Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 363–407

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-363-407 УДК 517.95

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. **Т. А. СУСЛИНА**

Аннотация. Работа представляет собой обзор результатов по асимптотике спектра вариационных задач, возникающих в теории малых колебаний жидкости в сосуде вблизи положения равновесия. Задачи были поставлены Н. Д. Копачевским в конце 1970-х годов и охватывают различные модели жидкости. Постановки даются как в виде краевых задач на собственные значения в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, которую занимает жидкость в положении равновесия, так и в виде вариационных задач о спектре отношения квадратичных форм. Общими чертами всех рассматриваемых задач является наличие «эллиптической» связи (уравнение Лапласа для идеальной жидкости или однородная система Стокса для вязкой жидкости), а также вхождение спектрального параметра в граничное условие на свободной (равновесной) поверхности Γ. Спектр в рассматриваемых задачах дискретен; функции распределения спектра имеют степенную асимптотику.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Светлой памяти Николая Дмитриевича Копачевского.

1. Введение

1.1. История вопроса. Работа представляет собой обзор результатов по асимптотике спектра вариационных задач, возникающих в теории колебаний жидкости. Имеются в виду малые (линейные) колебания жидкости в сосуде вблизи положения равновесия. В [20, приложение 1] (см. также [3, 18, 19]) Николай Дмитриевич Копачевский поставил ряд задач о спектре нормальных колебаний жидкости для различных физических моделей — тяжелой идеальной, капиллярной идеальной, тяжелой вязкой и капиллярной вязкой жидкостей. (Эти задачи обсуждаются также в более поздней монографии [21] Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана и в книгах [40, 41] Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна.) Напомним, что для тяжелой жидкости основную роль играют массовые силы (сила тяжести, центробежная сила при вращении сосуда). Для капиллярной жидкости основную роль играют поверхностные силы (сила поверхностного натяжения). Рассматриваются случаи одной жидкости, частично заполняющей сосуд, и системы несмешивающихся жидкостей. Из эвристических соображений Н. Д. Копачевский нашел формулы для главных членов спектральной асимптотики в этих задачах. Он же в конце 1970-х годов поставил вопрос о получении этих формул строгими методами и обратился за консультацией к ленинградским математикам М.Ш. Бирману и М.З. Соломяку — известным специалистам по спектральной теории операторов. Оказалось, что в одной вспомогательной задаче для тяжелой вязкой жидкости справедливость асимптотической формулы спектра следует из общих результатов Метивье [43]. В остальных задачах вопрос о получении асимптотических формул строгими методами был на тот момент открыт.

В случае тяжелой идеальной жидкости асимптотическая формула спектра была вскоре оправдана Н. А. Каразеевой и М. З. Соломяком [15]. Во всех остальных задачах, поставленных в [20], асимптотические формулы спектра были оправданы автором (в то время — аспиранткой М. Ш. Бирмана). На эту тему автором опубликована краткая заметка [31] и депонирована рукопись [29]. Подробное изложение результатов ранее не публиковалось. Предлагаемый обзор восполняет этот пробел.

Решение этих задач положило начало многолетнему тесному научному взаимодействию и крепкой дружбе автора настоящей статьи с Николаем Дмитриевичем Копачевским — замечательным математиком и человеком.

1.2. О постановках и результатах. Постановки даются как в виде краевых задач на собственные значения в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, которую занимает жидкость в положении равновесия, так и в виде вариационных задач о спектре отношения квадратичных форм. Общими чертами всех рассматриваемых задач является наличие «эллиптической» связи (уравнение Лапласа для идеальной жидкости или однородная система Стокса для вязкой жидкости), а также вхождение спектрального параметра в граничное условие на свободной (равновесной) поверхности Γ. Задачи с эллиптическими связями в области с гладкой границей поддаются технике псевдодифференциальных операторов (ПДО); см. [11, 12]. Однако сейчас граница $\partial\Omega$ — негладкая, поскольку свободная поверхность Γ (или поверхность раздела двух жидкостей) и твердая стенка сосуда S при пересечении образуют ребро. Именно это обстоятельство представляет собой основную трудность. Кроме негладкости $\partial\Omega$, в рассматриваемых задачах возникают и другие осложнения. Они связаны с присутствием в вариационной постановке нелокального оператора $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$ для капиллярной жидкости (это разрешающий оператор некоторой эллиптической краевой задачи на Γ; см. разделы 4, 6), с векторным характером задач и появлением дополнительных связей ($\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$) для вязкой жидкости.

Спектр в рассматриваемых задачах дискретен; функции распределения спектра имеют степенную асимптотику. Получены главные члены асимптотических формул спектра.

1.3. Метод. Мы исходим из вариационной постановки задач — исследуем спектр отношения квадратичных форм

$$\frac{\mathcal{B}_\Gamma[u]}{\mathcal{A}_\Omega[u]}, \tag{1.1}$$

где $\mathcal{A}_\Omega[u]$ — положительно определенная дифференциальная квадратичная форма в области Ω, а $\mathcal{B}_\Gamma[u]$ — форма на Γ, компактная относительно $\mathcal{A}_\Omega[u]$. Доказательство асимптотических формул спектра использует общий подход, разработанный М.Ш. Бирманом и М.З. Соломяком в [6, 7]. Схема доказательства такова. Устанавливаются оценки спектра через подходящие $L_r(\Gamma)$-нормы коэффициентов формы $\mathcal{B}_\Gamma$. Эти оценки позволяют при вычислении главного члена асимптотики спектра ограничиться рассмотрением коэффициентов из плотного в $L_r(\Gamma)$ множества. В качестве такого множества удобно взять $C_0^\infty(\Gamma)$. Для случая гладких и финитных на Γ коэффициентов удается провести сравнение отношения (1.1) и аналогичного отношения форм, заданных в области $\widetilde{\Omega}$ с гладкой границей (область $\widetilde{\Omega}$ «сглаживает» Ω). Задачу в области $\widetilde{\Omega}$ мы сводим на границу, сопоставляя решениям однородного эллиптического уравнения их данные Дирихле. Из свойств алгебры ПДО Буте де Монвеля [35, 38] следует, что исходные формы приводятся[1] к квадратичным формам некоторых ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$. После сведения на границу получается задача о спектре отношения псевдодифференциальных форм (быть может, при наличии дополнительных связей на части границы). Асимптотические формулы спектра тогда вытекают из результатов работ [8, 10, 28].

[1]В [11], где алгебра Буте де Монвеля не использовалась, подобное представление получено лишь с точностью до слагаемых младшего порядка, не влияющих на главный член асимптотики спектра, но зато даны явные формулы для главных символов получающихся на $\partial\widetilde{\Omega}$ ПДО.

Близкий метод применялся в работах автора [30, 45], где в достаточно общей постановке была получена асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей. Еще две модельные задачи теории колебаний жидкости изучались в [32].

1.4. Краткий обзор результатов по асимптотике спектра в задачах со спектральным параметром в граничном условии. Рассматриваемые в статье краевые задачи содержат спектральный параметр в граничном условии. Спектральные свойства таких задач активно исследуются на протяжении длительного времени многими авторами. В обзоре [9] М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка асимптотике спектра в таких задачах посвящен раздел 7. Мы упомянем лишь несколько наиболее важных работ, отсылая читателя к более полной библиографии в [9]. Простейшая задача со спектральным параметром в граничном условии — это задача Стеклова:

$$-\Delta u = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda u \ \text{ на } \partial\Omega, \quad \int_{\partial\Omega} u\, dS = 0.$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — ограниченная область. Собственные значения этой задачи совпадают с последовательными максимумами отношения форм

$$\frac{\int_{\partial\Omega} |u|^2\, dS}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx}, \quad u \in H^1(\Omega), \quad \int_{\partial\Omega} u\, dS = 0.$$

Функция распределения собственных значений $N(\lambda)$ в задаче Стеклова при $\lambda \to +0$ имеет степенную асимптотику: $N(\lambda) \sim \lambda^{-m}\omega_m \mathrm{mes}\, \partial\Omega$, где ω_m — объем единичного m-мерного шара. Более общая «задача типа Стеклова» с переменными коэффициентами эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения

$$\frac{\int_{\partial\Omega} b(\mathbf{y})|u(\mathbf{y})|^2\, dS(\mathbf{y})}{\int_{\Omega} \Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u\overline{\partial_j u} + |u|^2\Big)\, d\mathbf{x}}, \quad u \in H^1(\Omega),$$

где коэффициенты вещественные, а матрица $\{a_{ij}(\mathbf{x})\}$ симметрична и положительно определена. Сначала исследовался случай, когда граница области и коэффициенты гладкие. Первым асимптотику спектра получил Сандгрен [44] с помощью вариационного метода. Весьма общие результаты по задачам со спектральным параметром в граничном условии получил А. Н. Кожевников [16, 17] с помощью техники ПДО. И. Л. Вулис и М. З. Соломяк установили спектральную асимптотику в случае задачи типа Стеклова с вырождением [14]. Тонкие результаты о поведении собственных значений задачи типа Стеклова в двумерном случае получены Г. В. Розенблюмом [25].

Асимптотика спектра в задачах со спектральным параметром в граничном условии в области с кусочно-гладкой границей (области с ребрами) изучалась в уже упомянутой выше работе [15] Н. А. Каразеевой и М. З. Соломяка и в работах автора [29, 31] (результаты [15, 29, 31] подробно излагаются ниже). М. С. Агранович [1] оправдал асимптотическую формулу спектра для задачи типа Стеклова в липшицевой области с «почти гладкой» границей (предполагалось, что $\partial\Omega$ бесконечно гладкая вне некоторого замкнутого подмножества нулевой меры). Как сообщил автору Г. В. Розенблюм [26], ему удалось получить тот же результат в липшицевой области, заменив условие «почти гладкости» следующим: для любого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое подмножество $U_\varepsilon \subset \partial\Omega$ меры меньше ε такое, что на $\partial\Omega \setminus U_\varepsilon$ векторное поле $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ принадлежит классу VMO (здесь $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x}$). Для задачи типа Стеклова в случае, если известна только липшицевость границы, Г. В. Розенблюм установил двусторонние оценки правильного порядка для функции распределения спектра, а вопрос об оправдании асимптотики спектра пока остается открытым.

Отметим, что в последнее время активно изучаются свойства собственных функций задачи типа Стеклова: для них характерно быстрое убывание при удалении точки от границы области (см., например, [36, 37, 46] и цитированную там литературу).

1.5. План работы. Статья состоит из введения (раздел 1) и еще пяти разделов. В разделе 2 приведены необходимые сведения о компактных операторах в гильбертовом пространстве со степенной асимптотикой спектра. В разделе 3 рассматривается задача типа Стеклова (случай тяжелой идеальной жидкости); излагаются результаты работы [15]. В разделе 4 изучается асимптотика спектра неклассической задачи типа Стеклова (задачи о спектре отношения (4.1)); результат применяется к нескольким задачам теории колебаний жидкости, в том числе к задаче о колебаниях капиллярной идеальной жидкости. Разделы 5 и 6 посвящены задачам для вязкой жидкости. В разделе 5 изучается асимптотика спектра одной вспомогательной задачи для тяжелой вязкой жидкости, а в разделе 6 — задача о спектре малых колебаний капиллярной вязкой жидкости.

1.6. Обозначения и предварительные сведения. Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$ обозначаем $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ соответственно. Иногда мы опускаем индексы.

Стандартное скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^k$ обозначаем через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно.

Далее, $L_p(\Omega;\mathbb{C}^k)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $H^s(\Omega;\mathbb{C}^k)$, $s \geqslant 0$, — стандартные L_p-пространства и пространства Соболева $\mathbb{C}^k$-значных функций в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Через $H^s_0(\Omega;\mathbb{C}^k)$ обозначим замыкание класса $C_0^\infty(\Omega;\mathbb{C}^k)$ в $H^s(\Omega;\mathbb{C}^k)$. При $k=1$ пишем просто $H^s(\Omega)$, $H^s_0(\Omega)$; иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций.

Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ — единичный вектор (внутренней либо внешней) нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ (определенный на гладких участках границы), то через $\partial/\partial\nu$ обозначается производная по нормали.

Обозначим через $\mathcal{K}$ *класс ограниченных областей* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих условиям обычных теорем вложения и продолжения*. Достаточным условием для $\Omega \in \mathcal{K}$ является липшицевость (т. е. условие, что локально граница $\partial\Omega$ в подходящих координатах является графиком липшицевой функции).

Если $f(\mathbf{x})$ — вещественнозначная функция в области Ω, обозначим ее положительную и отрицательную части через $f_\pm(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}(|f(\mathbf{x})| \pm f(\mathbf{x}))$.

Если $\mathcal{D}$ — гладкое компактное m-мерное многообразие без края или с краем, то через $T^*\mathcal{D}$ обозначается кокасательное расслоение, $T^*_{\mathbf{x}}\mathcal{D}$ — кокасательное пространство в точке $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$ — кокасательное расслоение с исключенным нулевым сечением.

Нам понадобится понятие полуплотности (см. [34]). В каждой локальной системе координат на $\mathcal{D}$ полуплотность $\mathfrak{u}$ изображается функцией. Если функции $u(\mathbf{y})$, $u'(\mathbf{y}')$ отвечают полуплотности $\mathfrak{u}$ в координатах, связанных преобразованием $h : \mathbf{y}' \mapsto \mathbf{y}$, то $u' = (u \circ h) j_h$, где j_h^2 — модуль якобиана преобразования h. Классы C^l, H^s и т. п. для полуплотностей вводятся через локальные координаты. На полуплотностях имеет смысл понятие классического ПДО; определение может быть дано в локальных координатах. Алгебра главных символов ПДО на полуплотностях та же, что и для ПДО на функциях. В частности, главный символ ПДО есть функция на кокасательном расслоении. Произведение двух полуплотностей есть плотность. Для плотностей на $\mathcal{D}$ инвариантно определен интеграл. Это позволяет ввести комплексное сепарабельное гильбертово пространство полуплотностей $L_2(\mathcal{D})$.

1.7. Благодарности. Автор благодарен Г. В. Розенблюму за консультацию по современному состоянию дел с изучением спектральных свойств задачи типа Стеклова. Автор благодарен А. И. Назарову за обсуждение и полезные комментарии.

2. Предварительные сведения по теории операторов

Приведем необходимые сведения о компактных операторах в гильбертовом пространстве; см. [6, §1], [7, добавление 1], [13].

2.1. Функции распределения спектра для компактных операторов. Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\mathfrak{S}_\infty = \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ — множество компактных операторов в $\mathfrak{H}$. Если $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, то через $\lambda_n^+(T)$, $-\lambda_n^-(T)$ обозначим положительные и отрицательные собственные значения оператора T, занумерованные в порядке невозрастания $\lambda_n^\pm(T)$ с учетом кратностей. Через $N_\pm(\lambda, T)$ обозначим функции распределения положительных и отрицательных собственных значений: $N_\pm(\lambda,T) := \#\{n : \lambda_n^\pm(T) > \lambda\}$, $\lambda > 0$. Если $T \geqslant 0$, то пишем просто $N(\lambda,T) = N_+(\lambda,T)$.

Минимаксимальный принцип для собственных значений самосопряженного оператора $T \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ утверждает, что справедливо равенство

$$\lambda^\pm_{n+1}(T) = \min_{\operatorname{codim}\mathfrak{G}\leqslant n}\ \max_{0\neq u\in\mathfrak{G}} \pm\frac{(Tu,u)_\mathfrak{H}}{(u,u)_\mathfrak{H}}, \tag{2.1}$$

где $\mathfrak{G}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$.

Мы будем систематически пользоваться следующим утверждением, вытекающим из (2.1).

Лемма 2.1. *Пусть $\mathfrak{H}_1$ — подпространство в $\mathfrak{H}_2$. Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$. Предположим, что для $u \in \mathfrak{H}_1$ такого, что $\pm(T_1u, u) > 0$, справедливо неравенство $\pm(T_1u, u) \leqslant \pm(T_2u, u)$. Тогда $N_\pm(\lambda, T_1) \leqslant N_\pm(\lambda, T_2)$ при $\lambda > 0$.*

Следующая лемма, обобщая лемму 2.1, позволяет сравнивать спектры операторов, действующих в разных гильбертовых пространствах.

Лемма 2.2 (см. [7, лемма 1.15]). *Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$. Пусть $\mathcal{S} : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ — непрерывный оператор, причем $(T_1u, u)_{\mathfrak{H}_1} = 0$ при $u \in \operatorname{Ker}\mathcal{S}$. Если при некотором $t > 0$ для всех $u \in \mathfrak{H}_1$, удовлетворяющих условию $\pm(T_1u, u)_{\mathfrak{H}_1} > 0$, выполнено неравенство*

$$\pm\frac{(T_1u,u)_{\mathfrak{H}_1}}{(u,u)_{\mathfrak{H}_1}} \leqslant \pm\frac{t\,(T_2\mathcal{S}u,\mathcal{S}u)_{\mathfrak{H}_2}}{(\mathcal{S}u,\mathcal{S}u)_{\mathfrak{H}_2}},$$

то при $\lambda > 0$ справедливо неравенство $N_\pm(\lambda, T_1) \leqslant N_\pm(t^{-1}\lambda, T_2)$.

Мы будем рассматривать операторы $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ со степенной асимптотикой функций $N_\pm(\lambda, T)$, которую удобно характеризовать значениями функционалов

$$\Delta^\pm_\theta(T) := \limsup_{\lambda\to+0} \lambda^\theta N_\pm(\lambda, T), \qquad \delta^\pm_\theta(T) := \liminf_{\lambda\to+0} \lambda^\theta N_\pm(\lambda, T). \tag{2.2}$$

Здесь $\theta > 0$. Отметим соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1/\theta}\lambda^\pm_n(T) = \left(\Delta^\pm_\theta(T)\right)^{1/\theta}, \qquad \liminf_{n\to\infty} n^{1/\theta}\lambda^\pm_n(T) = \left(\delta^\pm_\theta(T)\right)^{1/\theta}.$$

Функционалы (2.2) не меняются при компактном возмущении метрики исходного гильбертова пространства $\mathfrak{H}$. Пусть $Q = Q^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$ и $\lambda^+_1(Q) < 1$. Положим

$$(u, v)_{\mathfrak{H}_1} := (u, v)_\mathfrak{H} - (Qu, v)_\mathfrak{H}. \tag{2.3}$$

Скалярное произведение (2.3) превращает $\mathfrak{H}$ в новое гильбертово пространство $\mathfrak{H}_1$. Метрики $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_1$ эквивалентны. Пусть $T = T^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, и пусть T_1 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$, порожденный полуторалинейной формой оператора T, то есть $(T_1u, v)_{\mathfrak{H}_1} = (Tu, v)_\mathfrak{H}$, $u, v \in \mathfrak{H}$.

Лемма 2.3 (см. [7, лемма 1.16]). *При сделанных предположениях для всякого $\theta > 0$ справедливы равенства $\Delta^\pm_\theta(T_1) = \Delta^\pm_\theta(T)$, $\delta^\pm_\theta(T_1) = \delta^\pm_\theta(T)$.*

Обсудим теперь поведение функционалов $\Delta^\pm_\theta(T)$, $\delta^\pm_\theta(T)$ при аддитивных возмущениях оператора T. Прежде всего отметим, что для операторов $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $i = 1, 2$, справедливы неравенства

$$N_\pm(\lambda + \mu, T_1 + T_2) \leqslant N_\pm(\lambda, T_1) + N_\pm(\mu, T_2), \quad \lambda, \mu > 0. \tag{2.4}$$

Неравенства (2.4) эквивалентны известным неравенствам Г. Вейля для собственных чисел суммы самосопряженных операторов. Следующее утверждение также принадлежит Г. Вейлю.

Лемма 2.4 (см. [7, лемма 1.17]). *Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $i = 1, 2$. Предположим, что $\Delta^+_\theta(T_2) = \Delta^-_\theta(T_2) = 0$ при некотором $\theta > 0$. Тогда справедливы равенства $\Delta^\pm_\theta(T_1 + T_2) = \Delta^\pm_\theta(T_1)$ и $\delta^\pm_\theta(T_1 + T_2) = \delta^\pm_\theta(T_1)$.*

Лемма 2.4 содержится в следующем утверждении, имеющем для нас важное значение.

Лемма 2.5 (см. [13, (6)]). *Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H})$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы неравенства*

$$\left|\left(\Delta^\pm_\theta(T_1)\right)^{\frac{1}{1+\theta}} - \left(\Delta^\pm_\theta(T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}}\right| \leqslant \left(\Delta^+_\theta(T_1 - T_2) + \Delta^-_\theta(T_1 - T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}},$$

$$\left|\left(\delta^\pm_\theta(T_1)\right)^{\frac{1}{1+\theta}} - \left(\delta^\pm_\theta(T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}}\right| \leqslant \left(\Delta^+_\theta(T_1 - T_2) + \Delta^-_\theta(T_1 - T_2)\right)^{\frac{1}{1+\theta}}.$$

Функционалы (2.2) не меняются при переходе в $\mathfrak{H}$ к подпространству конечной коразмерности.

Лемма 2.6. *Пусть* $\mathfrak{H}_2$ — *подпространство в* $\mathfrak{H}_1$, *причем* $\dim \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{H}_2 < \infty$. *Пусть* $J : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_1$ — *оператор вложения, а* P — *ортопроектор пространства* $\mathfrak{H}_1$ *на* $\mathfrak{H}_2$. *Пусть* $T_1 = T_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1)$ *и* $T_2 := PT_1J$ — *оператор в* $\mathfrak{H}_2$. *Тогда верны равенства* $\Delta_\theta^\pm(T_2) = \Delta_\theta^\pm(T_1)$, $\delta_\theta^\pm(T_2) = \delta_\theta^\pm(T_1)$.

При вычислении асимптотики спектра ортогональной суммы операторов будем пользоваться следующим очевидным утверждением. Пусть $T_i = T_i^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $T = T_1 \oplus T_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2)$ и справедливо равенство

$$N_\pm(\lambda, T_1 \oplus T_2) = N_\pm(\lambda, T_1) + N_\pm(\lambda, T_2), \quad \lambda > 0. \tag{2.5}$$

2.2. Спектр отношения квадратичных форм. Мы будем рассматривать компактные операторы, порожденные отношением квадратичных форм. Если $\mathcal{F}[u, v]$ — полуторалинейная форма в $\mathfrak{H}$, то положим $\mathcal{F}[u] := \mathcal{F}[u, u]$. Пусть непрерывная полуторалинейная форма $\mathcal{A}[u, v]$ порождает в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ скалярное произведение, превращая $\mathfrak{H}$ в новое гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\mathcal{A}$. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задана непрерывная полуторалинейная форма $\mathcal{B}[u, v]$. Эта форма порождает в пространстве $\mathfrak{H}_\mathcal{A}$ оператор $\mathbf{B}$, т. е. $\mathcal{B}[u, v] = \mathcal{A}[\mathbf{B}u, v]$, $u, v \in \mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathfrak{H}_\mathcal{A})$. В силу минимаксимального принципа (2.1) числа $\lambda_n^\pm(\mathbf{B})$ совпадают с последовательными максимумами отношения квадратичных форм

$$\pm\frac{\mathcal{B}[u]}{\mathcal{A}[u]}, \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{2.6}$$

Поэтому можно говорить просто о спектре отношения форм (2.6) и употреблять обозначения типа $N_\pm(\lambda, (2.6))$, $\Delta_\theta^\pm$ (2.6), $\delta_\theta^\pm$ (2.6) вместо $N_\pm(\lambda, \mathbf{B})$, $\Delta_\theta^\pm(\mathbf{B})$, $\delta_\theta^\pm(\mathbf{B})$. Если $\mathcal{B}[u] \geqslant 0$, то значки $\pm$ в обозначениях опускаем.

В работе часто возникают конечномерные задачи о спектре, зависящие от дополнительного параметра $\mathbf{w}$ (обычно $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \in T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$, где $\mathcal{D}$ — гладкое компактное многообразие). Пусть на конечномерном пространстве $H_\mathbf{w}$ заданы эрмитовы полуторалинейные формы $a_\mathbf{w}$, $b_\mathbf{w}$, причем $a_\mathbf{w}[f] > 0$, $0 \neq f \in H_\mathbf{w}$. Тогда для функций распределения спектра отношения квадратичных форм

$$\pm\frac{b_\mathbf{w}[f]}{a_\mathbf{w}[f]}, \quad f \in H_\mathbf{w}, \tag{2.7}$$

будем использовать обозначения $n_\pm(\lambda, \mathbf{w};\ (2.7))$.

Иногда конечномерная задача о спектре будет записываться в другой форме. Если $q(\mathbf{w})$, $p(\mathbf{w})$ — эрмитовы $(l \times l)$-матрицы, зависящие от параметра $\mathbf{w}$, причем $p(\mathbf{w}) > 0$, то для функций распределения собственных значений задачи

$$q(\mathbf{w})\mathbf{z} = \lambda p(\mathbf{w})\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^l, \tag{2.8}$$

используются обозначения $n_\pm(\lambda, \mathbf{w};\ (2.8))$.

2.3. Оценки спектра отношения дифференциальных или псевдодифференциальных форм. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область, причем $\Omega \in \mathcal{K}$. Рассмотрим отношение квадратичных форм

$$\frac{\|u\|^2_{H^{s_1}(\Omega)}}{\|u\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad u \in H^{s_2}(\Omega), \tag{2.9}$$

где $s_2 > s_1 \geqslant 0$. Хорошо известно следующее утверждение.

Лемма 2.7. *Для функции распределения спектра отношения* (2.9) *справедлива оценка* $N(\lambda, (2.9)) \leqslant C\lambda^{-\theta}$, $\lambda > 0$; $\theta = \frac{m}{2(s_2 - s_1)}$. *Постоянная* C *зависит от* m, s_1, s_2 *и от области* Ω.

Рассмотрим теперь отношение квадратичных форм

$$\pm\frac{\int_\Omega b(\mathbf{y})|u(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y}}{\|u\|^2_{H^s(\Omega)}}, \quad u \in H^s(\Omega), \tag{2.10}$$

где $s > 0$ и $b(\mathbf{y})$ — вещественнозначная измеримая функция в Ω.

Лемма 2.8. *Пусть* $b(\mathbf{y})$ — *вещественнозначная функция, причем* $b \in L_r(\Omega)$, *где* $r = 1$ *при* $2s > m$, $r > 1$ *при* $2s = m$, $r = \frac{m}{2s}$ *при* $2s < m$. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (2.10) *справедливы оценки*

$$N_{\pm}(\lambda, (2.10)) \leqslant C\lambda^{-\theta}\|b\|^{\theta}_{L_r(\Omega)}, \quad \lambda > 0; \quad \theta = \frac{m}{2s}.$$

Постоянная $C = C(m, r, s, \Omega)$ *не зависит от функции* b.

Утверждение леммы 2.8 при целом s совпадает с утверждением [7, теорема 4.1]. Соответствующее доказательство автоматически переносится на случай нецелого s — это доказательство основано на теоремах о приближениях функций из $H^s(\Omega)$ кусочно-полиномиальными функциями, а теоремы о приближениях были доказаны в [6, 7] для случая произвольного $s > 0$.

Нам потребуются также оценки спектра отношения

$$\pm\frac{2\,\mathrm{Re}\int_{\Omega} b(\mathbf{y})u_1(\mathbf{y})\overline{u_2(\mathbf{y})}\,d\mathbf{y}}{\|u_1\|^2_{H^{s_1}(\Omega)} + \|u_2\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad \{u_1, u_2\} \in H^{s_1}(\Omega) \oplus H^{s_2}(\Omega), \tag{2.11}$$

где $s_1, s_2 > 0$.

Лемма 2.9. *Пусть* $b(\mathbf{y})$ — *вещественнозначная функция, причем* $b \in L_r(\Omega)$, *где* $r = 1$ *при* $2s_1 > m$, $2s_2 > m$; $1 < r < 2$ *при* $2s_1 = m$, $2s_2 > m$ *или* $2s_1 > m$, $2s_2 = m$ *или* $2s_1 = 2s_2 = m$; $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{s_2}{m}$ *при* $2s_1 > m$, $2s_2 < m$; $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{s_1}{m}$ *при* $2s_1 < m$, $2s_2 > m$; $\frac{1}{r} < \frac{1}{2} + \frac{s_2}{m}$ *при* $2s_1 = m$, $2s_2 < m$; $\frac{1}{r} < \frac{1}{2} + \frac{s_1}{m}$ *при* $2s_1 < m$, $2s_2 = m$; $r = \frac{m}{s_1+s_2}$ *при* $2s_1 < m$, $2s_2 < m$. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (2.11) *справедливы оценки*

$$N_{\pm}(\lambda, (2.11)) \leqslant C\lambda^{-\theta}\|b\|^{\theta}_{L_r(\Omega)}, \quad \lambda > 0; \quad \theta = \frac{m}{s_1 + s_2}. \tag{2.12}$$

Постоянная $C = C(m, r, s_1, s_2, \Omega)$ *не зависит от функции* b.

Доказательство. Достаточно проверить неравенство (2.12) в случае, когда $\|b\|_{L_r(\Omega)} = 1$.

Для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $0 < \alpha < 1$ отношение (2.11) оценивается по абсолютной величине через

$$\frac{\varepsilon\int_{\Omega}|b(\mathbf{y})|^{2\alpha}|u_1(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} + \varepsilon^{-1}\int_{\Omega}|b(\mathbf{y})|^{2(1-\alpha)}|u_2(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}}{\|u_1\|^2_{H^{s_1}(\Omega)} + \|u_2\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad \{u_1, u_2\} \in H^{s_1}(\Omega) \oplus H^{s_2}(\Omega).$$

Рассмотрим отношения

$$\frac{\int_{\Omega}|b(\mathbf{y})|^{2\alpha}|u_1(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}}{\|u_1\|^2_{H^{s_1}(\Omega)}}, \quad u_1 \in H^{s_1}(\Omega), \tag{2.13}$$

$$\frac{\int_{\Omega}|b(\mathbf{y})|^{2(1-\alpha)}|u_2(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}}{\|u_2\|^2_{H^{s_2}(\Omega)}}, \quad u_2 \in H^{s_2}(\Omega). \tag{2.14}$$

В соответствии с леммой 2.1 и (2.5) имеем

$$N_{\pm}(\lambda, (2.11)) \leqslant N(\lambda\varepsilon^{-1}, (2.13)) + N(\lambda\varepsilon, (2.14)), \quad \lambda > 0. \tag{2.15}$$

Из условий на r следует, что можно выбрать числа r_1, r_2 так, чтобы выполнялось равенство $r^{-1} = \frac{1}{2}(r_1^{-1} + r_2^{-1})$ и $r_i = 1$ при $2s_i > m$; $r_i > 1$ при $2s_i = m$; $r_i = \frac{m}{2s_i}$ при $2s_i < m$, $i = 1, 2$. Применяя лемму 2.8 для отношений (2.13), (2.14) и учитывая (2.15), получаем

$$N_{\pm}(\lambda, (2.11)) \leqslant C\left(\varepsilon^{\theta_1}\lambda^{-\theta_1}\left\||b|^{2\alpha}\right\|^{\theta_1}_{L_{r_1}(\Omega)} + \varepsilon^{-\theta_2}\lambda^{-\theta_2}\left\||b|^{2(1-\alpha)}\right\|^{\theta_2}_{L_{r_2}(\Omega)}\right),$$

где $\theta_i = \frac{m}{2s_i}$, $i = 1, 2$. Выберем $\varepsilon = \lambda^{\frac{s_2-s_1}{s_1+s_2}}$, $\alpha = \frac{r_2}{r_1+r_2}$. Тогда $N_{\pm}(\lambda, (2.11)) \leqslant C\lambda^{-\theta}$ при $\|b\|_{L_r(\Omega)} = 1$. □

Нам понадобится также асимптотика спектра отношения двух псевдодифференциальных форм (ПДФ), заданных на гладком компактном ориентируемом m-мерном многообразии $\mathcal{D}$ без края. (В приложениях роль многообразия $\mathcal{D}$ будет играть граница гладкой области $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{m+1}$.)

Пусть $\rho > 0$ и $H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$ — пространство Соболева $\mathbb{C}^l$-значных полуплотностей на $\mathcal{D}$. В пространстве $H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$ рассмотрим ПДФ $(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) = \sum\limits_{i,j=1}^{l}(\mathcal{P}_{ij}\varphi_j,\psi_i)$. Предполагается, что операторы $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ji}^*$ суть классические ПДО, действующие на полуплотности на $\mathcal{D}$, порядка не выше 2ρ. Предположим, что ПДФ $(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})$ определяет в $H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$ эквивалентную норму:

$$(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}) \asymp \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^\rho(\mathcal{D})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l). \tag{2.16}$$

Главный символ ПДО $\mathcal{P}$ (порядка 2ρ) обозначим через $p^\circ(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Пусть $\varkappa > 0$ и $\mathcal{Q}_{ij} = \mathcal{Q}_{ji}^*$ — классические ПДО, действующие на полуплотности на $\mathcal{D}$, порядка не выше $2(\rho-\varkappa)$. Тогда ПДФ $(\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}) = \sum\limits_{i,j=1}^{l}(\mathcal{Q}_{ij}\varphi_j,\psi_i)$ непрерывна в $H^{\rho-\varkappa}(\mathcal{D};\mathbb{C}^l)$. Главный символ ПДО $\mathcal{Q}$ (порядка $2(\rho-\varkappa)$) обозначим через $q^\circ(\mathbf{w})$, $\mathbf{w} \in T^*\mathcal{D} \setminus \{0\}$.

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{(\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}{(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l). \tag{2.17}$$

Из условия (2.16) следует положительность матрицы $p^\circ(\mathbf{w})$. Поэтому имеет смысл конечномерная задача о спектре отношения форм

$$\pm\frac{\langle q^\circ(\mathbf{w})\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle}{\langle p^\circ(\mathbf{w})\mathbf{z},\mathbf{z}\rangle}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{C}^l. \tag{2.18}$$

Функции $n_\pm(\lambda,\mathbf{w};\ (2.18))$ имеют свойство однородности: $n_\pm(\lambda,\mathbf{x},t\boldsymbol{\xi};\ (2.18)) = n_\pm(t^{2\varkappa}\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (2.18))$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $\boldsymbol{\xi} \in T^*_{\mathbf{x}}\mathcal{D} \setminus \{0\}$, $t > 0$.

Следующее утверждение вытекает из [11, лемма 1]; см. также [8, 10].

Лемма 2.10. *При сделанных предположениях для функций распределения спектра отношения* (2.17) *справедлива асимптотика при* $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda,(2.17)) \sim (2\pi)^{-m}\int_{T^*\mathcal{D}} n_\pm(\lambda,\mathbf{w};\ (2.18))\,d\mathbf{w} = \lambda^{-\theta}(2\pi)^{-m}\int_{T^*\mathcal{D}} n_\pm(1,\mathbf{w};\ (2.18))\,d\mathbf{w}, \quad \theta = \frac{m}{2\varkappa}.$$

Здесь $d\mathbf{w}$ — *инвариантная мера на* $T^*\mathcal{D}$.

Наконец, нам понадобится асимптотика спектра отношения ПДФ при наличии дополнительных связей на части многообразия $\mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{D}_0$ — открытое подмножество многообразия $\mathcal{D}$ такое, что $\operatorname{mes}_m \partial\mathcal{D}_0 = 0$. Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{(\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}{(\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^\rho(\mathcal{D};\mathbb{C}^l), \quad \boldsymbol{\varphi}|_{\mathcal{D}_0} = 0. \tag{2.19}$$

Следующее утверждение является частным случаем результата статьи [28].

Лемма 2.11. *При сделанных предположениях для функций распределения спектра отношения* (2.19) *справедлива асимптотика при* $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda,(2.19)) \sim \lambda^{-\theta}(2\pi)^{-m}\int_{T^*(\mathcal{D}\setminus\overline{\mathcal{D}_0})} n_\pm(1,\mathbf{w};\ (2.18))\,d\mathbf{w}, \quad \theta = \frac{m}{2\varkappa}.$$

3. Асимптотика спектра малых колебаний тяжелой идеальной жидкости

В работе [15] Н. А. Каразеевой и М. З. Соломяка рассматривалась задача типа Стеклова в составных областях. В качестве основного примера авторы получили асимптотику спектра в задаче о малых колебаниях системы несмешивающихся тяжелых идеальных жидкостей, полностью заполняющих сосуд. Метод был основан на общем подходе исследования негладких вариационных задач, разработанном М. Ш. Бирманом и М. З. Соломяком. Тем же методом можно рассмотреть и задачу в случае одной жидкости, частично заполняющей сосуд. В данном разделе мы кратко опишем результаты для тяжелой идеальной жидкости.

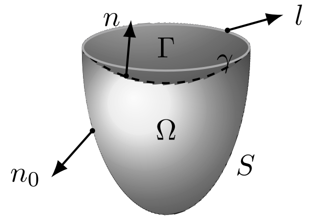

Рис. 1. Одна жидкость, частично заполняющая сосуд

3.1. Малые колебания тяжелой идеальной жидкости. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1) — область, которую занимает жидкость, находящаяся в сосуде в положении равновесия; Γ — равновесная свободная поверхность жидкости; $S = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ — твердая стенка сосуда. Приведем вначале классическую постановку задачи.

Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к Γ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$. Пусть задана вещественная функция $a(\mathbf{x})$ на Γ, причем $\int_\Gamma a(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \neq 0$. Из физических соображений функция $a(\mathbf{x})$ положительна, но математическую задачу можно рассматривать без этого ограничения.

Задача о нормальных колебаниях тяжелой идеальной жидкости сводится к краевой задаче на собственные значения[1]

$$\begin{gathered} \Delta\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n}(\mathbf{x}) = \lambda^{-1} a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS = 0. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\Phi(\mathbf{x})$ имеет смысл амплитуды колебаний потенциала $\Phi(\mathbf{x}, t)$ поля скоростей частиц жидкости: $\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\omega^{-1} = \sqrt{\lambda}$, t — время. Уравнение Лапласа — уравнение неразрывности, условие на S — условие непротекания.

Краевая задача (3.1) эквивалентна задаче о нахождении последовательных максимумов отношения квадратичных форм

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS = 0. \tag{3.2}$$

По теореме об эквивалентных нормировках в пространствах Соболева (см., например, [27]) функционал $\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x} + |\int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS|^2$ задает эквивалентную норму в пространстве $H^1(\Omega)$. Поэтому на подпространстве $\{\Phi \in H^1(\Omega) : \int_\Gamma a(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\,dS = 0\}$ форма $\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}$ эквивалентна $\|\Phi\|^2_{H^1(\Omega)}$. Уравнение Лапласа в Ω и условие на S являются естественными условиями в вариационной задаче о спектре отношения (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющая условиям обычных теорем вложения и продолжения: $\Omega \in \mathcal{K}$; Γ — гладкая двумерная поверхность с липшицевой границей, причем $\overline{\Gamma} \subset \partial\Omega$. Пусть $a \in L_2(\Gamma)$ — вещественная функция. Тогда для функций распределения спектра отношения* (3.2) *при $\lambda \to +0$ справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda, (3.2)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{4\pi}\int_\Gamma a_\pm^2(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{3.3}$$

Приведем схему доказательства теоремы 3.1 методом статьи [15]. Применяя леммы 2.3 и 2.6, убеждаемся, что величины $\Delta_2^\pm$ (3.2), $\delta_2^\pm$ (3.2) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\int_\Omega \left(|\nabla\Phi|^2 + |\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega). \tag{3.4}$$

Сначала установим оценку спектра.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы* 3.1 *справедливы оценки $\Delta_2^\pm$* (3.4) $\leqslant C\|a\|^2_{L_2(\Gamma)}$.

[1] В [21, гл. 3, §3] обсуждается эта задача в случае $a(\mathbf{x}) = 1$.

Доказательство. По теореме о следах имеем: $\int_\Omega \left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x} \geqslant C\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$, $\Phi\in H^1(\Omega)$, $C>0$. Применяя лемму 2.2, убеждаемся, что функции $N_\pm(\lambda,(3.4))$ оцениваются через функции распределения спектра отношения

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{C\|\Phi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}},\quad \Phi\in H^{1/2}(\Gamma),\quad C>0. \tag{3.5}$$

С учетом леммы 2.8 получаем: $\Delta_2^\pm\ (3.4)\leqslant\Delta_2^\pm\ (3.5)\leqslant C\|a\|^2_{L_2(\Gamma)}$. □

Леммы 3.1 и 2.5 показывают, что величины $\Delta_2^\pm$ (3.4), $\delta_2^\pm$ (3.4) являются непрерывными функционалами над $a\in L_2(\Gamma)$. Поэтому достаточно провести вычисление этих величин для плотного в $L_2(\Gamma)$ множества коэффициентов a. В качестве такого множества возьмем $C_0^\infty(\Gamma)$.

Теперь, считая, что $a\in C_0^\infty(\Gamma)$, проведем сравнение отношения (3.4) и аналогичного отношения, заданного в области $\widetilde\Omega$ с гладкой границей. Пусть $\widetilde\Omega$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde\Omega\subset\Omega$ и $\operatorname{supp} a$ лежит строго внутри множества $\partial\widetilde\Omega\cap\Gamma$. Пусть $\widetilde a\in C^\infty(\partial\widetilde\Omega)$ — функция, равная $a(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde\Omega\cap\Gamma$ и равная нулю при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde\Omega\setminus\Gamma$.

Наша цель — сравнить отношение (3.4) и отношение

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}},\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega). \tag{3.6}$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, *и пусть* $a\in C_0^\infty(\Gamma)$. *Тогда справедливы оценки*

$$\delta_2^\pm\ (3.6)\leqslant\delta_2^\pm\ (3.4)\leqslant\Delta_2^\pm\ (3.4)\leqslant\Delta_2^\pm\ (3.6). \tag{3.7}$$

Доказательство. Очевидно, на функциях $\Phi\in H^1(\Omega)$ числители отношений (3.4) и (3.6) совпадают, а знаменатель в (3.6) не превосходит знаменателя в (3.4). Применяя лемму 2.2, в которой роль $\mathcal{S}$ играет оператор сужения $\mathcal{S}: H^1(\Omega)\to H^1(\widetilde\Omega)$, получаем:

$$N_\pm(\lambda,(3.4))\leqslant N_\pm(\lambda,(3.6)),\quad \lambda>0. \tag{3.8}$$

Отсюда следует правое неравенство в (3.7).

Фиксируем срезку $\vartheta\in C^\infty(\overline{\Omega})$; $0\leqslant\vartheta(\mathbf{x})\leqslant 1$; $\vartheta(\mathbf{x})=1$ при $\mathbf{x}\in\operatorname{supp} a$; $\vartheta(\mathbf{x})=0$ в некоторой окрестности $\Omega\setminus\widetilde\Omega$. Имеем:

$$\begin{aligned}
&\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}\geqslant\varepsilon\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\vartheta^2\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}=\\
&=\varepsilon\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla(\vartheta\Phi)|^2+|\vartheta\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+\\
&+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\left(\vartheta^2|\nabla\Phi|^2-|\nabla(\vartheta\Phi)|^2\right)\,d\mathbf{x},\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Сумма первых двух членов в правой части (3.9) определяет в $H^1(\widetilde\Omega)$ эквивалентную метрику, а последний член — форма, компактная в $H^1(\widetilde\Omega)$.

Далее, используя равенство $\widetilde a(\mathbf{x})=\vartheta^2(\mathbf{x})\widetilde a(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde\Omega$, получаем

$$\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS=\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\vartheta(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS,\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega).$$

В соответствии с леммой 2.3 величины $\delta_\theta^\pm$ (3.6) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\vartheta(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS}{\varepsilon\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde\Omega}\left(|\nabla(\vartheta\Phi)|^2+|\vartheta\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}},\quad \Phi\in H^1(\widetilde\Omega). \tag{3.10}$$

Для $\Phi\in H^1(\widetilde\Omega)$ через $\widehat{\mathcal{S}}\Phi$ обозначим функцию, совпадающую с $\vartheta\Phi$ на $\widetilde\Omega$ и равную нулю на $\Omega\setminus\widetilde\Omega$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{S}}: H^1(\widetilde\Omega)\to H^1(\Omega)$ ограничен. Для всех $\Phi\in H^1(\widetilde\Omega)$, для которых $\pm\int_{\partial\widetilde\Omega}\widetilde a(\mathbf{x})|\vartheta(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})|^2\,dS>0$, отношение (3.10) не превосходит $\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|(\widehat{\mathcal{S}}\Phi)(\mathbf{x})|^2\,dS}{(1-\varepsilon)\int_\Omega\left(|\nabla(\widehat{\mathcal{S}}\Phi)|^2+|\widehat{\mathcal{S}}\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}}$. В силу леммы 2.2 отсюда вытекают оценки $\delta_2^\pm\ (3.6)\leqslant\delta_2^\pm\ (3.10)\leqslant(1-\varepsilon)^{-2}\delta_2^\pm\ (3.4)$. Устремляя здесь ε к нулю, приходим к левому неравенству в (3.7). □

Остается установить асимптотику спектра для задачи в гладкой области.

Лемма 3.3. *Пусть* $\widetilde{\Omega}$ — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с гладкой границей. Пусть* $\widetilde{a}$ — *гладкая вещественная функция на* $\partial\widetilde{\Omega}$. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (3.6) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*

$$N_{\pm}(\lambda, (3.6)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{4\pi} \int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}_{\pm}^2(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

Доказательство. Пусть $L_0 = -\Delta + I$. Через $H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$ обозначим подпространство в $\widetilde{\Omega}$, образованное решениями уравнения $L_0 u = 0$ в $\widetilde{\Omega}$. Справедливо разложение $H^1(\widetilde{\Omega}) = H^1(\widetilde{\Omega}, L_0) \oplus H_0^1(\widetilde{\Omega})$. Поскольку форма в числителе отношения (3.6) обращается в нуль при $u \in H_0^1(\widetilde{\Omega})$, то ненулевой спектр отношения (3.6) не изменится, если рассматривать это отношение на $H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$.

Пусть G_0 — «оператор Пуассона», сопоставляющий функции $\varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ решение соответствующей задачи Дирихле для уравнения $L_0 u = 0$: равенство $u = G_0\varphi$ означает, что $u \in H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$, $u|_{\partial\widetilde{\Omega}} = \varphi$. Оператор G_0 устанавливает гомеоморфизм пространств $H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ и $H^1(\widetilde{\Omega}, L_0)$. Задача о спектре отношения (3.6) эквивалентна задаче о спектре отношения

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|\varphi(\mathbf{x})|^2\, dS}{\int_{\widetilde{\Omega}} \left(|\nabla G_0\varphi|^2 + |G_0\varphi|^2\right)\, d\mathbf{x}}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{3.12}$$

Из свойств алгебры Буте де Монвеля [35, 38] следует, что справедливо представление $\int_{\widetilde{\Omega}} \left(|\nabla G_0\varphi|^2 + |G_0\varphi|^2\right) d\mathbf{x} = (\mathcal{P}_0\varphi, \varphi)$, $\varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$, где $\mathcal{P}_0$ — классический ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 1. Вычисляя старший символ $p_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ оператора $\mathcal{P}_0$ в соответствии с известными правилами вычислений для алгебры Буте де Монвеля, получаем: $p_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|$, $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$. Здесь $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ — нормаль к $\partial\widetilde{\Omega}$. (Ср. с вычислениями в пункте 4.4 ниже.)

Очевидно, форму в числителе отношения (3.12) можно интерпретировать как форму $(\mathcal{Q}_0\varphi, \varphi)$ ПДО $\mathcal{Q}_0$ нулевого порядка на $\partial\widetilde{\Omega}$ с символом $q_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \widetilde{a}(\mathbf{x})$. Таким образом, отношение (3.12) совпадает с отношением ПДФ

$$\pm\frac{(\mathcal{Q}_0\varphi, \varphi)}{(\mathcal{P}_0\varphi, \varphi)}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{3.13}$$

Мы установили, что

$$N_{\pm}(\lambda, (3.6)) = N_{\pm}(\lambda, (3.12)) = N_{\pm}(\lambda, (3.13)), \quad \lambda > 0. \tag{3.14}$$

В силу леммы 2.10 для функций распределения спектра отношения (3.13) при $\lambda \to +0$ справедливы асимптотические формулы

$$N_{\pm}(\lambda, (3.13)) \sim \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial\widetilde{\Omega}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_{\pm}(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (3.16)), \tag{3.15}$$

где $n_{\pm}(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (3.16))$ — функции распределения спектра отношения (одномерных) форм

$$\pm\frac{q_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}{p_0^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{3.16}$$

Имеем:

$$n_{\pm}(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (3.16)) = \begin{cases} 1, & \lambda < \widetilde{a}_{\pm}(\mathbf{x})|\boldsymbol{\xi}|^{-1}, \\ 0, & \lambda \geqslant \widetilde{a}_{\pm}(\mathbf{x})|\boldsymbol{\xi}|^{-1}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Теперь, вычисляя асимптотику функций $N_{\pm}(\lambda, (3.13))$ согласно (3.15), (3.17) и учитывая (3.14), получаем искомую асимптотику (3.11). □

Завершение доказательства теоремы 3.1. Из леммы 3.2 и асимптотики (3.11) с учетом равенства $\widetilde{a}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} a = \operatorname{supp} \widetilde{a} \subset \Gamma$ вытекает асимптотическая формула вида (3.3) для $N_{\pm}(\lambda, (3.4))$ в случае $a \in C_0^\infty(\Gamma)$. По замыканию эта формула верна при $a \in L_2(\Gamma)$; см. лемму 3.1. Остается вспомнить, что $\Delta_2^{\pm}\ (3.2) = \Delta_2^{\pm}\ (3.4)$ и $\delta_2^{\pm}\ (3.2) = \delta_2^{\pm}\ (3.4)$. Это завершает доказательство теоремы 3.1. □

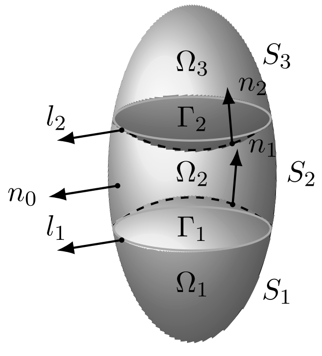

Рис. 2. Система жидкостей в замкнутом сосуде

3.2. Малые колебания системы тяжелых идеальных жидкостей. На прежнем пути можно получить асимптотические формулы спектра для задачи о колебаниях системы из несмешивающихся жидкостей, полностью или частично заполняющих сосуд. Мы ограничимся постановкой задачи и формулировкой результата для случая системы тяжелых идеальных жидкостей, полностью заполняющих сосуд (см. рис. 2); читатель найдет доказательство в [15].

Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ разделена на $(k+1)$ частей Ω_j, $j = 1, \dots, k+1$. Число $k+1$ — это количество жидкостей, Ω_j — область, которую занимает j-ая жидкость в положении равновесия. При этом

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{k+1} \overline{\Omega_j}, \quad \Omega = \operatorname{int} \overline{\Omega}, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \quad \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \varnothing \text{ при } j \notin \{i-1, i, i+1\}. \tag{3.18}$$

Обозначим

$$\overline{\Gamma_i} = \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, k, \tag{3.19}$$

— границы раздела жидкостей; $S = \partial\Omega$ — твердая стенка сосуда; $S_j = \partial\Omega_j \cap S$, $j = 1, \dots, k+1$. Предполагается, что $\Omega_i \in \mathcal{K}$, $i = 1, \dots, k+1$, и Γ_i, $i = 1, \dots, k$, — гладкие двумерные поверхности с липшицевыми краями. Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x} \in S$; $\mathbf{n}_j(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Ω_j) нормали к Γ_j в точке $\mathbf{x} \in \Gamma_j$.

Задача о нормальных колебаниях системы тяжелых идеальных жидкостей формулируется для системы функций $\{\Phi_j(\mathbf{x})\}$, $j = 1, \dots, k+1$, где Φ_j — функция в Ω_j:

$$\begin{gathered}
\Delta\Phi_j = 0 \ \text{ в } \Omega_j, \quad \frac{\partial \Phi_j}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S_j, \quad j = 1, \dots, k+1, \\
\frac{\partial \Phi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial n_j} = \lambda^{-1} a_j(\mathbf{x}) \left(\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j = 1, \dots, k, \\
\int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x}) \left(\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right) dS = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega_j} \rho_j^{-1} \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.
\end{gathered} \tag{3.20}$$

Здесь $a_j \in L_2(\Gamma_j)$ — вещественные функции, причем $\int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \neq 0$. Постоянные $\rho_j > 0$ имеют смысл плотностей жидкостей. (По физическому смыслу функции $a_j(\mathbf{x})$ положительны, а плотности ρ_j подчинены неравенствам $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{k+1}$, но математическую задачу можно рассматривать без этих ограничений.)

Задача (3.20) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\begin{gathered}
\frac{\sum\limits_{j=1}^{k} \int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x}) |\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}|^2\, dS}{\sum\limits_{j=1}^{k+1} \rho_j \int_{\Omega_j} |\nabla \Phi_j|^2\, d\mathbf{x}}, \quad \Phi_j \in H^1(\Omega_j), \quad j = 1, \dots, k+1; \\
\int_{\Gamma_j} a_j(\mathbf{x}) \left(\rho_j \Phi_j - \rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right) dS = 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad \sum_{j=1}^{k+1} \int_{\Omega_j} \rho_j^{-1} \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.
\end{gathered} \tag{3.21}$$

Предложение 3.1 (см. [15]). *При сделанных предположениях для функций распределения спектра отношения* (3.21) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*

$$N_{\pm}(\lambda, (3.21)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{4\pi} \sum_{j=1}^{k} (\rho_j + \rho_{j+1})^2 \int_{\Gamma_j} (a_j)_{\pm}^2 \, d\mathbf{x}.$$

4. Асимптотика спектра неклассической задачи типа Стеклова. Применение к теории малых колебаний жидкости

Ряд задач теории малых колебаний жидкости (см. [3, 18–20]) приводит к вопросу о спектре вариационного отношения

$$\frac{\operatorname{Re} \int_{\Gamma} b(\mathbf{y})(\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1} u)(\mathbf{y}) \overline{u(\mathbf{y})} \, dS(\mathbf{y})}{\mathcal{A}_{\Omega}[u]}, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{4.1}$$

Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1) — область, которую занимает жидкость, частично заполняющая сосуд, в положении равновесия; гладкая двумерная поверхность $\Gamma \subset \partial\Omega$ имеет смысл свободной поверхности жидкости либо упругого днища сосуда. Квадратичная форма $\mathcal{A}_{\Omega}[u]$ определяет эквивалентную метрику в $H^1(\Omega)$. Нелокальный оператор $\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}$ является разрешающим оператором некоторой эллиптической краевой задачи на Γ. Мы называем задачу о спектре отношения (4.1) *задачей типа Стеклова*, поскольку: а) экстремали автоматически удовлетворяют однородному эллиптическому уравнению $Lu = 0$ в области Ω, где оператор L отвечает форме $\mathcal{A}_{\Omega}$; б) экстремали удовлетворяют уравнению на Γ, в которое входит спектральный параметр. Однако эта задача отличается от классической задачи типа Стеклова тем, что в отношении форм присутствует нелокальный оператор $\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}$.

В настоящем разделе мы получаем асимптотику спектра отношения вида (4.1). Результат применяется к вопросу о спектре малых колебаний капиллярной идеальной жидкости, капиллярной стратифицированной жидкости, а также к одной вспомогательной задаче гидроупругости. Основная трудность связана с негладкостью границы $\partial\Omega$ (стенка сосуда и свободная поверхность жидкости при пересечении образуют ребро). Другая трудность вытекает из нелокального характера оператора $\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}$.

4.1. Постановка задачи. Формулировка результата. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — ограниченная область, $\Omega \in \mathcal{K}$. Пусть граница $\partial\Omega$ содержит бесконечно гладкую m-мерную поверхность Γ с гладким $(m-1)$-мерным краем γ (при этом Γ и γ не обязательно связны). Через $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$.

В области Ω задана эрмитова квадратичная форма

$$\mathcal{A}_{\Omega}[u] := \int_{\Omega} \Big(\sum_{i,j=1}^{m+1} a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_i u(\mathbf{x}) \overline{\partial_j u(\mathbf{x})} + V(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 \Big) \, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{4.2}$$

Предполагается, что коэффициенты $a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x})$, $V(\mathbf{x})$ — бесконечно гладкие вещественные функции в $\overline{\Omega}$, матрица $a(\mathbf{x}) = \{a_{ij}(\mathbf{x})\}$ положительно определена:

$$\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \rangle = \sum_{i,j=1}^{m+1} a_{ij}(\mathbf{x}) \eta_i \overline{\eta_j} \geqslant c_a |\boldsymbol{\eta}|^2, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{C}^{m+1}, \quad c_a > 0, \tag{4.3}$$

и функция $V(\mathbf{x})$ положительно определена:

$$V(\mathbf{x}) \geqslant c_a > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{4.4}$$

При сделанных предположениях форма $\mathcal{A}_{\Omega}[u]$ определяет в $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной:

$$c_a \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leqslant \mathcal{A}_{\Omega}[u] \leqslant C_a \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{4.5}$$

Через L обозначим дифференциальное выражение, отвечающее форме (4.2):

$$L = -\sum_{i,j=1}^{m+1} \partial_j a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_i + V(\mathbf{x}).$$

Далее, пусть B_Γ — скалярное сильно эллиптическое дифференциальное выражение на Γ порядка $2q$; $T_1, \dots, T_q$ — дифференциальные операторы следа, действующие «с Γ на γ», $\operatorname{ord} T_j = \beta_j \leqslant 2q-1$. Коэффициенты операторов B_Γ и T_j, $j = 1, \dots, q$, предполагаются бесконечно гладкими, вообще говоря, комплекснозначными функциями. Предположим, что задача $B_\Gamma u = f$ на Γ, $T_j u = \varphi_j$ на γ, $j = 1, \dots, q$, является регулярной эллиптической задачей, т. е. выполнено условие Шапиро—Лопатинского; см., например, [2, 4, 22]. Через $\mathbf{B}_\Gamma$ обозначим оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выражением B_Γ на области определения $\operatorname{Dom} \mathbf{B}_\Gamma = \{u \in H^{2q}(\Gamma) : T_j u|_\gamma = 0,\ j = 1, \dots, q\}$. Предположим, что $\mathbf{B}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. На $L_2(\Gamma)$ определен компактный оператор $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$. Через $B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{n}(\mathbf{x})$, обозначим главный символ дифференциального выражения B_Γ. Из условий сильной эллиптичности и самосопряженности следует, что $B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \geqslant c_0 |\boldsymbol{\xi}|^{2q}$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{n}(\mathbf{x})$, $c_0 > 0$.

Рассмотрим квадратичную форму $\mathcal{B}_\Gamma[u] := \operatorname{Re} \int_\Gamma b(\mathbf{x}) \left(\mathbf{B}_\Gamma^{-1} u\right)(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{x})}\, dS(\mathbf{x})$, где $b(\mathbf{x})$ — вещественнозначная функция на Γ, удовлетворяющая условиям

$$
\begin{gathered}
b \in L_r(\Gamma), \quad r > 1 \text{ при } m = 1; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \text{ при } 1 < m < 4q+1; \\
\frac{1}{r} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2m} \text{ при } m = 4q+1; \quad r = \frac{m}{2q+1} \text{ при } m > 4q+1.
\end{gathered} \tag{4.6}
$$

Рассмотрим отношение форм

$$
\pm \frac{\mathcal{B}_\Gamma[u]}{\mathcal{A}_\Omega[u]}, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{4.7}
$$

Пусть $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\xi \perp \mathbf{n}(x)$. Обозначим $M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \left(\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle \langle a(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle - \langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}, \mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle^2\right)^{1/2}$. Основной результат данного раздела — следующая теорема.

Теорема 4.1. *При сделанных предположениях для функций распределения собственных значений отношения* (4.7) *справедливы асимптотические формулы при* $\lambda \to +0$:

$$
N_\pm(\lambda, (4.7)) \sim \frac{\lambda^{-\theta}}{m(2\pi)^m} \int_\Gamma dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi} \perp \mathbf{n}(x) :\, |\boldsymbol{\xi}| = 1} dS(\boldsymbol{\xi}) \ \left(b_\pm(\mathbf{x}) B^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) M^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\right)^\theta, \quad \theta = \frac{m}{2q+1}.
$$

4.2. Оценки спектра.

Лемма 4.1. *Пусть вещественнозначная функция* $b(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условиям* (4.6)*. Тогда справедливы оценки* $\Delta_\theta^\pm$ (4.7) $\leqslant C \|b\|_{L_r(\Gamma)}^\theta$, $\theta = \frac{m}{2q+1}$, *где постоянная* C *не зависит от* b.

Доказательство. По теореме о следах (см., например, [2, 22]) из нижней оценки (4.5) вытекает неравенство $\mathcal{A}_\Omega[u] \geqslant c_a \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \geqslant C_1 \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2$, $u \in H^1(\Omega)$, с некоторой постоянной $C_1 > 0$. В (4.7) обозначим $g = \mathbf{B}_\Gamma^{-1} u$. По теореме о гомеоморфизмах (см., например, [2, 4, 22]) имеем $\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 \geqslant C_2 \|g\|_{H^{2q+1/2}(\Gamma)}^2$, $u \in H^{1/2}(\Gamma)$, $C_2 > 0$. Применяя лемму 2.2, получаем, что функции $N_\pm(\lambda, (4.7))$ оцениваются сверху через функции распределения спектра отношения

$$
\pm C \frac{\operatorname{Re} \int_\Gamma b(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) \overline{u(\mathbf{x})}\, dS(\mathbf{x})}{\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|g\|_{H^{2q+1/2}(\Gamma)}^2}, \quad \{u, g\} \in H^{1/2}(\Gamma) \oplus H^{2q+1/2}(\Gamma). \tag{4.8}
$$

В силу леммы 2.9 имеем $\Delta_\theta^\pm$ (4.7) $\leqslant \Delta_\theta^\pm$ (4.8) $\leqslant C \|b\|_{L_r(\Gamma)}^\theta$. $\square$

Леммы 4.1 и 2.5 показывают, что величины $\Delta_\theta^\pm$ (4.7), $\delta_\theta^\pm$ (4.7) являются непрерывными функционалами над $b \in L_r(\Gamma)$. Поэтому вычисление этих величин *достаточно провести для плотного в* $L_r(\Gamma)$ *множества коэффициентов* $b(\mathbf{x})$. В качестве такого множества удобно взять $C_0^\infty(\Gamma)$.

4.3. Сравнение с задачей в гладкой области. *Ниже предполагается, что* $b \in C_0^\infty(\Gamma)$. Действуем аналогично пункту 3.1. Пусть $\widetilde{\Omega}$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ и $\operatorname{supp} b$ лежит строго внутри множества $\partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$. Тогда найдется открытое подмножество $\widetilde{\Gamma}$ границы $\partial\widetilde{\Omega}$, лежащее строго внутри $\partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$, причем $\operatorname{supp} b \subset \widetilde{\Gamma}$. Можно считать, что $\widetilde{\Gamma}$ — m-мерная поверхность с достаточно гладкой границей. Через $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ обозначим единичный вектор внутренней нормали к $\partial\widetilde{\Omega}$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}$. Пусть $\widetilde{b} \in C^\infty(\partial\widetilde{\Omega})$ — функция, равная $b(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \widetilde{\Gamma}$ и равная нулю вне $\widetilde{\Gamma}$.

Пусть $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, — однородный полином по переменным $\boldsymbol{\xi}$ степени $2q$, коэффициенты которого гладко зависят от $\mathbf{x}$, причем $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, и выполнено условие сильной эллиптичности $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\geqslant c|\boldsymbol{\xi}|^{2q}$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, $c>0$. Нетрудно показать, что такое «сильно эллиптическое» продолжение символа $B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ всегда возможно. Через $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ обозначим какое-либо дифференциальное выражение порядка $2q$ на $\partial\widetilde{\Omega}$ с гладкими коэффициентами и главным символом $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$.

Пусть $\mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ — оператор в пространстве $L_2(\partial\widetilde{\Omega})$, заданный выражением $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ на области $H^{2q}(\partial\widetilde{\Omega})$. За счет выбора младших членов выражение $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ можно выбрать так, чтобы оператор $\mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ был самосопряжен и положительно определен. Обратный оператор $\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ есть ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка $(-2q)$. Обозначим $\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]:=\operatorname{Re}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}(\mathbf{x})\big(\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}u\big)(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x})$.

Через $\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}$ обозначим форму $\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]:=\int_{\widetilde{\Omega}}\Big(\sum\limits_{i,j=1}^{m+1}a_{ij}(\mathbf{x})\partial_i u(\mathbf{x})\overline{\partial_j u(\mathbf{x})}+V(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\Big)\,d\mathbf{x}$, $u\in H^1(\widetilde{\Omega})$. Коэффициенты этой формы — те же, что в (4.2) (суженные на $\widetilde{\Omega}$). Наша цель — сравнить отношение (4.7) и отношение

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]}{\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]},\quad u\in H^1(\widetilde{\Omega}).\tag{4.9}$$

Это сравнение проводится в два этапа — они соответствуют леммам 4.2 и 4.3. Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]}{\mathcal{A}_{\Omega}[u]},\quad u\in H^1(\Omega).\tag{4.10}$$

Лемма 4.2. *Справедливы равенства*

$$\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7)=\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.10),\quad \delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7)=\delta^{\pm}_{\theta}\ (4.10),\quad \theta=\frac{m}{2q+1}.\tag{4.11}$$

Доказательство. Рассмотрим отношение

$$\pm\frac{\mathcal{F}[u]}{\mathcal{A}_{\Omega}[u]},\quad u\in H^1(\Omega),\tag{4.12}$$

где $\mathcal{F}[u]:=\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]-\mathcal{B}_{\Gamma}[u]$. В силу леммы 2.4 равенства (4.11) будут установлены, коль скоро мы покажем, что $\Delta^{+}_{\theta}\ (4.12)=\Delta^{-}_{\theta}\ (4.12)=0$. Пусть $u\in H^1(\Omega)$. Обозначим $g=\mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}u$, $f=\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}u$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u]&=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}b(f-g)\overline{B_{\partial\widetilde{\Omega}}f}\,dS=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}B_{\partial\widetilde{\Omega}}(b(f-g))\overline{f}\,dS=\\&=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}b\left(B_{\partial\widetilde{\Omega}}f-B_{\Gamma}g+(B_{\Gamma}-B_{\partial\widetilde{\Omega}})g\right)\overline{f}\,dS+\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}\left(B_{\partial\widetilde{\Omega}}(b(f-g))-bB_{\partial\widetilde{\Omega}}(f-g)\right)\overline{f}\,dS.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Учтем, что: а) $(B_{\partial\widetilde{\Omega}}f)(\mathbf{x})=(B_{\Gamma}g)(\mathbf{x})=u(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$; б) $(B_{\Gamma}-B_{\partial\widetilde{\Omega}})$ на $\widetilde{\Gamma}$ есть дифференциальное выражение порядка $2q-1$, поскольку главные символы B_{Γ} и $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ совпадают при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$ (т. е. $B(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$); в) $(B_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}-\widetilde{b}B_{\partial\widetilde{\Omega}})$ есть дифференциальное выражение порядка $2q-1$. Тогда из (4.13) видно, что форма $\mathcal{F}[u]$ представляется в виде

$$\mathcal{F}[u]=\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}(B'g+B''f)\overline{f}\,dS,\tag{4.14}$$

где B' и B'' — некоторые дифференциальные выражения на $\widetilde{\Gamma}$ порядка $2q-1$ с гладкими коэффициентами.

Используя (4.5), теорему о следах, теорему о гомеоморфизмах для $\mathbf{B}_{\Gamma}$ и свойства непрерывности ПДО в пространствах Соболева на $\partial\widetilde{\Omega}$, заключаем, что

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\Omega}[u]&\geqslant c_a\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\geqslant C_3\left(\|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}+\|u\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}\right)\geqslant C_4\left(\|g\|^2_{H^{2q+1/2}(\Gamma)}+\|f\|^2_{H^{2q+1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}\right)\geqslant\\&\geqslant C_5\left(\|B'g+B''f\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})}+\|f\|^2_{H^{2q+1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}\right),\quad u\in H^1(\Omega).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Обозначим $B'g+B''f=\psi$. Применяя лемму 2.2 и учитывая (4.14) и (4.15), получаем, что величины $\Delta_\theta^\pm$ (4.12) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm C\frac{\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}\psi(\mathbf{x})\overline{f(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x})}{\|\psi\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})}+\|f\|^2_{H^{2q+1/2}(\widetilde{\Gamma})}},\quad \{\psi,f\}\in H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})\oplus H^{2q+1/2}(\widetilde{\Gamma}). \tag{4.16}$$

В силу леммы 2.9 имеем: $N_\pm(\lambda,(4.16))=O(\lambda^{-\frac{m}{2q+2}})$. Следовательно, $\Delta_\theta^\pm$ (4.16) $=0$ при $\theta=\frac{m}{2q+1}$. Тогда и Δ_θ^+ (4.12) $=\Delta_\theta^-$ (4.12) $=0$. □

Сравним теперь отношения (4.10) и (4.9).

Лемма 4.3. *Справедливы неравенства*

$$\delta_\theta^\pm\ (4.9)\leqslant\delta_\theta^\pm\ (4.10)\leqslant\Delta_\theta^\pm\ (4.10)\leqslant\Delta_\theta^\pm\ (4.9),\quad \theta=\frac{m}{2q+1}. \tag{4.17}$$

Доказательство. В силу (4.4) и (4.3) выполнено неравенство $\mathcal{A}_\Omega[u]\geqslant\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]$, $u\in H^1(\Omega)$. Применяя лемму 2.2, в которой $\mathcal{S}:H^1(\Omega)\to H^1(\widetilde{\Omega})$ — оператор сужения, получаем

$$N_\pm(\lambda,(4.10))\leqslant N_\pm(\lambda,(4.9)),\quad \lambda>0. \tag{4.18}$$

Отсюда вытекает правое неравенство в (4.17).

Фиксируем срезку $\vartheta\in C^\infty(\overline{\Omega})$; $0\leqslant\vartheta(\mathbf{x})\leqslant 1$; $\vartheta(\mathbf{x})=1$ при $\mathbf{x}\in\operatorname{supp}b$; $\vartheta(\mathbf{x})=0$ в некоторой окрестности $\Omega\setminus\widetilde{\Omega}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]&\geqslant\varepsilon\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde{\Omega}}\vartheta^2(\mathbf{x})\left(\langle a(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}),\nabla u(\mathbf{x})\rangle+V(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\right)d\mathbf{x}=\\&=\varepsilon\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]+(1-\varepsilon)\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]+(1-\varepsilon)\int_{\widetilde{\Omega}}\left(\vartheta^2\langle a\nabla u,\nabla u\rangle-\langle a\nabla(\vartheta u),\nabla(\vartheta u)\rangle\right)d\mathbf{x},\quad u\in H^1(\widetilde{\Omega}).\end{aligned} \tag{4.19}$$

Сумма первых двух членов в правой части (4.19) определяет в $H^1(\widetilde{\Omega})$ эквивалентную метрику, а последний член — форма, компактная в $H^1(\widetilde{\Omega})$. Далее, используя равенство $\widetilde{b}(\mathbf{x})=\vartheta^2(\mathbf{x})\widetilde{b}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, получаем

$$\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[u]=\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]+\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}(\mathbf{x})\left(\left(\vartheta\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}-\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}\vartheta\right)u\right)(\mathbf{x})\vartheta(\mathbf{x})\overline{u(\mathbf{x})}\,dS(\mathbf{x}). \tag{4.20}$$

Второе слагаемое в правой части (4.20) представляет собой форму ПДО порядка $-(2q+1)$, т. е. является формой младшего порядка. В соответствии с леммами 2.3 и 2.4 величины $\delta_\theta^\pm$ (4.9) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]}{\varepsilon\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u]+(1-\varepsilon)\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]},\quad u\in H^1(\widetilde{\Omega}). \tag{4.21}$$

Для $u\in H^1(\widetilde{\Omega})$ через $\widehat{\mathcal{S}}u$ обозначим функцию, совпадающую с ϑu на $\widetilde{\Omega}$ и равную нулю на $\Omega\setminus\widetilde{\Omega}$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{S}}:H^1(\widetilde{\Omega})\to H^1(\Omega)$ ограничен. Для всех $u\in H^1(\widetilde{\Omega})$, для которых $\pm\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\vartheta u]>0$, отношение (4.21) не превосходит $\pm\dfrac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\widehat{\mathcal{S}}u]}{(1-\varepsilon)\mathcal{A}_\Omega[\widehat{\mathcal{S}}u]}$. Мы находимся в условиях леммы 2.2, в силу которой $\delta_\theta^\pm$ (4.9) $\leqslant(1-\varepsilon)^{-\theta}\delta_\theta^\pm$ (4.10). Устремляя здесь ε к нулю, приходим к левому неравенству в (4.17). □

4.4. Асимптотическая формула в гладком случае. В соответствии с леммами 4.2 и 4.3 справедливы неравенства

$$\delta_\theta^\pm\ (4.9)\leqslant\delta_\theta^\pm\ (4.7)\leqslant\Delta_\theta^\pm\ (4.7)\leqslant\Delta_\theta^\pm\ (4.9),\quad \theta=\frac{m}{2q+1}. \tag{4.22}$$

Установим теперь асимптотическую формулу для $N_\pm(\lambda,(4.9))$.

Лемма 4.4. *Справедливы асимптотические формулы при* $\lambda \to +0$:

$$N_{\pm}(\lambda, (4.9)) \sim \frac{\lambda^{-\theta}}{m(2\pi)^m} \int_{\partial\widetilde{\Omega}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}):\,|\boldsymbol{\xi}|=1} dS(\boldsymbol{\xi}) \left(\widetilde{b}_{\pm}(\mathbf{x}) B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \widetilde{M}^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\right)^{\theta}, \quad \theta = \frac{m}{2q+1}. \tag{4.23}$$

Здесь $\widetilde{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \left(\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle \langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle - \langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle^2\right)^{1/2}$.

Доказательство. Через $H^1(\widetilde{\Omega}, L)$ обозначим подпространство в $H^1(\widetilde{\Omega})$, образованное решениями уравнения $Lu = 0$ в $\widetilde{\Omega}$. Справедливо разложение $H^1(\widetilde{\Omega}) = H^1(\widetilde{\Omega}, L) \oplus^{\mathcal{A}} H^1_0(\widetilde{\Omega})$. Здесь ортогональная сумма понимается в смысле скалярного произведения $\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[u, v]$. Поскольку форма в числителе отношения (4.9) обращается в нуль при $u \in H^1_0(\widetilde{\Omega})$, то ненулевой спектр отношения (4.9) не изменится, если рассматривать это отношение на $H^1(\widetilde{\Omega}, L)$.

Пусть G — «оператор Пуассона», сопоставляющий функции $\varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ решение соответствующей задачи Дирихле для уравнения $Lu = 0$: равенство $u = G\varphi$ означает, что $u \in H^1(\widetilde{\Omega}, L)$, $u|_{\partial\widetilde{\Omega}} = \varphi$. Оператор G устанавливает гомеоморфизм пространств $H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})$ и $H^1(\widetilde{\Omega}, L)$. Задача о спектре отношения (4.9) эквивалентна задаче о спектре отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\varphi]}{\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[G\varphi]}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{4.24}$$

Из свойств алгебры Буте де Монвеля [35, 38] следует, что справедливо представление

$$\mathcal{A}_{\widetilde{\Omega}}[G\varphi] = (\mathcal{P}\varphi, \varphi), \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}), \tag{4.25}$$

где $\mathcal{P}$ — классический ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 1. Вычислим старший символ оператора $\mathcal{P}$, используя рецепт из [11]. Старший символ оператора L есть $L^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta}) = a(\mathbf{x})\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta} = \sum\limits_{j,l=1}^{m+1} a_{jl}(\mathbf{x})\eta_j\eta_l$. Для каждой пары $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, надо рассмотреть обыкновенное дифференциальное уравнение $L^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})D_t)f(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}_+$. Это уравнение принимает вид

$$-\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle \frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 2i\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle \frac{df(t)}{dt} + \langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}\rangle f(t) = 0.$$

Пусть $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ — пространство решений этого уравнения, исчезающих при $t \to +\infty$. Это пространство одномерно, выберем базисную функцию $Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; t)$ в нем из условия $Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; 0) = 1$. Тогда $Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; t) = e^{\kappa(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})t}$, $\kappa(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\dfrac{\widetilde{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) + i\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle}{\langle a(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle}$. Старший символ $p^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ПДО $\mathcal{P}$ вычисляется по правилу

$$p^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{m+1} \int_0^\infty a_{ij}(\mathbf{x})(\xi_i + \nu_i(\mathbf{x})D_t)Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; t)(\xi_j - \nu_j(\mathbf{x})D_t)\overline{Y(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}; t)}\, dt.$$

Вычисление показывает, что

$$p^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \widetilde{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}, \quad \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \tag{4.26}$$

Очевидно, $\mathcal{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}[\varphi] = (\mathcal{Q}\varphi, \varphi)$, где $\mathcal{Q}$ — ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка $(-2q)$ с главным символом

$$q^\circ(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \widetilde{b}(\mathbf{x}) B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega}, \quad \boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \tag{4.27}$$

Таким образом, отношение (4.24) совпадает с отношением ПДФ

$$\pm\frac{(\mathcal{Q}\varphi, \varphi)}{(\mathcal{P}\varphi, \varphi)}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega}). \tag{4.28}$$

Мы установили, что

$$N_{\pm}(\lambda, (4.9)) = N_{\pm}(\lambda, (4.24)) = N_{\pm}(\lambda, (4.28)), \quad \lambda > 0. \tag{4.29}$$

В силу леммы 2.10 для функций распределения спектра отношения (4.28) при $\lambda \to +0$ справедливы асимптотические формулы

$$N_{\pm}(\lambda, (4.28)) \sim (2\pi)^{-m} \int_{\partial\widetilde{\Omega}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_{\pm}(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (4.31)), \tag{4.30}$$

где $n_{\pm}(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (4.31))$ — функции распределения спектра отношения (одномерных) форм

$$\pm\frac{q^{\circ}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}{p^{\circ}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.31}$$

С учетом (4.26), (4.27) получаем

$$n_{\pm}(\lambda, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi};\ (4.31)) = \begin{cases} 1, & \lambda < \widetilde{b}_{\pm}(\mathbf{x}) B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \widetilde{M}^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \\ 0, & \lambda \geqslant \widetilde{b}_{\pm}(\mathbf{x}) B^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \widetilde{M}^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \end{cases} \tag{4.32}$$

Теперь, вычисляя асимптотику функций $N_{\pm}(\lambda, (4.28))$ по формулам (4.30), (4.32) и учитывая (4.29), приходим к искомому результату (4.23). □

Завершение доказательства теоремы 4.1. Из (4.22) и (4.23), учитывая, что $\widetilde{b}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} b = \operatorname{supp} \widetilde{b} \subset \Gamma$ и $B_{\partial\widetilde{\Omega}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, $\widetilde{M}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ при $\mathbf{x} \in \operatorname{supp} b$, $\boldsymbol{\xi} \perp \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\Delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7) = \delta^{\pm}_{\theta}\ (4.7) = \frac{1}{m(2\pi)^m} \int\limits_{\Gamma} dS(\mathbf{x}) \int\limits_{\boldsymbol{\xi}\perp\mathbf{n}(\mathbf{x}):\, |\boldsymbol{\xi}|=1} dS(\boldsymbol{\xi})\ \left(b_{\pm}(\mathbf{x}) B^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) M^{-1}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\right)^{\theta}, \quad \theta = \frac{m}{2q+1},$$

при всяком $b \in C_0^{\infty}(\Gamma)$. По замыканию эта формула верна при $b \in L_r(\Gamma)$; см. пункт 4.2. Это завершает доказательство теоремы 4.1. □

4.5. Применение результата к исследованию спектра малых колебаний капиллярной идеальной жидкости. Применение теоремы 4.1 позволяет решить задачу об асимптотике спектра малых колебаний капиллярной идеальной жидкости (см. [3, 20], а также [21, гл. 4, §1]). В этом случае $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (см. рис. 1) имеет смысл области, которую занимает жидкость, находящаяся в сосуде в положении равновесия; Γ — равновесная свободная поверхность жидкости; $S = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$ — твердая стенка сосуда; $\gamma = \partial\Gamma$ — линия смачивания. Приведем вначале классическую постановку задачи. При этом будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 4.1. Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^3$ *с кусочно-гладкой границей* $\partial\Omega = \overline{\Gamma} \cup \overline{S}$, *где* Γ *и* S — *гладкие двумерные поверхности, при пересечении образующие гладкое одномерное ребро* γ, *причем внутренний угол при ребре больше нуля и меньше* 2π (Γ, S *и* γ *не обязательно связны*).

Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x} \in S$, $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к Γ в точке $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Γ) нормали к γ, лежащий в плоскости, касательной к Γ в точке $\mathbf{x} \in \gamma$. Отметим, что после перехода к вариационной постановке задачи требование гладкости S может быть снято (см. ниже условие 4.2).

Пусть заданы постоянная $\sigma > 0$ и вещественные функции $h \in C^{\infty}(\overline{\Gamma})$, $\chi \in C^{\infty}(\gamma)$. Здесь σ имеет смысл коэффициента поверхностного натяжения (см. [3]), функция h связана с нормальной производной потенциала массовых сил и с главными кривизнами поверхности Γ. Предполагается выполненным неравенство

$$\begin{gathered} \int_{\Gamma} \left(\sigma|\nabla_{\Gamma} u(\mathbf{x})|^2 + h(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\right)\, dS(\mathbf{x}) + \int_{\gamma} \sigma\chi(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2\, d\gamma \geqslant c \int_{\Gamma} |u(\mathbf{x})|^2\, dS(\mathbf{x}), \\ u \in H^1(\Gamma), \quad \int_{\Gamma} u(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0; \quad c > 0. \end{gathered} \tag{4.33}$$

Условие (4.33) накладывает ограничение на данные задачи. Физически оно означает, что положение равновесия жидкости устойчиво. Обозначим $L_2(\Gamma) \ominus \{1\} := \left\{u \in L_2(\Gamma) : \int_{\Gamma} u\, dS = 0\right\}$. Пусть P — ортопроектор пространства $L_2(\Gamma)$ на $L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$. Квадратичной форме, стоящей в левой части неравенства (4.33), отвечает самосопряженный положительно определенный оператор $\mathfrak{B}_{\Gamma}$ в пространстве $L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$. Оператор $\mathfrak{B}_{\Gamma}$ носит название оператора потенциальной энергии. Пусть

Δ_Γ — оператор Лапласа—Бельтрами на Γ. Тогда $\mathfrak{B}_\Gamma$ задается выражением $P(-\sigma\Delta_\Gamma+h)$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathfrak{B}_\Gamma = \Big\{u \in H^2(\Gamma) : \frac{\partial u}{\partial l} + \chi u = 0$ на $\gamma,\ \int_\Gamma u\,dS = 0\Big\}$. На $L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$ определен компактный оператор $\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}$, который является разрешающим оператором соответствующей краевой задачи на Γ.

Задача о нормальных колебаниях капиллярной идеальной жидкости сводится (см. [3, гл. 4, §2]) к краевой задаче на собственные значения:

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S,\\ &P(-\sigma\Delta_\Gamma + h)\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \lambda^{-1}\Phi \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0,\\ &\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right) + \chi\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \gamma. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Здесь $\Phi(\mathbf{x})$ имеет смысл амплитуды колебаний потенциала $\Phi(\mathbf{x},t)$ поля скоростей частиц жидкости: $\Phi(\mathbf{x},t) = \Phi(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\omega^{-1} = \sqrt{\lambda}$, t — время. Уравнение Лапласа — уравнение неразрывности, условие на S — условие непротекания, третье краевое условие на γ — линеаризованное условие сохранения угла смачивания в процессе движения.

Краевая задача (4.34) эквивалентна (см. [3, гл. 4, §5]) задаче о нахождении последовательных максимумов отношения квадратичных форм

$$\frac{\int_\Gamma(\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega|\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi\in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0. \tag{4.35}$$

При этом уравнение Лапласа в Ω и условие на S являются естественными условиями в вариационной задаче о спектре отношения (4.35). Отношение (4.35) рассмотрим при следующем условии.

Условие 4.2. *Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, $\Omega\in\mathcal{K}$; Γ — гладкая двумерная поверхность с гладким одномерным краем γ, причем $\overline{\Gamma}\subset\partial\Omega$.*

Предложение 4.1. *Пусть выполнено условие* 4.2. *Пусть $\sigma > 0$ и вещественные функции $h\in C^\infty(\overline{\Gamma})$, $\chi\in C^\infty(\gamma)$ таковы, что выполнено неравенство* (4.33). *Тогда для функции распределения спектра отношения* (4.35) *при $\lambda\to+0$ справедлива асимптотика*

$$N(\lambda,(4.35)) \sim \lambda^{-2/3}\frac{\operatorname{mes}\Gamma}{4\pi\sigma^{2/3}}. \tag{4.36}$$

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma = \mathfrak{B}_\Gamma + CI$ — оператор в пространстве $L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$, заданный выражением $P(-\sigma\Delta_\Gamma + h + C)$ на области $\operatorname{Dom}\mathfrak{B}_\Gamma$. Пусть $\mathbf{B}_\Gamma$ — оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выражением $-\sigma\Delta_\Gamma + h + C$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma = \Big\{u\in H^2(\Gamma) : \frac{\partial u}{\partial l} + \chi u = 0$ на $\gamma\Big\}$. Мы считаем, что постоянная C настолько велика, что оператор $\mathbf{B}_\Gamma$ положительно определен. В силу тождества Гильберта $\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1} = (I+K)\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}$, где $K = -C\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}$ — компактный самосопряженный оператор в $L_2(\Gamma)\ominus\{1\}$, причем K коммутирует с $\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}$. Отсюда и из леммы 2.4 следует, что величины $\Delta_{2/3}$ (4.35), $\delta_{2/3}$ (4.35) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\frac{\int_\Gamma(\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega|\nabla\Phi|^2\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi\in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\,dS = 0. \tag{4.37}$$

В силу леммы 2.6 главный член асимптотики спектра отношения (4.37) не изменится, если рассмотреть это отношение на подпространстве конечной коразмерности в $\mathfrak{H} = \{\Phi\in H^1(\Omega) : \int_\Gamma\Phi\,dS = 0\}$, а именно, на подпространстве $\mathfrak{G} := \Big\{\Phi\in H^1(\Omega) : \int_\Gamma\Phi\,dS = 0,\ \int_\Gamma \mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi\,dS = 0\Big\}$. Отметим, что $\widetilde{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}\Phi = \mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi$ при $\Phi\in\mathfrak{G}$. Далее, применяя лемму 2.3, получаем, что величины $\Delta_{2/3}$ (4.37), $\delta_{2/3}$ (4.37) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\frac{\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega\left(|\nabla\Phi|^2 + |\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}}, \quad \Phi\in\mathfrak{G}. \tag{4.38}$$

Наконец, в силу леммы 2.6 главный член асимптотики спектра не изменится, если заменить (4.38) на отношение

$$\frac{\int_\Gamma (\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\, dS}{\int_\Omega (|\nabla\Phi|^2 + |\Phi|^2)\, d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega). \tag{4.39}$$

Применяя для отношения (4.39) теорему 4.1 и учитывая, что в данном случае $b(\mathbf{x}) = 1$, $B(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sigma|\boldsymbol{\xi}|^2$ и $M(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|$, приходим к асимптотической формуле (4.36). $\square$

4.6. Малые колебания капиллярной стратифицированной жидкости. Теорема 4.1 позволяет также решить задачу об асимптотике спектра малых колебаний капиллярной стратифицированной жидкости. В классической постановке предполагаем выполненным условие 4.1. Постоянная σ и функции h, χ удовлетворяют прежним условиям. Пусть, кроме того, задана положительная функция $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$, которая имеет смысл плотности жидкости.

Задача о малых колебаниях капиллярной стратифицированной жидкости сводится к краевой задаче на собственные значения:

$$\begin{gathered}
\operatorname{div}\left(\rho^{-1}\nabla\Phi\right) = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S, \\
P(-\sigma\Delta_\Gamma + h)\Big(\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) = \lambda^{-1}\Phi \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \Phi\, dS = 0, \\
\frac{\partial}{\partial l}\Big(\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) + \chi\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \text{ на } \gamma.
\end{gathered} \tag{4.40}$$

Краевая задача (4.40) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\frac{\int_\Gamma (\mathfrak{B}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\, dS}{\int_\Omega \rho^{-1}|\nabla\Phi|^2\, d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\, dS = 0, \tag{4.41}$$

где оператор $\mathfrak{B}_\Gamma$ определен так же, как в пункте 4.5. Вариационную задачу рассматриваем уже при условии 4.2.

По аналогии с доказательством предложения 4.1 из теоремы 4.1 легко вывести следующее утверждение.

Предложение 4.2. *Пусть выполнено условие* 4.2. *Пусть* $\sigma > 0$ *и вещественные функции* $h \in C^\infty(\overline{\Gamma})$, $\chi \in C^\infty(\gamma)$ *таковы, что выполнено неравенство* (4.33). *Пусть* $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\rho(\mathbf{x}) > 0$. *Тогда для функции распределения спектра отношения* (4.41) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика* $N(\lambda, (4.41)) \sim \lambda^{-2/3}\frac{1}{4\pi\sigma^{2/3}}\int_\Gamma \rho^{2/3}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x})$.

4.7. Вспомогательная задача теории гидроупругости. Теорема 4.1 находит применение и в теории гидроупругости. В этом случае Γ имеет смысл упругого днища сосуда. Следующая вспомогательная задача гидроупругости отвечает колебаниям системы в случае, когда упругое днище имеет нулевую массу:

$$\begin{gathered}
\Delta\Phi = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n_0} = 0 \ \text{ на } S, \\
P\Big(D\rho^{-1}\Delta_\Gamma^2\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) = \lambda^{-1}\Phi \ \text{ на } \Gamma, \quad \int_\Gamma \Phi\, dS = 0, \\
\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial l}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big) = 0 \ \text{ на } \gamma.
\end{gathered} \tag{4.42}$$

Здесь Δ_Γ^2 — бигармонический оператор на Γ, условия на γ имеют смысл условий жесткого закрепления. Постоянная $D > 0$ — коэффициент упругости, постоянная $\rho > 0$ — плотность жидкости[1].

Через $\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma$ обозначим оператор в $L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$, заданный выражением $PD\rho^{-1}\Delta_\Gamma^2$ на области определения $\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma = H^4(\Gamma) \cap H_0^2(\Gamma) \cap (L_2(\Gamma) \ominus \{1\})$. Оператор $\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. Краевой задаче (4.42) отвечает вариационная задача о спектре отношения квадратичных форм

$$\frac{\int_\Gamma (\widehat{\mathfrak{B}}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\, dS}{\int_\Omega |\nabla\Phi|^2\, d\mathbf{x}}, \quad \Phi \in H^1(\Omega), \quad \int_\Gamma \Phi\, dS = 0. \tag{4.43}$$

[1]Краевые задачи, в которых порядок оператора в граничном условии выше, чем порядок уравнения в области, обсуждались, например, в [23].

Предложение 4.3. *Пусть выполнено условие* 4.2. *Пусть $D > 0$ и $\rho > 0$. Тогда для функции распределения спектра отношения* (4.43) *при $\lambda \to +0$ справедлива асимптотика*

$$N(\lambda, (4.43)) \sim \lambda^{-2/5}\Big(\frac{\rho}{D}\Big)^{2/5}\frac{\operatorname{mes}\Gamma}{4\pi}. \tag{4.44}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma$ — оператор в $L_2(\Gamma)$, заданный выражением $D\rho^{-1}\Delta_\Gamma^2$ на области определения $\operatorname{Dom}\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma = H^4(\Gamma)\cap H_0^2(\Gamma)$. Оператор $\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma$ самосопряжен и положительно определен. Нетрудно показать, что главный член асимптотики спектра не изменится, если заменить отношение (4.43) на отношение

$$\frac{\int_\Gamma(\widehat{\mathbf{B}}_\Gamma^{-1}\Phi)\overline{\Phi}\,dS}{\int_\Omega\left(|\nabla\Phi|^2+|\Phi|^2\right)\,d\mathbf{x}},\quad \Phi\in H^1(\Omega). \tag{4.45}$$

Применяя теорему 4.1 к отношению (4.45), приходим к асимптотической формуле (4.44). □

4.8. Колебания системы капиллярных идеальных жидкостей. Асимптотические формулы спектра, полученные выше для задач о малых колебаниях одной жидкости, частично заполняющей сосуд, допускают обобщение на случай колебаний системы из несмешивающихся жидкостей, полностью или частично заполняющих сосуд. Рассмотрим в качестве примера задачу о колебаниях системы капиллярных идеальных жидкостей, полностью заполняющих сосуд (см. рис. 2).

Условие 4.3. *Ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ разделена на $(k+1)$ частей Ω_j, $j=1,\dots,k+1$, причем выполнено* (3.18). *Поверхности $\overline{\Gamma_j}$, $j=1,\dots,k$, определены в* (3.19). *Предполагается, что Γ_i, $i=1,\dots,k$, — гладкие двумерные поверхности с гладкими одномерными краями $\gamma_i=\partial\Gamma_i$, S — гладкая двумерная поверхность, углы между Γ_i и S больше нуля и меньше 2π. При этом S, Γ_i, γ_i не обязательно связны.*

Как и в случае одной жидкости, требование гладкости S может быть ослаблено после перехода к вариационной постановке задачи. Пусть $\mathbf{n}_0(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к S в точке $\mathbf{x}\in S$; $\mathbf{n}_j(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Ω_j) нормали к Γ_j в точке $\mathbf{x}\in\Gamma_j$; $\mathbf{l}_j(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней (по отношению к Γ_j) нормали к γ_j в точке $\mathbf{x}\in\gamma_j$, лежащий в плоскости, касательной к Γ_j в точке $\mathbf{x}$.

Задача о нормальных колебаниях системы капиллярных идеальных жидкостей (см. [3, гл. 4, §6]) формулируется для системы функций $\{\Phi_j(\mathbf{x})\}$, $j=1,\dots,k+1$, где Φ_j — функция в Ω_j:

$$\begin{aligned}
&\Delta\Phi_j=0\ \text{ в } \Omega_j,\quad \frac{\partial\Phi_j}{\partial n_0}=0\ \text{ на } S_j,\quad j=1,\dots,k+1,\\
&\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}=\frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial n_j}\ \text{ на } \Gamma_j,\quad j=1,\dots,k,\\
&P_j\left(-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j}+h_j\right)\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}=\lambda^{-1}\left(\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right)\ \text{ на } \Gamma_j,\quad j=1,\dots,k,\\
&\frac{\partial}{\partial l_j}\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}+\chi_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial n_j}=0\ \text{ на } \gamma_j,\quad j=1,\dots,k,\\
&\int_{\Gamma_j}\left(\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1}\right)dS=0,\quad j=1,\dots,k;\quad \sum_{j=1}^{k+1}\int_{\Omega_j}\rho_j^{-1}\Phi_j\,d\mathbf{x}=0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Здесь $\sigma_j>0$ — постоянные, $h_j\in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$, $\chi_j\in C^\infty(\gamma_j)$ — вещественнозначные функции. Постоянные $\rho_j>0$ имеют смысл плотностей жидкостей. Оператор P_j — ортопроектор пространства $L_2(\Gamma_j)$ на $L_2(\Gamma_j)\ominus\{1\}$. Через $\mathfrak{B}_j$ обозначим самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Gamma_j)\ominus\{1\}$, заданный выражением $P_j(-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j}+h_j)$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathfrak{B}_j=\left\{u\in H^2(\Gamma_j):\frac{\partial u}{\partial l_j}+\chi_j u=0\right.$ на γ_j, $\left.\int_{\Gamma_j}u\,dS=0\right\}$. Предполагается, что операторы $\mathfrak{B}_j$ положительно определены при всех $j=1,\dots,k$ (ср. (4.33)). Тогда на $L_2(\Gamma_j)\ominus\{1\}$ определены компактные операторы $\mathfrak{B}_j^{-1}$.

Задача (4.46) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}(\mathfrak{B}_j^{-1}\Psi_j)\overline{\Psi_j}\,dS}{\sum\limits_{j=1}^{k+1}\rho_j\int_{\Omega_j}|\nabla\Phi_j|^2\,d\mathbf{x}},\quad \Phi_j\in H^1(\Omega_j),\quad j=1,\dots,k+1;$$
$$\Psi_j:=\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1},\quad \int_{\Gamma_j}\Psi_j\,dS=0,\quad j=1,\dots k;\quad \sum_{j=1}^{k+1}\int_{\Omega_j}\rho_j^{-1}\Phi_j\,d\mathbf{x}=0. \tag{4.47}$$

Вариационную задачу рассмотрим при следующем условии.

Условие 4.4. *Ограниченная область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ разделена гладкими двумерными поверхностями $\Gamma_1,\dots,\Gamma_k$ на $(k+1)$ непересекающихся областей $\Omega_1,\dots,\Omega_{k+1}$. При этом выполнены соотношения* (3.18), (3.19). *Предполагается, что $\Omega_j\in\mathcal{K}$, $j=1,\dots,k+1$, а Γ_j, $j=1,\dots,k$, — гладкие двумерные поверхности с гладкими краями $\gamma_j=\partial\Gamma_j$.*

Предложение 4.4. *При сделанных предположениях для функции распределения спектра отношения* (4.47) *при $\lambda\to+0$ справедлива асимптотика*

$$N(\lambda,(4.47))\sim\lambda^{-2/3}\sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{\rho_j+\rho_{j+1}}{\sigma_j}\Big)^{2/3}\frac{\operatorname{mes}\Gamma_j}{4\pi}.$$

Через $\mathbf{B}_{\Gamma_j}$ обозначим самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\Gamma_j)$, заданный выражением $B_{\Gamma_j}=-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j}+h_j(\mathbf{x})+C_j$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_{\Gamma_j}=\big\{u\in H^2(\Gamma_j):\frac{\partial u}{\partial l_j}+\chi_j u=0 \text{ на } \gamma_j\big\}$. Постоянные $C_j>0$ настолько велики, что операторы $\mathbf{B}_{\Gamma_j}$ положительно определены при всех $j=1,\dots,k$. Для $\Phi=\{\Phi_j\}_{1\leqslant j\leqslant k+1}\in\sum\limits_{j=1}^{k+1}\oplus H^1(\Omega_j)$ положим

$$\mathcal{B}[\Phi]:=\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Re}\int_{\Gamma_j}b_j(\mathbf{x})\big(\mathbf{B}_{\Gamma_j}^{-1}\Psi_j\big)\overline{\Psi_j}dS,\quad \Psi_j:=\rho_j\Phi_j-\rho_{j+1}\Phi_{j+1},\quad \mathcal{A}[\Phi]:=\sum_{j=1}^{k+1}\rho_j\int_{\Omega_j}\big(|\nabla\Phi_j|^2+|\Phi_j|^2\big)d\mathbf{x}.$$

Здесь $b_j(\mathbf{x})$ — вещественнозначные функции на Γ_j, причем $b_j\in L_{4/3}(\Gamma_j)$, $j=1,\dots,k$.

По аналогии с рассуждениями из доказательства предложения 4.1 легко убедиться, что величины $\Delta_{2/3}$ (4.47), $\delta_{2/3}$ (4.47) совпадают при $b_j=1$ $(j=1,\dots,k)$ с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}[\Phi]}{\mathcal{A}[\Phi]},\quad \Phi\in\sum_{j=1}^{k+1}\oplus H^1(\Omega_j). \tag{4.48}$$

Предложение 4.4 теперь следует из следующего утверждения.

Предложение 4.5. *Пусть выполнены условия предложения* 4.4. *Пусть $b_j(\mathbf{x})$ — вещественные функции на Γ_j, причем $b_j\in L_{4/3}(\Gamma_j)$. Тогда для функций распределения спектра отношения* (4.48) *при $\lambda\to+0$ справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda,(4.48))\sim\frac{\lambda^{-2/3}}{4\pi}\sum_{j=1}^{k}\Big(\frac{\rho_j+\rho_{j+1}}{\sigma_j}\Big)^{2/3}\int_{\Gamma_j}(b_j)_\pm^{2/3}dS.$$

Замечание 4.1. Можно было бы установить обобщение теоремы 4.1 на случай составных областей, и тогда предложение 4.5 было бы частным случаем. Мы ограничимся обсуждением предложения 4.5, чтобы не вдаваться в детали общей постановки задачи.

Доказательство предложения 4.5 получается на том же пути, что и доказательство теоремы 4.1. Наметим основные этапы, опуская детали (подробности доказательства можно найти в [29]). По аналогии с доказательством леммы 4.1 нетрудно установить оценки спектра: $\Delta_{2/3}^{\pm}$ (4.48) $\leqslant C\sum\limits_{j=1}^{k}\|b_j\|_{L_{4/3}(\Gamma_j)}^{2/3}$. Вместе с леммой 2.5 это позволяет при вычислении асимптотики спектра отношения (4.48) ограничиться случаем, когда $b_j\in C_0^\infty(\Gamma_j)$, $j=1,\dots,k$.

Далее, в случае гладких финитных коэффициентов b_j проводится сравнение отношения (4.48) с аналогичными отношениями форм, заданными в гладких областях. Пусть $\Omega_j^{\pm}$, $j = 1, \ldots, k$ — непересекающиеся области в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей такие, что $\Omega_j^- \subset \Omega_j$, $\Omega_j^+ \subset \Omega_{j+1}$, и $\operatorname{supp} b_j$ лежит строго внутри множества $\partial\Omega_j^- \cap \partial\Omega_j^+$, $j = 1, \ldots, k$. Тогда найдутся открытые множества $\widetilde{\Gamma}_j \subset \partial\Omega_j^- \cap \partial\Omega_j^+$ такие, что $\operatorname{supp} b_j \subset \widetilde{\Gamma}_j$. Можно считать, что $\widetilde{\Gamma}_j$ — двумерные поверхности с гладкой границей.

Пусть $h_j^{\pm}(\mathbf{x})$ — гладкие положительные функции на $\partial\Omega_j^{\pm}$. Рассмотрим операторы $\mathbf{B}_{\partial\Omega_j^{\pm}}$, заданные выражениями $B_{\partial\Omega_j^{\pm}} = -\sigma_j \Delta_{\partial\Omega_j^{\pm}} + h_j^{\pm}$ на областях определения $\operatorname{Dom} \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^{\pm}} = H^2(\partial\Omega_j^{\pm})$, $j = 1, \ldots, k$. Обратные операторы $\mathbf{B}_{\partial\Omega_j^{\pm}}^{-1}$ являются ПДО на $\partial\Omega_j^{\pm}$ порядка (-2). Для $\widehat{\Phi} = \{\Phi_j^-, \Phi_j^+\}_{1 \leqslant j \leqslant k} \in \sum\limits_{j=1}^{k} \oplus \Big(H^1(\Omega_j^-) \oplus H^1(\Omega_j^+) \Big) =: \widehat{H}$ положим

$$\widehat{\mathcal{B}}[\widehat{\Phi}] := \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Re} \int_{\widetilde{\Gamma}_j} b_j(\mathbf{x}) \big(\rho_j \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^-}^{-1} \Phi_j^- - \rho_{j+1} \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^+}^{-1} \Phi_j^+ \big) \big(\rho_j \overline{\Phi_j^-} - \rho_{j+1} \overline{\Phi_j^+} \big) \, dS,$$

$$\widehat{\mathcal{A}}[\widehat{\Phi}] := \sum_{j=1}^{k} \left(\rho_j \int_{\Omega_j^-} \big(|\nabla \Phi_j^-|^2 + |\Phi_j^-|^2 \big) \, d\mathbf{x} + \rho_{j+1} \int_{\Omega_j^+} \big(|\nabla \Phi_j^+|^2 + |\Phi_j^+|^2 \big) \, d\mathbf{x} \right).$$

Рассмотрим отношение форм

$$\pm \frac{\widehat{\mathcal{B}}[\widehat{\Phi}]}{\widehat{\mathcal{A}}[\widehat{\Phi}]}, \quad \widehat{\Phi} \in \widehat{H}. \tag{4.49}$$

По аналогии с доказательствами леммы 4.2 и леммы 4.3 можно проверить, что выполнены неравенства $\delta_{2/3}^{\pm}$ (4.49) $\leqslant \delta_{2/3}^{\pm}$ (4.48) $\leqslant \Delta_{2/3}^{\pm}$ (4.48) $\leqslant \Delta_{2/3}^{\pm}$ (4.49).

Остается установить асимптотику спектра для отношения (4.49). Ясно, что задача распадается в ортогональную сумму k независимых задач о спектре отношений

$$\pm \frac{\widehat{\mathcal{B}}_j[\widehat{\Phi}_j]}{\widehat{\mathcal{A}}_j[\widehat{\Phi}_j]}, \quad \widehat{\Phi}_j = \{\Phi_j^-, \Phi_j^+\} \in \widehat{H}_j = H^1(\Omega_j^-) \oplus H^1(\Omega_j^+), \tag{4.50}$$

где

$$\widehat{\mathcal{B}}_j[\widehat{\Phi}_j] := \operatorname{Re} \int_{\widetilde{\Gamma}_j} b_j(\mathbf{x}) \big(\rho_j \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^-}^{-1} \Phi_j^- - \rho_{j+1} \mathbf{B}_{\partial\Omega_j^+}^{-1} \Phi_j^+ \big) \big(\rho_j \overline{\Phi_j^-} - \rho_{j+1} \overline{\Phi_j^+} \big) \, dS,$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_j[\widehat{\Phi}_j] := \rho_j \int_{\Omega_j^-} \big(|\nabla \Phi_j^-|^2 + |\Phi_j^-|^2 \big) \, d\mathbf{x} + \rho_{j+1} \int_{\Omega_j^+} \big(|\nabla \Phi_j^+|^2 + |\Phi_j^+|^2 \big) \, d\mathbf{x}.$$

Ясно, что ненулевой спектр отношения (4.50) не изменится, если рассматривать это отношение на подпространстве $\widehat{H}_j(L_0) := H^1(\Omega_j^-, L_0) \oplus H^1(\Omega_j^+, L_0)$, где $H^1(\Omega_j^{\pm}, L_0) := \{u \in H^1(\Omega_j^{\pm}) : L_0 u = -\Delta u + u = 0\}$. Через $G_j^{\pm} : H^{1/2}(\partial\Omega_j^{\pm}) \to H^1(\Omega_j^{\pm}, L_0)$ обозначим оператор Пуассона, решающий соответствующую задачу Дирихле в $\Omega_j^{\pm}$ (ср. с определением оператора G в пункте 4.4). Полагая $\Phi_j^{\pm} = G_j^{\pm} \varphi_j^{\pm}$ и пользуясь свойствами алгебры Буте де Монвеля, получаем представление $\widehat{\mathcal{A}}_j[\widehat{\Phi}_j] = \widehat{\mathcal{A}}_j[G_j^- \varphi_j^- \oplus G_j^+ \varphi_j^+] = \rho_j (\mathcal{P}_j^- \varphi_j^-, \varphi_j^-)_{L_2(\partial\Omega_j^-)} + \rho_{j+1} (\mathcal{P}_j^+ \varphi_j^+, \varphi_j^+)_{L_2(\partial\Omega_j^+)}$, $\varphi_j^{\pm} \in H^{1/2}(\partial\Omega_j^{\pm})$. Здесь $\mathcal{P}_j^{\pm}$ — положительно определенные ПДО на $\partial\Omega_j^{\pm}$ первого порядка.

После замены $\psi_j^- = \rho_j^{1/2} (\mathcal{P}_j^-)^{1/2} \varphi_j^-$, $\psi_j^+ = \rho_{j+1}^{1/2} (\mathcal{P}_j^+)^{1/2} \varphi_j^+$ получаем, что задача о спектре отношения (4.50) эквивалентна задаче о спектре отношения

$$\pm \frac{\mathcal{T}_j[\psi_j]}{\|\psi_j^-\|_{L_2(\partial\Omega_j^-)}^2 + \|\psi_j^+\|_{L_2(\partial\Omega_j^+)}^2} \quad \psi_j = \{\psi_j^-, \psi_j^+\} \in L_2(\partial\Omega_j^-) \oplus L_2(\partial\Omega_j^+), \tag{4.51}$$

где

$$\mathcal{T}_j[\psi_j] := \mathrm{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}_j} b_j \left(\rho_j^{1/2}\mathbf{B}^{-1}_{\partial\Omega_j^-}(\mathcal{P}_j^-)^{-1/2}\psi_j^- - \rho_{j+1}^{1/2}\mathbf{B}^{-1}_{\partial\Omega_j^+}(\mathcal{P}_j^+)^{-1/2}\psi_j^+\right)\times$$
$$\times\left(\rho_j^{1/2}\overline{(\mathcal{P}_j^-)^{-1/2}\psi_j^-} - \rho_{j+1}^{1/2}\overline{(\mathcal{P}_j^+)^{-1/2}\psi_j^+}\right)dS.$$

Задача о спектре отношения (4.51) сводится[1] к задаче о спектре матричного ПДО порядка $(-3/2)$ на $\partial\Omega_j^-\cap\partial\Omega_j^+$. Поэтому асимптотика спектра отношения (4.51) вытекает из результатов работ [8, 10]. Это завершает доказательство предложения 4.5.

Замечание 4.2. Тем же способом можно получить результат об асимптотике спектра малых колебаний системы капиллярных идеальных жидкостей в случае, когда сосуд заполнен частично, а также в случае, когда ρ_j — положительные гладкие функции в Ω_j (а не постоянные).

5. Асимптотика спектра малых колебаний тяжелой вязкой жидкости

В этом и следующем разделах мы изучаем задачи, связанные с колебаниями вязкой жидкости; по поводу постановок задач см. [3, 18–20].

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — область, которую занимает жидкость, находящаяся в сосуде в положении равновесия. Задачи ставятся для вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, имеющей смысл поля скоростей частиц жидкости, и скалярной функции $p(\mathbf{x})$, имеющей смысл давления. Постановки даются как в виде краевых задач на собственные значения в области Ω, так и в виде вариационных задач о спектре отношения квадратичных форм. Функции $\mathbf{u}$ и p удовлетворяют однородной эллиптической в обобщенном смысле системе — системе Стокса; спектральный параметр входит в граничное условие на свободной поверхности Γ.

5.1. Постановка задачи и формулировка результата для тяжелой вязкой жидкости. Пусть Ω удовлетворяет условию 4.1. (После перехода к вариационной постановке задачи условия гладкости на S и γ будут ослаблены.) Пусть задана постоянная $\mu>0$, имеющая смысл коэффициента вязкости. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}] := \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)\Big(\frac{\partial\overline{v_i}}{\partial x_j}+\frac{\partial\overline{v_j}}{\partial x_i}\Big)\,d\mathbf{x},\quad \mathbf{u},\mathbf{v}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3).$$

Отметим, что $\rho\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$ имеет смысл скорости диссипации энергии во всем объеме жидкости.

Пусть $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $\mathbf{x}$. Через $u_n(\mathbf{x})$ обозначим нормальную компоненту вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на границе: $u_n(\mathbf{x})=\langle\mathbf{u}(\mathbf{x}),\mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle$, $\mathbf{x}\in\partial\Omega$. Через $\tau(\mathbf{x})=\tau(\mathbf{u}(\mathbf{x}),p(\mathbf{x}))$ обозначим тензор напряжений в жидкости: $\tau_{ik}(\mathbf{x})=\tau_{ik}(\mathbf{u}(\mathbf{x}),p(\mathbf{x})):= -p(\mathbf{x})\delta_{ik}+\mu\Big(\frac{\partial u_i(\mathbf{x})}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_i}\Big)$, $i,k=1,2,3$. Далее, на Γ определим векторное поле $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x})$ с координатами $\tau_{in}(\mathbf{x})=\sum\limits_{k=1}^{3}\tau_{ik}(\mathbf{x})n_k(\mathbf{x})$, $i=1,2,3$. Через $\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{x})$ обозначим касательное к Γ векторное поле, которое является касательной составляющей поля $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x})$. Пусть $\tau_{nn}(\mathbf{x})=\langle\tau(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}),\mathbf{n}(\mathbf{x})\rangle$ — нормальная компонента поля $\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{x})$.

Для произвольных достаточно гладких функций $\mathbf{u}, p$ и $\mathbf{v}$ справедлива формула Грина

$$\mu E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \int_\Omega\langle-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p,\mathbf{v}\rangle\,d\mathbf{x}+\int_\Omega\big(-\mu\langle\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle+p\,\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{v}}\big)\,d\mathbf{x}+\int_{\partial\Omega}\langle\boldsymbol{\tau}_n(\mathbf{u},p),\mathbf{v}\rangle\,dS(\mathbf{x}).\quad(5.1)$$

Ниже используются обозначения

$$J^1(\Omega):=\{\mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3):\mathrm{div}\,\mathbf{u}=0\},\qquad J^1_S(\Omega):=\{\mathbf{u}\in J^1(\Omega):\mathbf{u}|_S=0\}.\quad(5.2)$$

[1]Затруднений, связанных с тем, что $\partial\Omega_j^-\cap\partial\Omega_j^+$ — многообразие с краем, не возникает, поскольку мы имеем дело с ПДО отрицательного порядка.

Следующая краевая задача на собственные значения связана с малыми колебаниями тяжелой вязкой жидкости (см. [20]):

$$\begin{aligned} &-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \ \text{ в } \Omega,\\ &\mathbf{u}=0 \ \text{ на } S, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}=0 \ \text{ на } \Gamma,\\ &a(\mathbf{x})u_n(\mathbf{x})=\lambda\tau_{nn}(\mathbf{x}) \ \text{ на } \Gamma. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Вещественнозначная функция $a\in C^\infty(\overline{\Gamma})$ связана с нормальной производной потенциала массовых сил.

Для перехода к вариационной постановке нужно домножить последнее уравнение в (5.3) на $\overline{u_n}$ и проинтегрировать по Γ. По формуле Грина (5.1) с учетом условий на $\mathbf{u}$ и p из (5.3) имеем: $\int_\Gamma \tau_{nn}\overline{u_n}\,dS=\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$. Задача (5.3) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения квадратичных форм

$$\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|u_n(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J^1_S(\Omega). \tag{5.4}$$

Первое уравнение в (5.3) и условие равенства нулю касательных напряжений на Γ являются естественными условиями в вариационной задаче о спектре отношения (5.4).

Мы будем изучать спектр отношения форм (5.4) при следующем условии на область Ω и функцию $a(\mathbf{x})$.

Условие 5.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — ограниченная область, $\Omega\in\mathcal{K}$. Предположим, что Γ — гладкая двумерная поверхность с липшицевой границей $\gamma=\partial\Gamma$, причем $\overline{\Gamma}\subset\partial\Omega$. Пусть $a\in L_2(\Gamma)$ — вещественнозначная функция.*

Отметим, что в отличие от случая капиллярной идеальной жидкости (см. раздел 4) не требуется гладкости γ. (В разделе 3 мы также не требовали гладкости γ.)

Из общих теорем об условиях коэрцитивности дифференциальных операторов (см., например, [5, §11]) следует, что справедливо неравенство

$$E_\Omega[\mathbf{u}]\geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)}-C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3), \quad c>0, \tag{5.5}$$

причем требования на область, обеспечивающие справедливость (5.5), достаточно слабые. Если же выполнено условие прилипания $\mathbf{u}|_S=0$, то справедливо неравенство Корна (см. [24])

$$E_\Omega[\mathbf{u}]\geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3), \quad \mathbf{u}|_S=0, \quad c>0. \tag{5.6}$$

Сформулируем результат об асимптотике спектра отношения (5.4).

Теорема 5.1. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда для функций распределения собственных значений отношения* (5.4) *справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda,(5.4))\sim\lambda^{-2}\frac{1}{16\pi\mu^2}\int_\Gamma a^2_\pm(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}), \quad \lambda\to+0.$$

5.2. Оценки спектра.

Лемма 5.1. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда справедлива оценка*

$$\Delta^\pm_2\ (5.4)\leqslant C\|a\|^2_{L_2(\Gamma)}, \tag{5.7}$$

где постоянная C не зависит от функции a.

Доказательство. Из (5.6) и теоремы о следах следует, что $E_\Omega[\mathbf{u}]\geqslant\check{C}\|\mathbf{u}\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}\geqslant\check{C}\|u_n\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}$, $\mathbf{u}\in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$, $\mathbf{u}|_S=0$. В силу леммы 2.2 получаем, что функции $N_\pm(\lambda,(5.4))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|v(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\check{C}\mu\|v\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}}, \quad v\in H^{1/2}(\Gamma). \tag{5.8}$$

Для $\Delta^\pm_2$ (5.8) нужная оценка следует из леммы 2.8. □

Из леммы 2.5 и неравенства (5.7) следует, что функционалы $\Delta_2^{\pm}$ (5.4), $\delta_2^{\pm}$ (5.4) непрерывно зависят от коэффициента a в метрике $L_2(\Gamma)$. Поэтому вычисление главного члена асимптотики спектра отношения (5.4) достаточно провести в случае $a \in C_0^{\infty}(\Gamma)$.

5.3. Сравнение с задачей в гладкой области. *Ниже предполагается, что* $a \in C_0^{\infty}(\Gamma)$. Пусть $\widetilde{\Omega}$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ и $\operatorname{supp} a$ лежит строго внутри множества $\partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$. Тогда найдется открытое подмножество $\widetilde{\Gamma}$ границы $\partial\widetilde{\Omega}$, лежащее строго внутри $\partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$, причем $\operatorname{supp} a \subset \widetilde{\Gamma}$. Можно считать, что граница множества $\widetilde{\Gamma}$ достаточно гладкая. Пусть $\widetilde{a} \in C^{\infty}(\partial\widetilde{\Omega})$ — функция, равная $a(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega} \cap \Gamma$ и равная нулю при $\mathbf{x} \in \partial\widetilde{\Omega} \setminus \Gamma$.

Чтобы оценить $\Delta_2^{\pm}$ (5.4) сверху, рассмотрим отношение

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}] + C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}}, \quad \mathbf{u} \in J^1(\widetilde{\Omega}). \tag{5.9}$$

Здесь $u_\nu(\mathbf{x})$ — нормальная составляющая функции $\mathbf{u}$ на $\partial\widetilde{\Omega}$, а постоянная C настолько велика, что форма в знаменателе определяет эквивалентную метрику в $H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$; см. (5.5). Пусть $\mathcal{S}$ — оператор сужения функций $\mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ на $\widetilde{\Omega}$. Тогда $\mathcal{S}$ переводит $J^1_S(\Omega)$ в $J^1(\widetilde{\Omega})$. Для всех $\mathbf{u} \in J^1_S(\Omega)$, для которых $\pm\int_\Gamma a(\mathbf{x})|u_n|^2\,dS > 0$, справедливо неравенство

$$\pm\frac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|u_n|^2\,dS}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}] + C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}} \leqslant \pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|(\mathcal{S}\mathbf{u})_\nu|^2\,dS}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathcal{S}\mathbf{u}] + C\|\mathcal{S}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}}.$$

Пользуясь леммами 2.3 и 2.2, получаем, что

$$\Delta_2^{\pm}\ (5.4) \leqslant \Delta_2^{\pm}\ (5.9). \tag{5.10}$$

Чтобы оценить $N_\pm(\lambda, (5.4))$ снизу, рассмотрим отношение

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega}). \tag{5.11}$$

Здесь $\widetilde{S} := \partial\widetilde{\Omega} \setminus \widetilde{\Gamma}$ и $J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega}) := \{\mathbf{u} \in J^1(\widetilde{\Omega}) :\ \mathbf{u}|_{\widetilde{S}} = 0\}$. Отметим, что справедливо неравенство Корна $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}] \geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\widetilde{\Omega})}$, $\mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$, $c > 0$.

Пусть Π — оператор продолжения функций, заданных в $\widetilde{\Omega}$, нулем на $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$. Проверим, что Π является линейным непрерывным оператором из $J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$ в $J^1_S(\Omega)$. Фиксируем функцию $\zeta \in C^{\infty}(\overline{\widetilde{\Omega}})$ такую, что $\zeta(\mathbf{x}) = 1$ при $\mathbf{x} \in \widetilde{\Gamma}$ и $\zeta(\mathbf{x}) = 0$ в некоторой окрестности множества $\partial\widetilde{\Omega} \setminus \Gamma$. Пусть $\mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$. Очевидно, $\Pi(\zeta\mathbf{u}) \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$. Далее, $(1-\zeta)\mathbf{u} \in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$ и $(1-\zeta)\mathbf{u} = 0$ на $\partial\widetilde{\Omega}$. Тогда справедливо включение $\Pi\left((1-\zeta)\mathbf{u}\right) \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$; см. [22] или [27]. Таким образом, $\Pi\mathbf{u} = \Pi(\zeta\mathbf{u}) + \Pi\left((1-\zeta)\mathbf{u}\right) \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$. Очевидно, $\Pi\mathbf{u} = 0$ на S. Условие $\operatorname{div}\Pi\mathbf{u} = 0$ в Ω выполнено, поскольку $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ в $\widetilde{\Omega}$, $\Pi\mathbf{u} = 0$ в $\Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ и $\Pi\mathbf{u} \in H^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$. Таким образом, $\Pi\mathbf{u} \in J^1_S(\Omega)$.

Справедливо равенство $\pm\dfrac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]} = \pm\dfrac{\int_\Gamma a(\mathbf{x})|(\Pi\mathbf{u})_n(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_\Omega[\Pi\mathbf{u}]}$, $\mathbf{u} \in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})$. Применяя лемму 2.2, получаем, что

$$N_\pm(\lambda, (5.11)) \leqslant N_\pm(\lambda, (5.4)), \quad \lambda > 0. \tag{5.12}$$

5.4. Асимптотика спектра задачи для тяжелой вязкой жидкости в гладком случае. Неравенства (5.10), (5.12) показывают, что теорема 5.1 будет доказана, коль скоро будет установлена следующая лемма.

Лемма 5.2. *Справедливы асимптотические формулы при* $\lambda \to +0$:

$$N_\pm(\lambda, (5.9)) \sim N_\pm(\lambda, (5.11)) \sim \lambda^{-2}\frac{1}{16\pi\mu^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{a}^2_\pm(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{5.13}$$

Доказательство. В силу неравенства (5.5) для области $\widetilde{\Omega}$ пространство $Z_0 := \{\mathbf{u} \in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3) : \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}] = 0\}$ конечномерно. Через Z обозначим множество следов функций из Z_0 на $\partial\widetilde{\Omega}$. Тогда Z — конечномерное подпространство в $L_2(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$. Положим $W(\widetilde{\Omega}) := \{\mathbf{u} \in J^1(\widetilde{\Omega}) :$

$(\mathbf{u},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}=0,\ \forall\boldsymbol{\varphi}\in Z\bigr\}$. Заметим, что если $\mathbf{u}\in H^1_0(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$ и $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]=0$, то $\mathbf{u}=0$. Следовательно, если $\mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega})$ и $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]=0$, то $\mathbf{u}=0$. Стандартным образом отсюда следует, что $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]\asymp\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\widetilde{\Omega})}$ при $\mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega})$ (знак $\asymp$ понимается в смысле двусторонних оценок с некоторыми константами).

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}(\mathbf{x})|u_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]},\quad \mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega}). \tag{5.14}$$

Применяя леммы 2.3 и 2.6, получаем

$$\Delta_2^\pm\ (5.9)=\Delta_2^\pm\ (5.14),\quad \delta_2^\pm\ (5.9)=\delta_2^\pm\ (5.14). \tag{5.15}$$

Положим $W_0(\widetilde{\Omega}):=\bigl\{\mathbf{u}\in H^1_0(\widetilde{\Omega}):\operatorname{div}\mathbf{u}=0\bigr\}$. Пусть $W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L})$ — подпространство в $W(\widetilde{\Omega})$, образованное решениями системы Стокса, т. е.

$$W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L}):=\bigl\{\mathbf{u}\in W(\widetilde{\Omega}):\ \text{существует } p\in L_2(\widetilde{\Omega}),\ \text{такое что } \mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0 \text{ в } \widetilde{\Omega}\bigr\}.$$

Здесь $\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}:=\{-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p,\operatorname{div}\mathbf{u}\}$. Равенство $\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0$ понимается в смысле обобщенных функций.

Справедливо ортогональное разложение $W(\widetilde{\Omega})=W_0(\widetilde{\Omega})\oplus^E W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L})$, где ортогональность понимается в смысле скалярного произведения $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$. Поскольку отношение (5.14) аннулируется на $W_0(\widetilde{\Omega})$, то ненулевой спектр отношения (5.14) не изменится, если рассматривать это отношение на $W(\widetilde{\Omega},\mathcal{L})$.

Аналогично, ненулевой спектр отношения (5.11) не изменится, если рассматривать это отношение на подпространстве $H^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega},\mathcal{L}):=\bigl\{\mathbf{u}\in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3):\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0$ для некоторого $p\in L_2(\widetilde{\Omega})$, $\mathbf{u}=0$ на $\widetilde{S}\bigr\}$.

Пусть $\mathcal{G}$ — оператор, сопоставляющий вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$, для которой выполнено $\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\varphi_\nu\,dS=0$, решение первой краевой задачи для системы Стокса (см. [33]): $\{\mathbf{u},p\}=\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}$ означает, что пара функций $\mathbf{u}\in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)$, $p\in L_2(\widetilde{\Omega})$ является обобщенным решением краевой задачи $\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0$ в $\widetilde{\Omega}$, $\mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}$ на $\partial\widetilde{\Omega}$.

Оператор $\mathcal{G}$ устанавливает гомеоморфизм пространства $\bigl\{\boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3):\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\varphi_\nu\,dS=0\bigr\}$ и пространства $\bigl\{\{\mathbf{u},p\}\in H^1(\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3)\times\bigl(L_2(\widetilde{\Omega})/\{1\}\bigr):\mathcal{L}\{\mathbf{u},p\}=0\bigr\}$. Здесь $L_2(\widetilde{\Omega})/\{1\}$ — фактор-пространство $L_2(\widetilde{\Omega})$ по одномерному подпространству констант. Как отмечается в [39], $\mathcal{G}$ является оператором Пуассона из алгебры Буте де Монвеля. Из свойств этой алгебры вытекает справедливость представления

$$E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]=(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \{\mathbf{u},p\}=\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}, \tag{5.16}$$

где $\mathcal{E}$ — матричный ПДО порядка 1. Представление (5.16) с точностью до слагаемых младшего порядка может быть получено также из рассмотрений, обобщающих рассмотрения [11] на случай систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу. Аналогично (5.16) справедливо представление

$$\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}=(\mathcal{Q}_0\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \{\mathbf{u},p\}=\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}, \tag{5.17}$$

где $\mathcal{Q}_0$ — матричный ПДО порядка (-1). Из (5.16), (5.17) и неравенства (5.5) для $\widetilde{\Omega}$ следует, что

$$((\mathcal{E}+C\mathcal{Q}_0)\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}\geqslant c\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3),\quad \int_{\partial\widetilde{\Omega}}\varphi_\nu\,dS=0,\quad c>0. \tag{5.18}$$

Неравенство (5.18) показывает, что, изменяя при необходимости младшие члены в ПДО $\mathcal{E}$, можно считать выполненным неравенство

$$(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}\geqslant c\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3),\quad c>0. \tag{5.19}$$

Считая (5.19) выполненным, рассмотрим отношения форм

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}(\mathbf{x})|\varphi_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3), \tag{5.20}$$

$$\pm\frac{\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}(\mathbf{x})|\varphi_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3),\quad \boldsymbol{\varphi}|_{\widetilde{S}}=0. \tag{5.21}$$

Суммируя все сказанное и применяя леммы 2.3 и 2.6, получаем, что

$$\Delta_2^\pm\ (5.14)=\Delta_2^\pm\ (5.20),\quad \delta_2^\pm\ (5.14)=\delta_2^\pm\ (5.20), \tag{5.22}$$

$$\Delta_2^\pm\ (5.11)=\Delta_2^\pm\ (5.21),\quad \delta_2^\pm\ (5.11)=\delta_2^\pm\ (5.21). \tag{5.23}$$

Отношения (5.20) и (5.21) суть отношения ПДФ вида (2.17) и (2.19) соответственно. Асимптотические формулы спектра для них следуют из леммы 2.10 и леммы 2.11. Необходимо вычислить старшие символы соответствующих ПДО. Обозначим через $\mathcal{Q}$ матричный ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$, отвечающий форме в числителе (5.20) и (5.21): $\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}(\mathbf{x})|\varphi_\nu(\mathbf{x})|^2\,dS(\mathbf{x})=(\mathcal{Q}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}$. Локально, в окрестности $\mathcal{U}$ некоторой точки $\mathbf{x}_0\in\partial\widetilde{\Omega}$ выберем криволинейную ортогональную систему координат так, чтобы координатные линии для третьей координаты на $\partial\widetilde{\Omega}$ были направлены по внутренней нормали $\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, а соответствующий коэффициент Ламе на $\partial\widetilde{\Omega}$ был равен 1. При таком выборе системы координат символ ПДО $\mathcal{Q}$ есть

$$q^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\widetilde{a}(\mathbf{x})\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}\in\mathcal{U},\quad \boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}). \tag{5.24}$$

Пусть $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ — старший символ ПДО $\mathcal{E}$, вычисленный в тех же локальных координатах. Рассмотрим алгебраическую задачу

$$q^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}=\lambda\mu e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z},\quad \mathbf{z}\in\mathbb{C}^3. \tag{5.25}$$

Из леммы 2.10 следует, что при $\lambda\to+0$ справедлива асимптотика

$$N_\pm(\lambda,(5.20))\sim\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}dS(\mathbf{x})\int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})}d\boldsymbol{\xi}\,n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (5.25)). \tag{5.26}$$

Из леммы 2.11 вытекает асимптотика при $\lambda\to+0$:

$$N_\pm(\lambda,(5.21))\sim\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\widetilde{\Gamma}}dS(\mathbf{x})\int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})}d\boldsymbol{\xi}\,n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (5.25)). \tag{5.27}$$

Вычислим символ $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ в соответствии с правилами из [39]. Запишем выражение для старшего символа $L^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})=\{L^\circ_{sj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})\}_{1\leqslant s,j\leqslant 4}$ оператора $\mathcal{L}$: $L^\circ_{sj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})=\mu|\boldsymbol{\eta}|^2\delta_{sj}$, $s,j=1,2,3$; $L^\circ_{s4}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})=\overline{L^\circ_{4s}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})}=i\eta_s$, $s=1,2,3$; $L^\circ_{44}(\mathbf{x},\boldsymbol{\eta})=0$.

Далее, для каждой точки $(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, $\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений на полуоси

$$\sum_{j=1}^4 L^\circ_{sj}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})D_t)f_j(t)=0,\quad s=1,2,3,4;\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{5.28}$$

При нашем выборе системы координат имеем $\xi_3=0$, $\nu_1=\nu_2=0$, $\nu_3=1$, и система (5.28) принимает вид

$$\begin{aligned}&\mu\Big(|\boldsymbol{\xi}|^2-\frac{d^2}{dt^2}\Big)f_j(t)+i\xi_jf_4(t)=0,\quad j=1,2,\\&\mu\Big(|\boldsymbol{\xi}|^2-\frac{d^2}{dt^2}\Big)f_3(t)+\frac{d}{dt}f_4(t)=0,\quad i\xi_1f_1(t)+i\xi_2f_2(t)+\frac{d}{dt}f_3(t)=0.\end{aligned} \tag{5.29}$$

Через $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ обозначим линейное пространство решений системы (5.29), исчезающих при $t\to+\infty$. Характеристический определитель системы (5.29) равен $D(k)=\mu^2(|\boldsymbol{\xi}|^2-k^2)^3$. Убывающему при $t\to+\infty$ решению соответствует трехкратный корень $k=-|\boldsymbol{\xi}|$. Следовательно, пространство $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ трехмерно. Рассмотрим базис в $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$, состоящий из вектор-функций $Y^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)=\{Y_i^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)\}_{1\leqslant i\leqslant 4}$, $j=1,2,3$, которые являются решениями системы (5.29), исчезающими при $t\to+\infty$, и удовлетворяют начальным условиям $Y_i^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},0)=\delta_{ij}$, $i,j=1,2,3$.

Вычисления показывают, что $Y^{(j)}$ не зависят от $\mathbf{x}$ и имеют вид

$$Y^{(1)}(\boldsymbol{\xi},t)=\begin{pmatrix}-\frac{\xi_1^2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}+1\\ -\frac{\xi_1\xi_2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}\\ -i\xi_1 t\\ -2\mu i\xi_1\end{pmatrix}e^{-|\boldsymbol{\xi}|t},\quad Y^{(2)}(\boldsymbol{\xi},t)=\begin{pmatrix}-\frac{\xi_1\xi_2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}\\ -\frac{\xi_2^2 t}{|\boldsymbol{\xi}|}+1\\ -i\xi_2 t\\ -2\mu i\xi_2\end{pmatrix}e^{-|\boldsymbol{\xi}|t},\quad Y^{(3)}(\boldsymbol{\xi},t)=\begin{pmatrix}-i\xi_1 t\\ -i\xi_2 t\\ |\boldsymbol{\xi}|t+1\\ 2\mu|\boldsymbol{\xi}|\end{pmatrix}e^{-|\boldsymbol{\xi}|t}. \tag{5.30}$$

Форме $E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ соответствует конечномерная полуторалинейная форма на $F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$:

$$\mathbf{e}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}[f,g]:=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{3}\int_0^\infty\big((\xi_j+\nu_j(\mathbf{x})D_t)f_k(t)+(\xi_k+\nu_k(\mathbf{x})D_t)f_j(t)\big)\times$$
$$\times\big((\xi_j-\nu_j(\mathbf{x})D_t)\overline{g_k(t)}+(\xi_k-\nu_k(\mathbf{x})D_t)\overline{g_j(t)}\big)\,dt,\quad f,g\in F(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}).$$

Старший символ $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\left\{e^\circ_{jl}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\right\}_{1\leqslant j,l\leqslant 3}$ ПДО $\mathcal{E}$ может быть вычислен с помощью формулы $e^\circ_{jl}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=\mathbf{e}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}[Y^{(j)}(\boldsymbol{\xi},\cdot),Y^{(l)}(\boldsymbol{\xi},\cdot)]$, $j,l=1,2,3$. Вычисления показывают, что

$$e^\circ_{33}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=2|\boldsymbol{\xi}|,\quad e^\circ_{j3}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=e^\circ_{3j}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})=0,\quad j=1,2. \tag{5.31}$$

(Остальные элементы e°_{jl} вычислять нет необходимости.)

Из (5.24) и (5.31) следует, что алгебраическая задача (5.25) имеет собственные значения $0,0$ и $\widetilde{a}(\mathbf{x})/2\mu|\boldsymbol{\xi}|$. Поэтому $n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (5.25))=\begin{cases}1, & \lambda<\widetilde{a}_\pm(\mathbf{x})/2\mu|\boldsymbol{\xi}|\\ 0, & \lambda\geqslant\widetilde{a}_\pm(\mathbf{x})/2\mu|\boldsymbol{\xi}|\end{cases}$. Тогда по формулам (5.26) и (5.27) при $\lambda\to+0$ справедливы асимптотические формулы

$$N_\pm(\lambda,(5.20))\sim N_\pm(\lambda,(5.21))\sim\lambda^{-2}\frac{1}{16\pi\mu^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{a}^2_\pm(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}).$$

Отсюда с учетом (5.15), (5.22) и (5.23) вытекает искомая асимптотика (5.13). □

Лемма 5.2, а с ней и теорема 5.1, доказаны.

5.5. Колебания системы тяжелых вязких жидкостей. Теорема 5.1 допускает обобщение на случай колебаний системы тяжелых вязких жидкостей, частично или полностью заполняющих сосуд. Для определенности рассмотрим случай полного заполнения (см. рис. 2). Мы здесь ограничимся постановкой задачи и формулировкой результата; доказательство можно найти в [29].

Пусть область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ удовлетворяет предположениям пункта 3.2. Для системы вектор-функций $\{\mathbf{u}_j(\mathbf{x})\}$, $j=1,\dots,k+1$, и системы скалярных функций $\{p_j(\mathbf{x})\}$, $j=1,\dots,k+1$, рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned}
&-\mu_j\Delta\mathbf{u}_j+\nabla p_j=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{u}_j=0\ \text{ в }\Omega_j,\quad j=1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j=0\ \text{ на }S_j,\quad j=1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j=\mathbf{u}_{j+1},\quad \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_j)=\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_{j+1})\ \text{ на }\Gamma_j,\quad j=1,\dots,k,\\
&a_j(\mathbf{x})u_{jn}=\lambda\left(\tau_{nn}(\mathbf{u}_j,p_j)-\tau_{nn}(\mathbf{u}_{j+1},p_{j+1})\right)\ \text{ на }\Gamma_j,\quad j=1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Здесь использовано обозначение $u_{jn}(\mathbf{x}):=\langle\mathbf{u}_j(\mathbf{x}),\mathbf{n}_j(\mathbf{x})\rangle$. Постоянные $\mu_j>0$, $j=1,\dots,k+1$, имеют смысл коэффициентов вязкости жидкостей; $a_j(\mathbf{x})$ — гладкие вещественные функции на Γ_j, $j=1,\dots,k$. Задача (5.32) эквивалентна задаче о спектре отношения квадратичных форм

$$\begin{aligned}
&\pm\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}a_j(\mathbf{x})|u_{jn}|^2\,d\mathbf{x}}{\sum\limits_{j=1}^{k+1}\mu_j E_{\Omega_j}[\mathbf{u}_j]},\quad \mathbf{u}_j\in H^1(\Omega_j;\mathbb{C}^3),\quad j=1,\dots,k+1,\\
&\operatorname{div}\mathbf{u}_j=0\ \text{ в }\Omega_j,\quad \mathbf{u}_j=0\ \text{ на }S_j,\quad j=1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j=\mathbf{u}_{j+1}\ \text{ на }\Gamma_j,\quad j=1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Отношение форм (5.33) рассмотрим при следующем условии.

Условие 5.2. *Ограниченная область* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *разделена гладкими двумерными поверхностями* $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ *на* $(k+1)$ *непересекающихся областей* $\Omega_1, \dots, \Omega_{k+1}$. *При этом выполнены соотношения* (3.18), (3.19). *Предполагается, что* $\Omega_j \in \mathcal{K}$, $j = 1, \dots, k+1$, *а кривые* $\gamma_j = \partial\Gamma_j$, $j = 1, \dots, k$, *— липшицевы. Функции* $a_j \in L_2(\Gamma_j)$, $j = 1, \dots, k$, *— вещественные.*

Предложение 5.1 (см. [29]). *Пусть выполнено условие* 5.2. *Тогда для функций распределения спектра отношения* (5.33) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*:

$$N_\pm(\lambda, (5.33)) \sim \frac{\lambda^{-2}}{16\pi} \sum_{j=1}^{k} (\mu_j + \mu_{j+1})^{-2} \int_{\Gamma_j} (a_j)_\pm^2 \, dS. \tag{5.34}$$

6. Асимптотика спектра малых колебаний капиллярной вязкой жидкости

6.1. Свойства решений системы Стокса в области с ребрами. В этом пункте устанавливается ряд технических утверждений, необходимых для решения задачи, связанной с колебаниями капиллярной вязкой жидкости. При этом существенно используются результаты из [42] о разрешимости в весовых классах Соболева первой краевой задачи для системы Стокса в областях с ребрами.

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию 4.1. Введем нужные обозначения. Пусть $l \geqslant 0$ — целое число, $s \in \mathbb{R}$, $V_s^l(\Omega)$ — пространство Кондратьева (весовое пространство Соболева) с нормой

$$\|u\|_{V_s^l(\Omega)} := \left(\int_\Omega \left(|\nabla_l u|^2 r^{2s} + |\nabla_{l-1} u|^2 r^{2(s-1)} + \dots + |u|^2 r^{2(s-l)} \right) d\mathbf{x} \right)^{1/2},$$

где $r = r(\mathbf{x})$ — расстояние от точки $\mathbf{x} \in \Omega$ до ребра γ. Символ $\nabla_j u$ означает «градиент функции u порядка j», т. е. набор всех производных $\partial^\alpha u$ порядка $|\alpha| = j$. Через $V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)$ обозначается пространство следов на $\partial\Omega$ функций из $V_s^l(\Omega)$ с индуцированной нормой: $\|\varphi\|_{V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{v \in V_s^l(\Omega): v|_{\partial\Omega} = \varphi} \|v\|_{V_s^l(\Omega)}$. При $s = 0$ пишем просто $V^l(\Omega) = V_0^l(\Omega)$, $V^{l-1/2}(\partial\Omega) = V_0^{l-1/2}(\partial\Omega)$. Пусть $\rho(\mathbf{x})$ — регуляризованное расстояние на $\partial\Omega$ от точки $\mathbf{x}$ до γ. В пространстве $V^{l-1/2}(\partial\Omega)$ можно задать эквивалентную норму по формуле

$$\|\varphi\|^2_{V^{l-1/2}(\partial\Omega)} := \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} dS(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{y})\, \frac{|\nabla_{l-1}\varphi(\mathbf{x}) - \nabla_{l-1}\varphi(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} + \int_{\partial\Omega} dS(\mathbf{x})\, |\varphi(\mathbf{x})|^2 \rho(\mathbf{x})^{1-2l},$$

а в $V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)$ — по формуле $\|\varphi\|_{V_s^{l-1/2}(\partial\Omega)} = \|\rho^s \varphi\|_{V^{l-1/2}(\partial\Omega)}$. Через $V_s^l(\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $V_s^{l-1/2}(\partial\Omega; \mathbb{C}^3)$ обозначаются соответствующие пространства вектор-функций.

Пусть $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ (см. [22]) — замыкание множества $C_0^\infty(\Gamma)$ по норме

$$\|\varphi\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)} := \left(\int_\Gamma \int_\Gamma dS(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{y})\, \frac{|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} + \int_\Gamma dS(\mathbf{x})\, \frac{|\varphi(\mathbf{x})|^2}{\rho(\mathbf{x})} \right)^{1/2}.$$

Отметим, что $\{\varphi : \varphi \in V^{1/2}(\partial\Omega),\ \varphi|_S = 0\} = \{\varphi : \varphi|_\Gamma \in H_{00}^{1/2}(\Gamma),\ \varphi|_S = 0\}$. Через $(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$ обозначим негативное пространство (см. [4]), построенное по позитивному $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ и нулевому $L_2(\Gamma)$.

Важную роль при изучении задачи для капиллярной вязкой жидкости будет играть пространство

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ \{\mathbf{u}, p\} : \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^3),\ p \in L_2(\Omega)/\{1\}, -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0,\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}|_S = 0 \right\}.$$

Здесь $L_2(\Omega)/\{1\}$ — фактор-пространство $L_2(\Omega)$ по одномерному подпространству констант; уравнение $-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0$ понимается в смысле обобщенных функций.

Нам потребуются следующие утверждения.

Предложение 6.1. *Пусть* $v \in H^1(\Omega)$ *и* $v = 0$ *на* S. *Тогда* $v \in V^1(\Omega)$ *и*

$$\|v\|_{V^1(\Omega)} \leqslant C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Для доказательства (6.1) достаточно установить справедливость неравенства

$$\int_\Omega \frac{|v(\mathbf{x})|^2}{r^2(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \leqslant C \|v\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega),\ v|_S = 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Положим $\Omega_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \Omega :\ r(\mathbf{x}) > \varepsilon\}$. Очевидно,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{|v(\mathbf{x})|^2}{r^2(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_\Omega |v(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}.$$

При достаточно малом ε множество $\Omega \setminus \overline{\Omega_\varepsilon}$ можно разбить на конечное число частей U_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, таких, что существуют диффеоморфизмы f_j класса C^1, отображающие $\overline{U_j}$ на $\overline{\mathcal{U}_j}$, где $\mathcal{U}_j$ — подмножество двугранного угла вида $\mathcal{U}_j := \{(r,\omega,x_3) :\ 0 < r < 1,\ 0 < \omega < \omega_j,\ 0 < x_3 < 1\}$, $0 < \omega_j < 2\pi$, причем $S \cap \partial U_j$ переходит в множество $\{(r,\omega,x_3) :\ 0 \leqslant r \leqslant 1,\ \omega = 0,\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 1\}$. Здесь (r,ω,x_3) — цилиндрические координаты в $\mathbb{R}^3$. Пусть $v \in H^1(\mathcal{U}_j)$ и $v(r,\omega,x_3) = 0$ при $\omega = 0$. Тогда

$$\int_{\mathcal{U}_j} |v|^2 r^{-2}\, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{U}_j} |v|^2 r^{-2}\, r dr\, d\omega\, dx_3 = \int_{\mathcal{U}_j} \left| \int_0^\omega \frac{1}{r} \frac{\partial v(r,\omega',x_3)}{\partial \omega'}\, d\omega' \right|^2 r dr\, d\omega\, dx_3 \leqslant$$

$$\leqslant \omega_j \int_{\mathcal{U}_j} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v(r,\omega',x_3)}{\partial \omega'} \right|^2 r dr\, d\omega'\, dx_3 \leqslant C \int_{\mathcal{U}_j} |\nabla v|^2 d\mathbf{x}.$$

□

Предложение 6.2. *Форма* $E_\Omega[\mathbf{u}]$ *определяет в пространстве* $\mathcal{H}_1$ *эквивалентную норму*: $E_\Omega[\mathbf{u}] \asymp \big(\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\Omega)} + \|p\|^2_{L_2(\Omega)/\{1\}}\big)$, $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1$.

Доказательство. Из предложения 6.1 следует, что для $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1$ справедливо включение $\mathbf{u} \in V^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\|\mathbf{u}\|_{V^1(\Omega)} \asymp \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$. Пусть T — оператор следа, сопоставляющий паре $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1$ след $\mathbf{u}$ на $\partial\Omega$: $\boldsymbol{\varphi} = T\{\mathbf{u},p\} = \mathbf{u}|_{\partial\Omega}$. По теореме о разрешимости первой краевой задачи для системы Стокса (см. [42]) имеем: $\|\mathbf{u}\|_{V^1(\Omega)} + \|p\|_{L_2(\Omega)/\{1\}} \leqslant C\|\boldsymbol{\varphi}\|_{V^{1/2}(\partial\Omega)}$. Очевидно, $\|\boldsymbol{\varphi}\|_{V^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant \|\mathbf{u}\|_{V^1(\Omega)}$. Из сказанного с учетом неравенства Корна (5.6) вытекает нужное утверждение. □

Предложение 6.3. *Пространство* $\mathcal{H}_2 := \big\{\{\mathbf{u},p\} : \mathbf{u} \in V^2_1(\Omega;\mathbb{C}^3),\ p \in V^1_1(\Omega)/\{1\},\ -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0,\ \mathbf{u}|_S = 0\big\}$ *плотно в* $\mathcal{H}_1$.

Доказательство. Из теоремы о разрешимости первой краевой задачи для системы Стокса в весовых пространствах (см. [42]) следует, что оператор T устанавливает гомеоморфизм следующих пар пространств: $\mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{1/2} := \big\{\boldsymbol{\varphi} \in V^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) :\ \boldsymbol{\varphi}|_S = 0,\ \int_\Gamma \varphi_n\, dS = 0\big\}$, $\mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_{3/2} := \big\{\boldsymbol{\varphi} \in V^{3/2}_1(\partial\Omega;\mathbb{C}^3) : \boldsymbol{\varphi}|_S = 0,\ \int_\Gamma \varphi_n\, dS = 0\big\}$. Заметим, что для $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{H}_{1/2}$ выполнено $\boldsymbol{\varphi}|_\Gamma \in H^{1/2}_{00}(\Gamma;\mathbb{C}^3)$. Поскольку $C^\infty_0(\Gamma;\mathbb{C}^3)$ плотно в $H^{1/2}_{00}(\Gamma;\mathbb{C}^3)$, то в $\mathcal{H}_{1/2}$ плотно множество $\big\{\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{\varphi}|_\Gamma \in C^\infty_0(\Gamma;\mathbb{C}^3),\ \boldsymbol{\varphi}|_S = 0,\ \int_\Gamma \varphi_n\, dS = 0\big\}$, а тогда и более широкое множество $\mathcal{H}_{3/2}$. Из сказанного следует, что $\mathcal{H}_2$ плотно в $\mathcal{H}_1$. □

Пусть $z \in L_2(\Gamma)$ и $\int_\Gamma z\, dS \neq 0$. Через P_z обозначим (неортогональный) проектор в $L_2(\Gamma)$, действующий по формуле

$$(P_z f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \frac{\int_\Gamma f(\mathbf{y})\overline{z(\mathbf{y})}\, dS(\mathbf{y})}{\int_\Gamma \overline{z(\mathbf{y})}\, dS(\mathbf{y})}. \tag{6.2}$$

Оператор P_z проектирует на подпространство $\big\{v \in L_2(\Gamma) :\ \int_\Gamma v\overline{z}\, dS = 0\big\}$. Сопряженный проектор P^*_z действует по формуле $(P^*_z f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - z(\mathbf{x}) \dfrac{\int_\Gamma f(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})}{\int_\Gamma z(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y})}$. Отметим, что $\int_\Gamma (P^*_z f)(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) = 0$. Важную роль ниже играет следующее утверждение.

Предложение 6.4. *Пусть* $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1$, $z \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$, $\int_\Gamma z\, dS \neq 0$. *Пусть* $\tau_{nn}(\mathbf{u},p)$ *определено в пункте* 5.1. *Тогда*

$$\|P_z \tau_{nn}(\mathbf{u},p)\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.3}$$

Доказательство. Для функции $w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$, удовлетворяющей условию $\int_\Gamma w\, dS = 0$, через $\mathbf{f}_w(\mathbf{x})$ обозначим вектор-функцию на $\partial\Omega$, равную $w(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in \Gamma$ и равную нулю при $\mathbf{x} \in S$. Тогда $\mathbf{f}_w \in V^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\int_{\partial\Omega} (\mathbf{f}_w)_n\, dS = 0$. Пусть $\mathcal{M}$ — оператор, решающий первую краевую задачу для системы Стокса. Тогда

$$\|\mathcal{M}\mathbf{f}_w\|_{V^1(\Omega)} \leqslant C\|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}. \tag{6.4}$$

Оценку (6.3) достаточно доказать для плотного в $\mathcal{H}_1$ множества $\mathcal{H}_2$. Применим к функциям $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathbf{v}_w = \mathcal{M}\mathbf{f}_w$ формулу Грина (5.1) (нетрудно проверить, что все выражения, входящие в (5.1), на этих функциях имеют смысл и конечны). Получаем: $\mu E_\Omega[\mathbf{u},\mathcal{M}\mathbf{f}_w] = \int_\Gamma \tau_{nn}\overline{w}\,dS$. Отсюда с учетом (6.4) вытекает, что

$$\left|\int_\Gamma \tau_{nn}\overline{w}\,dS\right| \leqslant C'\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma),\ \int_\Gamma w\,dS = 0. \tag{6.5}$$

Далее, пусть $f \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$. Тогда $P_z^* f \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$, $\int_\Gamma P_z^* f\,dS = 0$ и $\|P_z^* f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \leqslant C_z\,\|f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}$. В силу (6.5) имеем:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma P_z\tau_{nn}\overline{f}\,dS\right| = \left|\int_\Gamma \tau_{nn}\overline{P_z^* f}\,dS\right| \leqslant C'\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|P_z^* f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \leqslant \\ \leqslant C'C_z\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\|f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad f \in H^{1/2}_{00}(\Gamma).\end{aligned} \tag{6.6}$$

Из (6.6) по определению негативной нормы получаем:

$$\|P_z\tau_{nn}\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} = \sup_{0\neq f\in H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \frac{\left|\int_\Gamma P_z\tau_{nn}\overline{f}\,dS\right|}{\|f\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}} \leqslant C'C_z\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}.$$

$\square$

Следствие 6.1. *Пусть* $z_i \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$, $i = 1,2$, $\int_\Gamma z_1\,dS \neq 0$. *Тогда функционал* $I(\{\mathbf{u},p\}) = \int_\Gamma (P_{z_1}\tau_{nn})\overline{z_2}\,dS$ — *линейный непрерывный функционал над* $\mathcal{H}_1$.

Предложение 6.5. *Пусть* $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1$. *Пусть* $\tau_{tn}(\mathbf{u})$ *определено в пункте* 5.1. *Тогда*

$$\|\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u})\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} \leqslant C\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}. \tag{6.7}$$

Доказательство. Проведем оценки локально. Выберем некоторый конечный атлас $\{U_j,\alpha_j\}_{1\leqslant j\leqslant N}$ на многообразии Γ. Пусть $\{\omega_j\}_{1\leqslant j\leqslant N}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию Γ множествами $\{U_j\}$. Пусть $\mathbf{e}_1^{(j)}(\mathbf{x})$, $\mathbf{e}_2^{(j)}(\mathbf{x})$ — гладкие касательные векторные поля в U_j, образующие при каждом $\mathbf{x} \in U_j$ базис в касательной плоскости к Γ.

Пусть $w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$. Тогда $\omega_j w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$ и $\|\omega_j w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)} \leqslant C_j\|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}$. Через $\mathbf{g}_w^{ij}(\mathbf{x})$ обозначим вектор-функцию на $\partial\Omega$, равную $\omega_j(\mathbf{x})w(\mathbf{x})\mathbf{e}_i^{(j)}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in U_j$ и нулю при $\mathbf{x} \in \partial\Omega \setminus \overline{U_j}$. Тогда $\mathbf{g}_w^{ij} \in V^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\int_{\partial\Omega}(\mathbf{g}_w^{ij})_n\,dS = 0$. Пусть $\mathcal{M}$ — такой же оператор, как в доказательстве предложения 6.4. Тогда

$$\left\|\mathcal{M}\mathbf{g}_w^{ij}\right\|_{V^1(\Omega)} \leqslant C_{ij}\,\|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad i = 1,2. \tag{6.8}$$

Неравенство (6.7) достаточно доказать при $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_2$. Применяя формулу Грина (5.1) к функциям $\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_2$ и $\mathcal{M}\mathbf{g}_w^{ij}$, получаем: $\mu E_\Omega[\mathbf{u},\mathcal{M}\mathbf{g}_w^{ij}] = \int_\Gamma \langle\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}),\mathbf{e}_i^{(j)}\rangle\omega_j\overline{w}\,dS$. Отсюда и из (6.8) вытекает неравенство

$$\left|\int_\Gamma \langle\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}),\mathbf{e}_i^{(j)}\rangle\omega_j\overline{w}\,dS\right| \leqslant \check{C}_{ij}\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}\,\|w\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}, \quad w \in H^{1/2}_{00}(\Gamma), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \quad i = 1,2. \tag{6.9}$$

Поскольку $\|\boldsymbol{\tau}_{tn}\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'} \leqslant \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{2}\left\|\omega_j\langle\boldsymbol{\tau}_{tn},\mathbf{e}_i^{(j)}\rangle\right\|_{(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'}$, то из (6.9) с учетом определения негативной нормы следует (6.7). $\square$

Положим $\mathcal{H}_1^\tau := \{\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1 : \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u})|_\Gamma = 0\}$. Подразумевается, что $\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u})$ есть нулевой элемент пространства $(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Множество $\mathcal{H}_1^\tau$ является замкнутым подпространством пространства $\mathcal{H}_1$. Положим $\widetilde{\mathcal{H}}_1 := \{\{\mathbf{u},p\} \in \mathcal{H}_1 : u_n|_\Gamma = 0\}$.

Предложение 6.6. *Справедливо ортогональное разложение* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^\tau \oplus^E \widetilde{\mathcal{H}}_1$, *где ортогональность понимается в смысле скалярного произведения* $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]$.

Доказательству предложения 6.6 предпошлем следующие рассмотрения. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \ \text{ в } \Omega,\\ &\mathbf{u}=0 \ \text{ на } S, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}=0,\ \tau_{nn}=\psi \ \text{ на } \Gamma, \end{aligned} \tag{6.10}$$

при $\psi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Пусть пространство $J^1_S(\Omega)$, определенное в (5.2), наделено скалярным произведением $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]$. Обобщенным решением задачи (6.10) назовем функцию $\mathbf{u}\in J^1_S(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\mu E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]=\int_\Gamma\psi\overline{v_n}\,dS, \quad \mathbf{v}\in J^1_S(\Omega). \tag{6.11}$$

Если $\mathbf{u}$, p, ψ — гладкие функции, удовлетворяющие (6.10) в классическом смысле, то нетрудно видеть, что $\mathbf{u}$ является и обобщенным решением задачи (6.10).

Предложение 6.7. *Для любого элемента* $\psi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (6.10).

Доказательство. Если $\mathbf{v}\in J^1_S(\Omega)$, то в силу предложения 6.1 выполнено $\mathbf{v}\in V^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\|\mathbf{v}\|_{V^1(\Omega)}\leqslant C\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}$. Тогда $\mathbf{v}|_{\partial\Omega}\in V^{1/2}(\partial\Omega;\mathbb{C}^3)$ и $\mathbf{v}|_S=0$. Следовательно, $\mathbf{v}|_\Gamma\in H^{1/2}_{00}(\Gamma;\mathbb{C}^3)$ и $\|\mathbf{v}\|_{H^{1/2}_{00}(\Gamma)}\leqslant C\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}$.

Пусть $\psi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Тогда $\int_\Gamma\psi\overline{v_n}\,dS$ определяет антилинейный непрерывный функционал над $\mathbf{v}\in J^1_S(\Omega)$. По теореме Рисса существует единственная функция $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\psi)\in J^1_S(\Omega)$ такая, что $\int_\Gamma\psi\overline{v_n}\,dS=\mu E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]$, $\mathbf{v}\in J^1_S(\Omega)$. □

Как обычно, можно показать, что если $\mathbf{u}$ — обобщенное решение задачи (6.10), то существует функция $p\in L_2(\Omega)$ такая, что $\{\mathbf{u},p\}$ является решением задачи (6.10) в следующем слабом смысле: а) $\mathbf{u}\in J^1_S(\Omega)$; б) $-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0$ в смысле обобщенных функций; в) $\boldsymbol{\tau}_{tn}=0$, $\tau_{nn}=\psi$ как элементы $(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Отметим, что тогда $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}^\tau_1$.

Доказательство предложения 6.6. Пусть $\{\mathbf{v},q\}\in\mathcal{H}_1$ и $\{\mathbf{v},q\}\perp\mathcal{H}^\tau_1$, т. е. $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]=0$ для любого $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}^\tau_1$. Для произвольной функции $\psi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$ через $\mathbf{u}_\psi$ обозначим обобщенное решение задачи (6.10). Тогда $E_\Omega[\mathbf{u}_\psi,\mathbf{v}]=0$ для любого $\psi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Согласно (6.11) это означает, что $\int_\Gamma\psi\overline{v_n}\,dS=0$ для любого $\psi\in(H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$. Поэтому $v_n=0$ на Γ, т. е. $\{\mathbf{v},q\}\in\widetilde{\mathcal{H}}_1$. Мы доказали, что $(\mathcal{H}^\tau_1)^\perp\subset\widetilde{\mathcal{H}}_1$.

Установим теперь обратное включение $\widetilde{\mathcal{H}}_1\subset(\mathcal{H}^\tau_1)^\perp$. Пусть $\{\mathbf{v},q\}\in\widetilde{\mathcal{H}}_1$. Тогда в силу формулы Грина (5.1) справедливо равенство $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]=0$, $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_2$, $\boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u})=0$. По замыканию $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]=0$ при любом $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}^\tau_1$, т. е. $\{\mathbf{v},q\}\in(\mathcal{H}^\tau_1)^\perp$. □

6.2. Постановка задачи, связанной с колебаниями капиллярной вязкой жидкости. Формулировка результата. Постановка задачи дана в [21, гл. 8, §2]. Пусть область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию 4.1. Через $\mathbf{B}_\Gamma$ обозначим дифференциальный оператор, заданный выражением $B_\Gamma=-\sigma\Delta_\Gamma+h(\mathbf{x})$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma=H^2(\Gamma)\cap H^1_0(\Gamma)$. Здесь $\sigma>0$, $h(\mathbf{x})$ — гладкая вещественнозначная функция на Γ. Коэффициенты σ и h имеют тот же смысл, что и в пункте 4.5. Оператор $\mathbf{B}_\Gamma$ самосопряжен в $L_2(\Gamma)$, его ядро $Z_B:=\{v\in\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma:(-\sigma\Delta_\Gamma+h)v=0\}$, совпадающее с коядром, конечномерно и состоит из бесконечно гладких функций. На $L_2(\Gamma)\ominus Z_B$ определен обратный оператор $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$, который является разрешающим оператором первой краевой задачи на Γ: $\varphi=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}f$ при $f\in L_2(\Gamma)\ominus Z_B$ означает, что $(-\sigma\Delta_\Gamma+h)\varphi=f$ на Γ, $\varphi=0$ на γ, $\varphi\perp Z_B$.

Оператор $\mathbf{B}_\Gamma$ предполагается положительно определенным на $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_\Gamma\cap(L_2(\Gamma)\ominus\{1\})$. Это условие эквивалентно выполнению неравенства

$$\int_\Gamma\left(\sigma|\nabla_\Gamma u|^2+h(\mathbf{x})|u|^2\right)\,dS\geqslant c\int_\Gamma|u|^2\,dS, \quad u\in H^1_0(\Gamma), \quad \int_\Gamma u\,dS=0; \quad c>0. \tag{6.12}$$

Условие (6.12) накладывает ограничение на данные задачи. Физически оно означает, что положение равновесия жидкости устойчиво в линейном приближении. Из (6.12) следует, что $\dim Z_B\leqslant 1$. Обозначим через z_1 базисный вектор в Z_B; в случае $Z_B=\{0\}$ считаем $z_1=0$.

Рассмотрим следующую краевую задачу в Ω:

$$\begin{aligned} &-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &\mathbf{u}=0 \ \text{ на } S, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}=0 \ \text{ на } \Gamma, \\ &B_\Gamma u_n=\lambda^{-1}(\tau_{nn}+c_\tau) \ \text{ на } \Gamma. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Здесь постоянная c_τ не задается, а ищется вместе с решением. Краевое условие $u_n|_\gamma=0$ выполнено автоматически за счет $\mathbf{u}|_S=0$.

Как будет показано ниже, краевой задаче (6.13) соответствует вариационное отношение форм, определяющее неотрицательный компактный оператор в пространстве $\mathcal{H}_1^\tau$. Основной результат данного раздела — следующая теорема.

Теорема 6.1. *При сделанных предположениях для функции распределения собственных значений задачи* (6.13) *при* $\lambda\to+0$ *справедлива асимптотика*

$$N(\lambda,(6.13))\sim\lambda^{-2}\frac{\mu^2}{\pi\sigma^2}\operatorname{mes}\Gamma.$$

6.3. Вариационная постановка задачи для капиллярной вязкой жидкости. На решениях задачи (6.13) функция $\tau_{nn}+c_\tau$ принадлежит области значений оператора $\mathbf{B}_\Gamma$, а потому

$$\int_\Gamma(\tau_{nn}+c_\tau)\overline{z_1}\,dS=0. \tag{6.14}$$

Кроме того, из условия неразрывности ($\operatorname{div}\mathbf{u}=0$) и условия прилипания $\mathbf{u}|_S=0$ следует, что

$$\int_\Gamma u_n\,dS=0. \tag{6.15}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $Z_B\neq\{0\}$. Тогда $\int_\Gamma\overline{z_1}\,dS\neq0$ в силу (6.12), и постоянную c_τ можно определить по формуле $c_\tau=-\dfrac{\int_\Gamma\tau_{nn}\overline{z_1}\,dS}{\int_\Gamma\overline{z_1}\,dS}$; см. (6.14). Следовательно, $\tau_{nn}+c_\tau=P_{z_1}\tau_{nn}$, где проектор P_{z_1} определен согласно (6.2).

На решениях задачи (6.13) выполнено

$$\lambda u_n=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1. \tag{6.16}$$

В силу (6.15) постоянную C можно определить из условия

$$\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1)\,dS=0. \tag{6.17}$$

Умножим (6.16) на $\overline{\tau_{nn}}$ и проинтегрируем по Γ: $\lambda\displaystyle\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1)\overline{\tau_{nn}}\,dS$. Используя формулу Грина (5.1), получаем, что при условиях из (6.13) справедливо равенство $\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$. С другой стороны, с учетом (6.17) и очевидного равенства $\int_\Gamma z_1\overline{P_{z_1}\tau_{nn}}\,dS=0$ имеем: $\displaystyle\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn}+Cz_1)\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_1}\tau_{nn})\overline{P_{z_1}\tau_{nn}}\,dS$.

Рассмотрим теперь случай, когда $Z_B=\{0\}$. Тогда на решениях задачи (6.13) выполнено

$$\lambda u_n=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}(\tau_{nn}+c_\tau). \tag{6.18}$$

В силу условия (6.15) из (6.18) следует, что

$$\int_\Gamma\mathbf{B}_\Gamma^{-1}(\tau_{nn}+c_\tau)\,dS=0, \tag{6.19}$$

что равносильно равенству $\int_\Gamma(\tau_{nn}+c_\tau)\overline{z_0}\,dS=0$, $z_0:=\mathbf{B}_\Gamma^{-1}1$. Заметим, что в рассматриваемом случае $\int_\Gamma\overline{z_0}\,dS=\int_\Gamma B_\Gamma z_0\overline{z_0}\,dS\neq0$. Отсюда следует, что постоянную c_τ можно определить из условия $c_\tau=-\dfrac{\int_\Gamma\tau_{nn}\overline{z_0}\,dS}{\int_\Gamma\overline{z_0}\,dS}$. Тогда $\tau_{nn}+c_\tau=P_{z_0}\tau_{nn}$. Умножим (6.18) на $\overline{\tau_{nn}}$ и проинтегрируем по Γ: $\lambda\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_0}\tau_{nn})\overline{\tau_{nn}}\,dS$. Как и прежде, в силу формулы Грина $\int_\Gamma u_n\overline{\tau_{nn}}\,dS=\mu E_\Omega[\mathbf{u}]$. С другой стороны, с учетом (6.19) выполнено $\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_0}\tau_{nn})\overline{\tau_{nn}}\,dS=\int_\Gamma(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}P_{z_0}\tau_{nn})\overline{P_{z_0}\tau_{nn}}\,dS$.

В итоге мы убедились, что задача (6.13) эквивалентна вариационной задаче о спектре отношения форм

$$\frac{\int_\Gamma (\mathbf{B}_\Gamma^{-1} P_z \tau_{nn}) \overline{P_z \tau_{nn}}\, dS}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1^\tau. \tag{6.20}$$

Здесь $z = z_1$, если $Z_B \neq \{0\}$, и $z = z_0$, если $Z_B = \{0\}$. В силу предложения 6.2 форма $E_\Omega[\mathbf{u}]$ задает эквивалентную норму в $\mathcal{H}_1^\tau$.

Отметим, что функции сравнения в (6.20) должны удовлетворять уравнению $-\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0$, а также условию равенства нулю касательных напряжений на Γ (в отличие от задачи о спектре отношения (5.4), в которой эти условия были естественными). Причина здесь в том, что числитель отношения (6.20) зависит от τ_{nn}, а тем самым и от функции p, а знаменатель — только от $\mathbf{u}$ (в то время как отношение (5.4) зависит только от $\mathbf{u}$). Поэтому функция p должна быть связана с $\mathbf{u}$. На определенном этапе решения задачи указанные выше «связи» будут сняты после того, как p будет выражено через $\mathbf{u}$.

Убедимся в том, что форма, стоящая в числителе отношения (6.20), компактна[1] в $\mathcal{H}_1^\tau$. По теореме о гомеоморфизмах оператор B_Γ осуществляет гомеоморфизм следующих пар пространств:

$$H^2_{\text{гр}}(\Gamma) := H^2(\Gamma) \cap H^1_0(\Gamma) \cap (L_2(\Gamma) \ominus Z_B) \to L_2(\Gamma) \ominus Z_B, \quad H^1_{\text{гр}}(\Gamma) := H^1_0(\Gamma) \cap (L_2(\Gamma) \ominus Z_B) \to H_Z^{-1}(\Gamma).$$

Здесь через $H_Z^{-1}(\Gamma)$ обозначено негативное пространство, построенное по нулевому $L_2(\Gamma) \ominus Z_B$ и позитивному $H^1_{\text{гр}}(\Gamma)$.

Пользуясь теорией интерполяции (см. [22]), получаем, что B_Γ осуществляет гомеоморфизм пространств $\big[H^2_{\text{гр}}(\Gamma), H^1_{\text{гр}}(\Gamma)\big]_{1/2} \to \big[L_2(\Gamma) \ominus Z_B, H_Z^{-1}(\Gamma)\big]_{1/2}$. Здесь через $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]_{1/2}$ обозначено промежуточное пространство между гильбертовыми пространствами $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, где $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1$ плотно в $\mathfrak{H}_2$ и непрерывно в него вложено; см. [22, §1.2.1].

Используя тот факт, что $\big[H^2(\Gamma), H^1(\Gamma)\big]_{1/2} = H^{3/2}(\Gamma)$, можно показать, что $\big[H^2_{\text{гр}}(\Gamma), H^1_{\text{гр}}(\Gamma)\big]_{1/2} = H^{3/2}(\Gamma) \cap H^1_0(\Gamma) \cap (L_2(\Gamma) \ominus Z_B) =: H^{3/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$.

Теорема 1.12.4 из [22] утверждает, что $\big[L_2(\Gamma), H^{-1}(\Gamma)\big]_{1/2} = (H^{1/2}_{00}(\Gamma))'$, где $H^{-1}(\Gamma) = (H^1_0(\Gamma))'$. Учитывая этот факт, нетрудно показать, что $\big[L_2(\Gamma) \ominus Z_B, H_Z^{-1}(\Gamma)\big]_{1/2} = H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$, где $H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ — негативное пространство, построенное по нулевому $L_2(\Gamma) \ominus Z_B$ и позитивному пространству $H^{1/2}_{\text{гр}}(\Gamma) := H^{1/2}_{00}(\Gamma) \cap (L_2(\Gamma) \ominus Z_B)$. Пространство $H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ можно отождествить с $\big\{\varphi \in (H^{1/2}_{00}(\Gamma))' : (\varphi, z_1) = 0\big\}$. Таким образом, B_Γ устанавливает гомеоморфизм

$$B_\Gamma : H^{3/2}_{\text{гр}}(\Gamma) \to H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma). \tag{6.21}$$

Поскольку оператор вложения $H^{3/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ в $H^{1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ компактен, то $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}$ — компактный оператор из $H^{-1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$ в $H^{1/2}_{\text{гр}}(\Gamma)$. Вместе с предложением 6.4 это показывает, что форма, стоящая в числителе (6.20), компактна в $\mathcal{H}_1^\tau$.

Пусть $b \in C^\infty(\overline{\Gamma})$, $z \in H^{1/2}_{00}(\Gamma)$ и $\int_\Gamma z\, dS \neq 0$. Обозначим $\mathcal{B}_{\Gamma,z}[\varphi] := \operatorname{Re} \int_\Gamma b(\mathbf{x})(\mathbf{B}_\Gamma^{-1} P_z \varphi)\overline{P_z \varphi}\, dS(\mathbf{x})$. Вместо (6.20) рассмотрим отношение форм более общего вида

$$\pm \frac{\mathcal{B}_{\Gamma,z}[\tau_{nn}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \{\mathbf{u}, p\} \in \mathcal{H}_1^\tau. \tag{6.22}$$

Теорема 6.1 прямо вытекает из следующей теоремы.

Теорема 6.2. *Пусть Ω удовлетворяет условию* 4.1. *Пусть $b(\mathbf{x})$ — гладкая вещественнозначная функция на $\overline{\Gamma}$. Тогда для функций распределения собственных значений отношения* (6.22) *при $\lambda \to +0$ справедлива асимптотика*

$$N_\pm(\lambda, (6.22)) \sim \lambda^{-2} \frac{\mu^2}{\pi\sigma^2} \int_\Gamma b_\pm^2(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}). \tag{6.23}$$

Доказательство теоремы 6.2 проведем по той же схеме, которая использовалась в предыдущих задачах.

---

[1]Отметим, что в случае третьего краевого условия на γ соответствующая форма даже не ограничена в $\mathcal{H}_1^\tau$; см. [29, §8].

6.4. Оценки спектра отношения (6.22).

Лемма 6.1. *Пусть $b(\mathbf{x})$ — гладкая вещественнозначная функция на $\overline{\Gamma}$. Справедливы оценки $\Delta_2^\pm$ (6.22) $\leqslant C\|b\|^2_{L_2(\Gamma)}$, где C не зависит от функции b.*

Доказательство. В силу предложения 6.4 и неравенства Корна (5.6), $E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\,\|P_z\tau_{nn}\|^2_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'}$, $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1$, $C>0$. В силу леммы 2.2 отсюда вытекает, что функции $N_\pm(\lambda,(6.22))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm C\frac{\operatorname{Re}\int_\Gamma b(\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\psi)\overline{\psi}\,dS}{\|\psi\|^2_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'}},\quad \psi\in(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'. \tag{6.24}$$

Выполним в (6.24) замену $\mathbf{B}_\Gamma^{-1}\psi=f$. Тогда (см. (6.21)) $f\in H^{3/2}(\Gamma)\cap H_0^1(\Gamma)$ и $\|f\|_{H^{3/2}(\Gamma)}\leqslant C\|\psi\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'}$. Применяя лемму 2.2, получаем, что функции $N_\pm(\lambda,(6.24))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm C\frac{\operatorname{Re}\int_\Gamma bf\overline{B_\Gamma f}\,dS}{\|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)}},\quad f\in H^{3/2}(\Gamma)\cap H_0^1(\Gamma). \tag{6.25}$$

Интегрируя по частям в числителе (6.25) и отбрасывая младшие по порядку члены, получаем, что величины $\Delta_2^\pm$ (6.25) не превосходят аналогичных величин для отношения

$$\pm C\frac{\int_\Gamma b|\nabla_\Gamma f|^2\,dS}{\|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)}},\quad f\in H^{3/2}(\Gamma). \tag{6.26}$$

Делая замену $\nabla_\Gamma f=:\mathbf{g}$ и пользуясь леммой 2.8, приходим к оценке $\Delta_2^\pm$ (6.26) $\leqslant C\|b\|^2_{L_2(\Gamma)}$. $\square$

Леммы 6.1 и 2.5 позволяют при вычислении главного члена асимптотики спектра отношения (6.22) ограничиться рассмотрением случая, когда $b\in C_0^\infty(\Gamma)$.

6.5. Сравнение с задачами в гладкой области. Фиксируем вещественнозначную функцию $z_2\in C_0^\infty(\Gamma)$, $\int_\Gamma z_2\,dS=1$. В соответствии с леммой 2.6 и следствием 6.1 величины $\Delta_2^\pm$ (6.22), $\delta_2^\pm$ (6.22) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{\mathcal{B}_{\Gamma,z_2}[\tau_{nn}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]},\quad \{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^\tau,\quad P_z\tau_{nn}=P_{z_2}\tau_{nn}. \tag{6.27}$$

Имеем:

$$\Delta_2^\pm\ (6.22)=\Delta_2^\pm\ (6.27),\quad \delta_2^\pm\ (6.22)=\delta_2^\pm\ (6.27). \tag{6.28}$$

Итак, пусть $b\in C_0^\infty(\Gamma)$. Пусть $\widetilde{\Omega}$ — ограниченная область с гладкой границей такая, что $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{supp} b$ и $\operatorname{supp} z_2$ лежат строго внутри множества $\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$. Пусть $\widetilde{b}\in C^\infty(\partial\widetilde{\Omega})$ — функция, совпадающая с $b(\mathbf{x})$ на $\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$ и равная нулю вне этого множества. Аналогично определяется функция $\widetilde{z}_2\in C^\infty(\partial\widetilde{\Omega})$. Пусть $d(\mathbf{x})$ — некоторая гладкая положительная функция на $\partial\widetilde{\Omega}$. Рассмотрим дифференциальное выражение $B_{\partial\widetilde{\Omega}}:=-\sigma\Delta_{\partial\widetilde{\Omega}}+d(\mathbf{x})$, где $\Delta_{\partial\widetilde{\Omega}}$ — оператор Лапласа—Бельтрами на $\partial\widetilde{\Omega}$. Оператор $\mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ (ср. с пунктом 4.3) задан выражением $B_{\partial\widetilde{\Omega}}$ на области определения $H^2(\partial\widetilde{\Omega})$. Обратный оператор $\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}$ есть ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка (-2). Через $P_{\widetilde{z}_2}$ обозначим проектор в $L_2(\partial\widetilde{\Omega})$, действующий по формуле $(P_{\widetilde{z}_2}f)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\int_{\partial\widetilde{\Omega}}f(\mathbf{y})\widetilde{z}_2(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$.

Пусть $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внутренней нормали к $\partial\widetilde{\Omega}$. На $\partial\widetilde{\Omega}$ определим функцию $\widetilde{\tau}_{\nu\nu}=\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{u},p)$ (аналогично τ_{nn} на Γ). Имеем: $\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{x})=\langle\tau(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}),\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\rangle$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$. Отметим, что $\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{x})=\tau_{nn}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}\cap\Gamma$. Положим $\widetilde{\mathcal{B}}[\varphi]:=\operatorname{Re}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}(\mathbf{x})\big(\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}P_{\widetilde{z}_2}\varphi\big)\overline{P_{\widetilde{z}_2}\varphi}\,dS(\mathbf{x})$.

Рассмотрим отношение форм

$$\pm\frac{\widetilde{\mathcal{B}}[\widetilde{\tau}_{\nu\nu}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]},\quad \{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^\tau. \tag{6.29}$$

Аналогом леммы 4.2 является следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Справедливы равенства*
$$\Delta_2^{\pm}\ (6.27) = \Delta_2^{\pm}\ (6.29), \quad \delta_2^{\pm}\ (6.27) = \delta_2^{\pm}\ (6.29). \tag{6.30}$$

Доказательство. В соответствии с леммой 2.6 величины $\Delta_2^{\pm}$ (6.29), $\delta_2^{\pm}$ (6.29) не изменятся, если рассматривать отношение на подпространстве конечной коразмерности в $\mathcal{H}_1^{\tau}$, выделяемом условием $P_z\tau_{nn} = P_{z_2}\tau_{nn}$. Обозначим $\Lambda[\{\mathbf{u},p\}] = \mathcal{B}_{\Gamma,z_2}[\tau_{nn}] - \widetilde{\mathcal{B}}[\widetilde{\tau}_{\nu\nu}]$. Рассмотрим отношение форм
$$\pm\frac{\Lambda[\{\mathbf{u},p\}]}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^{\tau}, \quad P_z\tau_{nn} = P_{z_2}\tau_{nn}. \tag{6.31}$$
В силу леммы 2.4 равенства (6.30) будут доказаны, коль скоро будет показано, что Δ_2^{+} (6.31) $=$ $\Delta_2^{-}(6.31) = 0$.

Пусть $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1^{\tau}$ и $P_z\tau_{nn} = P_{z_2}\tau_{nn}$. Обозначим $f = \mathbf{B}_{\Gamma}^{-1}P_{z_2}\tau_{nn}$, $g = \mathbf{B}_{\partial\widetilde{\Omega}}^{-1}P_{\widetilde{z}_2}\widetilde{\tau}_{\nu\nu}$. Пусть $\widetilde{\Gamma}$ — открытое множество, лежащее строго внутри $\Gamma\cap\partial\widetilde{\Omega}$, $\operatorname{supp} b\subset\widetilde{\Gamma}$, $\operatorname{supp} z_2\subset\widetilde{\Gamma}$. Можно считать, что $\widetilde{\Gamma}$ — двумерная поверхность с достаточно гладкой границей. Заметим, что $P_{z_2}\tau_{nn}(\mathbf{x}) = P_{\widetilde{z}_2}\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$. Следовательно, $(B_\Gamma f)(\mathbf{x}) = (B_{\partial\widetilde{\Omega}}g)(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x}\in\widetilde{\Gamma}$. Преобразуем форму $\Lambda[\{\mathbf{u},p\}]$ (ср. с доказательством леммы 4.2):
$$\Lambda[\{\mathbf{u},p\}] = \operatorname{Re}\left(\int_\Gamma bf\overline{B_\Gamma f}\,dS - \int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}g\overline{B_{\partial\widetilde{\Omega}}g}\,dS\right) =$$
$$= \operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}\left(-\sigma(\Delta b)(f-g)\overline{g} - 2\sigma\nabla b\cdot(\nabla f-\nabla g)\overline{g} + b(d-h)f\overline{g}\right)dS.$$
Отсюда видно, что $\Lambda[\{\mathbf{u},p\}] = \operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}(B'f+B''g)\overline{g}\,dS$, где B', B'' — дифференциальные операторы первого порядка.

Справедливо неравенство
$$E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\left(\|g\|^2_{H^{3/2}(\partial\widetilde{\Omega})} + \|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)}\right), \quad C>0. \tag{6.32}$$
Действительно, неравенство $\|f\|^2_{H^{3/2}(\Gamma)} \leqslant CE_\Omega[\mathbf{u}]$ было установлено в доказательстве леммы 6.1. Аналогичное неравенство для $\|g\|^2_{H^{3/2}(\partial\widetilde{\Omega})}$ проверить только проще, поскольку $\partial\widetilde{\Omega}\in C^\infty$.

Из (6.32) вытекает неравенство $E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\big(\|g\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})} + \|B'f+B''g\|^2_{H^{1/2}(\widetilde{\Gamma})}\big)$, $C>0$. В силу леммы 2.2 функции $N_\pm(\lambda,(6.31))$ не превосходят функций распределения спектра отношения
$$\pm\frac{\operatorname{Re}\int_{\widetilde{\Gamma}}\psi\overline{g}\,dS}{\mu C\big(\|\psi\|^2_{H^{1/2}(\widetilde{\Gamma})} + \|g\|^2_{H^{3/2}(\widetilde{\Gamma})}\big)}, \quad \{\psi,g\}\in H^{1/2}(\widetilde{\Gamma})\oplus H^{3/2}(\widetilde{\Gamma}). \tag{6.33}$$
Применяя лемму 2.9, получаем, что $N_\pm(\lambda,(6.33)) = O(\lambda^{-1})$, а потому $\Delta_2^{\pm}$ (6.33) $= 0$. Тогда и $\Delta_2^{\pm}$ (6.31) $= 0$. □

Наша цель теперь — сравнить отношение (6.29) с аналогичным отношением форм, заданным в гладкой области $\widetilde{\Omega}$. Непосредственному проведению такого сравнения мешает наличие связей: уравнение $-\mu\Delta\mathbf{u}+\nabla p = 0$ в Ω и граничное условие $\boldsymbol{\tau}_{tn} = 0$ на Γ. Преобразуем числитель отношения (6.29) с тем, чтобы можно было «снять» эти связи (см. ниже лемму 6.3). Для $\{\mathbf{u},p\}\in\mathcal{H}_1$ обозначим $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{u}|_{\partial\widetilde{\Omega}}$. Тогда в $\widetilde{\Omega}$ справедливо равенство $\{\mathbf{u},p\} = \mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}$. Оператор $\mathcal{G}$ был определен в пункте 5.4. Из свойств алгебры Буте де Монвеля следует, что
$$\widetilde{\tau}_{\nu\nu}(\mathcal{G}\boldsymbol{\varphi}) = \mathcal{T}\boldsymbol{\varphi} + \mathrm{Const}, \tag{6.34}$$
где $\mathcal{T}$ — ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 1. В (6.34) присутствует произвольная постоянная, связанная с тем, что функция $p = p(\boldsymbol{\varphi})$ определена с точностью до произвольной постоянной. Локально в окрестности U некоторой точки $\mathbf{x}_0\in\partial\widetilde{\Omega}$ выберем ортогональную криволинейную систему координат так, чтобы координатные линии для третьей координаты в точке $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$ были направлены по нормали $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, а соответствующий коэффициент Ламе на $\partial\widetilde{\Omega}$ равнялся 1. В этой координатной системе старший символ ПДО $\mathcal{T}$ есть строка $t^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \{t_1^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), t_2^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}), t_3^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\}$ с элементами
$$t_j^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -Y_4^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},0) + 2\mu\Big(\frac{d}{dt}Y_3^{(j)}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi},t)\Big)\Big|_{t=0}, \quad \mathbf{x}\in U, \quad \boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}),$$

где функции $Y^{(j)}$ определены в (5.30). Вычисление показывает, что $t_1^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = t_2^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = 0$, $t_3^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = -2\mu|\boldsymbol{\xi}|$. Из (6.34) вытекает справедливость представления

$$\widetilde{\mathcal{B}}[\widetilde{\tau}_{\nu\nu}] = \operatorname{Re}\int_{\partial\widetilde{\Omega}} \widetilde{b}(\mathbf{B}^{-1}_{\partial\widetilde{\Omega}}\mathcal{T}\boldsymbol{\varphi})\overline{\mathcal{T}\boldsymbol{\varphi}}\,dS + \mathcal{D}[\boldsymbol{\varphi}], \tag{6.35}$$

где $\mathcal{D}$ — форма конечного ранга. Обозначим через $\mathcal{R}$ матричный ПДО порядка 0 на $\partial\widetilde{\Omega}$, отвечающий первому слагаемому в правой части (6.35). Старший символ ПДО $\mathcal{R}$ имеет вид

$$r^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \frac{\widetilde{b}(\mathbf{x})}{\sigma|\boldsymbol{\xi}|^2}\big(t^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\big)^+ t^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\mu^2\sigma^{-1}\widetilde{b}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{6.36}$$

Положим

$$J^1_S(\Omega,\mathcal{L}) = \big\{\mathbf{u}\in J^1_S(\Omega) : -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 \text{ для некоторого } p\in L_2(\Omega)\big\},$$
$$\widetilde{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L}) = \big\{\mathbf{u}\in J^1_S(\Omega,\mathcal{L}) :\ \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}) = 0 \text{ на } \Gamma\big\}.$$

Рассмотрим отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in\widetilde{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L}), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.37}$$

В силу леммы 2.4 из представления (6.35) следует справедливость равенств

$$\Delta_2^\pm\ (6.29) = \Delta_2^\pm\ (6.37), \quad \delta_2^\pm\ (6.29) = \delta_2^\pm\ (6.37). \tag{6.38}$$

Покажем, что главный член асимптотики спектра не изменится, если снять часть связей — заменить (6.37) на отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J^1_S(\Omega), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.39}$$

Лемма 6.3. *Выполнены равенства*

$$\Delta_2^\pm\ (6.37) = \Delta_2^\pm\ (6.39), \quad \delta_2^\pm\ (6.37) = \delta_2^\pm\ (6.39). \tag{6.40}$$

Доказательство. Положим $J^1_0(\Omega) := J^1(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$. Верно разложение $J^1_S(\Omega) = J^1_0(\Omega)\oplus^E J^1_S(\Omega,\mathcal{L})$, где ортогональная сумма понимается в смысле скалярного произведения $E_\Omega[\mathbf{u},\mathbf{v}]$.

Далее, положим $\widehat{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L}) = \big\{\mathbf{u}\in J^1_S(\Omega,\mathcal{L}) : u_n = 0 \text{ на } \Gamma\big\}$. Предложение 6.6 показывает, что $J^1_S(\Omega,\mathcal{L}) = \widehat{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L})\oplus\widetilde{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L})$. Таким образом,

$$J^1_S(\Omega) = J^1_0(\Omega)\oplus\widehat{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L})\oplus\widetilde{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L}). \tag{6.41}$$

Положим $(\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) = 4\mu^2\sigma^{-1}\widetilde{b}(\mathbf{x})\varphi_\nu(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\partial\widetilde{\Omega}$, где φ_ν — нормальная компонента $\boldsymbol{\varphi}$ на $\partial\widetilde{\Omega}$. Тогда $\widehat{\mathcal{R}}$ — матричный ПДО на $\partial\widetilde{\Omega}$ порядка 0 со старшим символом $r^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$. Поэтому $(\mathcal{R}-\widehat{\mathcal{R}})$ — ПДО порядка не выше (-1). Рассмотрим отношение

$$\pm\frac{((\mathcal{R}-\widehat{\mathcal{R}})\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J^1_S(\Omega), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.42}$$

Учитывая неравенство $E_\Omega[\mathbf{u}] \geqslant C\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}$, $C>0$, в силу леммы 2.2 получаем, что функции $N_\pm(\lambda,(6.42))$ не превосходят функций распределения спектра отношения

$$\pm\frac{((\mathcal{R}-\widehat{\mathcal{R}})\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu C\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega})}}, \quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3). \tag{6.43}$$

Поскольку $N_\pm(\lambda,(6.43)) = O(\lambda^{-1})$, то $\Delta_2^\pm\ (6.43) = 0$. Отсюда в силу леммы 2.4 следует, что величины $\Delta_2^\pm\ (6.39)$, $\delta_2^\pm\ (6.39)$ совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{(\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_\Omega[\mathbf{u}]}, \quad \mathbf{u}\in J^1_S(\Omega), \quad \boldsymbol{\varphi} := \mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}, \tag{6.44}$$

а величины $\Delta_2^{\pm}$ (6.37), $\delta_2^{\pm}$ (6.37) совпадают с аналогичными величинами для отношения

$$\pm\frac{(\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_{\Omega}[\mathbf{u}]},\quad \mathbf{u}\in\widetilde{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L}),\quad \boldsymbol{\varphi}:=\mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.45}$$

Заметим, что $\widehat{\mathcal{R}}\boldsymbol{\varphi}=0$ при $\mathbf{u}\in J_0^1(\Omega)\oplus\widehat{J}^1_S(\Omega,\mathcal{L})$. Поэтому в силу (6.41) выполнено $N_{\pm}(\lambda,(6.44))=N_{\pm}(\lambda,(6.45))$. С учетом сказанного выше отсюда вытекают равенства (6.40). □

Из леммы 6.3, леммы 6.2 и равенств (6.28), (6.38) следует, что

$$\Delta_2^{\pm}\ (6.22)=\Delta_2^{\pm}\ (6.39),\quad \delta_2^{\pm}\ (6.22)=\delta_2^{\pm}\ (6.39). \tag{6.46}$$

Проведем теперь сравнение отношения (6.39) с отношениями форм, заданными в $\widetilde{\Omega}$. Для оценки $\Delta_2^{\pm}$ (6.39) сверху рассмотрим отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]+C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\widetilde{\Omega})}},\quad \mathbf{u}\in J^1(\widetilde{\Omega}),\quad \boldsymbol{\varphi}:=\mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.47}$$

Здесь постоянная C настолько велика, что форма в знаменателе (6.47) определяет эквивалентную норму в $H^1(\widetilde{\Omega})$. Справедливо неравенство

$$\Delta_2^{\pm}\ (6.39)\leqslant\Delta_2^{\pm}\ (6.47). \tag{6.48}$$

Доказательство неравенства (6.48) аналогично доказательству неравенства (5.10) — следует воспользоваться леммой 2.2, в которой $\mathcal{S}$ — оператор сужения.

Для оценки $N_{\pm}(\lambda,(6.39))$ снизу рассмотрим отношение

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu E_{\widetilde{\Omega}}[\mathbf{u}]},\quad \mathbf{u}\in J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega}),\quad \boldsymbol{\varphi}:=\mathbf{u}\big|_{\partial\widetilde{\Omega}}. \tag{6.49}$$

Здесь $\widetilde{S}=\partial\widetilde{\Omega}\setminus\widetilde{\Gamma}$ и $J^1_{\widetilde{S}}(\widetilde{\Omega})=\{\mathbf{u}\in J^1(\widetilde{\Omega}):\ \mathbf{u}|_{\widetilde{S}}=0\}$. По аналогии с доказательством неравенства (5.12), используя лемму 2.2 и оператор продолжения нулем, получаем, что

$$N_{\pm}(\lambda,(6.49))\leqslant N_{\pm}(\lambda,(6.39)). \tag{6.50}$$

6.6. Асимптотические формулы в гладком случае. Учитывая (6.46), (6.48) и (6.50), заключаем, что асимптотика спектра отношения (6.22) будет найдена, коль скоро будет установлено следующее утверждение.

Лемма 6.4. *При $\lambda\to+0$ справедливы асимптотические формулы*

$$N_{\pm}(\lambda,(6.47))\sim N_{\pm}(\lambda,(6.49))\sim\lambda^{-2}\frac{\mu^2}{\pi\sigma^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}\widetilde{b}^2_{\pm}(\mathbf{x})\,dS(\mathbf{x}). \tag{6.51}$$

Доказательство. По аналогии с доказательством леммы 5.2 нетрудно показать, что задача о спектре отношения (6.47) эквивалентна (в смысле асимптотики спектра) задаче о спектре отношения

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3), \tag{6.52}$$

а задача о спектре отношения (6.49) эквивалентна (в смысле асимптотики спектра) задаче о спектре отношения

$$\pm\frac{(\mathcal{R}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}}{\mu(\mathcal{E}\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\widetilde{\Omega})}},\quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\widetilde{\Omega};\mathbb{C}^3),\quad \boldsymbol{\varphi}|_{\widetilde{S}}=0. \tag{6.53}$$

ПДО $\mathcal{E}$ определен в пункте 5.4. Как и прежде, за счет изменения младших членов в $\mathcal{E}$ мы считаем выполненным неравенство (5.19). Рассмотрим алгебраическую задачу

$$r^{\circ}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z}=\lambda\mu e^{\circ}(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})\mathbf{z},\quad \mathbf{z}\in\mathbb{C}^3. \tag{6.54}$$

Из леммы 2.10 и леммы 2.11 следует справедливость асимптотических формул при $\lambda\to+0$:

$$N_{\pm}(\lambda,(6.52))\sim\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\partial\widetilde{\Omega}}dS(\mathbf{x})\int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})}d\boldsymbol{\xi}\,n_{\pm}(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (6.54)), \tag{6.55}$$

$$N_\pm(\lambda,(6.53)) \sim \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\widetilde{\Gamma}} dS(\mathbf{x}) \int_{\boldsymbol{\xi}\perp\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})} d\boldsymbol{\xi}\, n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (6.54)). \tag{6.56}$$

В соответствии с выражениями для $r^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ и $e^\circ(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})$ (см. (5.31), (6.36)) имеем:

$$n_\pm(\lambda,\mathbf{x},\boldsymbol{\xi};\ (6.54)) = \begin{cases} 1, & \lambda < \frac{2\mu\widetilde{b}_\pm(\mathbf{x})}{\sigma|\boldsymbol{\xi}|}, \\ 0, & \lambda \geqslant \frac{2\mu\widetilde{b}_\pm(\mathbf{x})}{\sigma|\boldsymbol{\xi}|}. \end{cases}$$

Вычисляя по формулам (6.55) и (6.56), получаем (6.51). □

Из (6.46), (6.48), (6.50) и леммы 6.4 вытекает формула (6.23) в случае, когда $b \in C_0^\infty(\Gamma)$. По замыканию асимптотика верна для любой $b \in C^\infty(\overline{\Gamma})$. Теорема 6.2, а вместе с ней и теорема 6.1, доказаны.

6.7. Колебания системы капиллярных вязких жидкостей. Теорема 5.1 допускает обобщение на случай колебаний системы капиллярных вязких жидкостей, частично или полностью заполняющих сосуд. Для определенности рассмотрим случай полного заполнения. Мы ограничимся постановкой задачи и формулировкой результата.

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условию 4.3. Для системы вектор-функций $\{\mathbf{u}_j(\mathbf{x})\}$, $j = 1,\dots,k+1$, и системы скалярных функций $\{p_j(\mathbf{x})\}$, $j = 1,\dots,k+1$, рассматривается краевая задача

$$\begin{aligned}
&-\mu_j\Delta\mathbf{u}_j + \nabla p_j = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_j = 0 \ \text{ в } \Omega_j, \quad j=1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j = 0 \ \text{ на } S_j, \quad j=1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j+1}, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_j) = \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_{j+1}) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j=1,\dots,k,\\
&\left(-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j} + h_j(\mathbf{x})\right)u_{jn} = \lambda^{-1}\left(\tau_{nn}^{(j)} - \tau_{nn}^{(j+1)} + c_j\right) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j=1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Здесь $u_{jn}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{u}_j(\mathbf{x}), \mathbf{n}_j(\mathbf{x})\rangle$, $\tau_{nn}^{(j)} := \tau_{nn}(\mathbf{u}_j, p_j)$; $\mu_j > 0$, $\sigma_j > 0$ — постоянные; $h_j \in C^\infty(\overline{\Gamma_j})$ — вещественные функции. Постоянные c_j ищутся вместе с решением.

Через $\mathbf{B}_j$ обозначим оператор в $L_2(\Gamma_j)$, заданный выражением $-\sigma_j\Delta_{\Gamma_j} + h_j(\mathbf{x})$ на области определения $\operatorname{Dom}\mathbf{B}_j = H^2(\Gamma_j)\cap H_0^1(\Gamma_j)$.

Приведем вариационную постановку задачи (6.57) в случае, когда операторы $\mathbf{B}_j$ обратимы (общий случай можно рассмотреть по аналогии с пунктом 6.2). Пусть $z_j = \mathbf{B}_j^{-1}1$ и P_{z_j} — проектор в $L_2(\Gamma_j)$, определенный аналогично (6.2).

Задача (6.57) эквивалентна задаче о спектре отношения квадратичных форм

$$\begin{aligned}
&\pm\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}\int_{\Gamma_j}\left(\mathbf{B}_j^{-1}P_{z_j}\left(\tau_{nn}^{(j)} - \tau_{nn}^{(j+1)}\right)\right)\overline{P_{z_j}\left(\tau_{nn}^{(j)} - \tau_{nn}^{(j+1)}\right)}\,dS}{\sum\limits_{j=1}^{k+1}\mu_j E_{\Omega_j}[\mathbf{u}_j]},\\
&\mathbf{u}_j \in H^1(\Omega_j;\mathbb{C}^3), \quad p_j \in L_2(\Omega_j), \quad j=1,\dots,k+1,\\
&-\mu_j\Delta\mathbf{u}_j + \nabla p_j = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}_j = 0 \ \text{ в } \Omega_j, \quad \mathbf{u}_j = 0 \ \text{ на } S_j, \quad j=1,\dots,k+1,\\
&\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{j+1}, \quad \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_j) = \boldsymbol{\tau}_{tn}(\mathbf{u}_{j+1}) \ \text{ на } \Gamma_j, \quad j=1,\dots,k.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Предложение 6.8. *При сделанных предположениях для функции распределения спектра отношения* (6.58) *при* $\lambda \to +0$ *справедлива асимптотика*:

$$N(\lambda,(6.58)) \sim \lambda^{-2}\sum_{j=1}^{k}(\mu_j+\mu_{j+1})^2\frac{\operatorname{mes}\Gamma_j}{\pi\sigma_j^2}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка// Функц. анализ и его прилож. — 2011. — *45*, № 2. — С. 1–22.
2. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.

3. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика негладких эллиптических операторов. I// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1972. — № 27. — С. 3–52.
7. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории// В сб.: «Десятая мат. школа». — Киев, 1974. — С. 5–189.
8. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами. I// Вестн. Ленингр. ун-та. — 1977. — № 13. — С. 13–21.
9. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
10. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами. II// Вестн. Ленингр. ун-та. — 1979. — № 13. — С. 5–10.
11. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений// Сиб. мат. ж. — 1979. — *20*, № 1. — С. 3–22.
12. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических систем// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1982. — *115*. — С. 23–39.
13. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Компактные операторы со степенной асимптотикой сингулярных чисел// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1983. — *126*. — С. 21–30.
14. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. Ленингр. ун-та — 1973. — № 19. — С. 262–265.
15. *Каразеева Н. А., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра контактной задачи для эллиптических уравнений второго порядка// Пробл. мат. анализа. — 1981. — № 8. — С. 36–48.
16. *Кожевников А. Н.* Об асимптотике собственных значений и полноте корневых векторов оператора, порожденного краевой задачей с параметром в краевом условии// Докл. АН СССР. — 1971. — *200*, № 6. — С. 1273–1276.
17. *Кожевников А. Н.* Спектральные задачи для псевдодифференциальных систем, эллиптических по Дуглису—Ниренбергу// Мат. сб. — 1973. — *92*, № 1. — С. 60–88.
18. *Копачевский Н. Д.* Нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1978. — № 7. — С. 586–590.
19. *Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. — Харьков: ФТИНТ АН УССР, Препринт 33–77. — 1978.
20. *Копачевский Н. Д.* Теория малых колебаний жидкостей с учетом сил поверхностного натяжения и вращения// Дисс. доктора физ.-мат. наук. — Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1979.
21. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. — М.: Наука, 1989.
22. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
23. *Лукьянов В. В., Назаров А. И.* Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1998. — *250*. — С. 203–218.
24. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.: Гостехиздат, 1952.
25. *Розенблюм Г. В.* Асимптотика собственных значений некоторых двумерных спектральных задач// Пробл. мат. анализа. — 1979. — *7*. — С. 188–203.
26. *Розенблюм Г. В.* Частное сообщение. — 2021.
27. *Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Пространства Соболева// В сб.: «Избранные главы анализа и высшей алгебры». — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981.
28. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях однородного эллиптического уравнения при наличии связей на части границы// Пробл. мат. анализа. — 1984. — № 9. — С. 84–97.
29. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей// Деп. в ВИНИТИ. — 1985. — № 8058-В.
30. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1985. — *147*. — С. 179–183.
31. *Суслина Т. А.* Об асимптотике спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1986. — *152*. — С. 158–164.
32. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра двух модельных задач теории колебаний жидкостей// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1996. — *4*. — С. 287–322.

33. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
34. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1984.
35. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators// Acta Math. — 1971. — *126.* — С. 11–51.
36. *Galkowski J., Toth J. A.* Poinwise bounds for Steklov eigenfunctions// J. Geom. Anal. — 2019. — *29.* — С. 142–193.
37. *Girouard A., Polterovich I.* Spectral geometry of the Steklov problem// J. Spectr. Theory — 2017. — *7*, № 2. — С. 321–359.
38. *Grubb G.* Functional calculus of pseudodifferential boundary problems. — Boston: Birkhäuser, 1996.
39. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227.* — С. 247–276.
40. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2001.
41. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Non-self-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
42. *Maz'ya V. G., Plamenevskii B. A.* The first boundary value problem for the classical equations of mathematical physics. I// Z. Anal. Anwend. — 1983. — *2*, № 1. — С. 335–359.
43. *Metivier G.* Valeurs propres d'operateurs definis par la restriction de systemes variationnels a des sous-espaces// J. Math. Pures Appl. — 1978. — *57*, № 2. — С. 133–156.
44. *Sandgren L.* A vibration problem// Medd. Lunds Univ. Mat. Semin. — 1955. — *13.*
45. *Suslina T. A.* Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary// Russ. J. Math. Phys. — 1999. — *6*, № 2. — С. 214–234.
46. *Zhu J.* Geometry and interior nodal sets of Steklov eigenfunctions// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2020. — *59*, № 5. — Paper No. 150.

Т. А. Суслина
Санкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., дом 7/9, Санкт-Петербург, 199034
E-mail: `t.suslina@spbu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-363-407 UDC 517.95

Asymptotics of the Spectrum of Variational Problems Arising in the Theory of Fluid Oscillations

© 2021 **T. A. Suslina**

Abstract. This work is a survey of results on the asymptotics of the spectrum of variational problems arising in the theory of small oscillations of a fluid in a vessel near the equilibrium position. The problems were posed by N. D. Kopachevsky in the late 1970s and cover various fluid models. The formulations of problems are given both in the form of boundary-value problems for eigenvalues in the domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, which is occupied by the fluid in the equilibrium state, and in the form of variational problems on the spectrum of the ratio of quadratic forms. The common features of all the problems under consideration are the presence of an "elliptic" constraint (the Laplace equation for an ideal fluid or a homogeneous Stokes system for a viscous fluid), as well as the occurrence of the spectral parameter in the boundary condition on the free (equilibrium) surface Γ. The spectrum in the considered problems is discrete; the spectrum distribution functions have power-law asymptotics.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, “Smeshannye zadachi v lipshitsevoy oblasti dlya sil’no ellipticheskikh sistem 2-go poryadka” [Mixed problems in a Lipschitz domain for strongly elliptic second-order systems], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2011, **45**, No. 2, 1–22 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTsNMO, Moscow, 2013 (in Russian).
3. V. G. Babskii, N. D. Kopachevsky, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Gidromekhanika nevesomosti* [Zero Gravity Hydromechanics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
4. Yu. M. Berezanskii, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
5. O. V. Besov, V. P. Il’in, and S. M. Nikol’skii, *Integral’nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
6. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika negladkikh ellipticheskikh operatorov. I” [Spectral Asymptotics of Nonsmooth Elliptic Operators. I], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1972, No. 27, 3–52 (in Russian).
7. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Kolichestvennyi analiz v teoremakh vlozheniya Soboleva i prilozheniya k spektral’noy teorii” [Quantitative Analysis in Sobolev Embedding Theorems and Applications to Spectral Theory], In: *Desyataya mat. shkola* [Tenth Math. School], Kiev, 1974, pp. 5–189 (in Russian).
8. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra psevdodifferentsial’nykh operatorov s anizotropno-odnorodnymi simvolami. I” [Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropic homogeneous symbols. I], *Vestn. Leningr. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1977, No. 13, 13–21 (in Russian).
9. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra differentsial’nykh uravneniy” [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
10. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra psevdodifferentsial’nykh operatorov s anizotropno-odnorodnymi simvolami. II” [Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropic homogeneous symbols. II], *Vestn. Leningr. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1979, No. 13, 5–10 (in Russian).
11. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskikh uravneniy” [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of elliptic equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1979, **20**, No. 1, 3–22 (in Russian).
12. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskikh sistem” [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of elliptic systems], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1982, **115**, 23–39 (in Russian).
13. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, “Kompaktnye operatory so stepennoy asimptotikoy singulyarnykh chisel” [Compact operators with power asymptotics for singular numbers], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1983, **126**, 21–30 (in Russian).
14. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, “Spektral’naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova” [Spectral asymptotics of the degenerate Steklov problem], *Vestn. Leningr. un-ta* [Bull. Leningrad Univ.], 1973, No. 19, 262–265 (in Russian).
15. N. A. Karazeeva and M. Z. Solomyak, “Asimptotika spektra kontaktnoy zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka” [Asymptotics of the spectrum of a contact problem for second-order elliptic equations], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1981, No. 8, 36–48 (in Russian).
16. A. N. Kozhevnikov, “Ob asimptotike sobstvennykh znacheniy i polnote kornevykh vektorov operatora, porozhdennogo kraevoy zadachey s parametrom v kraevom uslovii” [On the asymptotics of the eigenvalues and the completeness of the root vectors of an operator generated by a boundary-value problem with a parameter in the boundary condition], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1971, **200**, No. 6, 1273–1276 (in Russian).
17. A. N. Kozhevnikov, “Spektral’nye zadachi dlya psevdodifferentsial’nykh sistem, ellipticheskikh po Duglisu—Nirenbergu” [Spectral problems for pseudodifferential systems elliptic in the Douglis–Nirenberg sense], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1973, **92**, No. 1, 60–88 (in Russian).
18. N. D. Kopachevsky, “Normal’nye kolebaniya sistemy tyazhelykh vyazkikh vrashchayushchikhsya zhidkostey” [Normal oscillations of a system of heavy viscous rotating fluids], *Dokl. AN USSR. Ser. A* [Rep. Acad. Sci. Ukr. SSR. Ser. A], 1978, No. 7, 586–590 (in Russian).

19. N. D. Kopachevsky, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy tyazhelykh vyazkikh vrashchayushchikhsya zhidkostey" [Small Movements and Normal Oscillations of a System of Heavy Viscous Rotating Fluids], Khar'kov, FTINT AN Ukr. SSR, 1978, Preprint 33–77.
20. N. D. Kopachevsky, "Teoriya malykh kolebaniy zhidkostey s uchetom sil poverkhnostnogo natyazheniya i vrashcheniya" [Theory of small oscillations of liquids taking into account the forces of surface tension and rotation], *Doctoral Thesis*, FTINT AN Ukr. SSR, Khar'kov, 1979.
21. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
22. J. L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
23. V. V. Luk'yanov and A. I. Nazarov, "Reshenie zadachi Venttselya dlya uravneniya Laplasa i Gel'mgol'tsa s pomoshch'yu povtornykh potentsialov" [Solution of the Wentzell problem for the Laplace and Helmholtz equation using repeated potentials], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1998, **250**, 203–218 (in Russian).
24. S. G. Mikhlin, *Problema minimuma kvadratichnogo funktsionala* [The problem of the Minimum of a Quadratic Functional], Gostekhizdat, Moscow, 1952 (in Russian).
25. G. V. Rozenblum, "Asimptotika sobstvennykh znacheniy nekotorykh dvumernykh spektral'nykh zadach" [Asymptotics of the eigenvalues of some two-dimensional spectral problems], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1979, **7**, 188–203 (in Russian).
26. G. V. Rozenblum, Personal communication, 2021 (in Russian).
27. V. A. Solonnikov and N. N. Ural'tseva, "Prostranstva Soboleva" [Sobolev spaces], In: *Izbrannye glavy analiza i vysshey algebry* [Selected Chapters of Analysis and Higher Algebra], Leningrad Univ., Leningrad, 1981, pp. 129–196 (in Russian).
28. T. A. Suslina, "Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh odnorodnogo ellipticheskogo uravneniya pri nalichii svyazey na chasti granitsy" [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of a homogeneous elliptic equation in the presence of constraints on a part of the boundary], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1984, No. 9, 84–97 (in Russian).
29. T. A. Suslina, "Asimptotika spektra nekotorykh zadach, svyazannykh s kolebaniyami zhidkostey" [Asymptotics of the spectrum of some problems related to oscillations of fluids], VINITI, 1985, No. 8058-B.
30. T. A. Suslina, "Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskogo uravneniya v oblasti s kusochno-gladkoy granitsey" [Asymptotics of the spectrum of variational problems on solutions of an elliptic equation in a domain with a piecewise smooth boundary], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1985, **147**, 179–183 (in Russian).
31. T. A. Suslina, "Ob asimptotike spektra nekotorykh zadach, svyazannykh s kolebaniyami zhidkostey" [On the asymptotics of the spectrum of some problems related to oscillations of fluids], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1986, **152**, 158–164 (in Russian).
32. T. A. Suslina, "Asimptotika spektra dvukh model'nykh zadach teorii kolebaniy zhidkostey" [Asymptotics of the spectrum of two model problems in the theory of oscillations of fluids], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1996, **4**, 287–322 (in Russian).
33. R. Temam, *Uravneniya Nav'e—Stoksa. Teoriya i chislennyi analiz* [Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis], Mir, Moscow, 1981 (Russian translation).
34. J.-F. Treves, *Vvedenie v teoriyu psevdodifferentsial'nykh operatorov i integral'nykh operatorov Fur'e. T. 1, 2* [Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators. Vol. 1, 2], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
35. L. Boutet de Monvel, "Boundary problems for pseudodifferential operators," *Acta Math.*, 1971, **126**, 11–51.
36. J. Galkowski and J. A. Toth, "Poinwise bounds for Steklov eigenfunctions," *J. Geom. Anal.*, 2019, **29**, 142–193.
37. A. Girouard and I. Polterovich, "Spectral geometry of the Steklov problem," *J. Spectr. Theory*, 2017, **7**, No. 2, 321–359.
38. G. Grubb, *Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems*, Birkhäuser, Boston, 1996.
39. G. Grubb and G. Geymonat, "The essential spectrum of elliptic systems of mixed order," *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
40. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
41. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
42. V. G. Maz'ya and B. A. Plamenevskii, "The first boundary value problem for the classical equations of mathematical physics. I," *Z. Anal. Anwend.*, 1983, **2**, No. 1, 335–359.

43. G. Metivier, “Valeurs propres d’operateurs definis par la restriction de systemes variationnels a des sous-espaces,” *J. Math. Pures Appl.*, 1978, **57**, No. 2, 133–156.
44. L. Sandgren, “A vibration problem,” *Medd. Lunds Univ. Mat. Semin.*, 1955, **13**.
45. T. A. Suslina, “Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1999, **6**, No. 2, 214–234.
46. J. Zhu, “Geometry and interior nodal sets of Steklov eigenfunctions,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2020, **59**, No. 5, Paper No. 150.

T. A. Suslina
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: t.suslina@spbu.ru