Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 324–348

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-324-348 УДК 519.21+517.986.7+517.982.4

# УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ: ПОЛУГРУППОВОЙ ПОДХОД И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

© 2021 г. **И. В. МЕЛЬНИКОВА, У. А. АЛЕКСЕЕВА, В. А. БОВКУН**

Аннотация. Работа посвящена интегродифференциальным уравнениям, связанным со случайными процессами. Изучается связь между дифференциальными уравнениями со случайными возмущениями — стохастическими дифференциальными уравнениями (СДУ) — и детерминированными уравнениями для вероятностных характеристик процессов, определяемых случайными возмущениями. Полученные детерминированные псевдодифференциальные уравнения исследуются полугрупповыми методами и методами преобразования Фурье.

## ОГЛАВЛЕНИЕ



## Введение

Широкий класс процессов, возникающих в различных областях естествознания, экономики и социальных явлений, математически можно описать с помощью дифференциальных уравнений со случайными возмущениями — стохастических дифференциальных уравнений (СДУ). В последнее время большой интерес к проблемам финансовой математики: управление рисками, вычисление стоимости бондов, пакетов акций и деривативов разного рода — привел к значительным продвижениям в этой области (см., например, [18, 20, 37]).

Наиболее изученным является класс СДУ, источником случайности в которых служит винеровский процесс. Решения таких уравнений (нормальные диффузионные процессы), в силу непрерывности траекторий винеровского процесса, также обладают непрерывными траекториями. Поэтому моделирование в рамках уравнений диффузионного типа является наиболее подходящим при описании процессов, не имеющих скачков. Моделирование на основе процессов Леви и более общих процессов типа Леви позволяет изучать особенности поведения непрерывных и скачкообразных процессов. При этом, как в приложениях, так и в фундаментальной науке, зачастую стоит задача изучения не самого случайного процесса, задаваемого набором свойств или СДУ, а его вероятностных характеристик. Изучение связи между стохастическими уравнениями и детерминированными

Работа выполнена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации (контракт № 02.A03.21.0006).

уравнениями для вероятностных характеристик и, как следствие, связи между свойствами решений этих уравнений является одним из основных направлений стохастического анализа.

В настоящей работе мы получаем и исследуем уравнения для вероятностных характеристик, определяемых стохастическими уравнениями, в которых источником случайности является процесс Леви. Показываем, что в отличие от уравнений для вероятностных характеристик, определяемых винеровскими процессами и являющихся УрЧП параболического типа, уравнения, определяемые процессами Леви и более общими марковскими процессами, являются в общем случае псевдодифференциальными.

Работа состоит из четырёх разделов. В разделе 1 даются ответы на вопросы: что следует понимать под СДУ, источником случайности в котором является процесс Леви; каковы условия существования его решения. Далее в этом разделе вводится важный объект нашего исследования — псевдодифференциальные уравнения, связанные со стохастическими процессами. С помощью двух подходов мы демонстрируем, каким образом может быть осуществлён переход от свойств процесса или стохастических дифференциальных уравнений к детерминированным уравнениям для характеристик процесса. Здесь на простых примерах видно стохастическое происхождение специфических псевдодифференциальных операторов, которые, как мы покажем в разделе 3, являются генераторами полугрупп, связанных с процессами Леви и процессами типа Леви. На базе первого подхода рассматриваем пример уравнения для конкретной вероятностной характеристики $p = p(0, x; t, y)$ — плотности переходной вероятности процесса $X$. Этот пример позволил продемонстрировать возможность применения обобщённых производных для преодоления сложности с трактовкой получаемых интегродифференциальных уравнений для функции $p$. На базе второго подхода выводим интегродифференциальное (псевдодифференциальное) уравнение для вероятностных характеристик вида $v(t, x) = \mathbb{E}^{t,x}[f(X(T))]$, где $X = \{X(t),\, t \in [0; T]\}$ — случайный процесс, являющийся решением СДУ.

В разделе 2, прежде чем переходить к полугрупповому подходу в изучении свойств стохастических процессов и их вероятностных характеристик через свойства переходных полугрупп, определяемых случайными процессами, мы даём краткий обзор современной полугрупповой классификации, основанный на спектральной технике генераторов. Начинаем с генераторов классических сильно непрерывных полугрупп Миядеры—Хилле—Иосиды—Филлипса—Феллера, далее переходим к генераторам регуляризованных полугрупп — интегрированных, конволюционных и $R$-полугрупп. Исторически эта классификация создавалась в основном при изучении дифференциальных генераторов (см., например, [1, 17, 23, 25, 31, 33]), но, что важно для изучения переходных полугрупп, генераторами сильно непрерывных и регуляризованных полугрупп реально могут быть дифференциальные, интегродифференциальные и более общие псевдодифференциальные операторы. Именно такие генераторы возникают при исследовании полугрупп, связанных со случайными процессами.

Раздел 3, основной в работе, посвящён полугруппам с ядрами, образованными переходными вероятностями марковских процессов и их важных подклассов — процессов Феллера и Леви. Показано, как на базе техники (обобщённого) преобразования Фурье может быть получен генератор переходной полугруппы $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$, который является псевдодифференциальным оператором. Важно отметить, что при исследовании свойств генераторов переходных полугрупп техника преобразования Фурье сочетается с традиционной в теории полугрупп спектральной техникой. Это привело в следующем разделе к возможности вложения сильно непрерывных сжимающих полугрупп, связанных со случайными процессами, в полугрупповую классификацию и, в случае дифференциальных систем, в классификацию Гельфанда—Шилова.

В разделе 4 исследована связь между полугрупповой классификацией, основанной на спектральных свойствах генераторов, в общем случае являющихся псевдодифференциальными операторами, и классификацией Гельфанда—Шилова для дифференциальных систем, основанной на технике обобщённого преобразования Фурье. Построена схема вложений.

Отметим, что хотя настоящая работа во многом носит характер обзора, мы не ставили перед собой задачу представить исторический обзор результатов. По мере необходимости мы ссылаемся на известные в указанной области работы последнего времени, в основном [16, 19, 27, 36], в которых можно найти и литературный обзор обсуждаемой тематики. Ещё отметим, что генераторы феллеровских полугрупп, изучаемых в работе, определены на функциях с аргументами из $\mathbb{R}^n$, и мы не касаемся полугрупп Феллера с генераторами на ограниченных областях со специальными граничными условиями (см., например, [38]).

## 1. Уравнения, связанные со случайными процессами. Способы перехода от случайного процесса и определяющего его СДУ к детерминированным уравнениям для вероятностных характеристик

Прежде чем приступить к обсуждению детерминированных уравнений, связанных со стохастическими процессами, требуется ввести и должным образом определить СДУ, в котором источником случайности служит процесс Леви, и начнём мы с процессов Леви.

**1.1. Процессы Маркова и Леви. СДУ с источником случайности — процессом Леви.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — $\sigma$-алгебра борелевских подмножеств $\mathbb{R}^n$.

**Определение 1.1** (см. [36])**.** Случайный процесс $L = \{L(t),\, t \geqslant 0\}$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbf{P})$ и принимающий значения в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, называется *процессом Леви*, если он:

- **(L1):** процесс с независимыми приращениями: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $L(0), L(t_1) - L(0), L(t_2) - L(t_1), \ldots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ независимы;
- **(L2):** стартует из нуля п.н.: $L(0) = 0$ п.н.;
- **(L3):** однородный по времени: закон распределения приращения $L(s+t) - L(s)$, $s, t \geqslant 0$ не зависит от $s$;
- **(L4):** стохастически непрерывен: для любых $s \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$ выполнено $\mathbf{P}(|L(s+t) - L(s)| > \varepsilon) \to 0$ при $t \to 0$;
- **(L5):** траектории процесса непрерывны справа и имеют конечные пределы слева п.н.

Процесс, отвечающий условиям (L1)–(L4), называют *процессом Леви по распределению*.

**Замечание 1.1.** При рассмотрении процессов Леви условие (L5) часто опускают. Это связано с тем, что у любого процесса Леви по распределению существует версия, удовлетворяющая (L5) (см., например, [19]); её называют *càdlàg-модификацией*[1].

Процессы Леви являются частью, может быть, наиболее известного класса случайных процессов — марковских процессов.

**Определение 1.2.** Случайный процесс $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, называется *марковским*, если при любых $0 \leqslant s \leqslant t$ и $B \in \mathcal{F}_t$ выполнено $\mathbf{P}(B|\mathcal{F}_s) = \mathbf{P}(B|X(s))$ п.н.

Поведение марковских процессов в некотором смысле подобно поведению детерминированных систем: для детерминированной системы состояние в данный момент полностью определяет её эволюцию, а для марковских процессов известное на данный момент состояние системы полностью определяет её вероятность оказаться в различных допустимых состояниях в последующие моменты времени. Наряду с процессами Леви, марковским является любой процесс с независимыми приращениями [3, гл. VI, теорема 3].

Вероятность перехода марковского процесса из состояния $x$, в котором он находился в момент времени $s$, в одно из состояний борелевского множества $B$ за время $t - s$ описывается переходной функцией $P(s, x; t, B)$.

**Определение 1.3.** Функция $P(s, x; t, B)$, заданная для $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, называется *переходной функцией* марковского процесса $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$, если при фиксированных $s, t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ она является распределением вероятностей на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$; при фиксированных $s, t \geqslant 0$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ она является измеримой функцией переменного $x \in \mathbb{R}^n$; $P(s, x, s, B) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$ и $P(s, x, t, B) = \mathbf{P}(X(t) \in B | X(s) = x)$, $s \leqslant t$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ п.н.

[1] аббревиатура от французского *continue à droite, limitée à gauche*.

Переходная функция удовлетворяет уравнению Чепмена—Колмогорова:

$$P(s,x,t,B)=\int_{\mathbb{R}^n}P(s,x,\tau,dy)P(\tau,y,t,B),\quad 0\leqslant s\leqslant\tau\leqslant t,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

Марковский процесс $\{X(t),\, t\geqslant 0\}$ является *однородным*, если его переходная функция не меняется при сдвиге вдоль временной оси: $P(s+h,x,t+h,B)=P(s,x,t,B)$, $0\leqslant s\leqslant t$, $h\geqslant 0$, $x\in\mathbb{R}^n$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Переходная функция однородного марковского процесса зависит не от $t$ и $s$, а от их разности.

Наиболее известными представителями введённых процессов служат винеровский процесс, являющийся моделью броуновского движения и непрерывным процессом (обладает непрерывными траекториями п.н.), и процессы Пуассона, простой и составной, являющиеся процессами со скачками. В общем случае процессы Леви содержат как непрерывную, так и скачкообразную компоненты.

Чтобы описать структуру процессов Леви, введём, следуя [16], величину $N(t,B)=\#\{0\leqslant s\leqslant t: \Delta L(s)\in B\}$, $t\geqslant 0$, $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, равную количеству скачков процесса $L$ за промежуток времени $[0;t]$, величина $\Delta L(s):=L(s)-L(s-)$ которых принадлежит множеству $B$. При любых $\omega\in\Omega$ и $t\geqslant 0$ функция $N(t,\cdot)(\omega)$ является считающей мерой на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$, а функция $\nu(\cdot)=\mathbb{E}[N(1,\cdot)]$ — мерой интенсивности, связанной с процессом $L$. Если множество $B$ ограничено снизу[1], то процесс $\{N(t,B),\, t\geqslant 0\}$ является пуассоновским с интенсивностью $\lambda=\nu(B)$; при этом мера $N(t,B)$ является пуассоновской случайной мерой на пространстве $(\mathbb{R}_+\times(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),\,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}))$, а мера $\widetilde{N}(t,B):=N(t,B)-t\nu(B)$ — мартингальнозначной пуассоновской случайной мерой на этом пространстве.

Во введённых обозначениях структура процесса Леви описывается разложением Леви—Ито (см., например, [16, теорема 2.4.16]):

$$L(t)=bt+W_Q(t)+\int_{|q|\geqslant 1}qN(t,dq)+\int_{|q|<1}q\widetilde{N}(t,dq), \tag{1.2}$$

где $b\in\mathbb{R}^n$, $\{W_Q(t),\, t\geqslant 0\}$ — $\mathbb{R}^n$-значный винеровский процесс с ковариационной $n\times n$-матрицей $Q$. Процесс $\{W_Q(t),\, t\geqslant 0\}$ определяется при каждом $t\geqslant 0$ как вектор, каждая координата которого является суммой: $W_{Q,i}(t)=\sum\limits_{j=1}^{m}\sigma_{ij}W_j(t)$, $i=1,\ldots,n$, где $W_1,\ldots,W_m$ — попарно независимые $\mathbb{R}$-значные стандартные винеровские процессы (броуновские движения), $\sigma=(\sigma_{ij})$ — $n\times m$-матрица с действительными элементами и $Q=\sigma\sigma^T$.

В равенстве (1.2) предполагается, что процесс $W_Q$ и мера $N$ заданы независимо друг от друга на одном и том же вероятностном пространстве. Например, если процесс $L$ является $\mathbb{R}$-значным стандартным винеровским, то меры скачков $N(t,dq),\widetilde{N}(t,dq)$ равны нулю, $b=0$ и $Q=1$. Если $L$ является $\mathbb{R}$-значным процессом Пуассона $\{N(t),\, t\geqslant 0\}$, то $b=Q=0$ и $N(t,dq)=N(t)\mu(dq)$, где $\mu$ — мера, носителем которой является одноточечное множество $\{1\}$.

Теперь рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t)=\alpha(X(t))\,dt+\beta(X(t))\,dL(t),\quad t\geqslant 0, \tag{1.3}$$

в котором источником случайности служит процесс Леви $L=\{L(t),\, t\geqslant 0\}$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Такие уравнения являются обобщением математической модели диффузии, где возмущение определяется винеровским процессом.

Используя представление (1.2), запишем уравнение (1.3) в традиционной для стохастических уравнений интегральной форме:

$$\begin{aligned} X(t)-\xi \;\; = \;\; & \int_0^t a(X(s-))\,ds+\int_0^t c(X(s-))\,dW(s)+ \\ & +\int_0^t\!\!\int_{|q|\geqslant 1}H(X(s-),q)N(ds,dq)+\int_0^t\!\!\int_{|q|<1}F(X(s-),q)\widetilde{N}(ds,dq),\quad t\geqslant 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\{W(t)=W_I(t),\, t\geqslant 0\}$ — $\mathbb{R}^n$-значный винеровский процесс с единичной ковариационной матрицей $I$. В этом уравнении коэффициенты, определяемые как $a(X(s-))=\alpha(X(s-))+\beta(X(s-))b$,

[1] $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ и $0\notin\overline{B}$.

$c(X(s-)) = \beta(X(s-))$, $H(X(s-), q) = \beta(X(s-))q$, $F(X(s-), q) = \beta(X(s-))q$, удовлетворяют условиям существования интегралов в правой части (1.4). Первое слагаемое представляет собой интеграл Лебега, второе — (стохастический) интеграл Ито по винеровскому процессу $W$. Третье слагаемое, поскольку в силу свойства (L5) за конечный промежуток времени процесс $L$ не может иметь бесконечное число скачков, является конечной суммой:

$$\int_0^t \int_{|q|\geqslant 1} \beta(X(s-)qN(ds, dq) = \sum_{0\leqslant s\leqslant t} \beta(X(s-)\Delta L(s) \cdot \mathbf{1}_{|q|\geqslant 1}(\Delta L(s)),$$

где $\mathbf{1}_{|q|\geqslant 1}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $\{q \in \mathbb{R}^n : |q| \geqslant 1\}$. Наконец, последнее слагаемое в (1.4) является стохастическим интегралом по приращениям мартингала $\widetilde{N}(t, B) = N(t, B) - t\nu(B)$.

Отметим, что в общем случае непрерывные и разрывные компоненты процесса Леви могут иметь различную степень влияния на моделируемый процесс $X = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$, которая формализуется с помощью различных коэффициентов $a$, $c$, $H$, $F$. Процесс $X$, определяемый уравнением (1.4), имеет более сложное, чем (1.2), устройство, но в целом повторяет его структуру. Такие процессы называют *процессами типа Леви*. Известны достаточно общие условия существования и единственности решения уравнения (1.4) (см., например, [16, теоремы 6.2.9, 6.4.6]). Для простоты сформулируем теорему существования и единственности в одномерном случае.

**Теорема 1.1.** *Пусть отображение $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является предсказуемым, а отображения $a, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Липшица и подлинейного роста*:

$$\exists C_1 > 0 : \quad |a(y) - a(z)| + |c(y) - c(z)| + \int_{|q|<1} |F(y, q) - F(z, q)|\nu(dq) \leqslant C_1|y - z|, \quad y, z \in \mathbb{R},$$

$$\exists C_2 > 0 : \qquad a^2(y) + c^2(y) + \int_{|q|<1} F^2(y, q)\nu(dq) \leqslant C_2(1 + y^2), \quad y \in \mathbb{R}.$$

*Тогда существует единственное сильное*[1] *решение задачи* (1.4)*, которое является однородным марковским процессом.*

Теперь, когда мы определились со стохастическими уравнениями и указали какими свойствами обладают их решения, обсудим два подхода, позволяющих перейти от стохастических процессов к детерминированным уравнениям для вероятностных характеристик процессов.

**1.2. Переход от марковского процесса к детерминированному уравнению, основанный на предельных соотношениях.** Этот подход восходит к идеям А. Н. Колмогорова [9] для диффузионных процессов и опирается на две локальные инфинитезимальные характеристики процесса, (1.5) и (1.6), и условие (1.7), характеризующее непрерывность/разрывность случайного процесса.

Пусть $X = \{X(t),\ t \geqslant 0\}$ — марковский случайный процесс в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ и $p(t, x; T, y)$ — плотность его переходной вероятности. Предположим, при любом $\varepsilon > 0$ существуют конечные пределы

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\varepsilon} (z_i - x_i)p(t, x; t + \Delta t, z)\, dz = \mathtt{A}_i(t, x) + O(\varepsilon), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|z-x|<\varepsilon} (z_i - x_i)(z_j - x_j)p(t, x; t + \Delta t, z)\, dz = \mathtt{B}_{ij}(t, x) + O(\varepsilon), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{p(t, x; t + \Delta t, z)}{\Delta t} = \mathtt{G}(t, x; z) \ \text{ при } |z - x| > \varepsilon. \tag{1.7}$$

Сходимость в равенствах (1.5), (1.6) предполагается равномерной по $t$ на каждом конечном интервале и по $x \in \mathbb{R}^n$, а в равенстве (1.7) — по $t$, $x$ и $z$.

**Теорема 1.2** (см. [24, разд. 3.4])**.** *Пусть плотность переходной вероятности процесса $X$ удовлетворяет условиям* (1.5)–(1.7)*. Тогда она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$-\frac{\partial p(t, x; T, y)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \mathtt{A}_i(t, x)\frac{\partial p(t, x; T, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \mathtt{B}_{i,j}(t, x)\frac{\partial^2 p(t, x; T, y)}{\partial x_i \partial x_j} +$$

[1] *Сильным решением* в стохастическом анализе называется процесс, удовлетворяющий п.н. равенству (1.4) и согласованный с фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, порождённой случайными возмущениями, входящими в уравнение.

$$+\int_{\mathbb{R}^n}(p(t,z;T,y)-p(t,x;T,y))\mathsf{G}(t,x;z)dz,\quad 0<t<T, \tag{1.8}$$

*с условием* $p(T,x;T,y)=\delta(y-x)$.

Уравнение (1.8) называют *обратным уравнением Колмогорова*. Обратное уравнение с естественным финальным условием $p(T,x;T,y)=\delta(y-x)$ порождает корректную задачу. Смысл финального условия состоит в том, что если система в момент времени $T$ находится в точке $x$, то плотность вероятности обнаружить её в этот момент в точке $y$ равна $\delta(y-x)$.

**Теорема 1.3** (см. [24, разд. 3.6]). *Пусть плотность переходной вероятности процесса* $X$ *удовлетворяет условиям* (1.5)–(1.7). *Тогда она удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial p(t,x;T,y)}{\partial T}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}\big(\mathsf{A}_i(T,y)p(t,x;T,y)\big)+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\big(\mathsf{B}_{ij}(T,y)p(t,x;T,y)\big)+$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\mathsf{G}(T,z;y)p(t,x;T,z)-\mathsf{G}(T,y;z)p(t,x;T,y)\Big)dz,\quad 0\leqslant t<T,$$

*с условием* $p(t,x;t,y)=\delta(x-y)$.

Уравнение (1.3) называют *прямым уравнением Колмогорова*; поставленная для него задача Коши с начальным условием $p(t,x;t,y)=\delta(y-x)$ также является корректной.

**Замечание 1.2.** В случае диффузионных процессов предел (1.7) равен нулю, а для процесса Пуассона имеем $\mathsf{G}(t,x;z)=\begin{cases}\lambda\delta(z-(x+1)), & \varepsilon\leqslant 1,\\ 0, & \varepsilon>1.\end{cases}$

**Замечание 1.3.** Отметим, что если плотность переходной вероятности $p(t,x;T,y)$ существует только как обобщённая функция относительно переменной $y$ (или $x$), то равенства (1.5)–(1.7) следует понимать как равенства с параметрами $t,\Delta t,x$ $(t,\Delta t,y)$ на некоторых (подходящих) основных функциях, а уравнение (1.8) — как уравнение с производными по параметрам $t$ и $x$.

**Пример 1.1.** В качестве примера, иллюстрирующего этот подход, получим обратное уравнение для переходной плотности процесса

$$X(t)=b\,t+c\,W(t)+q\,N(t),\quad t\geqslant 0, \tag{1.9}$$

в фазовом пространстве $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, где $b,c,q$ — константы, $W$ — стандартный винеровский процесс, $N$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda$. Будем считать, что винеровский и пуассоновский процессы заданы независимо друг от друга, и найдём плотность распределения вероятностей процесса (1.9) как свёртку плотностей распределения каждого слагаемого.

Плотность вырожденного распределения есть сдвинутая $\delta$-функция $p_{b\tau}(z)=\delta(z-b\tau)$, плотность распределения вероятностей случайной величины $cW(\tau)$ выражается как $p_{cW(\tau)}(z)=\frac{1}{c\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{z^2}{2c^2\tau}}$, а плотность распределения случайной величины $qN(\tau)$ имеет вид $p_{qN(\tau)}(z)=\sum\limits_{k=0}^{d_q}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\delta(z-kq)e^{-\lambda\tau}$, где $d_q=d_q(z)$ равно целой части $\left[\frac{z}{q}\right]$ при $\left[\frac{z}{q}\right]\neq\frac{z}{q}$ и $\left[\frac{z}{q}-1\right]$ — в противном случае. Тогда плотность распределения вероятностей случайной величины $X(\tau)$:

$$p_{X(\tau)}(z)=p_{b\tau}*p_{cW(\tau)}*p_{qN(\tau)}(z)=\frac{e^{-\lambda\tau}}{c\sqrt{2\pi\tau}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\frac{(z-kq-b\tau)^2}{2c^2\tau}}.$$

Пользуясь тем, что рассматриваемые процессы и, как следствие, процесс (1.9) являются процессами Леви, а значит, однородны во времени и пространстве: $p(t,x;T,y)=p(0,0;T-t,y-x)$, а функция $p(0,0;T-t,y-x)$ представляет собой плотность распределения вероятностей $p_{X(T-t)}(y-x)$, получаем

$$p(t,x;T,y)=\frac{e^{-\lambda(T-t)}}{c\sqrt{2\pi(T-t)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(T-t))^k}{k!}e^{-\frac{(y-x-kq-b(T-t))^2}{2c^2(T-t)}}.$$

Вычислим локальные моменты (1.5) и (1.6) процесса $X$:

$$\mathtt{A}(t,x) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)p(t,x;t+\Delta t,z)dz = \begin{cases} b, & \varepsilon\leqslant q,\\ b+\lambda q, & \varepsilon>q,\end{cases}$$

$$\mathtt{B}(t,x) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|z-x|<\varepsilon}(z-x)^2p(t,x;t+\Delta t,z)dz = \begin{cases} c^2, & \varepsilon\leqslant q,\\ c^2+\lambda q^2, & \varepsilon>q,\end{cases}$$

и функцию $\mathtt{G}(t,x;z)$:

$$\mathtt{G}(t,x;z) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,x;t+\Delta t,z)}{\Delta t} = \begin{cases} \lambda\delta(z-(x+q)), & \varepsilon\leqslant q,\\ 0, & \varepsilon>q.\end{cases}$$

Найденные предельные величины позволяют выписать обратное уравнение (1.8) для функции $p(t,x;T,y)$ — плотности процесса (1.9):

$$-p'_t(t,x;T,y) = bp'_x(t,x;T,y) + \frac{c^2}{2}p''_{xx}(t,x;T,y) + \lambda(p(t,x+q;T,y)-p(t,x;T,y)). \tag{1.10}$$

**Замечание 1.4.** В рассмотренном примере плотность процесса $X$ является дифференцируемой только в смысле обобщённых функций. Поскольку в этом случае при малых $\varepsilon$ ($\varepsilon\leqslant q$) функции $\mathtt{A}(t,x)$ и $\mathtt{B}(t,x)$ являются постоянными, а $\mathtt{G}(t,x;\cdot)$ является $\delta$-функцией, то и само уравнение (1.10) допускает формализацию лишь в обобщённом смысле. В качестве основных функций здесь достаточно рассмотреть дважды непрерывно дифференцируемые функции переменного $x$ с компактным носителем. Формализовать уравнение (1.8) в общем случае сложнее, в частности, из-за поведения функций $\mathtt{A}(t,x)$ и $\mathtt{B}(t,x)$, которые не являются мультипликаторами в этом пространстве основных функций.

**Замечание 1.5.** Наряду с обратным уравнением (1.10) для плотности процесса $X$, можно записать прямое уравнение Колмогорова, которое допускает формализацию в обобщённом смысле на тех же основных функциях, что и уравнение (1.10), так как $\mathtt{A}(T,y)$ и $\mathtt{B}(T,y)$ являются мультипликаторами в пространстве непрерывных функций с компактным носителем.

**1.3. Переход от СДУ к детерминированному уравнению, основанный на формуле Ито.** Пусть $X=\{X(t),\, t\geqslant 0\}$ — сильное решение задачи (1.4) — однородный марковский процесс в пространстве $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с переходной функцией $P(t,x;T,B)$.

В приложениях часто возникают характеристики текущего положения процесса, $X(t)=x$, вида

$$v(t,x) := \mathbb{E}^{t,x}[f(X(T))] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(t,x;T,dy), \quad t\in[0;T], \quad x\in\mathbb{R}^n, \tag{1.11}$$

где $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ — ограниченная борелевская функция, $\mathbb{E}^{t,x}[f(X(T))] := \mathbb{E}[f(X(T))\big|X(t)=x]$ — условное математическое ожидание. В следующей теореме получено интегродифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $v(t,x)$. Это уравнение является обратным и для него ставится финальная задача Коши с условием $v(T,x)=f(x)$.

**Теорема 1.4** (см. [11]). *Пусть* $X=\{X(t),\, t\geqslant 0\}$ — *сильное решение задачи* (1.4) *с начальным условием* $\xi\in\mathbb{R}$. *Если функция* $v$, *определяемая равенством* (1.11), *имеет непрерывные частные производные* $v'_t$, $v'_x$, $v''_{xx}$, *то она является решением финальной задачи*

$$\begin{aligned} -v'_t(t,x) &= a(x)v'_x(t,x) + \frac{1}{2}c^2(x)v''_{xx}(t,x) + \int_{|q|\geqslant 1}\Big[v\Big(t,x+H(x,q)\Big)-v(t,x)\Big]\nu(dq) + \\ &+ \int_{|q|<1}\Big[v\Big(t,x+F(x,q)\Big)-v(t,x)-F(x,q)v'_x(t,x)\Big]\,\nu(dq), \\ v(T,x) &= f(x), \qquad x\in\mathbb{R}, \quad t\in[0;T]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Доказательство теоремы основано на применении формулы Ито и мартингальности процесса $\{\widetilde{N}(t,B), t\geqslant 0\}$. Формула Ито для разрывного процесса, каковым в общем случае является процесс типа Леви, имеет более сложную структуру, нежели в случае винеровских процессов. Прежде чем её приводить, остановимся коротко на формуле Ито для винеровских процессов.

Изначально формула Ито была предложена в [26] для процессов, зависящих от броуновского движения $W$, называемых теперь *процессами Ито*: $X(t)=X(0)+\int_0^t a(s)\,ds+\int_0^t c(s)\,dW(s)$. Коротко это равенство записывается следующим образом: $dX(t)=a(t)\,dt+c(t)\,dW(t)$. Для наглядности приведём формулу для процессов Ито в одномерном случае (см., например, [34]).

**Теорема 1.5.** *Пусть $X = \{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Ито в фазовом пространстве $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и $Y(t, X(t)) = g(t, X(t))$, где функция $g(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ имеет непрерывные производные $g'_t$, $g'_x$, $g''_{xx}$. Тогда для любого $t \geqslant 0$ имеет место формула Ито*:

$$dY(t, X(t)) = g_t(t, X(t))\, dt + g_x(t, X(t))\, dX(t) + \frac{1}{2} g_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2,$$

*где свойства броуновского движения при определении $(dX(t))^2$ условно записывают следующим образом: $dt \cdot dt = dt \cdot dW(t) = dW(t) \cdot dt = 0$, $dW(t) \cdot dW(t) = dt$.*

Формулу Ито называют стохастической формулой замены переменных. От классической формулы замены переменных она отличается дополнительным слагаемым $\frac{1}{2} g_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2$, которое появляется в силу свойства броуновского движения $\mathbb{E}[dW(t) \cdot dW(t)] = dt$, коротко записываемого как $dW(t) \cdot dW(t) = dt$. В интегральной форме формула Ито записывается следующим образом:

$$Y(t,X(t)) - Y(0,X(0)) = \int_0^t \Big( g'_s(s, X(s)) + a(s) g'_x(s,X(s)) + \frac{c^2(s)}{2} g''_{xx}(s,X(s)) \Big) ds + \int_0^t c(s) g'_x(s,X(s)) dW(s).$$

Как мы отметили выше, формула Ито для разрывного процесса типа Леви имеет более сложную структуру, нежели в случае непрерывных процессов Ито: пусть $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — $\mathbb{R}$-значный процесс типа Леви, определяемый равенством

$$X(t) - \xi = \int_0^t a(s) ds + \int_0^t c(s) dW(s) + \int_0^t \int_{|q| \geqslant 1} H(s,q) N(ds, dq) + \int_0^t \int_{|q|<1} F(s,q) \widetilde{N}(ds, dq), \quad t \in [0; T], \tag{1.13}$$

тогда для любой функции $g \in C^{1,2}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ с вероятностью 1 имеет место равенство

$$\begin{aligned} g(t, X(t)) - g(0, X(0)) = \int_0^t \Big( g'_s(s, X(s-)) + a(s) g'_x(s, X(s-)) + \frac{1}{2} c^2(s) g''_{xx}(s, X(s-)) \Big) ds \, + \\ + \int_0^t \int_{|q| \geqslant 1} \Big[ g\Big(s, X(s-) + H(s,q)\Big) - g(s, X(s-)) \Big] N(ds, dq) \, + \\ + \int_0^t c(s) g'_x(s, X(s-)) dW(s) + \int_0^t \int_{|q|<1} \Big[ g\Big(s, X(s-) + F(s,q)\Big) - g(s, X(s-)) \Big] \widetilde{N}(ds, dq) \, + \\ + \int_0^t \int_{|q|<1} \Big[ g\Big(s, X(s-) + F(s,q)\Big) - g(s, X(s-)) - F(s,q) g'_x(s, X(s-)) \Big] \nu(dq) ds, \end{aligned} \tag{1.14}$$

называемое *формулой Ито для процесса типа Леви* (1.13) (см., например, [35, гл. V, теорема 18]). На основе формулы (1.14) выводится интегродифференциальное уравнение (1.12), решением которого является выбранная характеристика (1.11), являющаяся усреднением борелевской функции $f$ от изучаемого процесса.

Прежде чем переходить к изучению полугрупп операторов, позволяющих строить различные характеристики марковских процессов и процессов Леви, в следующем разделе мы приведём краткий обзор современной полугрупповой классификации операторов.

## 2. Полугрупповая классификация абстрактной задачи Коши: сильно непрерывные полугруппы, интегрированные полугруппы, $R$-полугруппы

Приведём сводку основных результатов по теории полугрупп операторов и корректности абстрактной задачи Коши

$$u'(t) = Au(t), \quad t \in [0; \tau), \tau \leqslant \infty, \quad u(0) = f \in \operatorname{dom} A \subset E, \tag{2.1}$$

где оператор $A$, рассматриваемый в банаховом пространстве, может быть дифференциальным, интегральным, псевдодифференциальным. При изложении мы опираемся в основном на [1, 33]. Дополнительную информацию можно найти в обширной литературе (см., например, [17, 23, 25]).

Пусть $E$ — банахово пространство, $A$ — замкнутый линейный оператор в $E$ с областью определения $\operatorname{dom} A$.

Под *решением задачи* (2.1) на отрезке $[0; T]$ будем понимать $u \in C\left([0; T], \operatorname{dom} A\right) \cap C^1\left([0; T], E\right)$.

**Определение 2.1.** Однопараметрическое семейство $U = \{U(t), t \geqslant 0\}$ линейных ограниченных операторов, действующих в пространстве $E$ и удовлетворяющих условиям:

**(U1):** $U(t + s) = U(t)U(s)$, $t, s \geqslant 0$ (полугрупповое свойство), $U(0) = I$,

**(U2):** $\|U(t)f - f\| \to 0$ при $t \to 0$ для любого $f \in E$ (сильная непрерывность при $t = 0$), называется *полугруппой класса* $C_0$.

Оператор, определяемый соотношением $Af := \lim\limits_{t\to+0} t^{-1}(U(t) - I)f$, с областью определения $\operatorname{dom} A = \bigl\{f \in E : \lim\limits_{t\to+0} t^{-1}(U(t) - I)f$ существует$\bigr\}$, называется (*инфинитезимальным*) *генератором полугруппы* $U$.

Известно, что генератор полугруппы класса $C_0$ замкнут и плотно определён.

**2.1. Равномерная корректность задачи** (2.1)**.** Пусть оператор $A$ плотно определён в пространстве $E$. Оператор $A$ порождает полугруппу $U$ класса $C_0$, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) *равномерно корректна на* $\operatorname{dom} A$ при $t \geqslant 0$, т. е. для любых $T > 0$ и $f \in \operatorname{dom} A$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое относительно изменения начальных данных: $\sup\limits_{t\in[0;T]} \|u(t)\| \leqslant C_T\|f\|$;
2) резольвента $\mathcal{R}(\lambda)$ оператора $A$ определена в некоторой правой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и при некотором $C > 0$ удовлетворяет оценке $\|\mathcal{R}^{(k)}(\lambda)\| \leqslant \frac{Ck!}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{k+1}}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $k \in \mathbb{N}_0$.

**2.2. Равномерная** $(n, \omega)$**-корректность задачи** (2.1)**.** Пусть оператор $A$ плотно определён в пространстве $E$ и множество его регулярных точек $\rho(A)$ непусто. Оператор $A$ порождает (невырожденную) *$n$ раз интегрированную экспоненциально ограниченную полугруппу* операторов в пространстве $E$, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) *равномерно* $(n,\omega)$*-корректна* при $t \geqslant 0$, т. е. для любых $T > 0$ и $f \in \operatorname{dom} A^{n+1}$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое относительно изменения начальных данных по $n$-й граф-норме оператора $A$: $\|u(t)\| \leqslant Ce^{\omega t}\|f\|_n$, $t \geqslant 0$, где $\|f\|_n = \|f\| + \|Af\| + \ldots + \|A^n f\|$.
2) резольвента оператора $A$ определена в некоторой правой полуплоскости комплексной плоскости $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и при некотором $C > 0$ удовлетворяет оценке $\Bigl\|\frac{d^k}{d\lambda^k}\Bigl(\frac{\mathcal{R}(\lambda)}{\lambda^n}\Bigr)\Bigr\| \leqslant \frac{Ck!}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{k+1}}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, $k \in \mathbb{N}_0$;
3) задача (2.1) корректна в пространстве абстрактных экспоненциально ограниченных распределений $\mathcal{S}'_\omega(E)$, которое определяется следующим образом: $f \in \mathcal{S}'_\omega(E)$, если и только если $fe^{\omega t} \in \mathcal{S}'(E)$, где $\mathcal{S}'(E)$ — распределения над $\mathcal{S}$ со значениями в $E$.

**2.3. Локальная** $n$**-корректность задачи** (2.1)**.** Пусть оператор $A$ плотно определён в $E$, $\rho(A) \neq \varnothing$ и $\tau < \infty$. Оператор $A$ порождает *локальную* (на $[0;\tau)$) *$n$ раз интегрированную полугруппу* операторов в пространстве $E$ тогда и только тогда, когда выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) $n$-корректна при $t \in [0;\tau)$, т. е. для любых $f \in \operatorname{dom} A^{n+1}$ и $T < \tau$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое относительно изменения начальных данных по $n$-й граф-норме оператора $A$: $\sup\limits_{t\in[0;T]} \|u(t)\| \leqslant C_T\|f\|_n$;
2) задача (2.1) корректна в пространстве $\mathcal{D}'(E)$ распределений над $\mathcal{D}$ со значениями в $E$.

Из этих равносильных условий следует, что резольвента оператора $A$ определена в области $\Lambda^{\ln}_{n,\gamma,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > n\gamma \ln|\lambda| + \omega\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma > 0$, $\omega \in \mathbb{R}$, и при некотором $C > 0$ удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant C|\lambda|^n, \qquad \lambda \in \Lambda^{\ln}_{n,\gamma,\omega}. \tag{2.2}$$

В свою очередь из оценки (2.2) в общем случае можно доказать, что оператор $A$ порождает локальную $(n + 2)$ раза интегрированную полугруппу.

**2.4. Корректность задачи** (2.1) **в пространствах ультрараспределений.** Пусть $K(t)$, $t \geqslant 0$ — экспоненциально ограниченная функция: $|K(t)| \leqslant Ce^{\theta t}$, $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, и её преобразование Лапласа удовлетворяет условию: $|\widetilde{K}(\lambda)| = \mathcal{O}(e^{-M(\kappa|\lambda|)})$ при $|\lambda| \to \infty$, где $M(\xi)$ — положительная функция переменного $\xi \geqslant 0$, возрастающая при $\xi \to \infty$ не быстрее $\xi^p$, $p < 1$.

Оператор $A$ порождает на $[0;\tau)$, $\tau \leqslant \infty$, *$K$-конволюционную полугруппу* операторов в пространстве $E$, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) резольвента оператора $A$ определена в некоторой области правой полуплоскости $\Lambda^M_{\alpha,\gamma,\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \alpha M(\gamma|\lambda|) + \omega\}$ и удовлетворяет там условию $\|\mathcal{R}(\lambda)\| \leqslant Ce^{\beta M(\gamma|\lambda|)}$, $\lambda \in \Lambda^M_{\alpha,\gamma,\omega}$;
2) если $M(\xi)$ — ассоциированная функция последовательности $M_k$, то задача (2.1) корректна в пространстве абстрактных ультрараспределений Румье.

**2.5. $R$-корректность задачи** (2.1)**.** Пусть $R$ — ограниченный оператор в пространстве $E$. Пусть оператор $A$ плотно определён в $E$, коммутирует с $R$ на своей области определения и удовлетворяет условию $\overline{A|_{R(\operatorname{dom} A)}} = A$. Пусть $\tau < \infty$. Оператор $A$ порождает локальную (на $[0;\tau)$) *$R$-полугруппу* операторов в пространстве $E$, если и только если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) задача (2.1) $R$-корректна на $[0;\tau)$, т. е. для любых $f \in R(\operatorname{dom} A)$ и $T < \tau$ существует единственное решение задачи (2.1) на отрезке $[0;T]$, устойчивое в следующем смысле: $\sup\limits_{t\in[0;T]} \|u(t)\| \leqslant C_T\|R^{-1}f\|$;
2) для любого $t \in [0;\tau)$ существует асимптотическая $R$-резольвента $\mathcal{R}_t(\lambda)$ оператора $A$, удовлетворяющая при некотором $C_t > 0$ условию $\left\|\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathcal{R}_t(\lambda)\right\| \leqslant \frac{C_t k!}{|\lambda|^{k+1}}$, $\frac{k}{\lambda} \in [0;t]$, $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Теперь переходим к изучению уравнений для вероятностных характеристик процессов и свойств решений задач Коши для этих уравнений на основе изучения свойств полугрупп, связанных со случайными процессами.

## 3. Полугруппы, порождаемые случайными процессами

В этом разделе речь пойдёт о переходных полугруппах однородных марковских процессов, их свойствах, свойствах генераторов и связью с задачей Коши (2.1).

Введем необходимые обозначения. Обозначим $B_b(\mathbb{R}^n)$ пространство функций, ограниченных и измеримых по Борелю на $\mathbb{R}^n$, с нормой $\|f\| = \sup|f(x)|$, $C_0(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций, стремящихся к нулю при $x \to \infty$, с нормой $\|f\| = \max|f(x)|$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство Л. Шварца бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ — пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих на $\mathbb{R}^n$ функций.

Важную роль в исследовании полугрупп, порождаемых случайными процессами, играет преобразование Фурье, классическое и обобщённое. В работе использованы следующие обозначения: преобразование Фурье меры $\mu$

$$\mathcal{F}[\mu](\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)}\mu(dy) = \widehat{\mu}(\sigma), \qquad \mathcal{F}^{-1}[\mu](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}\mu(dy) = \check{\mu}(\sigma);$$

преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{F}[f](\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)}f(y)dy = \widehat{f}(\sigma), \qquad \mathcal{F}^{-1}[f](\sigma) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}f(y)dy = \check{f}(\sigma); \tag{3.1}$$

преобразование Фурье обобщённой функции (распределения) $f \in S'(\mathbb{R}^n)$

$$\langle\varphi, \mathcal{F}f\rangle := (2\pi)^n\langle\mathcal{F}^{-1}\varphi, f\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Здесь же введём обозначение для *характеристической функции меры* $\mu$ (закона распределения случайной величины $\xi$):

$$\Phi_\xi(\sigma) := \mathbb{E}[e^{i(\sigma,\xi)}](\sigma) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}\mu(dy) = \widehat{\mu}(-\sigma) = (2\pi)^n\check{\mu}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Если задан случайный процесс $\{X(t), t \geqslant 0\}$, то при фиксированном $t \geqslant 0$ для характеристической функции случайной величины $X(t)$ будем использовать обозначение:

$$\Phi_{X(t)}(\sigma) := \mathbb{E}[e^{i(\sigma,X(t))}](\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

### 3.1. Полугруппы Маркова, Феллера и Леви.

**Определение 3.1** (см. [19, с. 2]). Однопараметрическое семейство $U = \{U(t),\, t \geqslant 0\}$ линейных операторов в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих при любых $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t, s \geqslant 0$ условиям:

**(M1):** $U(t+s)f(x) = U(t)U(s)f(x)$ (полугрупповое свойство), $U(0) = I$,
**(M2):** $f(x) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; U(t)f(x) \geqslant 0$ (сохранение положительности),
**(M3):** $f(x) \leqslant 1 \;\Rightarrow\; U(t)f(x) \leqslant 1$ (субмарковское свойство),
**(M4):** $U(t)1 = 1$ (консервативность),

называется *марковской полугруппой*. Семейство $U$, удовлетворяющее условиям (M1)–(M3), называется *субмарковской полугруппой*.

Первое знакомство с марковской полугруппой вызывает у читателя, не связанного с теорией вероятностей, некоторое удивление по поводу разнородности свойств, вынесенных в определение полугруппы. Всё становится на свои места, когда становится известным стохастическое происхождение этих полугрупп.

Если $X = \{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — однородный марковский процесс в фазовом пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ с переходной функцией $P(s, x; t, B)$, то семейство операторов

$$U(t)f(x) := \mathbb{E}^{0,x}[f(X(t))] = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0, x; t, dy), \quad f \in B_b(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geqslant 0, \tag{3.5}$$

образует полугруппу в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$, называемую *переходной полугруппой процесса $X$*, которая является марковской.

Действительно, полугрупповое свойство (M1) переходной полугруппы является следствием марковского свойства процесса $X$, а условие $U(0) = I$ — следствием очевидного наблюдения, что вероятность $P(t, x; t, B)$ системы, находящейся в момент времени $t$ в состоянии $x$, оказаться в этот же момент в одном из состояний множества $B$ равна 1 при $x \in B$ и 0 при $x \notin B$. Свойство (M2) есть результат неотрицательности меры $P$, а свойства (M3)–(M4) — отражение того, что вероятностная мера всего пространства равна 1.

Напомним, что решение стохастического дифференциального уравнения (1.4) представляет собой однородный марковский процесс, и, следовательно, ему тоже соответствует переходная полугруппа. Мы уже исследовали характеристики решения уравнения (1.4) при помощи инфинитезимальных характеристик в разделе 1.2 и при помощи формулы Ито в разделе 1.3. В этом разделе мы применяем полугрупповые методы.

Переходная полугруппа описывает эволюцию текущего состояния процесса $X(t)$ при известном начальном состоянии $X(0) = x$ на языке характеристик вида $u(t, x) := U(t)f(x)$. Характеристика $v(t, x)$, введённая в разделе 1.3 равенством (1.11), также описывает текущее состояние процесса $X(t) = x$ но при известном его конечном состоянии $X(T)$. Можно сказать, что функция $v(t, x)$ описывает историю развития процесса $X$ до момента времени $T$, а функция $u(t, x)$ — его эволюцию от некоторого начального момента, поэтому для функции $v(t, x)$ естественным образом появляется обратное уравнение с финальным условием $v(T, x) = f(x)$, а для функции $u(t, x)$ — прямое уравнение с начальным условием $f(x)$. Подобные рассуждения справедливы и для задач Коши (1.8) и (1.3) для плотности переходной вероятности.

Вернёмся к полугруппам. Из свойства (M3) следует, что операторы полугруппы ограничены, более того, субмарковская полугруппа является сжимающей: $\|U(t)f\| \leqslant \|f\|$, $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$.

**Определение 3.2.** Субмарковская полугруппа $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$, отображающая $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $C_0(\mathbb{R}^n)$ и сильно непрерывная в нуле в $C_0(\mathbb{R}^n)$: $\|U(t)f - f\| \to 0$ при $t \to 0$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ — называется *феллеровской полугруппой* (*полугруппой Феллера*). Однородный марковский процесс, переходная полугруппа которого является феллеровской, называется *феллеровским процессом*.

**Замечание 3.1.** Сравнивая с полугруппами, введёнными в предыдущем разделе, заметим, что феллеровские полугруппы являются полугруппами класса $C_0$ в пространстве $E = C_0(\mathbb{R}^n)$. Это означает, что задача Коши (2.1) с оператором $A$ — генератором феллеровской полугруппы, является равномерно корректной на $\operatorname{dom} A \subset C_0(\mathbb{R}^n)$.

Мы определили феллеровские случайные процессы по поведению их переходных полугрупп. Верно и обратное, любая феллеровская полугруппа есть переходная полугруппа некоторого стохастического процесса (который при этом автоматически является феллеровским и субмарковским однородным).

**Замечание 3.2.** Отметим здесь, что феллеровские полугруппы могут оказаться как марковскими (консервативными), так и субмарковскими (неконсервативными). Это означает, что соответствующий случайный процесс является либо марковским с переходной функцией $P(s,x;t,\cdot)$, являющейся вероятностной мерой на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $P(s,x;t,\mathbb{R}^n)=1$), либо *субмарковским*[1] — с переходной функцией $P(s,x;t,\cdot)$, являющейся субвероятностной мерой на $\mathbb{R}^n$ (т. е. $P(s,x;t,\mathbb{R}^n)<1$). Последнее означает, что процесс выходит за пределы фазового пространства. В этом случае иногда говорят,что процесс *умирает* для $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ илиимеет *конечное время жизни* в пространстве $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

Среди переходных полугрупп однородных марковских процессов особое место занимают феллеровские полугруппы, *инвариантные относительно сдвигов*:

$$\tau_z U(t)f = U(t)\tau_z f, \quad \text{где} \quad \tau_z u := u(\cdot + z). \tag{3.6}$$

**Предложение 3.1.** *Феллеровская полугруппа* $\{U(t),\, t\geqslant 0\}$, *инвариантная относительно сдвигов, представима в виде оператора свёртки*

$$U(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\eta_t(x-dy) = (\eta_t * f)(x), \tag{3.7}$$

*где мера* $\eta_t(\cdot)$ *на* $\mathbb{R}^n$ *связана с переходной функцией* $P(s,x;t,B)$ *соответствующего феллеровского процесса соотношением*

$$\eta_t(x-B) = P(0,x;t,B), \quad B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

*Доказательство.* Согласно классическим результатам [13, Th. 6.33], линейный непрерывный оператор $U:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to C(\mathbb{R}^n)$ является инвариантным относительно сдвигов, если и только если он представим в виде свёртки с ядром из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Следовательно, найдётся такое $\lambda_t\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, что сужение полугруппы $U(t)$ на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ может быть записано в виде свёртки: $U(t)\varphi(x) = (\lambda_t * \varphi)(x)$, $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку полугруппа сохраняет положительность (свойство (M2)), распределение $\lambda_t\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является положительным: для любой основной функции $\psi$, принимающей неотрицательные значения, значение функционала также неотрицательно:

$$\lambda_t(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n}\lambda_t(y)\psi(y)\,dy := \int_{\mathbb{R}^n}\lambda_t(y)\varphi(-y)\,dy = U(t)\varphi(0)\geqslant 0.$$

Согласно ещё одному классическому результату [14, теорема 2.1.7], положительные распределения отождествляются с положительными мерами — элементами из пространства, сопряженного к $C_0(\mathbb{R}^n)$: $\lambda_t(y)dy = \eta_t(dy)$, что даёт представление полугруппы в виде (3.7).

Для завершения доказательства остаётся сравнить полученное представление с (3.5) и заметить справедливость соотношения (3.8). □

**Замечание 3.3.** Свойство (3.6) инвариантности полугруппы относительно сдвигов выражается свойством инвариантности переходной функции относительно сдвигов фазового пространства: $P(s,x;t,B) = P(s,0;t,B-x)$. Обозначая $\mu_t$ закон распределения процесса, стартовавшего из нуля: $\mu_t(B) = P(0,0;t,B)$, получаем, что построенная мера $\eta_t$ есть «отзеркаленный» относительно нуля закон распределения процесса:

$$\eta_t(B) = \mu_t(-B). \tag{3.9}$$

Теперь мы вплотную приблизились к процессам, с которых начинали исследование — процессам Леви.

**Предложение 3.2** (см. [19, Th. 2.6]). *Инвариантная относительно сдвигов феллеровская полугруппа* $\{U(t),\, t\geqslant 0\}$ *консервативна тогда и только тогда, когда соответствующий ей случайный процесс является процессом Леви.*

[1] Такие процессы также называют *обрывающимися* [7, с. 19].

Отсюда следует, что случайный процесс, соответствующий неконсервативной инвариантной относительно сдвигов феллеровской полугруппе $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$, является *процессом Леви с конечным временем жизни* (в контексте замечания 3.2).

Пусть $L = \{L(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Леви. Представление его переходной полугруппы в форме операторов свертки открывает возможности для эффективного применения преобразования Фурье. Во-первых, преобразование Фурье переводит свёртку в произведение: $\mathcal{F}[U(t)f](\sigma) = \widehat{\eta}_t(\sigma)\widehat{f}(\sigma)$, откуда, в силу связи (3.9) мер $\eta_t$ и $\mu_t$ и определения характеристической функции (3.3)–(3.4) получаем, что преобразование Фурье полугруппы есть произведение характеристической функции $\Phi_{L(t)}(\sigma)$ и Фурье-образа функции $f$:

$$\mathcal{F}[U(t)f](\sigma) = (2\pi)^n \check{\mu}_t(\sigma)\widehat{f}(\sigma) = \Phi_{L(t)}(\sigma)\widehat{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{3.10}$$

Во-вторых, если полугруппа представлена в виде свёртки, то полугрупповому свойству (M1) соответствует свёртка мер: $(M1) \iff \eta_{t+s} = \eta_t * \eta_s,\ \eta_0 = \delta$, из которой следует безграничная делимость мер $\eta_t$ и $\mu_t$: $\widehat{\eta}_t = (\widehat{\eta}_{t/n})^n \iff \check{\mu}_t = (\check{\mu}_{t/n})^n$, что, в свою очередь, позволяет применить к функции $\Phi_{L(t)}$ формулу Леви—Хинчина, описывающую структуру логарифма характеристической функции безгранично делимого распределения.

Изложенные рассуждения суммирует следующая теорема (см., например, [3, 16, 19, 27, 36]).

**Теорема 3.1.** *Пусть $L = \{L(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Леви. Тогда*

$$\Phi_{L(t)}(\sigma) = \mathbb{E}\left[e^{i(\sigma, L(t))}\right](\sigma) = e^{t\psi(\sigma)}, \quad t \geqslant 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{3.11}$$

*где*

$$\psi(\sigma) = i(b,\sigma) - \frac{1}{2}(\sigma, Q\sigma) + \int_{\mathbb{R}^n} \Big(e^{i(\sigma,y)} - 1 - i(\sigma,y)\cdot \mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y)\Big)\nu(dy). \tag{3.12}$$

*В этом представлении однозначно определённые характеристики $(b, Q, \nu)$ таковы: $b \in \mathbb{R}^n$, $Q$ — симметричная неотрицательно определённая $n \times n$-матрица, $\nu$ — мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая условиям $\nu(\{0\}) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \big(|y|^2 \wedge 1\big)\nu(dy) < \infty$.*

*Верно и обратное: для любой функции $\psi$ вида* (3.12)*, удовлетворяющей приведённым условиям, существует процесс Леви, удовлетворяющий соотношению* (3.11).

**Определение 3.3.** В условиях теоремы 3.1 равенство (3.12) называют *формулой Леви—Хинчина*, функцию $\psi$ — *символом Леви*, $(b, Q, \nu)$ — *тройкой Леви*, $b$ — *коэффициентом сноса* (*сдвига*), $Q$ — *ковариационной матрицей*, $\nu$ — *мерой Леви*.

Начиная от классических доказательств Леви и Хинчина в 30-е годы прошлого столетия, существует множество вероятностных и аналитических доказательств формулы Леви—Хинчина. Например, доказательство в [27] основано на свойствах класса отрицательно определённых функций, которому показана принадлежность функция $\psi$. Обзор истории становления этой формулы можно найти в [36].

В общем случае, когда $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$ — инвариантная относительно сдвигов полугруппа Феллера и $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — соответствующий случайный процесс, функция $\psi(\sigma)$ в представлении (3.11) имеет вид:

$$\psi(\sigma) = \psi(0) + i(b,\sigma) - \frac{1}{2}(\sigma, Q\sigma) + \int_{\mathbb{R}^n} \Big(e^{i(\sigma,y)} - 1 - i(\sigma,y)\cdot \mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y)\Big)\nu(dy). \tag{3.13}$$

В этом представлении $\psi(0) \leqslant 0$, а остальные параметры соответствуют теореме 3.1. Здесь тройка $(b, Q, \nu)$ определяется функцией $\psi(\sigma) - \psi(0)$ однозначно.

Верно и обратное: для любой функции $\psi$ вида (3.13), удовлетворяющей приведённым условиям, существует процесс Леви (с конечным или бесконечным временем жизни), удовлетворяющий соотношению (3.11), и связанная с ним инвариантная относительно сдвигов феллеровская полугруппа (см. [19, Th. 2.2]).

Для функции $\psi(\sigma)$ справедливы оценки:

$$\operatorname{Re}\psi(\sigma) \leqslant 0, \qquad |\psi(\sigma)| \leqslant C(1 + |\sigma|^2), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{3.14}$$

первая из которых следует из представления (3.11) и того, что для любой случайной величины $|\Phi(\sigma)| \leqslant 1$, а вторая — из представления (3.13).

Формула (3.13) позволяет получить критерий консервативности/неконсервативности полугруппы (или продолжительности жизни соответствующего процесса) в терминах символа Леви. Действительно, из соотношения $e^{t\psi(0)} = \Phi_{X(t)}(0) = \mu_t(\mathbb{R}^n)$ для консервативной полугруппы получаем: $\mu_t(\mathbb{R}^n) = 1 \iff \psi(0) = 0$, а для неконсервативной: $\mu_t(\mathbb{R}^n) < 1 \iff \psi(0) < 0$.

Перейдём к вопросу о представлении генератора переходной полугруппы.

**3.2. Генераторы феллеровских полугрупп.** Напомним, что генератором полугруппы $\{U(t), t \geqslant 0\}$ в пространстве $B_b(\mathbb{R}^n)$ называется оператор $Af(x) := \lim\limits_{t\to 0} \frac{U(t)f(x)-f(x)}{t}$, $x \in \mathbb{R}^n$, определённый для тех $f \in B_b(\mathbb{R}^n)$, для которых этот предел существует.

Найдём генератор феллеровской полугруппы, инвариантной относительно сдвигов. Возьмём для начала $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ и, пользуясь преобразованием Фурье и соотношениями (3.10) и (3.11), запишем полугруппу в виде

$$U(t)f(x) = \mathcal{F}^{-1}\big[e^{t\psi(\sigma)}\widehat{f}(\sigma)\big](x). \tag{3.15}$$

Тогда

$$Af(x) = \mathcal{F}^{-1}\Big[\lim_{t\to 0}\frac{e^{t\psi(\sigma)}-1}{t}\widehat{f}(\sigma)\Big](x) = \mathcal{F}^{-1}\big[\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)\big](x). \tag{3.16}$$

Из представления (3.13) функции $\psi(\sigma)$ по свойствам обобщённого преобразования Фурье находим:

$$Af(x)=\psi(0)f(x)+(b,\nabla f(x))+\frac{1}{2}\operatorname{div} Q\nabla f(x)+\int_{\mathbb{R}^n}\big(f(x+y)-f(x)-(\nabla f(x), y\cdot \mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y))\big)\nu(dy),\ \ f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{3.17}$$

Нетрудно показать, что это равенство может быть продолжено на дважды непрерывно дифференцируемые функции пространства $C_0(\mathbb{R}^n)$ и, таким образом, $C_0^2(\mathbb{R}^n) \subseteq \operatorname{dom} A \subset B_b(\mathbb{R}^n)$. Полное описание области определения оператора $A$ нам неизвестно. Однако представление (3.17) вполне определяет генератор, потому что множество $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является ядром оператора $A$ ($\operatorname{core} A$) в смысле следующего определения.

**Определение 3.4.** Пусть $A$ — замкнутый линейный оператор в банаховом пространстве $E$ с областью определения $\operatorname{dom} A$. Линейное подпространство $\mathcal{E} \subset \operatorname{dom} A$ называется *ядром оператора* $A$ ($\mathcal{E} = \operatorname{core} A$), если $\overline{A|_{\mathcal{E}}} = A$, т. е. для любого $f \in \operatorname{dom} A$ найдётся такая последовательность $f_n \in \mathcal{E}$, что $f_n \to f$ и $Af_n \to Af$.

Таким образом, мы получили, что генератор феллеровской полугруппы, инвариантной относительно сдвигов, представляет собой интегродифференциальный оператор (3.17).

В общем случае феллеровской полугруппы вид генератора определяет следующая теорема [19, Th. 2.21].

**Теорема 3.2.** *Пусть $A$ — генератор феллеровской полугруппы. Если $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{dom} A$, то*

$$\begin{aligned} Af(x) \ &= \ a(x)f(x) + (b(x), \nabla f(x)) + \frac{1}{2}\, div\, Q(x)\nabla f(x) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n}\big(f(x+y) - f(x) - (\nabla f(x), y\cdot\mathbf{1}_{|y|\leqslant 1}(y))\big)\nu(x, dy), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \tag{3.18}$$

*где $a(x) \leqslant 0$ и при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ тройка $(b(x), Q(x), \nu(x,\cdot))$ соответствует условиям теоремы* 3.1.

Теперь, имея генератор феллеровской полугруппы, мы получаем уравнение для вероятностной характеристики $u(t,x) = U(t)f(x)$ соответствующего процесса $X$.

**Предложение 3.3.** *Пусть $X$ — феллеровский процесс и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \operatorname{dom} A$. Тогда для любого $f \in \operatorname{dom} A$ функция $u(t,x)$ является решением задачи Коши $u_t'(t,x) = Au(t,x)$, $u(0,x) = f(x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, с оператором $A$, определённым равенством* (3.17).

Используя полугрупповую технику, ослабим условия теоремы 1.4 и покажем возможность не требовать дифференцируемости характеристики $v(t,x)$, определенной в разделе 1.3 равенством (1.11).

**Предложение 3.4.** *Пусть функция $v(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$ определена соотношением* (1.11). *Если процесс $X$ — феллеровский и $A$ — генератор соответствующей переходной полугруппы $U$, то для любого $f \in \operatorname{dom} A \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ функция $v(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируема по $x$.*

*Доказательство.* В силу однородности процесса функцию $v$ можно представить как действие полугруппы:

$$v(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(t,x;T,dy)=\int_{\mathbb{R}^n} f(y)P(0,x;T-t,dy)=U(T-t)f(x), \quad f\in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Полугруппа $U$ — феллеровская, т. е. отображает $C_0(\mathbb{R}^n)$ в $C_0(\mathbb{R}^n)$ и её сужение на пространство $C_0(\mathbb{R}^n)$ образует полугруппу класса $C_0$ в этом пространстве. Как известно, полугруппа класса $C_0$ (в пространстве $E$) коммутирует со своим генератором на его области определения (лежащей в пространстве $E$), т. е. в нашем случае $AU(t)f(x)=U(t)Af(x)$, $f\in \operatorname{dom} A\subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Отсюда получаем, что $v(t,\cdot)=U(T-t)f(\cdot)\in \operatorname{dom} A\subset C_0(\mathbb{R}^n)$. Осталось заметить, что функции, входящие в область определения $A$ и лежащие в пространстве $C_0(\mathbb{R}^n)$, дважды непрерывно дифференцируемы. □

В заключение коснёмся спектральных характеристик генераторов и свойств полугрупп в пространствах $L_p$, $p\geqslant 1$.

Учитывая свойства феллеровских полугрупп быть сжимающими и сильно непрерывными на пространстве $C_0(\mathbb{R}^n)$, мы можем сформулировать классический критерий поведения генератора такой полугруппы в терминах оценок на резольвенту.

**Теорема 3.3** (Хилле—Иосида). *Пусть $A$ — плотно определённый замкнутый оператор в банаховом пространстве $E$ с резольвентой $\mathcal{R}(\lambda)$. Оператор $A$ является генератором сжимающей полугруппы на $E$, если и только если*

1) $(0,\infty)\subseteq\rho(A)$, *где* $\rho(A)$ — *резольвентное множество оператора* $A$;
2) $\|\mathcal{R}(\lambda)\|\leqslant 1/\lambda$ *при* $\lambda>0$.

Покажем, что резольвенту генератора феллеровской полугруппы, в классической теории полугрупп представимую в форме преобразования Лапласа, на базе техники характеристических функций можно представить в виде преобразования Фурье:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\lambda)f(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}U(t)f(x)\,dt=(2\pi)^n\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}e^{t\psi(\sigma)}\widehat{f}(\sigma)\,d\sigma=\\ &= (2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\widehat{f}(\sigma)\,d\sigma\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}e^{t\psi(\sigma)}\,dt=(2\pi)^n\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\frac{\widehat{f}(\sigma)}{\lambda-\psi(\sigma)}\,d\sigma=\\ &= \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{\widehat{f}(\sigma)}{\lambda-\psi(\sigma)}\right], \quad \operatorname{Re}\lambda>\operatorname{Re}\psi(\sigma).\end{aligned}$$

Свойства переходных полугрупп в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p\geqslant 1$, устанавливает теорема.

**Теорема 3.4** (см. [16, Th. 3.4.2]). *Если $X=\{X(t),\, t\geqslant 0\}$ является процессом Леви, то семейство операторов*

$$U(t)f(x)=\mathbb{E}[f(X(t)+x)], \quad f\in L_p(\mathbb{R}^n), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad t\geqslant 0, \tag{3.19}$$

*образует марковскую полугруппу в пространстве $L_p(\mathbb{R}^n)$ и $\|U(t)f\|_{L_p}\leqslant\|f\|_{L_p}$.*

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, используя формулу Леви—Хинчина (3.12) и свойства преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R}^n)$, можно полностью описать область определения генератора полугруппы (3.19): $\operatorname{dom} A=\left\{f\in L_2(\mathbb{R}^n): \int_{\mathbb{R}^n}|\psi(\sigma)|^2|\widehat{f}(\sigma)|^2\,d\sigma<\infty\right\}$.

**3.3. Примеры полугрупп, связанных с процессами Леви.** Здесь мы приводим примеры полугрупп, связанных с базовыми процессами Леви. Несмотря на то, что все рассматриваемые семейства имеют близкие полугрупповые свойства, они принципиально различаются с точки зрения приложений к моделированию случайных процессов и их вероятностных характеристик. Для наглядности все примеры рассматриваются в $\mathbb{R}$.

**Пример 3.1.** Начнём с полугруппы операторов сдвига $U_1=\{U_1(t), t\geqslant 0\}$, связанной с процессом сдвига $X_1(t)=x+bt$, $x,b\in\mathbb{R}$, $t\geqslant 0$. Процесс $X_1$ является детерминированным процессом, и для него имеют место свойства стохастической непрерывности, временной и пространственной однородности.

Поскольку вероятность перехода из точки $x$ в точку $y<x+bt$ равна нулю, а в точку $y\geqslant x+bt$ равна единице, то для процесса сдвига $X_1$ можно задать обобщённую плотность переходной

вероятности[1] следующим образом: $p_1(0,x;t,y) = \delta_{x+bt}(y) = \delta(y-(x+bt))$. Тогда соответствующая процессу $X_1$ переходная полугруппа $U_1$ имеет вид $U_1(t)f(x) = \langle f(\cdot), p_1(0,x;t,\cdot)\rangle = \langle f, \delta_{x+bt}\rangle = f(x+bt)$. Эта полугруппа является сильно непрерывной на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и может быть продолжена на пространств $B_b(\mathbb{R})$, измеримых ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

Нетрудно проверить, что $u(x,t) = U_1(t)f(x)$ — значение функционала, зависящего от параметров $t \geqslant 0$ и $x \in \mathbb{R}$, является решением задачи Коши $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$. Следовательно, генератором полугруппы $U_1$ является оператор дифференцирования первого порядка $A_1 = b\frac{\partial}{\partial x}$.

**Пример 3.2.** Переходная полугруппа $U_2 = \{U_2(t), t \geqslant 0\}$ винеровского процесса с плотностью переходной вероятности $p_2(0,x;t,y) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2c^2t}}$ задаётся соотношением $U_2(t)f(x) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2c^2t}}dy$. Полугруппа определена на пространстве $B_b(\mathbb{R})$, является сильно непрерывной на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и, кроме того, является сильно непрерывной на пространстве $L_2(\mathbb{R})$ (см., например, [2]).

Функция $u(x,t) = U_2(t)f(x)$ является решением задачи Коши $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $u(x,0) = f(x)$, генератором полугруппы $U_2$ является оператор $A_2 = \frac{c^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$.

**Пример 3.3.** Рассмотрим процесс Пуассона $\{X_3(t), t \geqslant 0\}$ — процесс со скачками величины $q$, интенсивностью $\lambda$ и начальным состоянием $X_3(0) = x$ п.н. Процесс задаётся с помощью функции переходной вероятности $P_3(0,x;t,y) := P_3(0,x;t,(-\infty;y)) = \sum\limits_{k=0}^{d_q} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$, где $d_q = d_q(x,y)$ равно целой части $\left[\frac{y-x}{q}\right]$ при $\left[\frac{y-x}{q}\right] \neq \frac{y-x}{q}$ и $\left[\frac{y-x}{q} - 1\right]$ — в противном случае. Обобщённая плотность переходной вероятности определяется соотношением $p_3(0,x;t,y) = \sum\limits_{k=0}^{d_q} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\delta_{x+kq}(y)$. Отсюда несложно получить представление переходной полугруппы: $U_3(t)f(x) = \langle f(\cdot), p_3(0,x;t,\cdot)\rangle = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}f(x+kq)$. Полугруппа $U_3$ определена на пространстве $C_0(\mathbb{R})$ и является сильно непрерывной на этом пространстве:

$$\|U_3(t)f(x) - f(x)\| = \left\|(e^{-\lambda t} - 1)f(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}f(x+kq)\right\| \xrightarrow[t\to 0]{} 0, \quad f \in C_0(\mathbb{R}).$$

Для данной полугруппы по определению генератора получаем:

$$A_3 f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[U_3(t) - I\right]f(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big[\langle f(y), \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\delta_{x+kq}(y)\rangle - f(x)\Big] =$$
$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big[(e^{-\lambda t} - 1)f(x) + \lambda t e^{-\lambda t}f(x+q)\big] = \lambda(f(x+q) - f(x)).$$

Отсюда следует, что $u(x,t) = U_3(t)f(x)$ является решением задачи Коши $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \lambda(u(x+q,t) - u(x,t))$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geqslant 0$, $u(x,0) = f(x)$.

Отметим, что, в отличие от дифференциальных операторов $A_1$, $A_2$, генератором полугруппы $U_3$ является разностный оператор.

**Пример 3.4.** Рассмотрим переходную полугруппу $U_4 = \{U_4(t),\, t \geqslant 0\}$, отвечающую составному процессу Пуассона $X_4 = \{X_4(t),\, t \geqslant 0\}$, сдвинутому на $x$. Пусть $\{z_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых $\mathbb{R}$-значных случайных величин с общим законом распределения $\mu_z$ и $N = \{N(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda$. Тогда $X_\pi(t) = z_1 + \cdots + z_{N(t)}$ и есть составной процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda$.

В данном случае, не имея для процесса в явном виде плотности переходной вероятности или функции переходной вероятности, для описания полугруппы, соответствующей $X_4 := X_\pi + x$, мы

[1]Функционал $p(0,x;t,\cdot)$ такой, что для любой функции $f \in C_0(\mathbb{R})$ справедливо равенство $\int_{\mathbb{R}} f(y)P(0,x;t,dy) = \langle f(\cdot), p(0,x;t,\cdot)\rangle$, будем называть *обобщённой плотностью переходной вероятности* процесса $\{X(t), t \geqslant 0\}$. Если функция переходной вероятности имеет плотность (производную в смысле Радона—Никодима), то $p(0,x;t,\cdot)$ является регулярной обобщённой функцией.

используем технику (обобщённого) преобразования Фурье от переходной вероятности процесса, или, в вероятностной терминологии, технику характеристических функций.

Найдём характеристическую функцию процесса $X_\pi$:

$$\begin{aligned}\Phi_{X_\pi(t)}(\sigma) &= \mathbb{E}\left[e^{i(\sigma,X_\pi(t))}\right](\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(e^{i\sigma(z_1+\dots+z_{N(t)})}\big|N(t)=k\right)\mathbf{P}(N(t)=k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_z^k(\sigma)\frac{(t\lambda)^k}{k!}e^{-t\lambda} = e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)} =: e^{t\psi(\sigma)}, \quad \sigma\in\mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Следовательно, процесс $X_\pi$ является процессом Леви с символом Леви $\psi(\sigma)=\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)$.

Из определения характеристической функции процесса как обобщённого обратного преобразования Фурье плотности переходной вероятности находим плотность процесса $X_\pi$ как обобщённую функцию $\langle\varphi(\cdot),p_\pi(0,0;t,\cdot)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle\varphi(\cdot),\mathcal{F}[e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](\cdot)\rangle$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, и представление для переходной полугруппы процесса $X_4$

$$\begin{aligned}U_4(t)f(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y)P_4(0,x;t,dy) = \int_{\mathbb{R}} f(y+x)P_\pi(0,0;t,dy) = \langle f(y+x),p_\pi(0,0;t,y)\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle f(y+x),\mathcal{F}[e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](y)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle\mathcal{F}[f(y+x)](\sigma),e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}\rangle = \\ &= \frac{1}{2\pi}\langle e^{ix\sigma}\mathcal{F}[f](\sigma),e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}\rangle = \mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\sigma)e^{t\lambda(\Phi_z(\sigma)-1)}](x), \quad f\in C_0(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Генератор полугруппы $U_4$ мы получим в следующем разделе, используя технику псевдодифференциальных операторов.

**3.4. Генераторы полугрупп как псевдодифференциальные операторы и операторы с ядрами.** Операторы рассматриваемых полугрупп вида $U(t)f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)dP(0,x;t,y)$, $x\in\mathbb{R}^n$, похожи на классические интегральные операторы. Однако, как мы видели в рассмотренных примерах, претенденты на ядра — плотности переходных вероятностей $p(0,x;t,\cdot)$ — не принадлежат в общем случае пространству интегрируемых функций. В настоящем разделе мы покажем, что операторы полугрупп и их генераторы принадлежат классу псевдодифференциальных операторов, обобщающему классы дифференциальных и интегральных операторов, и что они являются операторами с ядрами из пространства распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

**Определение 3.5.** *Псевдодифференциальным оператором* на классе функций $\mathcal{A}$ называют оператор вида $Kf(x)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,\sigma)}s(x,\sigma)\widehat{f}(\sigma)d\sigma$, $x\in\mathbb{R}^n$, $f\in\mathcal{A}$, где функция $s:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ называется *символом* псевдодифференциального оператора.

На классе функций $\mathcal{A}=\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ для операторов с локально ограниченными по $x$ и полиномиально-ограниченными по $\sigma$ символами имеем $Kf\,(x)=\mathcal{F}^{-1}[s(x,\cdot)\widehat{f}(\cdot)](x)$, $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Такие операторы обобщают класс дифференциальных операторов с переменными ограниченными коэффициентами: оператор $K=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$, $x\in\mathbb{R}$ является псевдодифференциальным

$$\begin{aligned}Kf\,(x) &= \sum_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n}a_k(x)\int_{\mathbb{R}}e^{ix\sigma}(i\sigma)^k\widehat{f}(\sigma)d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{n}a_k(x)e^{ix\sigma}(i\sigma)^k\widehat{f}(\sigma)d\sigma =: \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{ix\sigma}s(x,\sigma)\widehat{f}(\sigma)d\sigma,\end{aligned}$$

с символом $s(x,\sigma)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)(i\sigma)^k$.

Отсюда следует, что генераторы полугрупп $U_1$ и $U_2$, как частный случай операторов $K=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$, являются псевдодифференциальными со степенными (по $\sigma$) символами. Мы покажем, что генераторы $A_3$ и $A_4$ полугрупп $U_3$ и $U_4$ тоже относятся к классу псевдодифференциальных операторов. Более того, покажем, что генераторы полугрупп, соответствующих сдвинутым на $x$ процессам Леви, можно рассматривать как операторы с ядрами $\mathcal{K}$, действующими на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

Согласно теореме Шварца о ядре [14, с. 158], существует взаимно-однозначное соответствие между непрерывными операторами

$$K : \mathcal{D}(X) \to \mathcal{D}'(Y) \tag{3.21}$$

и распределениями $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(X \times Y)$. А именно, любому непрерывному оператору (3.21) соответствует единственное распределение $\mathcal{K} \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ такое, что

$$\langle \phi, K\varphi \rangle = \langle \varphi \otimes \phi, \mathcal{K} \rangle, \quad \text{где} \quad (\varphi \otimes \phi)(x, y) := \varphi(x)\phi(y), \quad \varphi \in \mathcal{D}(X), \ \phi \in \mathcal{D}(Y), \tag{3.22}$$

называемое *ядром оператора* $K$; и в обратную сторону, по $\mathcal{K}$ определяется $K$.

Отметим, что, как показано в [14], можно рассматривать также пары $K : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}'(Y)$ и $\mathcal{K} \in \mathcal{S}'(X \times Y)$.

В зависимости от специфики задач, решаемых с помощью псевдодифференциальных операторов, выделяют различные классы символов. В настоящей работе для определения генераторов полугрупп нам будет достаточно предполагать, что символ $s$ принадлежит подходящему классу Хермандера [14, гл. 7], [15, гл. 18]. Псевдодифференциальные операторы с такими символами корректно определены на пространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, а соответствующие операторы $K : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Для символов, отвечающих самим полугруппам, следует использовать классы функций, зависящие от временного параметра.

**Теорема 3.5.** *Пусть $\{X(t),\, t \geqslant 0\}$ — процесс Леви и $U = \{U(t),\, t \geqslant 0\}$ — переходная полугруппа процесса $Y = \{X(t)+x\}$. Тогда генератор полугруппы $U$ является псевдодифференциальным оператором и оператором с ядром из пространства $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

*Доказательство.* Для начала заметим, что представление (3.16) генератора полугруппы можно распространить на $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, пользуясь полиномиальной оценкой (3.14) функции $\psi$:

$$Af(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)\right](x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\psi(\sigma)\widehat{f}(\sigma)\,d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

следовательно, оператор $A$ является псевдодифференциальным оператором с полиномиально ограниченным символом $s(x,\sigma) = \psi(\sigma)$ на классе $\mathcal{A} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Найдём ядро $\mathcal{K}$ оператора $A$. Из предыдущего представления, формально меняя порядок интегрирования, получаем

$$Af\,(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}\psi(\sigma)\,d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)} f(y)\,dy = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}(x,y) f(y)\,dy,$$

где через $\mathcal{K}$ обозначен расходящийся интеграл:

$$\mathcal{K}(x,y) := \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x-y)}\psi(\sigma)\,d\sigma.$$

Придадим ядру $\mathcal{K}$ смысл, рассматривая его как распределение на основных функциях $\varphi \otimes \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. По определению (3.22) имеем

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}(x,y)\rangle &= \langle \phi(y), A\varphi(y)\rangle = \langle \phi(y), \mathcal{F}^{-1}[\psi(\sigma)\widehat{\varphi}(\sigma)](y)\,\rangle = \langle \phi(y), (\mathcal{F}^{-1}[\psi] * \varphi)(y)\,\rangle = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\phi(y)\,dy\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,y)}\psi(\sigma)\,d\sigma\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,z)}\varphi(z)\,dz. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Повторный интеграл здесь сходится в силу гладкости функций $\phi$ и $\varphi$, степенных оценок на символ Леви $\psi$ и поведения (прямого и обратного) преобразования Фурье от функций $\phi$ и $\varphi$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, генератор $A$ взаимно однозначно определяется ядром $\mathcal{K} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. $\square$

Теперь покажем конструкцию ядер для генераторов $A_1$–$A_4 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, используя представление этих псевдодифференциальных операторов через символы, определяемые для каждого из них формулой (3.12).

Для генератора полугруппы $U_1$ символ имеет вид $\psi(\sigma) = ib\sigma$. Тогда ядро генератора определяется равенством $\langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}_1(x,y)\rangle = \langle \phi(y), (\mathcal{F}^{-1}[\psi] * \varphi)(y)\,\rangle = b\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\varphi'(y)dy$.

Для генератора полугруппы $U_2$ символ определяется равенством $\psi(\sigma) = -\frac{c^2}{2}\sigma^2$. Тогда получаем следующее выражение для ядра генератора $A_2$: $\langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}_2(x,y)\rangle = \frac{c^2}{2}\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\varphi''(y)dy$.

Для генератора полугруппы $U_3$ находим символ: $\psi(\sigma) = \lambda(e^{iq\sigma} - 1)$. Тогда ядро определяется следующим образом: $\langle \varphi(x)\phi(y), \mathcal{K}_3(x,y)\rangle = \langle \phi(y),\ \lambda(\varphi(y+q) - \varphi(y))\rangle = \lambda\int_{\mathbb{R}} \phi(y)(\varphi(y+q) - \varphi(y))dy$.

Для полугруппы, соответствующей процессу $\{X_4(t), t \geqslant 0\}$, сначала найдем генератор. Для него $\psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(e^{i\sigma\beta} - 1)\mu_z(d\beta)$, что следует из представления (3.20) характеристической функции

$\Phi_{X_4(t)}$. Тогда с помощью теоремы Фубини и формул преобразования Фурье для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ получаем оператор $A_4$:

$$A_4 f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}\int_{\mathbb{R}}(e^{i\sigma\beta}-1)\lambda\mu_z(d\beta)\hat{f}(\sigma)d\sigma =$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}e^{i\sigma\beta}\hat{f}(\sigma)d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\sigma x}\hat{f}(\sigma)d\sigma\right)\lambda\mu_z(d\beta) = \int_{\mathbb{R}}\left(f(x+\beta)-f(x)\right)\lambda\mu_z(d\beta),$$

который можно продолжить на пространство $B_b(\mathbb{R})$.

Для генератора полугруппы $U_4$ с символом $\psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}}\lambda(e^{i\sigma\beta}-1)\mu_z(d\beta)$ имеем

$$\langle\varphi(x)\phi(y),\, \mathcal{K}_4(x,y)\rangle = \langle\phi(y),\, \lambda\int_{\mathbb{R}}[\varphi(y+\beta)-\varphi(y)]\mu_z(d\beta)\,\rangle.$$

Для полугрупп $\{U_1(t), U_2(t), U_3(t), t \geqslant 0\}$ получаем ядра $\delta_{x+bt}(y)$, $e^{-\frac{(x-y)^2}{2c^2t}}$, $\sum\limits_{k=0}^{d_q}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\delta_{x+kq}(y)$.

В заключение отметим, что если процесс $X$ не является процессом Леви, но является феллеровским процессом, то формула (3.18) показывает, что генераторы и более общих полугрупп, нежели полугруппы Леви, являются псевдодифференциальными операторами с символом $s(x,\sigma)$.

Далее мы используем технику обобщённого преобразования Фурье и формулу Леви—Хинчина (3.12), чтобы рассмотреть псевдодифференциальные операторы в рамках классификации Гельфанда и Шилова, построенной для линейных дифференциальных операторов.

## 4. Задачи, связанные со случайными процессами, в полугрупповой классификации и классификации Гельфанда—Шилова. Схема сравнения

В этом разделе обсуждается место стохастических задач в соотношении между полугрупповой классификацией абстрактных задач Коши раздела 2, основанной на спектральных свойствах генераторов полугрупп и преобразовании Лапласа, и классификацией Гельфанда и Шилова дифференциальных систем, основанной на спектральных свойствах системы, технике обобщённого преобразования Фурье и свойствах мультипликаторов в пространствах основных и обобщённых функций. Начнём с краткого изложения классификации дифференциальных систем согласно [6].

**4.1. Классификация Гельфанда—Шилова дифференциальных систем.** Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)u(t,x), \quad t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u(0,x) = f(x), \tag{4.1}$$

где

$$\mathsf{A}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big) = \Big\{\mathsf{A}_{j,k}\Big(i\frac{\partial}{\partial x}\Big)\Big\}_{j,k=1}^{m}, \tag{4.2}$$

дифференциальные операторы $\mathsf{A}_{j,k}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ являются линейными с постоянными коэффициентами порядка, не превышающего $l$.

Применим к задаче (4.1) обобщённое преобразование Фурье (3.2), полагая при этом, что классическим преобразованием Фурье[1] вектор-функции $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ является вектор-функция $\widetilde{f}(\sigma) = (\widetilde{f}_1(\sigma), \dots, \widetilde{f}_m(\sigma))$ с компонентами $\widetilde{f}_j(\sigma) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\sigma,x)}f_j(x)dx$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$. Получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\widetilde{u}(t,\sigma)}{\partial t} = \mathsf{A}\,(\sigma)\,\widetilde{u}(t,\sigma), \quad t \geqslant 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{u}(0,\sigma) = \widetilde{f}(\sigma), \tag{4.3}$$

оператором решения которой служит матричная экспонента $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$:

$$\widetilde{u}(t,\sigma) = e^{t\mathsf{A}(\sigma)}\widetilde{f}(\sigma), \quad t \geqslant 0,\ \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{4.4}$$

Решение исходной задачи находится как обобщённое обратное преобразование Фурье функции $\widetilde{u}(t,\sigma)$

$$u(t,x) = G(t,x) * f(x), \qquad G(t,x) := \mathcal{F}^{-1}[e^{t\mathsf{A}(\sigma)}], \tag{4.5}$$

и его свойства определяются поведением матрицы-функции Грина $G(t,x)$, элементы которой могут оказаться как классическими, так и обобщёнными функциями.

[1] Мы сохраняем здесь определение операторов Фурье, введённое в [6]. Несложно связать его с преобразованием Фурье, введённым ранее в форме (3.1).

Целью исследований в [6] было построить классы корректности задачи (4.1), т. е. указать классы обычных функций $f(x)$, при которых существует обобщённое решение $u(t,x)$, лежащее в некотором классе также обычных функций, единственное и непрерывно зависящее от начальных условий. Для этого были детально изучены свойства функции $G(t,x)$, определяемые поведением экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$.

Поскольку функция $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$ не имеет проблем с гладкостью и является целой, элементы матрицы-функции $G(t,x)$ быстро убывают на бесконечности, что гарантирует существование свёртки (4.5) для широкого класса начальных функций $f(x)$. Однако рост экспоненты приводит к нерегулярности функции $G(t,x)$, что заставляет подбирать пространства основных функций, обеспечивающие существование обобщённых функций (4.4) и (4.5). Для максимального расширения пространства решений пространства основных функций следует выбирать узкими, насколько возможно, в конечном итоге — имеющими аналитическое продолжение. Таким образом, задача сводится к определению максимально узких пространств основных функций, в которых функция $e^{t\mathsf{A}(\zeta)}$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$, определяет мультипликатор — ограниченный оператор умножения. Тогда в двойственных относительно преобразования Фурье пространствах обобщённых функций функция $G(t,x)$ определяет ограниченный оператор свёртки. После этого остаётся выделить классы начальных условий $f(x)$, берущих на себя роль основных функций, при которых свёртка (4.5) является регулярной.

Свойство целой функции быть мультипликатором в том или ином пространстве основных функций определяется её поведением в комплексной плоскости и на действительной оси [5]. Для экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\cdot)}$ справедлива оценка

$$e^{t\Lambda(\zeta)}\leqslant\|e^{t\mathsf{A}(\zeta)}\|_m\leqslant C(1+|\zeta|)^{l(m-1)}e^{t\Lambda(\zeta)},\qquad t\geqslant 0,\quad \zeta\in\mathbb{C}^n, \tag{4.6}$$

где $\Lambda(\zeta):=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\operatorname{Re}\lambda_k(\zeta)$, функции $\lambda_1(\zeta),\ldots,\lambda_m(\zeta)$ — корни характеристического уравнения $\det(\lambda I-\mathsf{A}(\zeta))=0$.

Число $l_0=\inf\{\rho : |\Lambda(\zeta)|\leqslant C_\rho(1+|\zeta|)^\rho,\ \zeta\in\mathbb{C}^n\}$, $l_0\leqslant l$, называемое *точным степенным порядком роста* функции $\Lambda(\cdot)$ и *приведённым порядком системы* (4.1), определяет порядок роста экспоненты в целом в комплексной плоскости: $\|e^{t\mathsf{A}(\zeta)}\|_m\leqslant C(1+|\zeta|)^{l(m-1)}e^{bt\cdot|\zeta|^{l_0}}$, $b\in\mathbb{R}$, $t\geqslant 0$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$. Эта оценка точная, она универсальна для всех систем. Дифференциация систем возникает при исследовании роста экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\cdot)}$ на действительной оси, которое, в силу (4.6), целиком определяется поведением функции $\Lambda(\cdot)$. На основе этого в [6] выделены следующие классы систем.

Система (4.1) называется

- *корректной по Петровскому*, если найдется такая постоянная $C>0$, что $\Lambda(\sigma)\leqslant C$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$;
- *параболической*, если найдутся такие постоянные $C>0$, $h>0$, $C_1>0$, что
$$\Lambda(\sigma)\leqslant -C_1|\sigma|^h+C_2; \tag{4.7}$$
- *гиперболической*, если она корректна по Петровскому и приведённый порядок системы $l_0$ не превосходит единицы, т. е. $\Lambda(\zeta)\leqslant C_1|\zeta|+C_2$, $\zeta\in\mathbb{C}^n$;
- *условно корректной*, если найдутся такие постоянные $C>0$, $0<h<1$, $C_1>0$, что $\Lambda(\sigma)\leqslant C|\sigma|^h+C_1$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$;
- *некорректной*, если функция $\Lambda(\cdot)$ растет при действительных $s=\sigma$ так же, как и при комплексных: $\Lambda(\sigma)\leqslant C|\sigma|^{l_0}+C_1$, $\sigma\in\mathbb{R}^n$.

Для каждого из выделенных классов систем в [6] построены классы корректности задачи (4.1).

**4.2. Стохастические задачи в схеме сравнения полугрупповой классификации и классификации дифференциальных систем.** В полугрупповой теории преобразование Лапласа (классическое и обобщённое) играет такую же роль для решения задачи (2.1), как преобразование Фурье в исследовании систем дифференциальных уравнений — оно связывает операторы решения $\{U(t), t\in[0,\tau)\}$ задачи (2.1) с резольвентой $\mathcal{R}(\lambda)$ генератора полугруппы: $\mathcal{R}(\lambda)f=\mathcal{L}[U(t)f]$, $U(t)f=\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}(\lambda)f]$.

На этой связи основано разбиение задач (2.1) на классы, приведённое в разделе 2: в основу этой полугрупповой классификации можно полагать как поведение резольвенты генератора полугруппы, так и пространства обобщённых функций, в которых задача корректна.

На основе сравнения оценок нормы резольвенты оператора $A$ и матричной функции $e^{t\mathsf{A}(\sigma)}$ у авторов появилась гипотеза, что генераторы полугрупп класса $C_0$ и интегрированных полугрупп

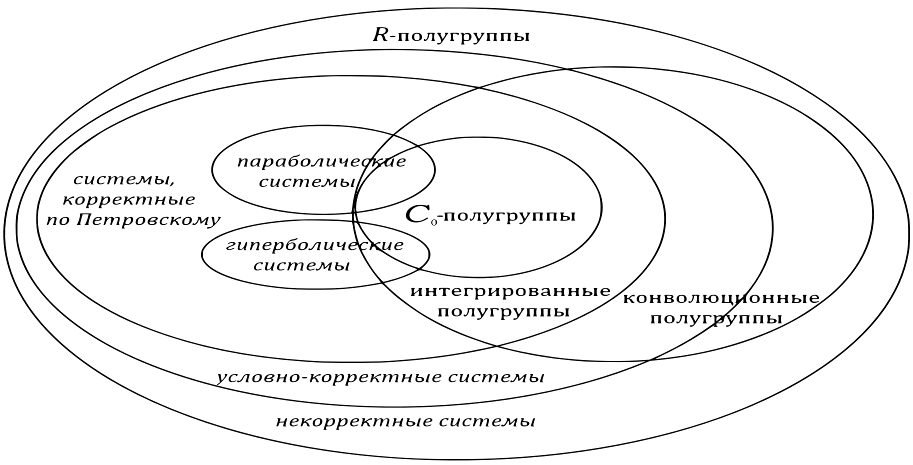


Рис. 1

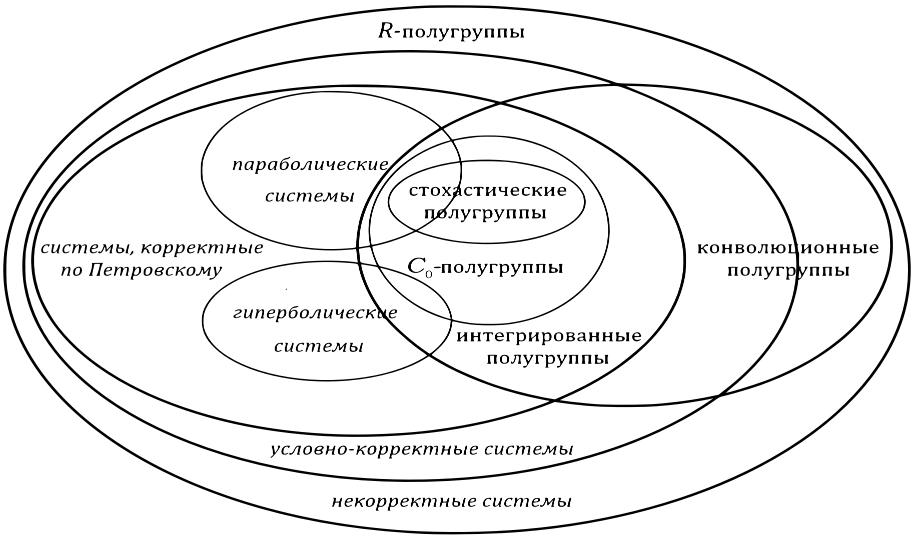


Рис. 2

порождают системы, корректные по Петровскому, генераторы конволюционных полугрупп порождают условно корректные системы, а генераторы $R$-полугрупп — некорректные системы. Детальные исследования показали, что всё не так просто, и соотношение между дифференциальными системами и полугруппами приняло следующий вид [10]: см. рис. 1.

Для возможности такого сравнение задача (2.1) рассматривалась с дифференциальным оператором $A$ вида (4.2) в пространстве $X = L_2^m(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R}^n)$ вектор-функций $f(x)$.

Пополним эту схему полугруппами, соответствующими случайным процессам. Как уже говорилось в разделе 3, переходные полугруппы феллеровских случайных процессов образуют полугруппы класса $C_0$. Посмотрим на них с точки зрения классификации, основанной на преобразовании Фурье.

Если $A$ — генератор феллеровской полугруппы, инвариантной относительно сдвигов, то решение задачи (2.1), согласно (3.15), определяется поведением экспоненты $e^{t\psi(\cdot)}$, где $\psi(\sigma)$ — символ оператора $A$, что аналогично тому, как решение системы (4.1) определяется поведением экспоненты $e^{t\mathsf{A}(\cdot)}$. В силу представления (3.13) функции $\psi(\sigma)$, на действительной оси справедлива оценка $\left|e^{t\psi(\sigma)}\right| \leqslant e^{(-\alpha|\sigma|^2+\beta)t}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, что соответствует условию (4.7) параболичности системы.

Однако в комплексной плоскости экспонента $e^{t\psi(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, имеет рост выше, чем $e^{t|\zeta|^k}$, при любом $k \in \mathbb{N}$ за счёт поведения интегрального слагаемого в функции $\psi(\cdot)$, что не позволяет отнести «стохастические» полугруппы к классу параболических систем по Гельфанду и Шилову.

Более того, такой рост экспоненты вообще не даёт возможности включить переходные полугруппы в эту классификацию, за исключением случая, когда мера Леви $\nu$ равна нулю.

В случае нулевого интегрального члена в представлении (3.13) функция $e^{t\psi(\cdot)}$ удовлетворяет оценкам $\left|e^{t\psi(\sigma)}\right| \leqslant e^{(-\alpha|\sigma|^2+\beta)t}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$; $\left|e^{t\psi(\zeta)}\right| \leqslant e^{(\alpha'|\zeta|^2+\beta')t}$, $\zeta \in \mathbb{C}^n$, где положительные константы $\alpha$ и $\alpha'$ зависят от $Q$ и равны нулю при $Q = 0$. Эти оценки означают, что интегродифференциальные уравнения, соответствующие $\nu = 0$ и $Q \neq 0$, относятся к классу параболических систем, а при $\nu = 0$ и $Q = 0$ — к классу систем, корректных по Петровскому. Полученный результат вполне ожидаем: задачи с нулевой мерой Леви являются дифференциальными (а не псевдодифференциальными) и вписываются в классификацию дифференциальных систем.

Более интересными являются следующие факты. При классификации с точки зрения преобразования Фурье уравнения для вероятностных характеристик случайных процессов по своим свойствам оказываются (в общем случае) далёкими от своих ближайших собратьев — дифференциальных систем, хотя и полугруппа, и её генератор являются псевдодифференциальными операторами. В то же время переходные полугруппы процессов Леви в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ однозначно характеризуются полугрупповыми методами: они обладают свойством сильной непрерывности и являются сжимающими (см. теорему 3.4).

Таким образом, мы можем пополнить приведённую выше схему переходными полугруппами процессов Леви с нулевой мерой Леви; на схеме они помечены как «стохастические полугруппы», см. рис. 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Ануфриева У. А., Мельникова И. В.* Особенности и регуляризация некорректных задач Коши с дифференциальными операторами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2005. — *14*. — С. 3–156.
2. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
3. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.
4. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. — М.: Наука, 1975.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщённых функций. — М.: Физматгиз, 1958.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов, т. II. — М.: Наука, 1973.
8. *Ито К.* Вероятностные процессы. Вып. II. — М.: Иностранная литература, 1963.
9. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей// Усп. мат. наук. — 1938. — № 5. — С. 5–41.
10. *Мельникова И. В., Алексеева У. А.* Полугрупповая классификация и классификация Гельфанда—Шилова для систем дифференциальных уравнений в частных производных// Мат. заметки. — 2018. — *104*, № 6. — С. 895–911.
11. *Мельникова И. В., Бовкун В. А., Алексеева У. А.* Интегродифференциальные уравнения, порожденные стохастическими задачами// Дифф. уравн. — 2021. — *57*, № 3. — С. 1653–1663.
12. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. — М.: Наука, 1987.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
14. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределения и анализ Фурье. — М.: Мир, 1986.
15. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987.
16. *Applebaum D.* Lévy processes and stochastic calculus. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
17. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-Valued Laplace Transform and Cauchy Problems. — Basel: Birkhäuser, 2011.
18. *Björk T.* Arbitrage theory in continuous time. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2009.
19. *Böttcher B., Schilling R., Wang J.* Lévy matters III. Lévy-type processes: construction, approximation and sample path properties. — Heidelberg—New York: Springer, 2013.
20. *Boyarchenko S. I., Levendorskii S. Z.* Non-Gaussian Merton—Black—Scholes theory. — Singapore: World Scientific, 2002.
21. *Chazarain J.* Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes// J. Funct. Anal. — 1971. — *7*, № 3. — С. 386–446.

22. *Dubkov A. A., Spagnolo B., Uchaikin V. V.* Lévy flight superdiffusion: an introduction// Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. — 2008. — *18*, № 9. — С. 2649–2672.
23. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer, 1999.
24. *Gardiner C.* Stochastic Methods. A handbook for the natural and social sciences. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2009.
25. *Hille E., Phillips R. S.* Functional analysis and semi-groups. — Providence: Am. Math. Soc., 1957.
26. *Ito K.* On a formula concerning stochastic differentials// Nagoya Math. J. — 1951. — *3*. — С. 55–65.
27. *Jacob N.* Pseudo-differential operators and Markov processes. Vol. 1. — London: Imperial College Press, 2001.
28. *Kolokoltsov V. N.* Markov processes, semigroups and generators. — Berlin—New York: De Gruyter, 2011.
29. *Komatsu H.* Ultradistributions, I. Structure theorems and characterization// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1973. — *20*, № 1. — С. 25–106.
30. *Kunita H.* Ito's stochastic calculus: its surprising power for applications// Stoch. Process. Their Appl. — 2010. — *120*, № 5. — С. 622–652.
31. *Melnikova I. V.* Stochastic Cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. — London—New York: CRC Press, 2016.
32. *Melnikova I. V., Alekseeva U. A.* Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems// Chaotic Model. Simul. — 2014. — № 1. — С. 49–56.
33. *Melnikova I. V., Filinkov A. I.* The Cauchy problem: Three approaches. — London—New York: Chapman & Hall/CRC, 2001.
34. *Oksendal B.* Stochastic differential equations. — Berlin: Springer, 2003.
35. *Protter P. E.* Stochastic integration and differential equations. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2005.
36. *Sato K. I.* Basic results on Lévy processes// В сб.: «Lévy processes theory and applications». — Boston: Birkhäuser, 2001. — С. 3–37.
37. *Shreve S.* Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models. — New York: Springer, 2004.
38. *Taira K.* Boundary value problems and Markov processes. — Cham: Springer, 2020.

И. В. Мельникова
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
E-mail: `Irina.Melnikova@urfu.ru`

У. А. Алексеева
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
E-mail: `Uliana.Alekseeva@urfu.ru`

В. А. Бовкун
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия
E-mail: `Vadim.Bovkun@urfu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-324-348 UDC 519.21+517.986.7+517.982.4

# Equations Related to Stochastic Processes: Semigroup Approach and Fourier Transform

© 2021 **I. V. Melnikova, U. A. Alekseeva, V. A. Bovkun**

**Abstract**. The work is devoted to integro-differential equations related to stochastic processes. We study the relationship between differential equations with random perturbations — stochastic differential equations (SDEs) — and deterministic equations for the probabilistic characteristics of processes determined by random perturbations. The resulting deterministic pseudodifferential equations are investigated by semigroup methods and Fourier transform methods.

## REFERENCES

1. U. A. Anufrieva and I. V. Mel'nikova, "Osobennosti i regulyarizatsiya nekorrektnykh zadach Koshi s differentsial'nymi operatorami" [Singularities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2005, **14**, 3–156 (in Russian).
2. A. V. Balakrishnan, *Prikladnoy funktsional'nyi analiz* [Applied Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (Russian translation).
3. A. V. Bulinskiy and A. N. Shiryaev, *Teoriya sluchaynykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
4. A. D. Venttsel', *Kurs teorii sluchaynykh protsessov* [A Course in the Theory of Stochastic Processes], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
5. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii. Vyp. 2. Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsiy* [Generalized Functions. Vol. 2. Spaces of Basic and Generalized Functions], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
6. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii. Vyp. 3. Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravneniy* [Generalized Functions. Vol. 3. Some Questions of the Theory of Differential Equations], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
7. I. I. Gikhman and A. V. Skorokhod, *Teoriya sluchaynykh protsessov, t. II* [Theory of Stochastic Processes. Vol. II], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
8. K. Ito, *Veroyatnostnye protsessy. Vyp. II* [Stochastic Processes. Vol. II], Inostrannaya literatura, Moscow, 1963 (in Russian).
9. A. N. Kolmogorov, "Ob analiticheskikh metodakh v teorii veroyatnostey" [On analytical methods in probability theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1938, No. 5, 5–41 (in Russian).
10. I. V. Mel'nikova and U. A. Alekseeva, "Polugruppovaya klassifikatsiya i klassifikatsiya Gel'fanda—Shilova dlya sistem differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh" [Semigroup classification and Gelfand–Shilov classification for systems of partial differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **104**, No. 6, 895–911 (in Russian).
11. I. V. Mel'nikova, V. A. Bovkun, and U. A. Alekseeva, "Integrodifferentsial'nye uravneniya, porozhdennye stokhasticheskimi zadachami" [Integrodifferential equations generated by stochastic problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2021, **57**, No. 3, 1653–1663 (in Russian).
12. Yu. V. Prokhorov and Yu. A. Rozanov, *Teoriya veroyatnostey. Osnovnye ponyatiya. Predel'nye teoremy. Sluchaynye protsessy* [Probability Theory. Basic Concepts. Limit Theorems. Random Processes], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
13. W. Rudin, *Funktsional'nyi analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).

14. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1. Teoriya raspredeleniya i analiz Fur'e* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. 1. Distribution Theory and Fourier Analysis], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
15. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 3. Psevdodifferentsial'nye operatory* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. 3. Pseudodifferential Operators], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
16. D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
17. W. Arendt, C. J. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-Valued Laplace Transform and Cauchy Problems*, Birkhäuser, Basel, 2011.
18. T. Björk, *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.
19. B. Böttcher, R. Schilling, and J. Wang, *Lévy Matters III. Lévy-Type Processes: Construction, Approximation and Sample Path Properties*, Springer, Heidelberg–New York, 2013.
20. S. I. Boyarchenko and S. Z. Levendorskii, *Non-Gaussian Merton–Black–Scholes Theory*, World Scientific, Singapore, 2002.
21. J. Chazarain, "Problemes de Cauchy abstraits et applications a quelques problemes mixtes," *J. Funct. Anal.*, 1971, **7**, No. 3, 386–446.
22. A. A. Dubkov, B. Spagnolo, and V. V. Uchaikin, "Lévy flight superdiffusion: an introduction," *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2008, **18**, No. 9, 2649–2672.
23. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 1999.
24. C. Gardiner, *Stochastic Methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2009.
25. E. Hille and R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Am. Math. Soc., Providence, 1957.
26. K. Ito, " On a formula concerning stochastic differentials," *Nagoya Math. J.*, 1951, **3**, 55–65.
27. N. Jacob, *Pseudo-Differential Operators and Markov Processes. Vol. 1*, Imperial College Press, London, 2001.
28. V. N. Kolokoltsov, *Markov Processes, Semigroups and Generators*, De Gruyter, Berlin–New York, 2011.
29. H. Komatsu, "Ultradistributions, I. Structure theorems and characterization," *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 1973, **20**, No. 1, 25–106.
30. H. Kunita, "Ito's stochastic calculus: its surprising power for applications," *Stoch. Process. Their Appl.*, 2010, **120**, No. 5, 622–652.
31. I. V. Melnikova, *Stochastic Cauchy Problems in Infinite Dimensions. Regularized and Generalized Solutions*, CRC Press, London–New York, 2016.
32. I. V. Melnikova and U. A. Alekseeva, "Weak regularized solutions to stochastic Cauchy problems," *Chaotic Model. Simul.*, 2014, No. 1, 49–56.
33. I. V. Melnikova and A. I. Filinkov, *The Cauchy Problem: Three Approaches*, Chapman & Hall/CRC, London–New York, 2001.
34. B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin, 2003.
35. P. E. Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
36. K. I. Sato, "Basic results on Lévy processes," In: *Lévy Processes Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2001, pp. 3–37.
37. S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*, Springer, New York, 2004.
38. K. Taira, *Boundary Value Problems and Markov Processes*, Springer, Cham, 2020.

I. V. Melnikova
Ural Federal University named after the First President of Russia B. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia
E-mail: `Irina.Melnikova@urfu.ru`

U. A. Alekseeva
Ural Federal University named after the First President of Russia B. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia
E-mail: `Uliana.Alekseeva@urfu.ru`

V. A. Bovkun
Ural Federal University named after the First President of Russia B. Yeltsin, Ekaterinburg, Russia
E-mail: `Vadim.Bovkun@urfu.ru`