Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 349–362

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-349-362 УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

© 2021 г. **О. В. СОЛОНУХА**

Аннотация. Рассматривается линейное параболическое уравнение с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского. Доказана теорема существования и единственности обобщенного решения, получены оценки.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Нелокальные эллиптические краевые задачи рассматривались начиная с 30-х годов XX века, см. [12]. Абстрактные нелокальные эллиптические краевые задачи изучались в работах [2,13] и др. В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский сформулировали новую нелокальную краевую задачу, возникающую в теории плазмы, см. [1]. В частности, в [1] была изучена следующая задача:

$$-\Delta w(x) = f(x) \qquad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0,2) \times (0,1)), \tag{0.1}$$

$$\left.\begin{array}{ll} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & (0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2), \quad w(2, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) & (0 \leqslant x_2 \leqslant 1) \end{array}\right\} \tag{0.2}$$

при $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 1$. Разрешимость задачи в общей постановке была сформулирована как нерешенная задача, см. [6]. В конце 80-х годов была построена общая теория линейных нелокальных эллиптических краевых задач, в рамках которой была решена указанная проблема, см. [7–9,16].

В данной работе исследование нелокальных краевых задач продолжено для линейных параболических уравнений. Отметим, что основным методом исследования в данной работе является сведение параболической задачи с нелокальными краевыми условиями к эволюционному дифференциально-разностному уравнению с краевыми условиями Дирихле. Ранее этот метод использовался лишь для эллиптических задач, см. [10,16]. Обобщение его на параболический случай связано с использованием техники монотонных операторов, см., например, [5]. С другой стороны, независимо от параболических задач с нелокальными краевыми условиями несколько десятилетий широко рассматривались параболические функционально-дифференциальные уравнения, см., например, [3,11,15] и библиографию. В этих исследованиях большую роль играли полугрупповые свойства операторов, что не использовалось в представленной работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (номер темы FSSF-2020-0018).

В первом разделе сформулированы свойства разбиения области и границы, а также доказана теорема об изоморфизме функциональных пространств, позволяющая поставить в соответствие нелокальной параболической задаче некое эквивалентное (с точки зрения множества решений) параболическое функционально-дифференциальное уравнение. Во втором разделе построено эволюционное дифференциально-разностное уравнение, соответствующее исходной задаче. Свойства дифференциально-разностных операторов, входящих в это уравнение, изучены в разделе 3. В разделе 4 сформулированы и доказаны достаточные условия существования и единственности решения линейной нелокальной задачи параболического типа. В качестве модельного примера рассмотрена параболическая задача с Лапласианом в прямоугольном параллелепипеде $\Omega_T = (0,T) \times (0,2) \times (0,1)$:

$$\partial_t w(t,x) - \Delta w(t,x) = f(t,x) \qquad ((t,x) \in \Omega_T), \tag{0.3}$$

$$u(0,x) = \psi(x) \qquad (x = (x_1,x_2) \in Q = (0,2) \times (0,1)) \tag{0.4}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{lr} w(t,x_1,0) = w(t,x_1,1) = 0 & (t \in (0,T), 0 \leqslant x_1 \leqslant 2), \\ w(t,0,x_2) = \gamma_1 w(t,1,x_2), \quad w(t,2,x_2) = \gamma_2 w(t,1,x_2) & (t \in (0,T), 0 \leqslant x_2 \leqslant 1) \end{array}\right\}. \tag{0.5}$$

Здесь $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$.

В работах [4,14] исследовались линейные эллиптические уравнения со смешанными нелокальными краевыми условиями, т. е. на части границы задавались нелокальные краевые условия, а на оставшейся части — производные по нормали от неизвестной функции. Используя методы настоящей работы и статей [4,14], можно исследовать разрешимость нелокальных смешанных задач для параболических уравнений.

1. Изоморфизм пространств

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geqslant 3$). В случае $n = 1$ мы полагаем $Q = (0,d)$.

Определим цилиндр $\Omega_T := (0,T) \times Q$ с границей $\Gamma^T := (0,T) \times \partial Q$. Рассматриваемая в статье задача является нелокальной, поскольку краевые условия в некоторых точках $(t,x) \in \Gamma^T$ заданы непосредственно, а в некоторых точках определены значениями искомой функции $u(t,x)$ внутри области, при $(t,x) \in \Omega_T$. Для точной формулировки данных условий (см. ниже (1.2)) необходимы дополнительные построения.

Для изучения параболической краевой задачи нам потребуются некоторые вспомогательные построения, разработанные для эллиптических нелокальных задач. Заметим, что нелокальные условия связывают значения искомой функции в точках, смещенных только по пространственным координатам. Данные сдвиги можно задать неким разностным оператором. Поскольку мы не рассматриваем временные сдвиги, то можно рассматривать разностный оператор сдвигов как действующий в $\mathbb{R}^n$ или в n-мерных областях. Свойства таких разностных операторов в пространствах $L_2(Q)$ и $W_2^1(Q)$ были изучены ранее, см. [7, 10, 16]. В данном разделе мы используем упомянутые результаты, чтобы сформулировать свойства разностных операторов $R_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ и $R_Q : L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T; W_2^1(Q))$, необходимых для установки связи между нелокальной задачей и неким дифференциально-разностным уравнением. Ниже будет подробно изложено построение и действие данных разностных операторов.

1.1. Разбиение области. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов h с целочисленными (или соизмеримыми) координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \big(\bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)\big)$.

Определение 1.1. Множество Q_r называется *подобластью*. Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r $(r = 1,2,\ldots)$ называется *разбиением* области Q.

Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно, при этом $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \big(\bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)\big) \cap \overline{Q}$ и $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$. Известно, что для любой подобласти Q_{r_1} и произвольного вектора $h \in M$ либо найдется подобласть Q_{r_2} такая, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$, см. [16, лемма 7.1]. Таким образом, семейство $\mathcal{R}$ можно разбить на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ для некоторого $h \in M$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса, а l — номер подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}. Множество классов может быть конечным или счетным, см. примеры в [16, гл. II, §7].

1.2. Разбиение границы. Кроме разбиения области, необходимо рассмотреть свойства разбиения границы ∂Q, определяемое тем же множеством сдвигов $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, см. выше. По-прежнему, M — аддитивная группа, порожденная $\mathcal{M}$.

Условие 1. *Пусть множество $\mathcal{K}$, заданное формулой*

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}, \tag{1.1}$$

удовлетворяет условию $\mathrm{mes}_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$.

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$. В [16, §7] получен следующий результат:

Лемма 1.1. *Если $(\Gamma_\rho + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ для некоторого $h \in M$, то или $\Gamma_\rho + h \subset Q$, или существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$.*

Согласно этому свойству множества $\left\{\Gamma_\rho + h : \Gamma_\rho + h \subset \overline{Q},\ \rho = 1, 2, \ldots,\ h \in M\right\}$ могут быть разбиты на классы. Множества $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h \in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;
2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ однонаправлены.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r — номер класса, j — номер элемента в классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \ldots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{rJ_0}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r))$.

Как известно, см. [16, §7], данное разбиение обладает следующими свойствами:

Лемма 1.2. *Для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$. Более того, если $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, то $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$ для любых пар $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.*

Лемма 1.3. *Для каждого $r = 1, 2, \ldots$ существует единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}\,(l = 1, \ldots, N(s))$ (с точностью до перенумеровки).*

Обозначим теперь $\Gamma_{rl}^T := (0, T) \times \Gamma_{rl}$. Проиллюстрируем разбиение области на простом примере.

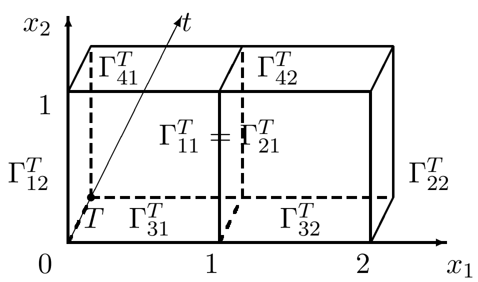

Рис. 1

Пример 1.1. Рассмотрим нелокальные краевые условия задачи Бицадзе—Самарского (0.5).

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(0,0); (1,0); (-1,0)\}$, которые разбивают область $Q = (0,2) \times (0,1)$ на две подобласти $Q_{11} = (0,1) \times (0,1)$ и $Q_{12} = (1,2) \times (0,1)$, принадлежащих одному классу.

Множество $\mathcal{K}$ состоит из 6 точек: $\mathcal{K} = \{(i,j) : i = 0,1,2; j = 0,1\}$.

Множество $\{\Gamma_{rj}^T\}$ состоит из 8 элементов, которые принадлежат 4-м классам, см. рис. 1:

1) $\Gamma_{11}^T = (0,T) \times \{1\} \times (0,1)$, $\Gamma_{12}^T = (0,T) \times \{0\} \times (0,1)$;

2) $\Gamma_{21}^T = (0,T) \times \{1\} \times (0,1)$, $\Gamma_{22}^T = (0,T) \times \{2\} \times (0,1)$;
3) $\Gamma_{31}^T = (0,T) \times (0,1) \times \{0\}$, $\Gamma_{32}^T = (0,T) \times (1,2) \times \{0\}$;
4) $\Gamma_{41}^T = (0,T) \times (0,1) \times \{1\}$, $\Gamma_{42}^T = (0,T) \times (1,2) \times \{1\}$.

Заметим, что в полученном прямоугольном параллелепипеде есть еще 4 части граней, не входящих в множество $\{\Gamma_{ij}^T\}$ $(i = 1,\dots,4; j = 1,2)$. В частности, на гранях $\{0\} \times Q_{11}$ и $\{0\} \times Q_{12}$ заданы начальные условия, на гранях $\{T\} \times Q_{11}$ и $\{T\} \times Q_{12}$ мы получим терминальные значения искомой функции.

1.3. Построение разностного оператора. Сформулируем следующее необходимое условие.

Условие 2. *Для каждой подобласти* Q_{sl} $(s = 1,2,\dots,\ l = 1,\dots,N(s))$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $G_{sl} \subset Q_{sl}$ *с границей* $\partial G_{sl} \in C^1$ *такое, что* $\operatorname{mes}_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$, $\operatorname{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

Множество всех распределений $u \in \mathcal{D}'(Q)$, являющихся вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка функциями из $L_2(Q)$, обозначим через $W_2^1(Q)$. Пространство Соболева $W_2^1(Q)$ — гильбертово относительно нормы $\|u\|_{W_2^1(Q)} = \big\{ \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \int_Q |\partial_i u|^2 p dx \big\}^{\frac{1}{2}}$, здесь и далее $\partial_0 u := u$. Через $\mathring{W}_2^1(Q)$ обозначим замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $W_2^1(Q)$. Как известно, эквивалентной нормой пространства $\mathring{W}_2^1(Q)$ является $\|u\|_{\mathring{W}_2^1(Q)} = \big\{ \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_Q |\partial_i u|^2 p dx \big\}^{\frac{1}{2}}$. Также будут рассматриваться сопряженные пространства $W_2^{-1}(Q) = \big(\mathring{W}_2^1(Q)\big)^*$. Линейное пространство $L_2(0,T;X) := \big\{u : (0,T) \to X :\ \int_0^T \|u\|_X^2 dt < \infty\big\}$ с нормой $\|u\|_{L_2(0,T;X)} = \big(\int_0^T \|u\|_X^2 dt\big)^{1/2}$ также гильбертово, если X — гильбертово. Таким образом, пространства $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ и $L_2(0,T;W_2^1(Q))$ гильбертовы.

Обозначим через $L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$ $(\gamma = \{\gamma_{ij}^r\})$ подпространство функций из $L_2(0,T;W_2^1(Q))$, удовлетворяющих *нелокальным краевым условиям*

$$\left.\begin{aligned} w|_{\Gamma_{rl}^T} &= \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r w|_{\Gamma_{rj}^T} \qquad && (r \in B,\ l = J_0+1,\dots,J),\\ w|_{\Gamma_{rl}^T} &= 0 && (r \notin B,\ l = 1,\dots,J), \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где $J_0 = J_0(r)$, $J = J(r)$, γ_{lj}^r — вещественные числа, $B = \{r : J_0 > 0\}$.

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\Lambda = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор $R : L_2(0,T;\mathbb{R}^n) \to L_2(0,T;\mathbb{R}^n)$:

$$Ru(t,x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(t, x+h), \tag{1.3}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$. Здесь $I_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_2(\Omega_T)$ нулем в $(0,T) \times (\mathbb{R}^n \setminus Q)$, а $P_Q : L_2((0,T) \times \mathbb{R}^n) \to L_2(\Omega_T)$ — оператор сужения функций из $L_2((0,T) \times \mathbb{R}^n)$ на Ω_T. Для исследования свойств оператора R_Q введем матрицы $R_s = \{r_{ij}^s\}_{1 \leqslant i,j \leqslant N(s)}$ такие, что

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}),\\ 0 & (h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}), \end{cases} \tag{1.4}$$

где h_{si} определяется условием $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$. Из ограниченности области Q и формулы (1.4) следует, что множество различных матриц R_s конечно. Обозначим эти матрицы R_{s_ν} $(\nu = 1,\dots,n_1)$.

Согласно лемме 1.3, для каждого $r = 1,2,\dots$ найдется единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset (0,T) \times \partial Q_{sl}$ $(l = 1,\dots,N)$ после перенумерации подобластей s-го класса, т. е. $\Gamma_{rl}^T \subset (0,T) \times \partial Q_{sl}$ $(l = 1,\dots,N)$. Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из R_s $(s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть e_j^r $(j = 1,\dots,J(r))$ — j-ая строка матрицы размерности $J \times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J - J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 1.2. Будем говорить, что матрицы R_s соответствуют граничным условиям (1.2), если выполнено следующее условие:

Условие 3. *Существует набор* Λ *такой, что для любого* $s = 1, 2, \ldots$ *матрицы* R_s *невырождены, а также для всех* $r \in B$ *и* $s = s(r)$ *справедливо*: $e_l^r = \sum\limits_{1 \leqslant j \leqslant J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r$ $(l = J_0 + 1, \ldots, J)$.

Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов.

Пример 1.1 (продолжение). Согласно краевым условиям (0.5), мы имеем множество сдвигов $\mathcal{M} = \{(0,0); (1,0); (-1,0)\}$. В соответствии с множеством сдвигов разностный оператор должен иметь вид $Ru(t,x) = u(t,x) + a_1 u(t, x_1+1, x_2) + a_{-1} u(t, x_1-1, x_2)$. Данному оператору соответствует матрица $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$, невырожденная при $a_1 a_{-1} \neq 1$. В то же время, для любого $u \in L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))$ и $w = R_Q u$ получаем:

$$\begin{gathered} w(t, x_1, 0) = w(t, x_1, 1) = 0, \\ a_1 u(t, 1, x_2) = w(t, 0, x_2) = \gamma_1 w(t, 1, x_2) = \gamma_1 u(t, 1, x_2), \\ a_{-1} u(t, 1, x_2) = w(t, 2, x_2) = \gamma_2 w(t, 1, x_2) = \gamma_2 u(t, 1, x_2). \end{gathered}$$

В последних двух формулах первое и третье равенства получены из определения разностного оператора, а второе — из краевых условий (0.5). Таким образом, если $a_1 = \gamma_1$, $a_{-1} = \gamma_2$ и $u \in L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))$, то функция $w = R_Q u$ принадлежит $L_2(0,T; W_2^1(Q))$ и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (0.5), т. е. $R_Q(L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))) \subset L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q))$, где $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$. При этом $R_{10} = 1$.

1.4. Изоморфизм пространств. Следующая теорема устанавливает связь между эллиптическими дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями вида (1.2) и эллиптическими дифференциально-разностными уравнениями с однородными условиями Дирихле. Это позволяет применять результаты, полученные для одной из этих задач, к исследованию другой задачи.

Теорема 1.1. *Предположим, что выполнены условия* 1, 2 *и* 3, *а соответствующие матрицы* R_s *и* R_{s0} $(s = s(r), r \in B)$ *невырождены. Тогда существует множество* $\gamma = \{\gamma_{lj}^r\}$ *такое, что оператор* $R_Q : L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q))$ — *изоморфизм.*

Доказательство. Заметим, что оператор R_Q не зависит от t. В силу невырожденности матриц R_s и R_{s0} оператор $R_Q(t,\cdot) : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_{2,\gamma}^1(Q)$ отображает $\mathring{W}_2^1(Q)$ на $W_{2,\gamma}^1(Q)$ непрерывно и взаимнооднозначно, см. [16, теорема 8.1] или [10, теорема 2.1]. Следовательно, R_Q отображает $L_2(0,T; \mathring{W}_2^1(Q))$ на $L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q))$ непрерывно и взаимнооднозначно. $\square$

2. Постановка задачи

Пусть выполнены условия 1 и 2. В цилиндре Ω_T рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_t w(t,x) - \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \partial_i \left(A_{ij}(t,x) \partial_j w(t,x) \right) + A_{00}(t,x) u = f(t,x) \quad ((x,t) \in \Omega_T) \tag{2.1}$$

с начальными условиями

$$w(0,x) = \psi(x) \qquad (x \in Q) \tag{2.2}$$

и граничными условиями (1.2). Здесь $f \in L_2(\Omega_T)$, $\varphi \in L_2(Q)$, а функции $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ $(i,j = 0, 1, \ldots, n)$, причем $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t,x)$ при $i,j = 1, \ldots, n$, эти функции $\mathcal{M}$-периодичны (т. е. $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t, x+h)$ для всех $(t,x), (t,x+h) \in \overline{\Omega_T}$ и $h \in \mathcal{M}$). Кроме того, существует $c_1 > 0$ такое, что

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} A_{ij}(t,x) \xi_i \xi_j \geqslant c_1 \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|^2. \tag{2.3}$$

Мы рассматриваем оператор ∂_t как неограниченный оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \subset L_2(0,T; W_2^1(Q)) \to L_2(\Omega_T)$. То есть любой элемент $w \in \mathcal{D}(\partial_t)$ после, быть может, изменения на множестве меры нуль из отрезка $(0,T)$ будет непрерывным отображением $[0,T] \to L_2(Q)$, см. [5, гл. 1, лемма 1.2]. Поскольку $\mathcal{D}(\partial_t) \subset C(0,T; L_2(Q))$, то начальные условия определены корректно. Введем пространство $W_\gamma := \{u \in L_2(0,T; W_{2,\gamma}^1(Q)) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}$.

Тогда задача (2.1), (2.2), (1.2) может быть рассмотрена как операторное уравнение

$$\partial_t w + Aw = f, \qquad w \in W_\gamma \tag{2.4}$$

с начальными условиями (2.2).

Определение 2.1. Будем называть функцию $w \in W_\gamma$ *обобщенным решением* задачи (2.1), (2.2), (1.2), если она удовлетворяет операторному уравнению (2.4) и начальным условием (2.2).

Пусть, кроме условий 1 и 2, выполнено также условие 3. Тогда существует разностный оператор R_Q, являющийся изоморфизмом пространств $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ и $L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$. Таким образом, для каждого $w \in W_\gamma \subset L_2(0,T;W_{2,\gamma}^1(Q))$ существует единственный элемент $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ такой, что $w = R_Q u$, $u = R_Q^{-1}w$. Введем пространство $W := \{u \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}$.

По построению $R_Q(L_2(Q)) \subset L_2(Q)$ и $R_Q^{-1}(L_2(Q)) \subset L_2(Q)$; $R_Q(L_2(\Omega_T)) \subset L_2(\Omega_T)$ и $R_Q^{-1}(L_2(\Omega_T)) \subset L_2(\Omega_T)$; кроме того, $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u$. Таким образом, если $w \in W_\gamma$, то $u \in W$, причем $\varphi(x) := u(0,x) = R_Q^{-1}w(0,x) = R_Q^{-1}\psi \in L_2(Q)$. В соответствии с [5, гл. 1, лемма 1.2], $u \in C(0,T;L_2(Q))$. То есть корректно определено значение функции u при $t = 0$. Можно рассмотреть следующее операторное уравнение:

$$\partial_t R_Q u + A R_Q u = f, \qquad u \in W \tag{2.5}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x) = R_Q^{-1}\psi. \tag{2.6}$$

Исходя из изложенного выше, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и* 3. *Тогда если существует и единственно решение операторного уравнения* (2.5), (2.6)*, то существует и единственно обобщенное решение задачи* (2.1)*,* (2.2)*,* (1.2).

Пример 2.1. Продолжим рассмотрение задачи (0.3)–(0.5). Как было доказано в примере 1.1, краевым условиям (0.5) соответствует разностный оператор R_Q, определяемый матрицей $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$, невырожденной при $a_1 a_{-1} \neq 1$; при этом матрица $R_{10} = 1$ также невырождена. Следовательно, задаче (0.3)–(0.5) соответствует задача Дирихле:

$$\partial_t R_Q u(t,x) + \Delta R_Q u(t,x) = f(t,x) \qquad ((t,x) \in \Omega_T), \tag{2.7}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) = R_Q^{-1}\psi(x) \qquad ((t,x) \in Q), \tag{2.8}$$

$$u(t,x) = 0 \qquad ((t,x) \in \Gamma^T). \tag{2.9}$$

3. Свойства операторов

3.1. Свойства разностного оператора. Рассмотрим разностный оператор R, определенный формулой (1.3).

Лемма 3.1. *Оператор* $R : L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n) \to L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$ *ограничен и*

$$R^* u(t,x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(t,x-h).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 3.2 (ср. с [10, лемма 2.3])**.** *Операторы* $I_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n)$, $P_Q : L_2((0,T)\times\mathbb{R}^n) \to L_2(\Omega_T)$ *и* $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ *ограниченные, при этом* $I_Q^* = P_Q$ *и* $R_Q^* = P_Q R^* I_Q$.

Обозначим через $L_2(\Omega_s)$ подпространство функций из $L_2(\Omega_T)$ таких, что $x \notin \bigcup_l Q_{sl}$ $(l = 1,\dots,N(s))$, где $\Omega_s = (0,T)\times\bigcup_l Q_{sl}$. Введем ограниченный оператор $P_s : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_s)$ по формуле $P_s u(t,x) = u(t,x)$ $(t \in (0,T),\ x \in \bigcup_l Q_{sl})$, $P_s u(t,x) = 0$ $(t \in (0,T),\ x \in Q \setminus \bigcup_l Q_{sl})$. Очевидно, что P_s является проектором на $L_2(\Omega_s)$. Поскольку $\mathrm{mes}_n(\partial Q_{sl}) = 0$, то $L_2(\Omega_T) = \dot{+}_s L_2(\Omega_s)$.

Пусть $\Omega_{s1} = (0,T)\times Q_{s1}$. Построим изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2(\Omega_s) \to L_2^N(\Omega_{s1})$ по формуле $(U_s u)_l(t,x) = u(t,x+h_{sl})$ $((t,x)\in\Omega_{s1})$, где $l = 1,\dots,N = N(s)$ и вектор h_{sl} таков, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, $L_2^N(\Omega_{s1}) = \prod_l L_2(\Omega_{s1})$.

Чтобы сформулировать леммы ниже, сделаем некоторые пояснения.

Пусть $G \subset Q \subset \mathbb{R}^n$ — некоторая область, $G_T := (0,T) \times G$. Обозначим через $W_2^{1,0}(G_T)$ анизотропное пространство Соболева, содержащее функции $u \in L_2(G_T)$, имеющие обобщенные производные $\partial_i u \in L_2(G_T)$. Норма данного пространства задана формулой $\|u\|_{W_2^{1,0}(G_T)} = \Big\{ \sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n} \int_{G_T} |\partial_i u|^2 \, dt\, dx \Big\}^{1/2}$. Пространство $W_2^{1,0}(G_T)$ можно отождествить с $L_2(0,T;W_2^1(G))$. Также очевидно, что $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) = \big\{u \in W_2^{1,0}(\Omega_T) : u|_{(0,T)\times\partial Q} = 0\big\}$.

Тогда из [16, лемма 8.6] (или [10, лемма 2.6]) следует, что оператор $R_{Qs} : L_2^N(\Omega_{s1}) \to L_2^N(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением
$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{3.1}$$
является оператором умножения на матрицу R_s. В то же время, оператор $R_{Qs}^* : L_2^N(\Omega_{s1}) \to L_2^N(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением $R_{Qs}^* = U_s R_Q^* U_s^{-1}$, является оператором умножения на сопряженную матрицу R_s^*.

Определение 3.1. Оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен, если существует $c_2 > 0$ такое, что $\big((R_Q + R_Q^*)u, u\big)_{L_2(\Omega_T)} \geqslant c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}$ $\forall u \in L_2(\Omega_T)$.

Лемма 3.3 (см. [10, лемма 2.8]). *Оператор $R_Q+R_Q^*$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $R_{s_\nu} + R_{s_\nu}^*$ $(\nu = 1,\dots,n_1)$ положительно определены.*

Лемма 3.4 (см. [10, лемма 2.14]). *Оператор $R_Q : L_2\big(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)\big) \to L_2\big(0,T;W_2^1(Q)\big)$ непрерывен; более того, $\partial_i(R_Q u) = R_Q \partial_i u$.*

Из [16, лемма 8.15] получаем следующее утверждение.

Лемма 3.5. *$R_Q u \in L_2\big(0,T;W_2^1(Q_{sl})\big)$ для всех $u \in L_2\big(0,T;W_2^1(Q)\big)$, и*
$$\|R_Q u\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q_{sl}))} \leqslant c_3 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q_{sj}))} \quad (s = 1,2,\dots;\, l = 1,\dots,N(s)). \tag{3.2}$$
Если $\det R_{s_\nu} \neq 0$ $(\nu = 1,\dots,n_1)$, то существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ такой, что $R_Q^{-1} w \in L_2\big(0,T;W_2^1(Q_{sl})\big)$ для всех $w \in L_2\big(0,T;W_2^1(Q)\big)$; причем $R_Q^{-1} = \sum\limits_s U_s^{-1} R_{Qs}^{-1} U_s P_s$, где R_{Qs}^{-1} — оператор умножения на матрицу R_s^{-1}, и
$$\|R_Q^{-1} w\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q_{sl}))} \leqslant c_4 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q_{sj}))} \quad (s = 1,2,\dots;\, l = 1,\dots,N(s)). \tag{3.3}$$
Константы $c_3, c_4 > 0$ не зависят от s, u и w.

3.2. Свойства оператора AR_Q. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \times L_2(0,T;W_2^{-1}(Q)) \to \mathbb{R}$ спаривание, т. е.
$$\langle A_R u, v\rangle = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_{ij}(t,x)\, \partial_j R_Q u\, \partial_i v\, dx\, dt \qquad \forall u, v \in L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)). \tag{3.4}$$
Напомним, что в уравнении (2.1) $A_{i0} = A_{0j} = 0$ для $i, j \neq 0$; более общий случай рассматривается аналогично.

Как известно, в эллиптической теории оператор $A : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ называется *сильно эллиптичным*, если $(Au,u)_{L_2(Q)} \geqslant c_5\|u\|^2_{\mathring{W}_2^1(Q)} - c_6\|u\|^2_{L_2(Q)}$ для любых $u \in \mathring{W}_1^2(Q)$ при некоторых фиксированных $c_5 > 0$ и $c_6 \geqslant 0$. Введем аналогичное определение.

Определение 3.2. Линейный оператор $A_R : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ назовем *сильно эллиптичным*, если существуют $c_5 > 0$ и $c_6 \geqslant 0$ такие, что для любых $u \in L_2(0,T;\mathring{W}_1^2(Q))$ выполнено $\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_5\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - c_6\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}$.

Теорема 3.1. *Пусть $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t,x)$ $(i,j = 0,1,\dots,n)$, причем A_{ij} $\mathcal{M}$-периодичны для $i,j = 1,\dots,n$, и справедлива оценка* (2.3). *Кроме того, пусть оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен. Тогда линейный оператор $A_R := AR_Q : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$ ограничен и сильно эллиптичен.*

Доказательство. Ограниченность оператора A_R следует из того, что $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а оператор R_Q ограничен, см. лемму 3.1. Заметим, что это означает также деминепрерывность оператора A_R (непрерывность из сильной топологии $L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ в слабую топологию $L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$).

Сильная эллиптичность оператора $A_R(t,\cdot) : \mathring{W}_2^1(Q) \to W_2^{-1}(Q)$ доказана в [10, 16]. Для удобства читателей покажем справедливость этого утверждения для $A_R : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))$.

Поскольку $R_Q = \sum\limits_s R_{Qs}$, число различных матриц R_s конечно, а функции A_{ij} $\mathcal{M}$-периодичны для $i,j = 1,\dots,n$, воспользуемся формулами (3.1) и (3.3):

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\int_{\Omega_T} A_{ij}(t,x)\,\partial_j R_Q u\,\partial_i u\,dx\,dt = \sum_s\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\left(A_{ij}(t,x)\,R_s\partial_j(U_sP_su),\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = I_1.$$

Так как

$$\begin{aligned}\sum_s\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}&\left(A_{ij}(t,x)\,R_s\partial_j(U_sP_su),\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \sum_s\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\partial_j(U_sP_su),A_{ij}(t,x)\,R_s^*\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \sum_s\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(\partial_j(U_sP_su),A_{ji}(t,x)\,R_s^*\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_s\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(A_{ij}(t,x)\,(R_s+R_s^*)\partial_j(U_sP_su),\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})},\end{aligned}$$

воспользуемся положительной определенностью оператора $R_Q + R_Q^*$, т. е. положительной определенностью матриц $R_s + R_s^*$, а также оценкой (2.3):

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\sum_s\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(A_{ij}(t,x)\,(R_s+R_s^*)\partial_j(U_sP_su),\partial_i(U_sP_su)\right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_s\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big(A_{ij}(t,x)\,\sqrt{R_s+R_s^*}\partial_j(U_sP_su),\sqrt{R_s+R_s^*}\partial_i(U_sP_su)\Big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} \geqslant \\ &\geqslant \frac{c_1}{2}\sum_s\sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sqrt{R_s+R_s^*}\partial_i(U_sP_su),\sqrt{R_s+R_s^*}\partial_i(U_sP_su)\Big)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \frac{c_1}{2}\left((R_Q+R_Q^*)u,u\right) \geqslant \frac{c_1c_2}{2}\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} = c_7\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Оценим оставшееся слагаемое оператора. При этом мы учтем, что по определению $|A_{ij}(t,x)| \leqslant c_8$ ($A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$), а $\|R_Qu\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c_9\|u\|_{L_2(\Omega_T)}$ (см. лемму 3.5):

$$I_2 = \left|\int_{\Omega_T} A_{00}(t,x)\,R_Qu\,u\,dx\,dt\right| \leqslant c_8c_9\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)} = c_{10}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \qquad (3.6)$$

Таким образом,

$$\langle A_Ru,u\rangle \geqslant I_1 - I_2 \geqslant c_7\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - c_{10}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}. \qquad (3.7)$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.1. Заметим, что утверждение теоремы 3.1 справедливо также, если дифференциально-разностный оператор A_R задан формулой (3.4) и $A_{i0} \neq 0$ и (или) $A_{0j} \neq 0$ для всех или некоторых $i,j \neq 0$.

Для доказательства этого факта достаточно оценить интегралы

$$I_{3i} = \left|\int_{\Omega_T} A_{i0}(t,x)\,R_Qu\,\partial_iu\,dx\,dt\right| \leqslant c_8c_9\|u\|_{L_2(\Omega_T)}\|\partial_iu\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c_{10}\varepsilon\|\partial_iu\|^2_{L_2(\Omega_T)} + c_{10}\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)},$$

$$I_{4j} = \left|\int_{\Omega_T} A_{0j}(t,x)\,R_Q\partial_ju\,u\,dx\,dt\right| \leqslant c_8c_9\|\partial_ju\|_{L_2(\Omega_T)}\|u\|_{L_2(\Omega_T)} \leqslant c_{10}\varepsilon\|\partial_ju\|^2_{L_2(\Omega_T)} + c_{10}\varepsilon^{-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}.$$

Тогда

$$\langle A_Ru,u\rangle \geqslant I_1 - I_2 - \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(I_{3i}+I_{4i}) \geqslant$$

$$\geqslant c_7\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - 2c_{10}\varepsilon\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} - c_{10}(2n\varepsilon^{-1}+1)\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}.$$

Всегда можно подобрать $\varepsilon > 0$ такое, что $\widehat{c_7} := c_7 - 2c_{10}\varepsilon > 0$. Сильная эллиптичность доказана.

3.3. Свойства оператора $\partial_t R_Q$ при $\varphi = 0$.

Определение 3.3. Линейный оператор $\partial_t R_Q : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ называется *монотонным*, если $\langle \partial_t R_Q u, u\rangle \geqslant 0$ $\forall u \in \mathcal{D}(\partial_t R_Q)$. Монотонный оператор $\partial_t R_Q$ *максимально монотонен*, если из справедливого для любого $u \in \mathcal{D}(\partial_t R_Q)$ неравенства $\langle \partial_t R_Q u - g, u - y\rangle \geqslant 0$ следует, что $y \in \mathcal{D}(\partial_t R_Q)$ и $g = \partial_t R_Q y$.

Таким образом, монотонный оператор с замкнутым графиком максимально монотонен.

Теорема 3.2. *Пусть $\varphi \equiv 0$, а оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен. Тогда $\partial_t R_Q : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ — максимально монотонный оператор.*

Доказательство. Максимальная монотонность оператора $\partial_t : L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q)) \to L_2(\Omega_T)$ при $\varphi \equiv 0$ хорошо известна, см., например, [5, гл. 3, §2]. Проверим эти свойства у оператора $\partial_t R_Q$. Проинтегрируем по частям:

$$\langle \partial_t R_Q u, u\rangle = \int_0^T \left(\partial_t R_Q u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\left(R_Q u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left(R_Q u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} = \frac{1}{2}\left(R_Q u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)}. \quad (3.8)$$

Воспользуемся формулой (3.1):

$$\left(R_Q u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)} = \sum_s \left(R_s(U_s P_s u(T)), (U_s P_s u(T))\right)_{L_2^N(Q_{s1})} =$$
$$= \sum_s \left((U_s P_s u(T)), R_s^*(U_s P_s u(T))\right)_{L_2^N(Q_{s1})} = \frac{1}{2}\sum_s \left((R_s + R_s^*)(U_s P_s u(T)), (U_s P_s u(T))\right)_{L_2^N(Q_{s1})} =$$
$$= \frac{1}{2}\big((R_Q + R_Q^*)u(T), u(T)\big)_{L_2(Q)} \geqslant 0 \quad (3.9)$$

в силу положительной определенности оператора $R_Q + R_Q^*$. Оценка (3.9), подставленная в (3.8), доказывает монотонность оператора $\partial_t R_Q$. Кроме того, график $R_Q + R_Q^*$ замкнут, т. е. этот оператор максимально монотонен. Максимальная монотонность оператора $\partial_t(R_Q + R_Q^*)$ следует из того, что этот оператор монотонен, а операторы ∂_t и $R_Q + R_Q^*$ максимально монотонны. □

Следствие 3.1. *Пусть $u \in W$. Тогда, согласно доказательству предыдущей теоремы, из формулы* (3.9) *и положительной определенности $R_Q + R_Q^*$ следует, что существуют константы $c_{11} > 0$ и $c_{12} > 0$, не зависящие от u, такие, что*

$$\langle R_Q u, u\rangle \geqslant c_{11}\|u\|^2_{L_2(\Omega_T)}, \quad (3.10)$$
$$\left(R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} \geqslant c_{12}\|u(t)\|^2_{L_2(Q)} \qquad \forall t \in (0,T]. \quad (3.11)$$

4. Существование и единственность решения

Определение 4.1. Оператор $A : L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ называется *коэрцитивным*, если на положительной полуоси существует некоторая непрерывная функция $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что $\langle Au, u\rangle \geqslant c(\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))})\|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}$ и $c(s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

Теорема 4.1. *Пусть $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(t,x) = A_{ij}(t,x)$ $(i,j = 0,1,\ldots,n)$, причем A_{ij} $\mathcal{M}$-периодичны для $i,j = 1,\ldots,n$ и справедлива оценка* (2.3). *Кроме того, пусть оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен. Тогда для любых $f \in L_2(\Omega_T)$ и $\varphi \in L_2(Q)$ существует единственное решение задачи* (2.5), (2.6). *Более того, соответствие $\varphi \mapsto u$ как отображение из $L_2(Q)$ в $C(0,T;L_2(Q))$ и соответствие $f \mapsto u$ как отображение из $L_2(\Omega_T)$ в $L_p(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))$ непрерывны, и для некоторых $c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16} > 0$, не зависящих от u_i, f_i и φ_2 $(i = 1,2)$, справедливы оценки*

$$\|u_1 - u_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} \leqslant c_{13}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{14}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.1)$$
$$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))} \leqslant c_{15}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{16}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.2)$$

где u_1 и u_2 — решения задачи (2.5), (2.6) *при правых частях f_1 и f_2 и начальных условиях φ_1 и φ_2, соответственно.*

Доказательство. Сначала рассмотрим задачу при $\varphi = 0$. Тогда согласно теореме 3.2 оператор $\partial_t R_Q$ максимально монотонен, а согласно теореме 3.1 оператор A_R радиально непрерывен и сильно эллиптичен. Пусть в оценке сильной эллиптичности $c_6 = 0$. Следовательно, A_R монотонен и коэрцитивен. Таким образом, выполнены условия теоремы 1.1 из [5, гл. III, §1]. Решение задачи (2.5), (2.6) существует. Единственность данного решения следует из монотонности операторов.

Если $c_6 > 0$, то заменой функции $u(t,x) = e^{\lambda t} v(t,x)$ получим эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + (A_R + \lambda R_Q) v = e^{-\lambda t} f, \qquad 0 < t < T, \tag{4.3}$$

$$v(0) = 0. \tag{4.4}$$

В силу оценки (3.10), если $c_{11}\lambda > c_6$, то оператор $A_R + \lambda R_Q$ монотонен и коэрцитивен, т. е. решение задачи (4.3), (4.4) существует и единственно, см. выше. Следовательно, существует и единственно решение задачи (2.5), (2.6).

Осталось рассмотреть задачу при $\varphi \neq 0$. Воспользуемся линейностью операторов. Для любого $\varphi \in L_2(Q)$ существует функция $y \in W \subset C(0,T; L_2(Q))$ такая, что $y(0,x) = \varphi(x)\,(x \in Q)$. Тогда заменой функции $u(t,x) = v(t,x) + y(t,x)$ можно получить эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + A_R v = f - \partial_t y - A_R y := \widehat{f}, \qquad 0 < t < T, \tag{4.5}$$

$$v(0) = 0. \tag{4.6}$$

Как доказано выше, задача (4.5), (4.6) имеет единственное решение. Следовательно, существует и единственно решение задачи (2.5), (2.6).

Покажем зависимость решения от начальных условий и правой части. Используем сильную эллиптичность оператора A_R. Для упрощения формул будем пока считать, что A_R — монотонный (т. е. $c_{10} = 0$ в оценке (3.7)). Пусть $u_1 \in W$ и $u_2 \in W$ — решения задачи (2.5), (2.6) при начальных условиях $\varphi_1 \in L_2(Q)$ и $\varphi_2 \in L_2(Q)$, а также при правых частях $f_1 \in L_2(\Omega_T)$ и $f_2 \in L_2(\Omega_T)$, соответственно.

Пусть $\Omega_t := (0,t) \times Q$ и $\langle f, u\rangle_t := \int_{\Omega_t} f\, u\, dx\, d\tau$. Аналогично формулам (3.8), (3.9)

$$\begin{aligned}\langle \partial_t R_Q u, u\rangle_t = \int_0^t \left(\partial_t R_Q u(\tau), u(\tau)\right)_{L_2(Q)} d\tau = \\ = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(R_Q + R_Q^*) u(t), u(t)\Big)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}(R_Q + R_Q^*) u(0), u(0)\Big)_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Обозначим для сокращения записей $R_Q^c := \frac{1}{2}(R_Q + R_Q^*)$. Очевидно, что этому оператору соответствуют матрицы $R_s^c := \frac{1}{2}(R_s + R_s^*)$. Воспользуемся положительной определенностью оператора R_Q^c, т. е. положительной определенностью матриц R_s^c:

$$\begin{aligned}\left(R_Q^c u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} = \sum_s \left(R_s^c U_s P_s u(t), U_s P_s u(t)\right)_{L_2^N(Q_{s1})} = \\ = \sum_s \left(\sqrt{R_s^c}\, U_s P_s u(t), \sqrt{R_s^c}\, U_s P_s u(t)\right)_{L_2^N(Q_{s1})} = \left\|\sqrt{R_Q^c}\, u(t)\right\|^2_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из формул (4.7) и (4.8) следует, что $\langle \partial_t R_Q(u_1 - u_2), (u_1 - u_2)\rangle_t = \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1 - u_2)(t)\right\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}$. Тогда для любого $t \in (0,T]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t) - u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2\rangle_t = \\ = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2\rangle_t + \frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1 - \varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь $\langle A_R u, u\rangle_t := \sum\limits_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \int_{\Omega_t} A_{ij}(\tau, x)\, \partial_j R_Q u\, \partial_i u\, dx\, d\tau$.

Рассмотрим также функцию $u_3 \in W$, являющуюся решением задачи (2.5), (2.6) при начальных условиях φ_1 и правой части f_2. Тогда для любого $t \in (0,T]$

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t) - u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)} + \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3\rangle_t = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3\rangle_t, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_3(t)-u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)}+\langle A_Ru_3-A_Ru_2,u_3-u_2\rangle_t=\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}. \tag{4.11}$$

В силу аддитивности интеграла Лебега, аналогично оценке (3.7),

$$\langle A_Ru,u\rangle_t\geqslant c_7\|u\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}. \tag{4.12}$$

Используя оценку (4.12) и неотрицательность первого слагаемого левой части (4.10), имеем, что

$$\begin{aligned}c_7\|u_1-u_3\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}&\leqslant\langle A_Ru_1-A_Ru_3,u_1-u_3\rangle_t=\langle f_1-f_2,u_1-u_3\rangle_t-\\&-\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\langle f_1-f_2,u_1-u_3\rangle_t\leqslant\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}\|u_1-u_3\|_{L_2(\Omega_t)}.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Воспользовавшись неравенством Фридрихса $\|u\|_{L_2(\Omega_t)}\leqslant c_{17}\|u_1-u_3\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}$, из неравенства (4.13) получаем, что

$$\begin{aligned}c_7\|u_1-u_3\|^2_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}&\leqslant c_{17}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}\|u\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))},\\ \|u_1-u_3\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}&\leqslant c_{18}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

С другой стороны, второе слагаемое левой части (4.10) также неотрицательно, т. е.

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}\|u_1-u_3\|_{L_2(\Omega_t)}.$$

Используя опять неравенство Фридрихса, а также оценку (4.14), имеем

$$\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{19}\|f_1-f_2\|^2_{L_2(\Omega_t)}.$$

По построению оценка (3.11) справедлива не только для R_Q, но и для R_Q^c, т. е.

$$\begin{aligned}c_{12}\|u_1(t)-u_3(t)\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_1(t)-u_3(t))\right\|^2_{L_2(Q)}&\leqslant c_{18}\|f_1-f_2\|^2_{L_2(\Omega_t)},\\ \|u_1(t)-u_3(t)\|_{L_2(Q)}&\leqslant c_{20}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_t)}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Аналогично, из (4.11) следует, что $\left\|\sqrt{R_Q^c}(u_3(t)-u_2(t))\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}$, т. е. благодаря невырожденности R_Q^c имеем, что $\|u_3(t)-u_2(t)\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{21}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}$. А также

$$\begin{aligned}c_7\|u_3-u_2\|^2_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}&\leqslant\langle A_Ru_3-A_Ru_2,u_3-u_2\rangle\leqslant\\&\leqslant\frac{1}{2}\left\|\sqrt{R_Q^c}(\varphi_1-\varphi_2)\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{22}\|\varphi_1-\varphi_2\|^2_{L_2(Q)}.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Здесь мы воспользовались оценкой $\left\|\sqrt{R_Q^c}\varphi\right\|^2_{L_2(Q)}\leqslant c_{23}\|\varphi\|^2_{L_2(Q)}$, следующей из аналогичной оценки для оператора R_Q, см. [16, лемма 8.15].

Используем неравенство треугольника для норм. Тогда из (4.14)–(4.16) следует, что

$$\begin{aligned}\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)}&\leqslant\|u_1(t)-u_3(t)\|_{L_2(Q)}+\|u_3(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant\\&\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)},\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}\|u_1-u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}&\leqslant\|u_1-u_3\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}+\|u_3-u_2\|_{L_2(0,T;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant\\&\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Если оператор A_R сильно эллиптичен, но не монотонен, т. е. $c_6=c_{10}>0$, рассмотрим эквивалентное уравнение для вспомогательной функции v такой, что $u(t,x)=e^{\lambda t}v(t,x)$:

$$\partial_tR_Qv+(A_R+\lambda R_Q)v=e^{-\lambda t}f,\qquad 0<t<T, \tag{4.19}$$

$$v(0)=\varphi, \tag{4.20}$$

где $c_{11}\lambda>c_6$, т. е. оператор $A_R+\lambda R_Q$ монотонен. Пусть $v_1\in W$ и $v_2\in W$ — решения задачи (4.19), (4.20) при начальных условиях $\varphi_1\in L_2(Q)$ и $\varphi_2\in L_2(Q)$, а также при правых частях $f_1\in L_2(\Omega_T)$ и $f_2\in L_2(\Omega_T)$, соответственно. Аналогично оценкам (4.17), (4.18) получаем оценки для v_1-v_2:

$$\|v_1(t)-v_2(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)},$$

$$\|v_1-v_2\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}.$$

Таким образом,

$$\|u_1(t)-u_2(t)\|_{L_2(Q)}=\|e^{-\lambda t}(v_1(t)-v_2(t))\|_{L_2(Q)}\leqslant\|v_1(t)-v_2(t)\|_{L_2(Q)}\leqslant$$

$$\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}\leqslant c_{23}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{20}\|(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}, \quad (4.21)$$

$$\|v_1-v_2\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}=\|e^{-\lambda t}(v_1-v_2)\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant\|v_1-v_2\|_{L_2(0,t;\mathring{W}_2^1(Q))}\leqslant$$

$$\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|e^{-\lambda t}(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}\leqslant c_{24}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L_2(Q)}+c_{18}\|(f_1-f_2)\|_{L_2(\Omega_t)}. \quad (4.22)$$

Доказана непрерывная зависимость от начальных условий и правой части и оценки (4.1), (4.2). □

Следующая теорема является следствием теорем 4.1 и 2.1.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и* 3. *Пусть матрицы* R_s *и* R_{s0}, *заданные в условии* 3, *невырождены, причем* $R_s+R_s^*>0$. *Пусть также* $A_{ij}\in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, $A_{ij}(t,x)=A_{ij}(t,x)$ $(i,j=0,1,\dots,n)$, *причем* A_{ij} $\mathcal{M}$*-периодичны для* $i,j=1,\dots,n$ *и справедлива оценка* (2.3). *Тогда для любых* $f\in L_2(\Omega_T)$ *и* $\psi\in L_2(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (2.1), (2.2), (1.2). *Более того, соответствие* $\psi\mapsto w$ *как отображение из* $L_2(Q)$ *в* $C(0,T;L_2(Q))$ *и соответствие* $f\mapsto w$ *как отображение из* $L_2(\Omega_T)$ *в* $L_2(0,T;W^1_{2,\gamma}(Q))$ *непрерывны, и для некоторых* $c_{25},c_{26},c_{27},c_{28}>0$, *не зависящих от* w_i, f_i *и* ψ_i $(i=1,2)$, *справедливы оценки*

$$\|w_1-w_2\|_{C(0,T;L_2(Q))}\leqslant c_{25}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(Q)}+c_{26}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.23)$$

$$\|w_1-w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))}\leqslant c_{27}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(Q)}+c_{28}\|f_1-f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \quad (4.24)$$

где w_1 *и* w_2 — *обобщенные решения задачи* (2.1), (2.2), (1.2) *при правых частях* f_1 *и* f_2 *и начальных условиях* ψ_1 *и* ψ_2, *соответственно.*

Осталось проверить согласованность начальных и краевых условий. Для произвольного $\psi\in L_2(Q)$ однозначно определен $\varphi=R_Q^{-1}\psi\in L_2(Q)$. Пространство $\mathring{W}_2^1(Q)\subset L_2(Q)$ плотно. Т.е. существует последовательность $\mathring{W}_2^1(Q)\ni\varphi_k\to\varphi$, сходящаяся в $L_2(Q)$. Тогда $\psi_k=R_Q\varphi_k\to\psi$ в $L_2(Q)$ и $\psi_k\in W^1_{2,\gamma}(Q)$. Пусть w_k — обобщенное решение задачи (2.1), (2.2), (1.2) при правых частях f и начальных условиях ψ_k. Очевидно, что краевые и начальные условия в этом случае согласованы, при этом $\|w_k-w_m\|_{C(0,T;L_2(Q))}\leqslant c_{25}\|\psi_k-\psi_m\|_{L_2(Q)}$, $\|w_k-w_m\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))}\leqslant c_{27}\|\psi_k-\psi_m\|_{L_2(Q)}$.

Таким образом, последовательность $\{w_k\}$ фундаментальна в пространстве $C(0,T;L_2(Q))\cap L_2(0,T;W_2^1(Q))$ и имеет единственный предел $w\in C(0,T;L_2(Q))\cap L_2(0,T;W_2^1(Q))$. Этот предел является обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), (1.2) при правых частях f и начальных условиях ψ в силу замкнутости графиков операторов $\partial_t R_Q$ и A_R. Согласованность начальных и краевых условий доказана.

5. Пример

Рассмотрим параболическую задачу с Лапласианом

$$\partial_t w(t,x)-\Delta w(t,x)=f(t,x) \qquad ((t,x)\in\Omega_T=(0,T)\times(0,2)\times(0,1)), \quad (5.1)$$

с начальными условиями

$$u(0,x)=\psi(x) \qquad (x=(x_1,x_2)\in Q=(0,2)\times(0,1)) \quad (5.2)$$

и с краевыми условиями

$$\left.\begin{array}{ll} w(t,x_1,0)=w(t,x_1,1)=0 & (t\in(0,T),0\leqslant x_1\leqslant 2),\\ w(t,0,x_2)=\gamma_1 w(t,1,x_2),\quad w(t,2,x_2)=\gamma_2 w(t,1,x_2) & (t\in(0,T),0\leqslant x_2\leqslant 1).\end{array}\right\} \quad (5.3)$$

В примере 1.1 показано, что для данной задачи выполнены условия 1 и 2, а краевым условиям (5.3) соответствует разностный оператор $Ru(t,x)=u(t,x)+\gamma_1 u(t,x_1+1,x_2)+\gamma_2 u(t,x_1-1,x_2)$. Данному оператору соответствует матрица $R_1=\begin{pmatrix}1&\gamma_1\\ \gamma_2&1\end{pmatrix}$, невырожденная при $\gamma_1\gamma_2\neq 1$. При этом $R_{10}=1>0$. То есть для выполнения условий теоремы 4.2 осталось определить, при каких условиях симметризация матрицы R_1 положительно определена. Очевидно, что это выполнено при $|\gamma_1+\gamma_2|<2$.

Теорема 5.1. *Пусть* $|\gamma_1+\gamma_2|<2$. *Тогда задача* (5.1)–(5.3) *имеет единственное обобщенное решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
2. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1952. — *1*. — С. 187–264.
3. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
4. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 5. — С. 693–716.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
6. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 1. — С. 1925–1935.
7. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы// Мат. сб. — 1986. — *129*, № 2. — С. 279–302.
8. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
9. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
10. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
11. *Скубачевский А. Л., Селицкий А. М.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Усп. мат. наук. — 2007. — *62*, № 1. — С. 207-208.
12. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications// Verh. Internat. Math.-Kongr. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
13. *Browder F. E.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Am. J. Math. — 1964. — *86*, № 4. — С. 735–750.
14. *Liiko V. V., Skubachevskii A. L.* On a certain property of a regular difference operator with variable coefficients// Complex Var. Elliptic Equ. — 2019. — *64*, № 5. — С. 852–865.
15. *Muravnik A. B.* Functional differential parabolic equations: integral transformationsand qualitative properties of solutions of the Cauchy problem// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2016. — *216*, № 3. — С. 345–496.
16. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

О. В. Солонуха

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

E-mail: solonukha@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-349-362 UDC 517.9

On Solvability of a Linear Parabolic Problem with Nonlocal Boundary Conditions

© 2021 **O. V. Solonukha**

Abstract. A linear parabolic equation with boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type is considered. An existence and uniqueness theorem for a generalized solution is proved, and estimates are obtained.

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
2. M. I. Vishik, “Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya ellipticheskikh differentsial’nykh uravneniy” [On general boundary-value problems for elliptic differential equations], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1952, **1**, 187–264 (in Russian).
3. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyi analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
4. V. V. Liyko and A. L. Skubachevskii, “Smeshannye zadachi dlya sil’no ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy v tsilindre” [Mixed problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 693–716 (in Russian).
5. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
6. A. A. Samarskii, “O nekotorykh problemakh teorii differentsial’nykh uravneniy” [On some problems in the theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 1, 1925–1935 (in Russian).
7. A. L. Skubachevskii, “Ellipticheskie zadachi s nelokal’nymi usloviyami vblizi granitsy” [Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1986, **129**, No. 2, 279–302 (in Russian).
8. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. II” [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii and A. M. Selitskii, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The second boundary-value problem for a parabolic differential-difference equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2007, **62**, No. 1, 207-208 (in Russian).
12. T. Carleman, “Sur la théorie des équations intégrales et ses applications,” *Verh. Internat. Math.-Kongr.*, 1932, **1**, 138–151.
13. F. E. Browder, “Nonlocal elliptic boundary value problems,” *Am. J. Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
14. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, “On a certain property of a regular difference operator with variable coefficients,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2019, **64**, No. 5, 852–865.
15. A. B. Muravnik, “Functional differential parabolic equations: integral transformationsand qualitative properties of solutions of the Cauchy problem,” *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2016, **216**, No. 3, 345–496.
16. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

O. V. Solonukha
Dorodnitsyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: solonukha@yandex.ru