\overline{1,n}}$, $\Phi(x,\lambda)=[\Phi^{(k-1)}_s(x,\lambda)]_{s,k=\overline{1,n}}$,

$$\Phi^*_j(x,\lambda)=\det[\Phi^{(r-1)}_k(x,\lambda)]_{r=\overline{1,n-1},\,k=\overline{1,n}\setminus n-j+1},\qquad \Phi^*(x,\lambda)=[(-1)^{n-k}\Phi^*_{n-k+1}(x,\lambda)]_{k=\overline{1,n}},$$

$$A_0(\lambda)=\hat M(\lambda)(M(\lambda))^{-1},\qquad \langle y(x),z(x)\rangle_\ell=\sum_{k+j\leqslant n-1} L_{kj}(x)y^{(k)(x)z^{(j)}(x)},$$

$$L_{kj}(x)=\sum_{s=j}^{n-k-1}(-1)^s C^j_s p^{(s-j)}_{s+k+1}(x),\ p_j(x)=\nu_j x^{j-n}+q_j(x),\ p_n(x)=1,\ p_{n-1}(x)=0.$$

Пусть $\tilde\ell\in V$ — известный оператор. Рассмотрим контур $\gamma=\gamma_{-1}\cup\gamma_0\cup\gamma_1$ в λ-плоскости, где γ_0 — ограниченный замкнутый контур, охватывающий множество $\Lambda\cup\tilde\Lambda$, а $\gamma_{\pm1}$ — двусторонний разрез вдоль луча $\{\lambda:\ \pm\lambda>0,\ \lambda\notin\operatorname{int}\gamma_0\}$. При $\lambda\in\gamma$ положим $g(x,\lambda)=\tilde\Phi^*(x,\lambda)A(\lambda)Y^T$, $\varphi(x,\lambda)=[\chi_{(-1)^{n-k+1}}(\lambda)\Phi_k(x,\lambda)]_{k=\overline{2,n}}$, $N(\lambda)=E-\chi_{+1}(\lambda)\chi_{-1}(\lambda)YA_0(\lambda)Y^T$,

$$\chi_{\pm1}(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda\in\gamma_0\cup\gamma_{\pm1},\\ 0, & \lambda\in\gamma_{\mp1},\end{cases}\qquad A(\lambda)=\begin{cases}A_0(\lambda), & \lambda\in\gamma_0,\\ [\delta_{j,k-1}\chi_{(-1)^{k-j}}\hat M_{j,j+1}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,n}}, & \lambda\in\gamma_1\cup\gamma_{-1}.\end{cases}$$

Теорема 2.5. *При каждом фиксированном* $x>0$ *функция* $\varphi(x,\lambda)$ *является решением линейного интегрального уравнения*

$$\tilde\varphi(x,\lambda)=N(\lambda)\varphi(x,\lambda)+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{H(x,\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\varphi(x,\mu)\,d\mu,\ \lambda\in\gamma, \tag{2.25}$$

где $H(x,\lambda,\mu)=\langle\tilde\varphi(x,\lambda),g(x,\mu)\rangle_{\tilde\ell}$.

Уравнение (2.25) называется основным уравнением обратной задачи. Обозначим

$$\Omega(x,\lambda)=\begin{cases}\operatorname{diag}\left[(\rho R_k)^{\mu_k}\exp(-\rho R_k x)\right]_{k=\overline{2,n}}, & |\rho|x>1,\\ \operatorname{diag}\left[(x^{-R_k})^{\mu_k}\right]_{k=\overline{2,n}}, & |\rho|x\leqslant 1,\end{cases}$$

$\gamma''=\{\lambda:\ \lambda\in\gamma_1\cup\gamma_{-1},\ \inf|\lambda-\mu|\geqslant\delta_0>0,\ \mu\in\gamma_0\}$, $\gamma'=\gamma\setminus\gamma''$. Введем банахово пространство $B=L_2^{n-1}(\gamma')\oplus L_\infty^{n-1}$ функций $z(\lambda)=[z_j(\lambda)]_{j=\overline{1,n-1}}$ с нормой $\|z\|_B=\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\|z_j\|_{L_2(\gamma')}+\|z_j\|_{L_\infty(\gamma'')})$.

Теорема 2.6. *При $x>0$ основное уравнение* (2.25) *имеет единственное решение в классе $\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\in B$, причем $\sup\limits_x\|\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\|_B<\infty$.*

Обозначим

$$\alpha_{jk}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g^{(j)}(x,\lambda)\varphi^{(k)}(x,\lambda)\,d\lambda,\ j+k\leqslant n-1,$$

$$t_{jk}(x)=-\sum_{s=k+1}^{j}C_j^sC_{s-1}^k\alpha_{s-k-1,j-s}(x),\ j>k,\quad t_{jk}(x)=\delta_{jk},\ j\leqslant k,$$

$$\xi_k(x)=\sum_{s=0}^{n-k-1}\sum_{j=k+1}^{n-s}\Big(C_{j+s}^jC_{j-1}^k\tilde p_{j+s}(x)\alpha_{j-k-1,s}(x)+$$

$$+\delta_{s0}(-1)^{j-k}\sum_{r=0}^{j-k-1}C_{j-k-1}^r\tilde p_j^{(j-k-1-r)}(x)\alpha_{r0}(x)\Big),\ k=\overline{0,n-2},$$

$$\psi_k(x)=\xi_k(x)-\sum_{j=k+1}^{n-2}\psi_j(x)t_{jk}(x),\quad k=\overline{0,n-2}.$$

Приведем теперь алгоритм решения обратной задачи и необходимые и достаточные условия ее разрешимости. Пусть $\mathcal{M}$ — множество матриц $M(\lambda)=\det[M_{kj}(\lambda)]_{k,j=\overline{1,n}}$, $M_{kj}(\lambda)=\delta_{kj}$ $(k\geqslant j)$, обладающих свойствами 2–4 из теоремы 2.3.

Теорема 2.7. *Для того, чтобы матрица $M(\lambda)\in\mathcal{M}$ была матрицей Вейля для некоторого оператора $\ell\in V$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1. (*асимптотика*) *существует $\tilde\ell$ такой, что $\hat M_{k,k+1}(\lambda)=O(\lambda^{-1})$, $k=\overline{1,n-1}$ при $|\lambda|\to\infty$;*
2. *при $x>0$ уравнение* (2.25) *имеет единственное решение в классе $\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\in B$, причем $\sup\limits_x\|\Omega(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\|_B<\infty$;*
3. $\psi_j(x)\in W_j$.

Оператор ℓ строится по формуле $q_k(x)=\tilde q_k(x)+\psi_k(x)$, $k=\overline{0,n-2}$.

3. Дифференциальные операторы на конечном интервале

Рассмотрим следующую несамосопряженную краевую задачу L:

$$\ell y:=y^{(n)}+\sum_{j=0}^{n-2}\Big(\frac{\nu_j}{x^{n-j}}+q_j(x)\Big)y^{(j)}=\lambda y,\quad 0<x<T,\ n=2m,\tag{3.1}$$

$$y(x)=O(x^{\mu_{m+1}}),\quad x\to 0,\tag{3.2}$$

$$V_j(y):=y^{(\tau_j)}(T)+\sum_{k=0}^{\tau_j-1}v_{jk}y^{(k)}=0,\quad j=\overline{1,m},\tag{3.3}$$

где $0\leqslant\tau_j\leqslant n-1$, $\tau_j\neq\tau_i$ при $j\neq i$, $q_j(x)$ — комплекснозначные функции, причем $q_j^{(\nu)}(x)$ абсолютно непрерывны при $\nu=\overline{0,j-1}$, а $q_j^{(\nu)}(x)x^{\theta_{\nu j}}$ при $\nu=\overline{0,j}$.

Пусть $\{S_j(x,\lambda)\}_{j=\overline{1,n}}$ — построенная выше целая по λ ФСР уравнения (3.1) при условии $S_j(x,\lambda)\sim c_jx^{\mu_j}$, $x\to 0$, $c_j\neq 0$. Положим $\Delta(\lambda):=\det[V_p(S_j(x,\lambda))]_{p=\overline{1,m},j=\overline{m+1,n}}$. Нули функции $\Delta(\lambda)$ совпадают с собственными значениями задачи L. Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией задачи L вида (3.1)–(3.3).

Теорема 3.1. *Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_l\}$, причем $\lambda_l = (-1)^m\big((l+\theta)\pi/T + O(l^{-1})\big)^n$, $l \to \infty$, причем θ зависит только от $\mu_1, \dots, \mu_n$. Все собственные значения, начиная с некоторого, являются простыми.*

Доопределим линейные формы V_p при $p = \overline{1,n}$ так, чтобы $\tau_j \neq \tau_i$ при $j \neq i$. Существуют решения $\Psi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ уравнения (3.1), удовлетворяющие условиям $\Psi_k(x,\lambda) \sim c_k x^{\mu_k}$, $x \to 0$, $V_p(\Psi_k) = 0$, $p = \overline{1, n-k}$. Тогда

$$\det\big[\Psi_k^{(\nu-1)}(x,\lambda)\big]_{k,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1, \qquad \Psi_k(x,\lambda) = S_k(x,\lambda) + \sum_{j=k+1}^{n} M_{kj0}(\lambda) S_j(x,\lambda).$$

Матрица $M_0(\lambda) = \det\,[M_{kj0}(\lambda)]_{k,j=\overline{1,n}}$, где $M_{kj0}(\lambda) = \delta_{kj}$ $(k \geqslant j)$, называется матрицей Вейля для ℓ. Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи восстановления ℓ и V_p по матрице Вейля.

Теорема 3.2. *Если $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, то $\ell = \tilde{\ell}$ и $V_p = \tilde{V}_p$, $p = \overline{1,n}$.*

Обозначим $\mu_k^* = n - 1 - \bar{\mu}_{n-k+1}$, $\Psi_k^*(x,\lambda) = \det\big[\Psi_j^{(r-1)}(x,\lambda)\big]_{r=\overline{1,n-1},\ j=\overline{1,n}\setminus n-k+1}$,

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} (-1)^{k-1}\Psi_{n-k+1}(x,\lambda)\overline{\Psi_k^*(t,\bar{\lambda})}, & x \geqslant t, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} (-1)^{k}\Psi_{n-k+1}(x,\lambda)\overline{\Psi_k^*(t,\bar{\lambda})}, & x \leqslant t. \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Пусть $f(t)t^{\mu_{m+1}^*} \in L(0,T)$, $\Delta(\lambda) \neq 0$. Положим $y(x) = \int_0^T G(x,t,\lambda)f(t)\,dt$. Тогда $\ell y - \lambda y = f$, $y(x) = o(x^{\mu_m})$, $x \to 0$, $V_p(y) = 0$, $p = \overline{1,m}$.*

Верно и обратное утверждение. Функция $G(x,t,\lambda)$ называется функцией Грина задачи. Она является мероморфной по λ с полюсами в точках $\lambda = \lambda_l$. Если λ_l — простой полюс, то

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_l} G(x,t,\lambda) = -\alpha_l \varphi_l(x)\overline{\varphi_l^*(t)}, \quad \alpha_l = \Big(\int_0^T \varphi_l(t)\overline{\varphi_l^*(t)}\,dt\Big)^{-1},$$

где $\varphi_l(x)$ и $\varphi_l^*(x)$ — собственные функции задачи L и сопряженной задачи L^*, соответственно. Пусть $\lambda = \rho^n$, $\lambda_l^0 = (-1)^m((l+\theta)\pi/T)^n$, $\lambda_l^0 = (\rho_l^0)^n$, $\varepsilon_0 > 0$, $G_0 = \{\rho : |\rho - \rho_l^0| \geqslant \varepsilon_0\}$.

Теорема 3.3. *Пусть*

$$y_{\nu j}(x,\lambda) = \int_0^T \frac{\partial^{\nu+j} G(x,t,\lambda)}{\partial x^\nu \partial t^j} f(t)\,dt, \quad \nu, j = \overline{0, n-1},$$

где $f(t)t^\kappa \in L(0,T)$, $\kappa \leqslant \operatorname{Re}\mu_{m+1}^* - j$. Тогда при $\rho \in G_0$, $|\rho| \geqslant \rho_0$, $0 < x < T$ справедливы оценки

$$|y_{\nu j}(x,\lambda)| \leqslant \omega(\rho)|\rho|^{\nu+j-m+1+\langle\kappa\rangle},\ |\rho|x \geqslant 1,$$

$$|y_{\nu j}(x,\lambda)| \leqslant \omega(\rho)|x^{\mu_{m+1}-\nu}|\Big(|\rho^{j-\mu_m^*+\langle\kappa\rangle}| + \Omega|x^{\mu_m^*-j-\kappa}|\Big),\ |\rho|x \geqslant 1,$$

где

$$\Omega = \begin{cases} 0, & \kappa \leqslant \operatorname{Re}\mu_m^* - j, \\ 1, & \kappa > \operatorname{Re}\mu_m^* - j, \end{cases}$$

$\langle\kappa\rangle = \max(\kappa, 0)$ и $\omega(\rho) = o(1)$ при $|\rho| \to \infty$.

Применение теоремы 3.3 и метода контурного интегрирования дает возможность доказать теоремы о полноте, разложении и равносходимости. Пусть α — вещественное число, а $1 \leqslant p < \infty$. Рассмотрим банахово пространство $\mathcal{B}_{\alpha p} = \{f(x) : f(x)x^{-\alpha} \in L_p(0,T)\}$, снабженное нормой $\|f\|_{\alpha,p} = \|f(x)x^{-\alpha}\|_{L_p(0,T)}$. Если $1 \leqslant s \leqslant p < \infty$ и $\beta - \alpha < 1/s - 1/p$, то пространство $\mathcal{B}_{\alpha p}$ плотно вложено в $\mathcal{B}_{\beta s}$. Обозначим $\psi = \operatorname{Re}\mu_{m+1}$, $\varphi = \min(0, -\operatorname{Re}\mu_m)$, $\gamma = \min(0, \operatorname{Re}\mu_{m+1}^*)$, $\eta = \max(0, -\operatorname{Re}\mu_{m+1})$.

Теорема 3.4. *Система корневых функций краевой задачи L полна в пространстве $\mathcal{B}_{\beta s}$ при $\beta < \psi + 1/s$.*

Следствие 3.1. *Система корневых функций краевой задачи L полна в пространстве $L_s(0,T)$ при $\operatorname{Re}\mu_{m+1} > -1/s$.*

Теорема 3.5. *Пусть функция* $f(t)t^{\varphi}$ *абсолютно непрерывна на* $[0,T]$, $f(t)t^{\varphi-1} \in L(0,T)$, *и если* $\tau_1 \dots \tau_m = 0$, *то* $f(T) = 0$. *Положим* $y(x,\lambda) = \int_0^T G(x,t,\lambda) f(t)\,dt$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} y(x,\lambda)\,d\lambda + f(x)\Big)\Big| = 0,$$

где $\Gamma_N = \{\lambda : |\lambda| = r_N\}$ — *окружности радиуса* $r_N \to \infty$, *лежащие на положительном расстоянии от собственных значений задачи* L. *В частности, если спектр задачи* L *простой, то*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\Big(f(x) - \sum_{l=1}^{N} \alpha_l \varphi_l(x) \int_0^T f(t)\overline{\varphi_l^*(t)}\,dt\Big)\Big| = 0.$$

Сформулируем теперь теорему о равносходимости разложений по корневым функциям задач L и $\tilde{L}$ на всем отрезке $[0,T]$. Пусть $\mathrm{Re}(\mu_n - \mu_1) \geqslant 1$ и $\hat{\mu}_k = \hat{\tau}_k = 0$ при $k = \overline{1,m}$.

Теорема 3.6. *Пусть* $f(t)t^{\gamma} \in L(0,T)$. *Положим* $\hat{y}(x,\lambda) = \int_0^T \hat{G}(x,t,\lambda) f(t)\,dt$. *Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} \hat{y}(x,\lambda)\,d\lambda\Big| = 0.$$

В частности, если спектры задач L *и* $\tilde{L}$ *простые, то*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \Big| x^{\eta}\sum_{l=1}^{N} \Big(\alpha_l \varphi_l(x) \int_0^T f(t)\overline{\varphi_l^*(t)}\,dt - \tilde{\alpha}_l \tilde{\varphi}_l(x) \int_0^T f(t)\overline{\tilde{\varphi}_l^*(t)}\,dt\Big)\Big| = 0.$$

Приведенные в этом разделе результаты более подробно изложены в [4].

4. Дифференциальные операторы с особенностью во внутри интервала

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell_1 y := y^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-2} \Big(\frac{\nu_j}{(x-a)^{n-j}} + q_j(x)\Big) y^{(j)} = \lambda y, \quad 0 < x < T, \tag{4.1}$$

где $a \in (0,T)$ — фиксированное число. Пусть для определенности $n = 2m$. Предположим, что функции $q_j^{(\nu)}(x)$, $\nu = \overline{0, j-1}$ абсолютно непрерывны на $[0, a-\varepsilon]$ и $[a+\varepsilon, T]$ при всех $\varepsilon \in (0, \min(a, T-a))$ и $q_j^{(\nu)}(x)|x-a|^{\theta_{\nu j}} \in L(0,T)$, $\nu = \overline{0,j}$.

Рассмотрим несамосопряженную краевую задачу $\mathcal{L}$ для уравнения (4.1) с краевыми условиями $y^{(\nu-1)}(0) = y^{(\nu-1)}(T) = 0$, $\nu = \overline{1,m}$ и дополнительными условиями склейки решений в окрестности особой точки $x = a$. Эти условия порождаются матрицей перехода $A = [a_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$, которая связывает решения уравнения (4.1) слева и справа от особой точки (см. ниже).

Пусть $\lambda = \rho^n$. Рассмотрим функции $C_{j,a}(x,\lambda) = (x-a)^{\mu_j} \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(\rho(x-a))^{nk}$, $j = \overline{1,n}$, где $c_{jk} = c_{j0}\Big(\prod_{s=1}^{k} \delta(\mu_j + sn)\Big)^{-1}$, $\prod_{j=1}^{n} c_{j0} = (\det[\mu_j^{\nu-1}]_{j,\nu=\overline{1,n}})^{-1}$. Здесь и далее $z^{\mu} = \exp(\mu(\ln|z| + i\arg z))$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$. При $x > a$ и $x < a$ функции $C_{j,a}(x,\lambda)$ являются решениями «простейшего» уравнения с $q_j(x) \equiv 0$. Положим $C^*_{j,a}(x,\lambda) = \det[C^{(\nu)}_{k,a}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2},\, k=\overline{1,n}\setminus n-j+1}$, $g_0(x,t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} C_{j,a}(x,\lambda) C^*_{n-j+1,a}(t,\lambda)$. Пусть функции $s_j(x,\lambda)$ являются решениями интегральных уравнений

$$s_j^{(\nu)}(x,\lambda) = C_{j,a}^{(\nu)}(x,\lambda) - \int_0^x \frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu}} g_0(x,t,\lambda)\Big(\sum_{p=0}^{n-2} q_p(t) s_j^{(p)}(t,\lambda)\Big)\,dt, \ \nu = \overline{0,n-1}.$$

Функции $s_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$ являются целыми по λ решениями уравнения (4.1), причем $\det[s_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1$.

Пусть задана матрица $A = [a_{kj}]_{k,j=\overline{1,n}}$, $\det A \neq 0$, где a_{kj} — комплексные числа. Введем функции $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=\overline{1,n}}$, $x \in J_\pm$, где $J_\pm := \{x : \pm(x-a) > 0\}$, по формуле

$$\sigma_j(x,\lambda) = \begin{cases} s_j(x,\lambda), & x \in J_-, \\ \sum\limits_{k=1}^n a_{kj} s_k(x,\lambda), & x \in J_+. \end{cases}$$

ФСР $\{\sigma_j(x,\lambda)\}_{j=\overline{1,n}}$ используется для склейки решений уравнения (4.1) в окрестности особой точки $x = a$. Точнее, будем говорить, что решение $y(x,\lambda)$ уравнения (4.1) удовлетворяет условиям склейки, порожденным матрицей A, если $y(x,\lambda)$ имеет вид $y(x,\lambda) = \sum\limits_{j=1}^n \chi_j(\lambda)\sigma_j(x,\lambda)$, $x \in J_- \cup J_+$, где коэффициенты $\chi_j(\lambda)$ не зависят от x. Для определенности рассмотрим наиболее важным частным случаем, когда $a_{kj} = 0$ при $k < j$.

Пусть функции $\varphi_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения (4.1) при начальных условиях $\varphi_j^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{j\nu}$, $\nu = \overline{1,n}$, и при условиях склейки, порожденных матрицей A. При каждом $x \neq a$ функции $\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)$, $j,\nu = \overline{1,n}$, являются целыми по λ порядка $1/n$, причем $\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv 1$ при $x \in J_-$ и $\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{j,\nu=\overline{1,n}} \equiv \det A$ при $x \in J_+$.

В каждом секторе $S_{k_0} = \{\rho : \arg\rho \in (k_0\pi/n, (k_0+1)\pi/n)\}$ корни R_k, $k = \overline{1,n}$, уравнения $R^n - 1 = 0$ можно занумеровать так, чтобы $\mathrm{Re}(\rho R_1) < \mathrm{Re}(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}(\rho R_n)$, $\rho \in S_{k_0}$. Очевидно, что $R_k = \exp(i\pi\omega_k/m)$, где ω_k — перестановка чисел $\overline{0,n-1}$. Тогда $R_k^\mu := \exp(i\pi\mu\omega_k/m)$.

При $|\rho(x-a)| \geqslant 1$, $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $\nu = \overline{0,n-1}$, $|\rho| \to \infty$, имеют место асимптотические формулы

$$\varphi_j^{(\nu)}(x,\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (-\rho R_k)^{\nu+1-j}\exp(-\rho R_k x)[1]_a, \quad x \in J_-,$$

$$\varphi_j^{(\nu)}(x,\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{l,k=1}^n (-\rho R_k)^{1-j}(\rho R_l)^\nu\big(\xi_{kl}^0 + O(\rho^{-\delta_1})\big)\exp(-\rho R_k a)\exp(\rho R_l(x-a))[1]_a, \quad x \in J_+,$$

где $\delta_1 := \min(1, \min\limits_l \mathrm{Re}(\mu_{l+1}-\mu_l))$, $\xi_{kj}^0 = \sum\limits_{s=1}^n a_{ss}R_k^{\mu_s} d_{sj}\exp(-i\pi\mu_s)$, $[d_{sj}]_{s,j=\overline{1,n}} = \big([R_k^{\mu_j}]_{k,j=\overline{1,n}}\big)^{-1}$. Обозначим $\xi_s^0 = \det\left[\xi_{kj}^0\right]_{k=\overline{1,s};\ j=\overline{n-s+1,n}}$, $s = \overline{1,n}$, и предположим, что

$$\xi_s^0 \neq 0 \quad \text{при} \quad s = \overline{1,n-1}. \tag{4.2}$$

Условие (4.2) называется *условием регулярности* склейки. Нижеприведенный контрпример показывает важность условия (4.2) в спектральной теории этого класса операторов. Отметим, что если $A = E$ и $\nu_j = 0$, то $\xi_{kj}^0 = \delta_{k,n-j+1}$, следовательно, $\xi_{2s}^0 = \xi_{2s+1}^0 = (-1)^s \neq 0$, и условие регулярности склейки выполняется.

Обозначим $\Delta_a(\lambda) := \det[\varphi_j^{(\nu-1)}(T,\lambda)]_{j=\overline{m+1,n};\,\nu=\overline{1,m}}$. Функция $\Delta_a(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/n$, и ее нули совпадают с собственными значениями $\{\lambda_l\}$ краевой задачи $\mathcal{L}$. Функция $\Delta_a(\lambda)$ называется характеристической функцией для $\mathcal{L}$. Обозначим $I_k = \{\rho : \arg\rho = \pi k/n\}$, $k = \overline{-n,n-1}$, $I_{k,h} = \{\rho : \mathrm{dist}(\rho, I_k) \leqslant h\}$, $I_{+1}^h = \bigcup\limits_k I_{2k,h}$, $I_{-1}^h = \bigcup\limits_k I_{2k-1,h}$. Пусть $\hat{I}_{\pm1}^h$ — образ $I_{\pm1}^h$ при отображении $\rho \to \lambda = \rho^n$.

При $|\rho| \to \infty$, $\rho \in \overline{S_{k_0}}$ имеет место оценка $\Delta_a(\lambda) = O(\rho^{-m/2}\exp(\rho(R_{m+1} + \cdots + R_n)T))$. Собственные значения $\lambda_l = \rho_l^n$ задачи $\mathcal{L}$ лежат в области $\hat{I}_{(-1)^m}^h$. Число N_ξ нулей функции $\Delta(\lambda)$ в области

$$\Pi_\xi^h := \{\rho \in I_{(-1)^m}^h : |\rho| \in [\xi, \xi+1]\}$$

ограничено по ξ. Обозначим $G_\delta := \{\rho : |\rho - \rho_l| \geqslant \delta\}$. Тогда $|\Delta_a(\lambda)| \geqslant C_\delta|\rho^{-m/2}\exp(\rho(R_{m+1} + \cdots + R_n)T)|$, $\rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta$. Существуют положительные числа $r_N \to \infty$ такие, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ лежат в G_δ при всех N.

Рассмотрим банахово пространство $B_{\alpha,p} := \{f(x) : f(x)(x-a)^{-\alpha} \in L_p(0,T)\}$ с нормой $\|f\|_{\alpha,p} = \|f(x)(x-a)^{-\alpha}\|_{L_p(0,T)}$. Обозначим $\omega := \mathrm{Re}\,\mu_1$.

Теорема 4.1. *Система корневых функций краевой задачи $\mathcal{L}$ полна в $B_{\alpha,p}$ при $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha < \omega + 1/p$.*

Приведем контрпример, показывающий важность условия регулярности склейки (4.2). Рассмотрим краевую задачу $\mathcal{L}'$:

$$-y'' = \lambda y, \quad 0 < x < \pi, \quad \lambda = \rho^2,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y^{(k)}(a+0) = (-1)^k y^{(k)}(a-0), \quad k = 0,1, \ a = 3\pi/4.$$

Для этой задачи условие регулярности склейки (4.2) не выполняется, и $\Delta_a(\lambda) = \frac{\sin\rho(2a-\pi)}{\rho}$. Собственные значения $\lambda_l = \rho_l^2$ краевой задачи $\mathcal{L}'$ имеют вид $\rho_l = 2l$, $l \geqslant 1$, а собственные функции вычисляются по формуле

$$y_l(x) = \begin{cases} \sin 2lx, & x \leqslant 3\pi/4, \\ (-1)^{l-1} \sin 2lx, & x > 3\pi/4. \end{cases}$$

Система функций $\{y_l(x)\}_{l\geqslant 1}$ не полна в $B_{\alpha,p}$ при $1 \leqslant p < \infty$, $\alpha < 1 + 1/p$.

Обозначим $\eta = \max(0, -\omega)$, $\mu_k^* = n - 1 - \mu_{n-k+1}$, $\psi = \mu_{n-1} + \mu_1^*$. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\psi < 0$. Рассмотрим функцию

$$G_a(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^m}{\Delta_a(\lambda)} \begin{vmatrix} \varphi_{m+1}(x,\lambda) & \ldots & \varphi_n(x,\lambda) & g_a(x,t,\lambda) \\ \varphi_{m+1}(T,\lambda) & \ldots & \varphi_n(T,\lambda) & g_a(T,t,\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_{m+1}^{(m-1)}(T,\lambda) & \ldots & \varphi_n^{(m-1)}(T,\lambda) & g_a^{(m-1)}(T,t,\lambda) \end{vmatrix},$$

где

$$g_a(x,t,\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \varphi_{n-k+1}(x,\lambda)\varphi_k^*(t,\lambda), & x \geqslant t, \\ 0 & x < t. \end{cases}$$
$$\varphi_k^*(t,\lambda) := \frac{1}{A(t)} \det\left[\varphi_j^{(\nu)}(t,\lambda)\right]_{\nu=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n}\setminus n-k+1},$$

$A(t) \equiv 1$ при $x \in J_-$ и $A(t) \equiv \det A$ при $x \in J_+$.

Теорема 4.2. *Пусть функции $f(x)$ такова, что функция $f(x)(x-a)^{\mu_1^*}$ абсолютно непрерывна на $[0,a]$ и $[a,T]$, причем $f(0) = f(T) = 0$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\leqslant x\leqslant T} \left|(x-a)^{\eta}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r_N^n}\Big(\int_0^T G_a(x,t,\lambda)f(t)\,dt\Big)\,d\lambda + f(x)\Big)\right| = 0.$$

Рассмотрим функции $\Delta_{k,a}(\lambda) := \det\left[\varphi_j^{(\nu-1)}(T,\lambda)\right]_{j=\overline{k+1,n};\,\nu=\overline{1,n-k}}$, $k = \overline{1,n}$. В частности, $\Delta_{n,a}(\lambda) \equiv \det A$. Нули функции $\Delta_{k,a}(\lambda)$, $k = \overline{1,n-1}$ совпадают с собственными значениями $\{\lambda_{lk}\}$ краевой задачи $\mathcal{L}_k$ для уравнения (4.1) с краевыми условиями $y(0) = \ldots = y^{(k-1)}(0) = 0$, $y(T) = \ldots = y^{(n-k-1)}(T) = 0$ и с условиями склейки, порожденными матрицей перехода A.

Пусть функции $\Phi_{j,a}(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения (4.1) с условиями $\Phi_{j,a}^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu j}$, $\nu = \overline{1,j}$, $\Phi_{j,a}^{(\mu-1)}(T,\lambda) = 0$, $\mu = \overline{1,n-j}$ и с условиями склейки, порожденными матрицей перехода A. Справедливы соотношения

$$\Phi_{j,a}(x,\lambda) = \varphi_j(x,\lambda) + \sum_{k=j+1}^{n} M_{jk,a}(\lambda)\varphi_k(x,\lambda), \qquad M_{jk,a}(\lambda) = \frac{\Delta_{jk,a}(\lambda)}{\Delta_{j,a}(\lambda)}, \qquad 1 \leqslant j < k \leqslant n,$$
$$\Delta_{jk,a}(\lambda) = (-1)^{j+k}\det[\varphi_s^{(\nu-1)}(T,\lambda)]_{s=\overline{j,n}\setminus k;\,\nu=\overline{1,n-j}}.$$

Матрица $M_a(\lambda) = [M_{jk,a}(\lambda)]_{j,k=\overline{1,n}}$ ($M_{jk,a}(\lambda) := \delta_{jk}$ при $j \geqslant k$) называется матрицей Вейля для уравнения (4.1).

Теорема 4.3.

1. *При $|\rho(x-a)| \geqslant 1$, $\rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_{\delta,j}$ имеют место оценки*

$$|\Phi_{j,a}^{(\nu-1)}(x,\lambda)| \leqslant C\,|\rho^{\nu-j}\exp(\rho R_j x)|, \quad j,\nu = \overline{1,n},$$
$$|M_{jk,a}(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{k-j}, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n.$$

2. *При $|\rho(x-a)| \leqslant 1$ имеют место оценки*

$$|\hat\Phi_{j,a}(x,\lambda)| \leqslant C\,|\rho^{1-j+\mu_1}\exp(\rho R_j a)|, \quad j = \overline{1,n},$$
$$|\hat\Phi_{j,a}^{(\nu)}(x,\lambda)| \leqslant C\,|\rho^{1-j+\mu_1}\exp(\rho R_j a)|(|\rho|^n|x-a|^{n-\nu} + |\rho^{\mu_2-\mu_1}(x-a)^{\mu_2-\mu_1-\nu}|), \ \nu = \overline{1,n-1}, \ j = \overline{1,n},$$

где $\hat{\Phi}_{j,a}(x,\lambda) = (x-a)^{-\mu_1}\Phi_{j,a}(x,\lambda)$.

Рассмотрим обратную задачу восстановления оператора ℓ по заданной матрице Вейля. Сформулируем теорему единственности для этой обратной задачи.

Теорема 4.4. *Если* $M_a(\lambda) = \tilde{M}_a(\lambda)$, *то* $\ell = \tilde{\ell}$. *Таким образом, матрица Вейля* $M(\lambda)$ *однозначно определяет оператор* ℓ.

Используя метод спектральных отображений, можно получить конструктивную процедуру решения этой нелинейной обратной задачи, а также необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Результаты, относящиеся к уравнению (4.1), более подробно изложены в [11, 12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
2. *Костюченко А. Г., Саргсян И. С.* Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1979.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
4. *Юрко В. А.* О дифференциальных операторах высших порядков с регулярной особенностью// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 6. — С. 133–160.
5. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.
6. *Ignatiev M. Yu.* Integral transforms connected with differential systems with a singularity// Tamkang J. Math. — 2019. — *50*, № 3. — С. 253–268.
7. *Ignatiev M. Yu.* Asymptotics of solutions of some integral equations connected with differential systems with a singularity// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — *20*, № 1. — С. 17–28.
8. *Turrittin H.* Stokes multipliers for asymptotic solutions of a certain differential equation// Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — *68*. — С. 304–329.
9. *Yurko V. A.* On higher-order differential operators with a singular point// Inverse Problems. — 1993. — *9*, № 4. — С. 495–502.
10. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators and their applications. — Amsterdam: Gordon and Breach Sci. Publ., 2000.
11. *Yurko V. A.* Higher-order differential equations having a singularity in an interior point// Results Math. — 2002. — *42*, № 1-2. — С. 177–191.
12. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with higher-order differential operators with a singularity// Integral Transforms Spec. Funct. — 2002. — *13*, № 6. — С. 497–511.

Вячеслав Анатольевич Юрко

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, 410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: yurkova@info.sgu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-408-421 UDC 517.984

Direct and Inverse Problems of Spectral Analysis for Arbitrary-Order Differential Operators with Nonintegrable Regular Singularities

© 2021 **V. A. Yurko**

Abstract. A short review is presented of results on the spectral theory of arbitrary order ordinary differential operators with non-integrable regular singularities. We establish properties of spectral characteristics, prove theorems on completeness of root functions in the corresponding spaces, prove expansion and equiconvergence theorems, and provide a solution of the inverse spectral problem for this class of operators.

REFERENCES

1. V. Vazov, *Asimptoticheskie razlozheniya resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Asymptotic Expansions of Solutions of Ordinary Differential Equations], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
2. A. G. Kostyuchenko and I. S. Sargsyan, *Raspredelenie sobstvennykh znacheniy. Samosopryazhennye obyknovennye differentsial'nye operatory* [Distribution of Eigenvalues. Self-Adjoint Ordinary Differential Operators], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
3. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
4. V. A. Yurko, "O differentsial'nykh operatorakh vysshikh poryadkov s regulyarnoy osobennost'yu" [On differential operators of higher orders with a regular singularity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 6, 133–160 (in Russian).
5. V. A. Yurko, *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems], Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
6. M. Yu. Ignatiev, "Integral transforms connected with differential systems with a singularity," *Tamkang J. Math.*, 2019, **50**, No. 3, 253–268.
7. M. Yu. Ignatiev, "Asymptotics of solutions of some integral equations connected with differential systems with a singularity," *Izv. Saratov. Univ. N.S. Ser. Mat. Mekh. Inf.*, 2020, **20**, No. 1, 17–28.
8. H. Turrittin, "Stokes multipliers for asymptotic solutions of a certain differential equation," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1950, **68**, 304–329.
9. V. A. Yurko, "On higher-order differential operators with a singular point," *Inverse Problems*, 1993, **9**, No. 4, 495–502.
10. V. A. Yurko, *Inverse Spectral Problems for Differential Operators and Their Applications*, Gordon and Breach Sci. Publ., Amsterdam, 2000.
11. V. A. Yurko, "Higher-order differential equations having a singularity in an interior point," *Results Math.*, 2002, **42**, No. 1-2, 177–191.
12. V. A. Yurko, "Integral transforms connected with higher-order differential operators with a singularity," *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2002, **13**, No. 6, 497–511.

V. A. Yurko
Chernyshevskii Saratov National Research State University, Saratov, Russia
E-mail: yurkova@info.sgu.ru