Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 316–323

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-316-323 УДК 517.972.5

О ПОСТРОЕНИИ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2021 г. **И. А. КОЛЕСНИКОВА**

Аннотация. В данной работе получены необходимые и достаточные условия существования вариационных принципов для заданного дифференциально-разностного операторного уравнения первого порядка со специальным видом линейного оператора $P_\lambda(t)$, зависящего от t, и нелинейного оператора Q. При выполнении соответствующих условий построен функционал. Данные условия получены благодаря хорошо известному критерию потенциальности. На примерах показано, как строится обратная задача вариационного исчисления для заданных дифференциально-разностных операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В математической физике под вариационными методами принято понимать те методы, которые позволяют свести задачу интегрирования дифференциального уравнения к эквивалентной вариационной задаче.

Разработанные ранее методы в основном распространялись на уравнения, рассматриваемые в некотором гильбертовом пространстве. Было установлено, что для любого разрешимого линейного уравнения в гильбертовом пространстве может быть построена вариационная задача отыскания точки минимума некоторого квадратичного функционала такого, что исходное уравнение вместе с граничными условиями будет эквивалентно уравнению Эйлера для этого функционала.

Вариационная задача для такого уравнения есть задача минимизации квадратичного функционала, содержащего производные от неизвестной функции более низкого порядка, чем в заданном уравнении. Данный функционал ограничен снизу в некотором гильбертовом пространстве, и множество критических точек функционала совпадает с множеством решений исследуемого уравнения.

Применяя вариационные методы для исследования различных краевых задач, можно, в частности, добиться того, что исследуемые уравнения будут представлены в виде уравнений Эйлера—Лагранжа. В работе [6] показано, что такое представление не всегда возможно.

В течение длительного времени вариационные принципы главным образом использовались для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных с так называемыми потенциальными операторами (см. [6]).

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100».

Возникает интерес получить аналогичные результаты для дифференциально-разностных уравнений. Под дифференциально-разностным уравнением понимается (см. [1]) уравнение относительно неизвестной функции и ее производной вида

$$F[t, u(t), u(t-\omega_1), \ldots, u(t-\omega_l), u^{'}(t), u^{'}(t-\omega_1), \ldots, u^{'}(t-\omega_l), u^{(n)}(t), u^{(n)}(t-\omega_1), \ldots, u^{(n)}(t-\omega_l)] = 0,$$

где F — заданная функция, зависящая от $1 + (l + 1)(n + 1)$ переменных.

Введем необходимые определения.

Рассматривается операторное уравнение $N(u) = 0$, $u \in D(N)$, где $D(N)$ — область определения оператора $N : D(N) \subseteq U \to V$, а U, V — нормированные линейные пространства над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Заметим, что если для некоторого $u \in D(N)$ и $h \in U$ существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{N(u+\varepsilon h) - N(u)}{\varepsilon} = \delta N(u, h)$, то он называется *вариацией Гато* оператора N в точке u.

В формуле выражение $N(u + \varepsilon h)$ определено при таких ε, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$.

Вариация заданного оператора $\delta N(u, h)$ — выражение, однородное по $h : \delta N(u, \lambda h) = \lambda \delta N(u, h)$.

Определение 1.1. Если при фиксированном $u \in D(N)$ вариация $\delta N(u, h)$ является линейным по h оператором, то говорят, что оператор N *дифференцируем в точке u в смысле Гато*.

Определение 1.2. Выражение $\delta N(u, h)$ называется *дифференциалом Гато* и обозначается через $DN(u, h)$.

Определение 1.3. В этом случае используют также запись $DN(u, h) = N'_u h$ и говорят, что N'_u есть *производная Гато оператора N в точке u*.

Если N — линейный оператор, то $N'_u h = Nh$.

В дальнейшем будем предполагать, что для любого рассматриваемого оператора $N : D(N) \subset U \to V$ в каждой точке $u \in D(N)$ существует N'_u. Область определения $D(N'_u)$ состоит из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ для любого достаточно малого значения ε. Элемент $h \in D(N'_u)$ будем называть *допустимым* элементом. Заметим, что в общем случае $D(N) \neq D(N'_u)$.

Производную Гато удобно искать по следующей формуле: $N^{'}_u h = \frac{d}{d\varepsilon} \left\{N(u + \varepsilon h)\right\}\big|_{\varepsilon=0}$.

Определение 1.4. Оператор $N : D(N) \to V$ называется *потенциальным* (см. [6]) на соответствующей области определения $D(N)$ относительно заданной билинейной формы $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times U \to \mathbb{R}$, если существует функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \to \mathbb{R}$ такой, что $\delta F_N[u, h] = \Phi(N(u), h)$ $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$.

В этом случае мы можем говорить о том, что данное уравнение допускает *прямую вариационную формулировку*. Задача построения функционала F_N по заданному оператору N называется *классической обратной задачей вариационного исчисления* (см. [6]).

Отметим, что до недавнего времени практически не ставилась обратная задача вариационного исчисления для дифференциально-разностных уравнений (см. [3, 4, 7, 8]). Существует теоретический и практический интерес в распространении полученных ранее результатов, на дифференциально-разностные уравнения (см. [2, 5, 9]).

Предполагается, что $D(N)$ является выпуклым множеством, на котором выполняется критерий потенциальности (см. [6]):

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(h, N'_u g) \qquad \forall u \in D(N), \qquad \forall h, g \in D(N'_u). \tag{1.1}$$

При этом условии потенциал F_N может быть найден по формуле

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi(N(u_0 + \lambda(u - u_0)), u - u_0) d\lambda + \mathrm{const}, \tag{1.2}$$

где u_0 — фиксированный элемент из множества $D(N)$.

Определение 1.5. Функционал F_N называется *потенциалом* для оператора N; в свою очередь, оператор N называется *градиентом* функционала F_N. Записывают $N = \operatorname{grad}_\Phi F_N$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим следующее дифференциально-разностное операторное уравнение:

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big\{ P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau) + Q_\lambda(t, u(t+\lambda\tau)) \Big\} = 0, \qquad u \in D(N), t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Здесь $P_\lambda : U_1 \to V_1$ $(\lambda = -1, 0, 1)$ — линейные операторы, зависящие от t; $Q_\lambda : [t_0 - \tau, t_1 + \tau] \times U_1 \to V_1$ — вообще говоря, нелинейные операторы; $N : D(N) \subseteq U \to V = C([t_0, t_1]; V_1)$; $U = C^1([t_0 - \tau, t_1 + \tau]; U_1), V$, где U_1, V_1 — действительные нормированные линейные пространства, $U_1 \subseteq V_1$.

Будем предполагать, что при любом значении $t \in (t_0, t_1)$ и $u \in C^1([t_0, t_1]; U_1)$ функция $P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau)$ со значением в V_1 непрерывно дифференцируема на (t_0, t_1).

Область определения $D(N)$ задается следующим образом: $D(N) = \{u \in U : u(t) = \varphi_1(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], u(t) = \varphi_2(t), t \in [t_1, t_1 + \tau]\}$, где φ_i $(i = 1, 2)$ — заданные функции.

Под решением задачи (2.1) подразумевается функция $u \in D(N)$, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big\{ P_\lambda(t) u_t(t+\lambda\tau) + Q_\lambda(t, u(t+\lambda\tau)) \Big\} = 0 \qquad \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}.$$

Зададим билинейную форму вида

$$\Phi(\cdot, \cdot) \equiv \int_{t_0}^{t_1} < \cdot, \cdot > dt : V \times U \to \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

где непрерывное билинейное отображение $< \cdot, \cdot >$ удовлетворяет условиям: $< v_1, v_2 > = < v_2, v_1 >$ $\forall v_1, v_2 \in V_1$; $D_t < v, g > = < D_t v, g > + < v, D_t g >$ $\forall v, g \in C^1([t_0, t_1]; U_1)$.

Наша цель — определить структуру операторов P_λ и Q_λ $(\lambda = -1, 0, 1)$, благодаря которым для (2.1) можно решить обратную задачу вариационного исчисления относительно заданной билинейной формы (2.2).

Оператор $D_t = d/dt$ является кососимметричным оператором на множестве

$$D(N'_u) = \{h \in U = C^1([t_0 - \tau, t_1 + \tau]; U_1) : h(t) = 0, \, t \in [t_0 - \tau, t_0] \cup [t_1, t_1 + \tau]\},$$

а именно: $\Phi(D_t h_1, h_2) = -\Phi(h_1, D_t h_2)$ $\forall h_1, h_2 \in D(N'_u)$.

Будем предполагать, что при любом значении $t \in (t_0, t_1)$ и $u \in U_1$ функция P_λ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируема на (t_0, t_1).

3. Условия потенциальности и структура оператора $N(u)$ уравнения (2.1) в случае его вариационности

Определим оператор K^* как оператор, сопряженный к оператору K.

Теорема 3.1. *Для существования прямой вариационной формулировки для оператора $N(u)$ уравнения (2.1), рассматриваемого на области $D(N)$, относительно билинейной формы (2.2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия на множестве $D(N'_u)$:*

$$P_{-\lambda} + P^*_\lambda|_{t \to t-\lambda\tau} = 0, \qquad \frac{\partial P^*_\lambda}{\partial t}\Big|_{t \to t-\lambda\tau} + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)} - ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})^*\Big|_{t \to t-\lambda\tau} = 0 \tag{3.1}$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N), \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Найдем производную Гато заданного оператора. С учетом формулы (2.1) будем иметь

$$N'_u h = \sum_{\lambda=-1}^{1} P_\lambda h_t(t+\lambda\tau) + \sum_{\lambda=-1}^{1} ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)}) h(t+\lambda\tau)$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N), \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Тогда критерий потенциальности (1.1) принимает следующий вид:

$$\int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} \{P_\lambda h_t(t+\lambda\tau) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})h(t+\lambda\tau)\}, g(t) > dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} \{P_\lambda g_t(t+\lambda\tau)) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})g(t+\lambda\tau))\}, h(t) > dt$$

при $\lambda = -1, 0, 1, \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$, или

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigg[< \sum_{\lambda=-1}^{1} \{P_\lambda h_t(t+\lambda\tau) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})h(t+\lambda\tau)\}, g(t) > -$$

$$- < \sum_{\lambda=-1}^{1} \big(P_\lambda g_t(t+\lambda\tau) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})g(t+\lambda\tau)\big), h(t) > \Bigg] dt = 0 \qquad (3.2)$$

при $\lambda = -1, 0, 1, \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$.

Учитывая условие кососимметричности $D_t^* = -D_t$ на множестве $D(N'_u)$, из равенства (3.2) получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigg[< \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big(P_\lambda D_t + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})\Big) h(t+\lambda\tau), g(t) > -$$

$$- \sum_{\lambda=-1}^{1} < \Big[-D_t(P_\lambda^* h(t)) + ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})^* h(t)\Big], g(t+\lambda\tau) > \Bigg] dt = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1, \forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$, или, с другой стороны, с учетом сдвигов переменной t на заданной области определения $D(N)$ имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \Bigg[< \sum_{\lambda=-1}^{1} \Big(P_{-\lambda} D_t + ((Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)})\Big) h(t-\lambda\tau), g(t) > -$$

$$- < \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(-\frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t} - P_\lambda^* D_t + (Q_\lambda)'^{\,*}_u\right)\Bigg|_{t\to t-\lambda\tau} h(t-\lambda\tau), g(t) > \Bigg] dt = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$.

Таким образом, условие (3.2) может быть теперь записано в следующем виде:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\lambda=-1}^{1} < \Big(P_{-\lambda} D_t + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)}\Big) h(t-\lambda\tau) - \left(-\frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t} - P_\lambda^* D_t + (Q_\lambda)'^{\,*}_u\right)\Bigg|_{t\to t-\lambda\tau} h(t-\lambda\tau), g(t) > dt = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall g, h \in D(N'_u)$. Это равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\sum_{\lambda=-1}^{1} \left[(P_{-\lambda} + P_\lambda^*|_{t\to t-\lambda\tau})\, D_t + \frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t}|_{t\to t-\lambda\tau} + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)} - (Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)}{}^*|_{t\to t-\lambda\tau} \right] \cdot h(t-\lambda\tau) = 0$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$.

Данное равенство имеет место для любого $h \neq 0$, следовательно, выполняются условия

$$P_{-\lambda} + P_\lambda^*|_{t\to t-\lambda\tau} = 0, \qquad \frac{\partial P_\lambda^*}{\partial t}\Big|_{t\to t-\lambda\tau} + (Q_{-\lambda})'_{u(t-\lambda\tau)} - ((Q_\lambda)'_{u(t+\lambda\tau)})^*\Big|_{t\to t-\lambda\tau} = 0,$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N)$, $\forall t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall h \in D(N'_u)$. □

Таким образом, необходимо и достаточно выполнения условий (3.1) теоремы 3.1.

Пример 3.1. В качестве примера рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$N_1(u) \equiv u_t(t+\tau) - u_t(t-\tau) = 0, \quad u \in D(N), \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}, \quad t_1 - t_0 > 2\tau.$$

Зададим область определения: $D(N_1) = \{u \in U = C^1([t_0-\tau, t_1+\tau]) : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0],$ $u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [t_1, t_1+\tau]\}$, где φ_i $(i = 1,2)$ — заданные функции. Введем билинейную форму

$$\Phi(v,g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt \qquad v \in V, g \in U.$$

Условия теоремы выполнены: $P_\lambda = I$, $P_{-\lambda} = -I$, $P_0 = 0$, $Q_\lambda = 0$ $\forall\lambda = -1, 0, 1$. Следовательно, данный оператор $N_1(u)$ является потенциальным на соответствующей области определения $D(N_1)$ относительно заданной билинейной формы $\Phi(v,g)$. Соответствующий функционал находим по формуле (1.2), он имеет следующий вид:

$$F_{N_1}[u] = \int_{t_0}^{t_1} u_t(t)u(t-\tau)dt.$$

Полученный функционал $F_{N_1}[u]$ допускает построение вариационного принципа.

Пример 3.2. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$N_2(u) \equiv au_t(t+\tau) - au_t(t-\tau) + bu(t+\tau) + bu(t-\tau) = 0,$$

$u \in D(N)$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $t_1 - t_0 > 2\tau$. Зададим область определения: $D(N_2) = \{u \in U = C^1([t_0-\tau, t_1+\tau]) : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0],\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [t_1, t_1+\tau]\}$, где φ_i $(i = 1,2)$ — заданные функции. Введем билинейную форму:

$$\Phi(v,g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt \qquad v \in V, g \in U.$$

Условия теоремы выполнены: $P_\lambda = a$, $P_{-\lambda} = -a$, $P_0 = 0$, $Q_\lambda = bu(t+\lambda\tau)$ $\forall\lambda = -1, 1$, $Q_0 = 0$. Данный оператор $N_2(u)$ является потенциальным на области определения $D(N_2)$ относительно заданной билинейной формы $\Phi(v,g)$. Функционал находим по формуле (1.2):

$$F_{N_2}[u] = \int_{t_0}^{t_1} -au(t)u_t(t-\tau) + bu(t)u(t-\tau)dt.$$

Полученный функционал $F_{N_2}[u]$ допускает построение вариационного принципа. Оператор $N_2(u)$ есть градиент функционала $F_{N_2}[u]$.

Теорема 3.2. *Условия* (3.1) *выполняются тогда и только тогда, когда уравнение* (2.1) *имеет следующий вид*:

$$N(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} (R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} - R_{-\lambda})u_t(t-\lambda\tau) + \left(\operatorname{grad}_\Phi B[u] - \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau)\right) = 0,$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $\forall u \in D(N)$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. *Операторы* R_λ *и* $B[u]$ *могут быть найдены по формулам*

$$\Phi(R_\lambda u, u_t) = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^1 < -P_\lambda(t)(u-u_0), \frac{\partial \tilde{u}_\mu}{\partial t} > d\mu dt,$$

$$B[u] = \int_0^1 < Q(t, \tilde{u}_\mu(t+\lambda\tau)) + \mu\frac{\partial P^*_\lambda}{\partial t}(u-u_0), u-u_0 > d\mu,$$

где $\tilde{u}_\mu = u_0 + \mu(u-u_0), u_0$ — *произвольный фиксированный элемент из* $D(N)$.

Доказательство. Пусть $D^*_t = -D_t$ на множестве определения $D(N'_u)$, и условия (3.1) выполняются тогда и только тогда, когда оператор (2.1) является потенциальным на заданной области определения $D(N) = \{u \in U : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0],\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in [t_1, t_1+\tau]\}$, где φ_i $(i = 1,2)$ — заданные функции, относительно заданной билинейной формы (2.2).

Рассмотрим следующий функционал:

$$F_N[u] = \int_{t_0}^{t_1} \left[< \sum_{\lambda=-1}^{1} R_\lambda(t) u(t+\lambda\tau), u_t(t) > + B[u] \right] dt + F_N[u_0], \tag{3.3}$$
$$\lambda = -1, 0, 1, \forall u \in D(N), \quad t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что

$$\delta F_N[u,h] = \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} R_\lambda h(t+\lambda\tau), u_t(t) > + < \sum_{\lambda=-1}^{1} R_\lambda u(t+\lambda\tau), h_t(t) > +$$
$$+ < \operatorname{grad}_\Phi B[u], h(t) > dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} u_t(t-\lambda\tau), h(t) > - < \sum_{\lambda=-1}^{1} D_t\left(R_\lambda u(t+\lambda\tau)\right), h(t) > +$$
$$+ < \operatorname{grad}_\Phi B[u], h(t) > dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} u_t(t-\lambda\tau), h(t) > - < \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau), h(t) > -$$
$$- < \sum_{\lambda=-1}^{1} R_{-\lambda} u_t(t-\lambda\tau), h(t) > + < \operatorname{grad}_\Phi B[u], h > dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} < \sum_{\lambda=-1}^{1} (R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} - R_{-\lambda}) u_t(t-\lambda\tau) + (\operatorname{grad}_\Phi B[u] -$$
$$- \sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau)), h(t) > dt = \int_{t_0}^{t_1} < N(u), h > dt,$$

где $\lambda = -1, 0, 1$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$, $\forall h \in D(N'_u)$. Тогда получаем, что функционал $F_N[u]$(3.3) является потенциалом оператора $N(u)$ (2.1).

Пусть $D^*_t = -D_t$ на области $D(N'_u)$, тогда

$$P_{-\lambda}(t) = R^*_\lambda|_{t\to t-\lambda\tau} - R_{-\lambda}, \qquad \sum_{\lambda=-1}^{1} Q_\lambda(t, u(t+\lambda\tau)) = -\sum_{\lambda=-1}^{1} \frac{\partial R_\lambda}{\partial t} u(t+\lambda\tau) + \operatorname{grad}_\Phi B[u]$$

при $\lambda = -1, 0, 1$, $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $\forall u \in D(N)$. □

Данная теорема показывает структуру заданного эволюционного дифференциально-разностного оператора, который допускает решение обратной задачи вариационного исчисления.

Замечание 3.1. Если $0 \in D(N)$, то операторы R_λ могут быть найдены по формуле

$$\Phi(R_\lambda u, u_t) = \int_0^1 < -\mu P_\lambda(t)(u), u_t > d\mu.$$

В случае, когда билинейное отображение задается формулой вида (2.2), получаем

$$R_\lambda u = -\int_0^1 \sum_{\lambda=-1}^{1} \mu P_{1\lambda}(t)(u) d\mu,$$

или $R_\lambda = -\frac{1}{2} P_{1\lambda}$.

Пример 3.3. Рассмотрим следующий дифференциально-разностный оператор:

$$N_3(u) \equiv a u_t(t+\tau) - a u_t(t-\tau) + e^{u(t+\tau)} + e^{u(t-\tau)} = 0,$$

где $t \in (t_0, t_1)$, $t_1 - t_0 > 2\tau$. Область определения задается в следующем виде: $D(N_3) = \{u \in C^2_t([t_0-\tau, t_1+\tau]) : u(t) = \varphi_1(t),\ t \in E_1 = [t_0-\tau, t_0],\ u(t) = \varphi_2(t),\ t \in E_2 = [t_1, t_1+\tau]\}$, где $\varphi_i \in C(E_i)$ $(i = 0, 1)$ — заданные функции.

Мы исследуем существование вариационного принципа для $N_3(u)$ относительно заданной билинейной формы (2.2). Оператор $N_3(u)$ является потенциальным на области определения $D(N_3)$ относительно этой билинейной формы. Другими словами, существует вариационный принцип для оператора $N_3(u)$.

Функционал находим по формуле (1.2), он будет иметь вид

$$F_{N_3}[u] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{a}{2}\{(u_t(t)u(t-\tau) - u(t)u_t(t-\tau)\} + (e^{u(t)} - 1)\frac{u(t-\tau)+u(t+\tau)}{u(t)}dt,$$

$$t \in (t_0, t_1) \subset \mathbb{R}, \quad \forall u \in D(N).$$

Другими словами, оператор $N_3[u]$ допускает прямую вариационную формулировку.

Полученный функционал $F_{N_3}[u]$ является потенциалом для оператора $N_3[u]$; в свою очередь, оператор $N_3[u]$ есть градиент функционала $F_{N_3}[u]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
2. *Каменский Г. А.* Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом// Дифф. уравн. — 1970. — *69*, № 8. — С. 1349–1358.
3. *Попов А. М.* Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1998. — *34*, № 3. — С. 422–424.
4. *Савчин В. М.* Условия потенциальности Гельмгольца для ДУЧП с отклоняющимися аргументами// Тез. докл. XXXII научной конф. ф-та физ.-мат. и естеств. наук. — М.: РУДН, 1994. — С. 25.
5. *Èl'sgol'c L. È.* Qualitative methods in mathematical analysis. — Am. Math. Soc., 1964.
6. *Filippov V. M., Savchin V. M., Shorokhov S. G.* Variational principles for nonpotential operators// J. Math. Sci. — 1994. — *68*, № 3. — С. 275–398.
7. *Kolesnikova I. A., Popov A. M., Savchin V. M.* On variational formulations for functional differential equations// J. Funct. Spaces Appl. — 2007. — *5*, № 1. — С. 89–101.
8. *Savchin V. M.* An operator approach to Birkhoff's equation// Вестн. РУДН. Сер. Мат. — 1995. — *2*, № 2. — С. 111–123.
9. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Bäsel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

И. А. Колесникова
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: kolesnikova-ia@rudn.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-316-323 UDC 517.972.5

On the Construction of a Variational Principle for a Certain Class of Differential-Difference Operator Equations

© 2021 **I. A. Kolesnikova**

Abstract. In this paper, we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of variational principles for a given first-order differential-difference operator equation with a special form of the linear operator $P_\lambda(t)$ depending on t and the nonlinear operator Q. Under the corresponding conditions the functional is constructed. These conditions are obtained thanks to the well-known criterion of potentiality. Examples show how the inverse problem of the calculus of variations is constructed for given differential-difference operators.

REFERENCES

1. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. G. A. Kamenskii, "Variatsionnye i kraevye zadachi s otklonyayushchimsya argumentom" [Variational and boundary-value problems with deviating argument], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1970, **69**, No. 8, 1349–1358 (in Russian).
3. A. M. Popov, "Usloviya potentsial'nosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [Potentiality conditions for differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 3, 422–424 (in Russian).
4. V. M. Savchin, "Usloviya potentsial'nosti Gel'mgol'tsa dlya DUChP s otklonyayushchimisya argumentami" [Helmholtz potentiality conditions for PDEs with deviating arguments], *Abstracts XXXII Sci. Conf. Fac. Phys.-Math. Nat. Sci.*, PFUR, Moscow, 1994, pp. 25 (in Russian).
5. L. È. Èl'sgol'c, *Qualitative Methods in Mathematical Analysis*, Am. Math. Soc., 1964.
6. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, "Variational principles for nonpotential operators," *J. Math. Sci.*, 1994, **68**, No. 3, 275–398.
7. I. A. Kolesnikova, A. M. Popov, and V. M. Savchin, "On variational formulations for functional differential equations," *J. Funct. Spaces Appl.*, 2007, **5**, No. 1, 89–101.
8. V. M. Savchin, "An operator approach to Birkhoff's equation," *Vestn. RUDN. Ser. Mat.*, 1995, **2**, No. 2, 111–123.
9. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Bäsel—Boston—Berlin, 1997.

I. A. Kolesnikova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: kolesnikova-ia@rudn.ru