Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 295–315

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-295-315 УДК 817

# О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУПП И АЛГЕБР В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

© 2021 г. Э. В. КИССИН, В. С. ШУЛЬМАН

Аннотация. Работа содержит обзор имеющихся результатов о структуре $J$-симметричных алгебр операторов в пространствах Понтрягина и Крейна, а также о представлениях групп и *-алгебр в этих пространствах.

## ОГЛАВЛЕНИЕ



*Светлой памяти Николая Дмитриевича Копачевского,*
*замечательного Математика и Человека.*

## 1. Введение

Теория пространств с индефинитной метрикой возникла в работах Понтрягина, Соболева, Филлипса в связи с потребностями теории уравнений в частных производных. С тех пор круг ее приложений в математической физике и общей теории операторов чрезвычайно расширился. О многих из них можно теперь узнать из прекрасных книг Т. Я. Азизова и Н. Д. Копачевского [1,2] и, в особенности, [3]. Кроме того, теория алгебр, групп, алгебр Ли операторов в пространствах Крейна стала популярна у физиков-теоретиков в связи с индефинитными моделями полевых теорий — см. например работу [4] и цитируемую там литературу. В нашей работе говорится почти исключительно о результатах самой теории операторно-алгебраических систем в пространствах с индефинитной метрикой, а также о связи этих результатов с некоторыми другими задачами функционального анализа; приложения требуют отдельного обзора (или, скорее, обзоров).

Полвека тому назад был опубликован обзор [34], написанный Р. С. Исмагиловым и М. А. Наймарком, математиками, стоявшими у истоков данной теории. Дав настоящей работе такое же название, мы хотели подчеркнуть, что она является продолжением этого обзора.

Напомним основные определения. Пространство с *индефинитной метрикой* — это линейное пространство $H$, снабженное полуторалинейной формой $x, y \mapsto [x, y]$, которая не является знакоопределенной. Вектор $x \in H$ называется *положительным* (*отрицательным*, *неположительным*, *нейтральным*), если $[x, x] > 0$ (соответственно, $[x, x] < 0$, $[x, x] \leqslant 0$, $[x, x] = 0$); подпространство $L \subset H$ называется *положительным* (*неположительным*, *отрицательным*, *нейтральным*), если все его ненулевые элементы положительны (соответственно, неположительны, отрицательны, нейтральны). Далее, $H$ называется *пространством Крейна*, если оно раскладывается в прямую сумму двух своих подпространств, $H = H_1 + H_2$, где $H_1$ положительно, $H_2$ отрицательно, причем $H_1$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(x, y) = [x, x]$, а $H_2$

является гильбертовым пространством со скалярным произведением $(x, y) = -[x, x]$. Продолжая скалярное произведение на все $H$ по билинейности, мы превратим $H$ в гильбертово пространство. Разложение $H = H_1 + H_2$ не единственно, поэтому и скалярное произведение вводится по разному, но топология от этого не зависит: все эти скалярные произведения эквивалентны. В частности, корректно говорить о непрерывности линейного оператора. В дальнейшем, все рассматриваемые линейные операторы предполагаются непрерывными; как обычно, алгебру всех таких операторов мы обозначаем $B(H)$.

Если одно из подпространств $H_1, H_2$ (обычно отрицательное) конечномерно, $\dim(H_2) = k < \infty$, то мы говорим, что $H$ — *пространство Понтрягина* индекса индефинитности $k$, или, более коротко, пространство $\Pi_k$. Не исключен и случай, когда обе компоненты конечномерны, тогда индекс индефинитности — это $\min\{\dim H_1, \dim H_2\}$. В любом случае, индекс индефинитности совпадает с максимальной размерностью нейтрального подпространства.

Исходная индефинитная форма выражается через скалярное произведение формулой $[x, y] = (Jx, y)$, где $J = 1 - 2P$, $P$ — проектор на $H_2$ параллельно $H_1$, поэтому символ $J$ используется для подчеркивания индефинитности формы. Так, подпространство $L^{\perp} = \{x \in H : [x, y] = 0$ для всех $y \in L\}$ называется *$J$-ортогональным дополнением* подпространства $L \subset H$; оператор $T^{\sharp}$, определенный равенством $[T^{\sharp}x, y] = [x, Ty]$, называется *$J$-сопряженным* к оператору $T$; соответственно, $T$ называется *$J$-самосопряженным*, если $T^{\sharp} = T$, и *$J$-унитарным*, если $T^{\sharp} = T^{-1}$. Семейство операторов $E$ называется *$J$-симметричным*, если с каждым своим элементом оно содержит его $J$-сопряженный.

Первый глубокий результат этой теории, теорема Понтрягина—Соболева, полученный Понтрягиным [35] (а ранее Соболевым [36] для $k = 1$), гласит, что любой $J$-самосопряженный оператор в $\Pi_k$ имеет неположительное инвариантное подпространство размерности $k$. Затем М. Г. Крейн [16] доказал аналогичный результат для $J$-унитарных операторов, применив принцип неподвижной точки (в [34] подробнее говорится об истории этого замечательного доказательства, работающего и для операторов в пространстве Крейна при некоторых условиях компактности, и о связанных с ним работах И. С. Иохвидова). Уже сравнительно недавно В. И. Ломоносов [71] нашел удивительно короткое и элементарное доказательство максимально общего варианта теоремы Понтрягина—Соболева (см. также работу Э. В. Киссина, В. С. Шульмана и Ю. В. Туровского [70], где это доказательство приведено с подробностями, отсутствовавшими в оригинальном варианте). В ряде работ получены важные обобщения теоремы Понтрягина—Соболева на неограниченные операторы, о них можно узнать, например, из работы А. А. Шкаликова [39] и приведенных в ней ссылок.

Теоремы об инвариантных подпространствах играют первостепенную роль при изучении структуры операторно-алгебраических систем — они обеспечивают возможность триангуляции (а иногда и диагонализации) системы, поэтому в дальнейшем тексте об теоремах этого рода — но не для одного оператора, а для всей алгебры, группы и т. д. — речь будет идти постоянно. Наше изложение разбито на три части — в первой рассматриваются алгебры операторов в пространствах с индефинитной метрикой, во второй — представления алгебр в этих пространствах, и в последней — представления групп.

## 2. Классификация $J$-симметричных алгебр

Первый результат о «коллективных» инвариантных подпространствах в пространствах с индефинитной метрикой был получен М. А. Наймарком [29], доказавшим, что любое коммутативное семейство $J$-унитарных операторов в $\Pi_k$ имеет неположительное инвариантное подпространство размерности $k$. Отсюда, как замечено в [29], следует аналогичный результат для семейств $J$-самосопряженных операторов и, более общим образом, для коммутативных $J$-симметричных семейств операторов в $\Pi_k$. Далее, Р. С. Исмагилов [12] установил, что всякая неприводимая $J$-симметричная алгебра операторов в пространстве $H$ типа $\Pi_k$ плотна в $B(H)$ относительно слабой операторной топологии WOT (а также сильной, ультрасильной и ультраслабой топологий). Этот результат существенно усиливает теорему Наймарка, поскольку коммутативная алгебра не может быть плотной в $B(H)$. Отметим, что доказательство в [12] не использует теорем Понтрягина—Соболева и Крейна: оно основано на сильном результате Шварца [85] о существовании инвариантного подпространства у любого возмущения эрмитова оператора оператором из класса Шэттена (в данном случае можно ограничиться возмущениями операторами конечного ранга).

Теорему Исмагилова можно переформулировать, сказав, что единственная неприводимая WOT-замкнутая $J$-симметричная алгебра в $\Pi_k$ — это алгебра $B(H)$. Что можно сказать о неприводимых $J$-симметричных алгебрах, замкнутых по норме? Этот вопрос рассматривался в работе А. И. Логинова и В. С. Шульмана [24], где показано, что любая такая алгебра $A$ содержит алгебру $K(H)$ всех компактных операторов в $H$ и, как следствие, совпадает (как алгебра, но не как *-алгебра) с некоторой C*-алгеброй. Схема доказательства:

1) Если в $A$ есть хоть один ненулевой компактный оператор, то утверждение следует из известной теоремы В. И. Ломоносова [26].
2) Доказывается, что если замкнутая алгебра, порожденная $J$-самосопряженным оператором в $\Pi_k$, не содержит ненулевых компактных операторов, то она имеет инвариантное $k$-мерное отрицательное подпространство, и потому топологически *-эквивалентна некоторой C*-алгебре.
3) По (весьма тонкой) теореме И. Кунца [53], всякая банахова *-алгебра, у которой эрмитовы элементы порождают C*-эквивалентные алгебры, является C*-эквивалентной.
4) Из результата В. С. Шульмана [42] (см. следующий раздел) следует, что C*-эквивалентные $J$-симметричные алгебры в $\Pi_k$ не могут быть неприводимыми.

$J$-симметричная алгебра операторов называется *невырожденной*, если она не имеет нейтральных инвариантных подпространств. В той же работе [12] Р. С. Исмагилов показал, что если $A$ — невырожденная $J$-симметричная алгебра операторов в пространстве $H$ типа $\Pi_k$, то $H$ раскладывается в прямую $J$-ортогональную сумму инвариантных подпространств $H = H_0 \oplus H_1 \oplus \ldots \oplus H_n$ таких, что $H_0$ положительно, остальные $H_i$ либо отрицательные, либо вида $\Pi_m$, сужение алгебры $A$ на $H_0$ является $*$-алгеброй, а сужения на остальные слагаемые неприводимы. В работе В. И. Либерзона и В. С. Шульмана [19] классифицированы все WOT-замкнутые невырожденные алгебры в $\Pi_k$.

Описание невырожденных алгебр, замкнутых по норме, дано в книге Э. Киссина и В. С. Шульмана [67, теорема 13.7]; оно основано на результатах работы [24].

Вырожденные алгебры устроены значительно сложнее. Понятно, что если алгебра $A \subset B(H)$ вырождена, то среди ее нейтральных инвариантных подпространств имеется подпространство $L$ наибольшей размерности. Подпространство $L^{\perp} \supset L$ также инвариантно, так что фактор-пространство $L^{\perp}/L$ получает естественную структуру пространства $\Pi_m$, где $m < k$. В этом пространстве действует невырожденная операторная алгебра $\widehat{A}$, индуцированная $A$. Поскольку, как мы видели, невырожденные алгебры мало отличаются от *-алгебр, во многих задачах можно, избегая не слишком существенных усложнений, считать, что скалярное произведение в $L^{\perp}/L$ неотрицательно, т. е. что $\dim L = k$. Такие алгебры называются *базовыми* (*ground*). Однако в общем случае редукция к базовым алгебрам — непростая задача. Некоторые результаты этого рода будут отмечены ниже.

Пусть $A$ — базовая алгебра в $H$, $L$ — инвариантное подпространство размерности $k$. Выберем косвязное с $L$ нейтральное подпространство $M$ (это означает, что эрмитова форма $[x,y]$ невырождена на $L \times M$, или, что то же, есть базисы $e_1,\ldots,e_k$ в $L$ и $e'_1,\ldots,e'_k$ в $M$ такие, что $[e_i,e'_j] = \delta_{i,j}$). Тогда подпространство $\mathfrak{H} = L^{\perp} \cap M^{\perp}$ естественно изоморфно $L^{\perp}/L$; оно положительно и

$$H = L + \mathfrak{H} + M. \tag{2.1}$$

В соответствии с этим разложением, элементы алгебры $A$ записываются верхнетреугольными блок-матрицами $T = (T_{ij})_{i,j=1}^{3}$.

Задача состоит в описании базовых алгебр в терминах более простых алгебраических объектов, связанных с компонентами треугольного разложения — это естественно, поскольку сами компоненты имеют более простую природу. Действительно, в «основной компоненте» $A_{22} := \{T_{22} : T \in A\}$ мы имеем дело с симметричной алгеброй операторов в гильбертовом пространстве, компоненты $A_{11}$, $A_{13}$ и $A_{33}$ действуют в $k$-мерных пространствах, компоненты $A_{12}$ и $A_{23}$ состоят из операторов ранга не выше $k$. Первые результаты на этом пути получил М. А. Наймарк [30], построивший модели различных классов коммутативных алгебр. Его модели были упрощены А. И. Логиновым [21], показавшим затем в работе [22], как можно удобно описывать равномерно замкнутые коммутативные алгебры в пространствах типа $\Pi_1$. Для некоммутативных алгебр М. А. Наймарком [33] были предложены модели, основанные на использовании максимальных коммутативных подалгебр коммутанта $A'$ алгебры $A$. Такой подход был весьма плодотворен в теории симметричных алгебр в гильбертовом пространстве, поскольку теорема фон Неймана о бикоммутанте давала необходимую информацию об $A'$. В ситуации пространств Понтрягина такая информация отсутствовала и, в частности, не были исследованы алгебры с тривиальным коммутантом (такие алгебры называются *операторно неприводимыми*). Вопрос о строении операторно неприводимых $JW^*$-алгебр в $\Pi_k$ был одним из нескольких, поставленных в конце обзора Р. С. Исмагилова и М. А. Наймарка [34]; его решение для случая $k = 1$ было дано в работе В. И. Либерзона и В. С. Шульмана [18]. Более подробные обсуждения вышеупомянутых работ М. А. Наймарка и А. И. Логинова, а также все необходимые ссылки имеются в [34].

В работе В. С. Шульмана [41] была получена классификация замкнутых по операторной норме $J$-симметричных алгебр в пространствах типа $\Pi_1$, не являющихся невырожденными (а следовательно, базовых). В разложении (2.1) пространства $L$ и $M$ теперь одномерны: $L = \mathbb{C}\xi$, $M = \mathbb{C}\eta$, $[\xi, \eta] = 1$. Произвольный оператор $T \in A$ записывается верхнетреугольной операторной матрицей $(T_{ij})$, где $T_{11} = \lambda(T)1_L$, $T_{33} = \mu(T)1_M$, $T_{13} = \gamma(T)\xi \otimes \eta$, $T_{12} = y_T \otimes \xi$, $y_T \in \mathfrak{H}$, $T_{23} = \eta \otimes x_T$, $x_T \in \mathfrak{H}$, поэтому мы будем писать:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda(T) & y_T & \gamma(T) \\ 0 & T_{22} & x_T \\ 0 & 0 & \mu(T) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Отображения $\lambda : T \mapsto \lambda_T$ и $\mu : T \mapsto \mu_T$ — линейные мультипликативные функционалы на $A$, а $T \mapsto T_{22}$ — *-представление алгебры $A$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Положим $A^0 = \{T \in A : \lambda(T) = \mu(T) = 0\}$, $K_A = \{T \in A : TL^{[\perp]} \subset L\}$, $F_A = \{T \in A^0 : T_{22} = 0\}$.

**Определение.** Алгебра $A$ относится к:

- *типу* $M^0$, если $K_A = 0$;
- *типу* $M^1$, если $0 \neq K_A \subset A^0$;
- *типу* $M^2$, если $K_A$ не содержится в $A^0$ и $\mu = \lambda$; если при этом $F_A = 0$, то пишем $A \in M^{2a}$, в противном случае $A \in M^{2b}$;
- *типу* $M^3$, если $K_A$ не содержится в $A^0$ и $\mu \neq \lambda$; если при этом $F_A = 0$, то пишем $A \in M^{3a}$; в противном случае $A \in M^{3b}$.

Легко проверить, что каждая базовая алгебра попадает в один из этих классов.

В [41] дается подробное описание замкнутых по операторной норме алгебр каждого класса. При этом алгебры всех классов, кроме $M^1$, описываются в привычных терминах (C*-алгебра, замкнутое подпространство гильбертова пространств, набор чисел). Мы не будем приводить эти описания; кроме [41], их можно найти, например, в книге [67]. Наибольший интерес представляет класс $M^1$; тут ключевым элементом описание является понятие **-замкнутого квазивектора* операторной алгебры.

Пусть $Q$ — *-алгебра операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Ее *квазивектором* называется отображение $p : Q \to \mathfrak{H}$, удовлетворяющее условию $p(TS) = Tp(S)$ для всех $T, S \in Q$. Квазивектор называется **-замкнутым*, если $Q$ полна относительно нормы $\|T\|_p = \|T\| + \|p(T)\| + \|p(T^*)\|$; аналогично определяется WOT *-замкнутые квазивекторы.

Непрерывные квазивекторы описываются просто: они задаются векторами $x \in \mathfrak{H}$ по формуле $p(T) = Tx$ (такие квазивекторы будем называть *простыми*). Более тонкий пример: пусть $R$ — положительный инъективный оператор из $Q'$ такой, что для некоторого вектора $x \in \mathfrak{H}$ выполнено условие $Qx \subset R\mathfrak{H}$, тогда отображение $p : T \mapsto R^{-1}Tx$ является *-замыкаемым квазивектором (т. е. $p$ *-замкнут на пополнении $Q$ по норме $\|\cdot\|_p$). В [41] показано, что этот класс примеров универсален: любой *-замкнутый квазивектор задается таким способом. Квазивекторы можно задавать и в терминах прямых операторных интегралов простых квазивекторов, а также в терминах их бесконечных прямых сумм.

Теперь мы можем описать, как устроены алгебры из класса $M^1$. Всякая такая алгебра $A$ задается набором, состоящим из *-алгебры $Q$ операторов в $\mathfrak{H}$, ее *-замкнутого квазивектора $p$, подпространства $W$, инвариантного для $Q$ и ортогонального к $p(Q)$, а также замкнутого инволютивного антилинейного оператора $V$ с областью определения $D \perp (p(Q) + R)$. Алгебра $A$ обозначается $M^1(Q, p, W, D, V)$. Произвольный оператор из $A$ определяется выбором оператора $T \in Q$, векторов

$x, y \in W$, $u \in D$ и чисел $\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$ и записывается матрицей

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & p(B^*) + y + Vu & \gamma \\ 0 & \lambda 1_{\mathfrak{H}} + B & p(B) + x + u \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

С каждым *-замкнутым квазивектором $p$ алгебры $Q$ можно связать двойственный квазивектор $p'$. Он определен на подалгебре $Q'_p$ коммутанта $Q'$ алгебры $Q$, которая определена как множество тех операторов $R \in Q'$, для которых отображение $T \mapsto Rp(T)$ непрерывно на $A$. Квазивектор $p'$ задан условиями: $Rp(T) = Tp'(R)$ и $p'(R) \in \overline{Q\mathfrak{H}}$ для всех $T \in Q$, $R \in Q'_p$. Нетрудно доказать, что $Q \subset (Q'_p)'_{p'}$ и $p''$ продолжает $p$. На самом деле, справедлив следующий результат.

*Пусть $p$ — WOT *-замкнутый квазивектор операторной алгебры $Q$, и пусть $E$ — ортопроектор на $\ker Q$. Тогда алгебра $Q'_p$ WOT-плотна в $Q'$, $(Q'_p)'_{p'} = Q + \mathbb{C}E$ и $p'' = p \oplus 0_{E\mathfrak{H}}$.*

Как следствие, в [41] получена теорема о бикоммутанте для WOT *-замкнутых $J$-симметричных алгебр в $\Pi_1$: для каждого из шести типов описаны те алгебры, для которых имеет место совпадение с бикоммутантом. Как заметил С. Н. Литвинов [20], из этого описания можно вывести, что всякая WOT-замкнутая унитальная базовая алгебра операторов в пространстве типа $\Pi_1$, имеющая разделяющий вектор, совпадает со своим бикоммутантом.

Основной целью работы С. Н. Литвинова [20] было построение $\Pi_1$-аналога теории Томиты—Такесаки. Потребность в индефинитном варианте этой теории в теории полевых алгебр Вайтмана—Вичмана и общей релятивистской квантовой теории поля подробно обосновывается в работах К. Ю. Дадашяна и С. С. Хоружего [4–7]. Как показано в [4–7], построение такого аналога наталкивается на препятствия спектрального характера для модулярного оператора. В частности, неизвестно, справедливо ли, что слабо замкнутая $J$-симметричная алгебра операторов в $\Pi_k$, имеющая циклический и разделяющий вектор, антиизоморфна своему коммутанту. Однако С. Н. Литвинову удалось показать, что при $k = 1$ ответ на этот вопрос положителен. Фактически, в [20] аналог теории Томиты—Такесаки построен полностью — определена модулярная группа и доказано, что справедлив $\Pi_1$-аналог фундаментальной теоремы Томиты:

**Теорема** (см. [20])**.** *Пусть $A$ — слабо замкнутая $J$-симметричная алгебра операторов в пространстве $H$ типа $\Pi_1$, имеющая циклический и разделяющий вектор. Пусть $A'$ — коммутант алгебры $A$. Тогда существует антилинейная инволюция $j : H \to H$ такая, что $A' = jAj$.*

В более поздней статье В. С. Шульмана [87] этот результат был получен как следствие аналогичного утверждения о квазивекторах:

**Теорема** (см. [87])**.** *Пусть квазивектор $p$ *-алгебры $Q \subset B(\mathfrak{H})$ WOT *-слабо замкнут, инъективен и его образ плотен в $\mathfrak{H}$. Тогда существует антилинейная инволюция $j$ на $\mathfrak{H}$ такая, что $jQj = Q'_p$ и $p'(jTj) = jp(T)$ для любого $T \in Q$.*

Теория двойственности квазивекторов получила дальнейшее развитие в работах В. С. Шульмана [45] и А. И. Логинова и В. С. Шульмана [25], посвященных векторнозначной двойственности для модулей над банаховыми алгебрами и ее приложениям — в частности, к теории замкнутых мультипликаторов W*-алгебр, теории разложения нормальных весов, теории левых гильбертовых алгебр и теории коммутационных систем А. Ван Дайла [95].

В работах С. Ш. Машариповой и В. И. Чилина [27, 51, 52] построенная в [41] классификация использовалась для изучения функционального исчисления от самосопряженных операторов в $\Pi_1$; эта задача имеет глубокую связь со спектральной теорией $J$-самосопряженных операторов, построенной в работах М. Г. Крейна, его учеников и сотрудников. В работе тех же авторов [28] для $J$-симметричных алгебр операторов в $\Pi_1$ был доказан аналог теоремы плотности Капланского. Для алгебр операторов в $\Pi_k$ теорема плотности Капланского и ее спектральный вариант[1] доказаны в работах Тонга [92, 94]. Структура идеалов $J$-симметричных алгебр в $\Pi_k$ изучалась Янгом [96, 97].

В замечательной работе [15] Р. С. Исмагилов переформулировал одно из следствий теоремы о двойственности квазивекторов в терминах определенных им *алгебр Наймарка*.

[1] Любой оператор $T$ из слабого замыкания алгебры $A$ аппроксимируется операторами из $A$, спектральные радиусы которых не превосходят $r(T)$.

**Определение.** Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — его дуальное пространство. Прямую сумму $N(\mathfrak{H}) = B(\mathfrak{H}) \oplus \mathfrak{H} \oplus \widetilde{\mathfrak{H}}$ можно рассмотреть как инволютивную банахову алгебру относительно произведения $(T_1, x_1, y_1)(T_2, x_2, y_2) = (T_1T_2, T_1x_2, T_2^* y_1)$, инволюции $(T, x, y)^* = (T^*, y, x)$ и нормы $\|(T, x, y)\| = \|T\| + \|x\| + \|y\|$. Любая замкнутая *-подалгебра алгебры $N(\mathfrak{H})$ называется *алгеброй Наймарка*.

**Следствие.** *Пусть $L$ — алгебра Наймарка. Если для любого вектора $h \in \mathfrak{H}$ подпространство $\{Th+x : (T, x, y) \in L\}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то $L = L_0 \oplus \mathfrak{H} \oplus \widetilde{\mathfrak{H}}$, где $L_0$ — некоторая $C^*$-алгебра операторов в $\mathfrak{H}$.*

Этот результат был использован в [15] для получения важного критерия неприводимости унитарных представлений групп токов.

Вариант классификации *коммутативных* $J$-симметричных (не обязательно замкнутых) алгебр в $\Pi_1$, удачно соединяющий и упрощающий модели М. А. Наймарка [30], А. И. Логинова [21] и В. С. Шульмана [41], был предложен О. Я. Бендерским, С. Н. Литвиновым и В. И. Чилиным [47]. Модели для коммутативных замкнутых по норме алгебр в $\Pi_k$ построены в работах Тонга [91, 93].

В работах И. Фанга, Х. Янга и С. Лю [100, 101] были построены аналоги рассмотренной выше классификации $J$-симметричных алгебр в $\Pi_1$ для пространств Понтрягина с произвольным индексом индефинитности. Здесь, как и в [41], алгебры разбиваются на 6 классов и достаточно прозрачно и компактно параметризуются, однако при существенном ограничении: рассматриваются лишь алгебры, замкнутые относительно отображения угловой проекции $T \mapsto T_{13}$ («условие $A(1, 3)$»). Исследованию наиболее интересного класса I, соответствующего классу $M^1$ из [41], посвящена работа Янга [98]. Наиболее поздняя из этой серии работа Янга [99] не переведена с китайского, а ее абстракт не дает представления о результатах — в частности, неясно, удалось ли автору преодолеть ограничение $A(1, 3)$.

## 3. Представления *-алгебр

Под *представлением* топологической *-алгебры $A$ в пространстве $H$ типа Крейна или Понтрягина мы будем всегда подразумевать ее непрерывный инволютивный гомоморфизм в алгебру $B(H)$ с инволюцией $T \mapsto T^\sharp$. Если необходимо это подчеркнуть, мы говорим о $J$-симметричном представлении. Термин **-представление* используется, когда речь идет об инволютивном гомоморфизме в алгебру операторов в гильбертовом пространстве со стандартной инволюцией $T \mapsto T^*$.

На представления естественно переносятся определения, введенные выше для алгебр операторов — например, мы называем подпространства, инвариантные для образа представления, инвариантными для представления, и соответственно определяем невырожденные представления, базовые представления и т. д.

Нетрудно показать, что для $J$-симметричного представления $\pi : A \to B(H)$ следующие условия эквивалентны:

1) $\pi$ *подобно *-представлению*;
2) $\pi(A)$ *имеет инвариантные подпространства $H_1, H_2$ такие, что $H_1$ положительно, $H_2$ отрицательно и $H_1 + H_2 = H$.*

Если $H$ — пространство типа $\Pi_k$, то условие 2) можно записать в виде

3) $\pi(A)$ *имеет инвариантное отрицательное подпространство размерности $k$.*

Разумеется, информация о структуре $J$-симметричных алгебр во многих случаях позволяет делать заключения о свойствах представлений. Например, теорема Р. С. Исмагилова показывает, что любое неприводимое $\Pi_k$-представление *-алгебры (или группы) вполне неприводимо, а теорема М. А. Наймарка [29] влечет утверждение о том, что любое $J$-симметричное представление коммутативной *-алгебры в пространстве $\Pi_k$ имеет $k$-мерное неположительное инвариантное подпространство. В работе Р. С. Исмагилова [12] этот результат получил следующее усиление:

**Теорема.** *Если *-алгебра $A$ имеет полную* (*т. е. отделяющую*) *систему неприводимых *-представлений, размерности которых не превосходят числа $d < \infty$, то любое ее представление в пространстве $\Pi_k$ имеет инвариантное подпространство размерности $\leqslant kd$, $J$-ортогональное дополнение которого неотрицательно.*

В работе В. С. Шульмана [42] было доказано, что всякое представление C*-алгебры в $\Pi_k$ подобно *-представлению. Заметим, что до сих пор неизвестно, любой ли гомоморфизм C*-алгебры в $B(H)$ подобен *-представлению (*проблема подобия*); в [42] показано, что перенос результата с $\Pi_k$-представлений на представления в любых пространствах Крейна равносилен решению проблемы подобия.

Напомним, что банахова *-алгебра называется *эрмитовой*, если все ее самосопряженные элементы имеют вещественные спектры. Это достаточно широкий класс алгебр, но за его рамками находятся, например, групповые алгебры локально компактных групп, не являющихся аменабельными (см. недавнюю работу Самеи и Виерсмы [83]). Несколько расширяя эти рамки, будем называть банахову *-алгебру $A$ *почти эрмитовой*, если элементы с вещественным спектром плотны в (вещественном) пространстве всех ее самосопряженных элементов.

**Теорема** (Э. В. Киссин, А. И. Логинов и В. С. Шульман, см. [65]). *Любое $\Pi_k$-представление почти эрмитовой алгебры $A$ имеет $k$-мерное неположительное инвариантное подпространство. Если, к тому же, $A$ не имеет нетривиальных конечномерных представлений и обладает ограниченной аппроксимативной единицей, то любое ее $\Pi_k$-представление подобно *-представлению.*

В частности, почти эрмитовы алгебры не имеют неприводимых $\Pi_k$-представлений. Для эрмитовых алгебр это следствие можно существенно усилить: они не имеют операторно неприводимых $\Pi_k$-представлений (Э. В. Киссин и В. С. Шульман [67]).

Класс эрмитовых *-алгебр включает дифференциальные алгебры Блакадара—Кунца [48] (см. также близкую конструкцию в работе Э. В. Киссина и В. С. Шульмана [66]); $J$-симметричные представления специального класса дифференциальных алгебр — областей определения замкнутых дифференцирований — рассматривались в работах Киссина [59–64] и Наказато [73] в связи с задачами расширения симметрических операторов, имплементирующих замкнутые *-дифференцирования C*-алгебр (т. е. в связи с некоммутативной динамикой). Дадим необходимые определения.

Пусть $A$ — банахова *-алгебра, $\pi$ — ее *-представление в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Линейное отображение $\delta$ плотной подалгебры $\mathcal{D}(\delta)$ в пространство $B(\mathfrak{H})$ называется дифференцированием, *согласованным* с $\pi$, если $\delta(a^*) = \delta(a)^*$ и $\delta(ab) = \pi(a)\delta(b) + \delta(a)\pi(b)$ для всех $a, b \in \mathcal{D}(\delta)$. Вводя на $\mathcal{D}(\delta)$ норму $\|a\|_\delta = \|a\| + \|\delta(a)\|$, мы превратим $\mathcal{D}(\delta)$ в нормированную алгебру (банахову, если дифференцирование замкнуто).

Симметрический оператор $T$ в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathcal{D}(T)$ *имплементирует* $\delta$, если $\mathcal{D}(T)$ инвариантно относительно $\pi(A)$ и $\delta(a)x = i(T\pi(a)x - \pi(a)Tx)$ для всех $a \in \mathcal{D}(\delta)$, $x \in \mathcal{D}(T)$. Задача расширения симметрического оператора, имплементирующего $\delta$, до максимального диссипативного оператора, также имплементирующего $\delta$, естественно возникает в теории неограниченных дифференцирований C*-алгебр и обобщает задачу расширения оператора, коммутирующего с данной *-алгеброй операторов (случай $\delta = 0$). С другой стороны, уже Филлипс [37, 38] показал, что эту задачу можно трактовать как задачу расширения $A$-инвариантного нейтрального подпространства в пространстве Крейна $H = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ с формой $[x, y] = (x_1, y_2) + (x_2, y_1)$ до $A$-инвариантного максимального неположительного подпространства. Рассматривая в том же ключе общий случай, определим, следуя Оте [76], представление $\pi_\delta$ *-алгебры $\mathcal{D}(\delta)$ в $H$, полагая $\pi_\delta(a)(x \oplus y) = (\pi(a)x + \delta(a)y) \oplus \pi(a)y$. Легко проверить, что такое представление $J$-симметрично и его инвариантные нейтральные подпространства соответствуют графикам имплементирующих операторов. На этом пути Киссину [59] удалось усилить некоторые важные результаты Браттели и Робинсона [49,50] о расширении имплементирующих операторов и упростить их доказательства. Подробнее об этих и близких результатах см. главу 27 книги [67].

Задача расширения имплементирующего оператора допускает и другой вариант использования индефинитной метрики. Именно, если симметрический оператор $S$ имплементирует $\delta$, а $S^*$ — оператор, сопряженный к $S$, то на пространстве $\mathcal{D}(S^*)$ можно определить скалярное произведение $(x, y)_0 = (x, y) + (S^*x, S^*y)$ и полуторалинейную форму $\{x, y\} = \operatorname{Im}((S^*x, y) + (x, S^*y))$, которая тривиальна на $\mathcal{D}(S)$ и потому определяет индефинитное скалярное произведение $[x, y]$ на дефектном пространстве $N(S)$, которое можно отождествить с ортогональным дополнением к $\mathcal{D}(S)$ в $\mathcal{D}(S^*)$. Как известно, $N(S) = N_+(S) + N_-(S)$, причем $S^*$ действует на $N_+(S)$ умножением на $i$, а на $N_-(S)$ умножением на $-i$, поэтому $N(S)$ — пространство Крейна и $N(S) = N_+(S) + N_-(S)$ — стандартное разложение на положительную и отрицательную части.

Пространства $\mathcal{D}(S^*)$ и $\mathcal{D}(S)$ инвариантны относительно исходного представления $\pi$ алгебры $D(\delta)$, а потому в $N(S)$ естественно индуцируется представление этой алгебры, которое мы обозначим $\pi^\delta$. В отличие от $\pi_\delta$, представление $\pi^\delta$ во многих важных случаях (когда хотя бы один из индексов дефекта оператора конечен) действует в пространстве Понтрягина, что, разумеется, значительно облегчает его использование.

В частности, Киссин, Логинов и Шульман [65] доказали, что в этом случае исходная C*-алгебра имеет конечномерные представления и имплементирующий оператор $S$ продолжается до максимального диссипативного оператора, также имплементирущего $\delta$; ранее Киссин [60] получил эти результаты в случае конечности обоих индексов.

В коммутативном случае продолжимость до максимального диссипативного была установлена Филлипсом [38]. Возможность получения результата Филлипса с помощью представлений в дефектных подпространствах впервые была замечена в работе Мули и Йоргенсена [58] о коммутационных соотношениях Вейля. Дополнительные результаты и примеры можно найти в главах 28-29 книги [67].

Вернемся к общей ситуации. Поскольку вопрос о неприводимых $\Pi_k$-представлениях допускает достаточно полный анализ для широкого класса алгебр, на первый план выходит задача о разложении произвольного представления на более простые части. Тут возможны различные постановки. Разумеется, идеальный вариант — разложение представления в прямую сумму, или интеграл неприводимых представлений, но его редко удается получить. Рассмотрим другие, более реалистичные подходы.

Представление $\pi$ называется П-*неразложимым*, если его нельзя представить в виде прямой суммы двух $\Pi_k$-представлений (с $k \neq 0$). Ясно, что каждое $\Pi_k$-представление раскладывается в конечную прямую сумму П-неразложимых; основной интерес здесь представляют критерии П-неразложимости. Далее, нейтральное подпространство $L$, инвариантное относительно представления $\pi$ алгебры $A$, называется *расщепляющим*, если существует кососвязное с $L$ подпространство $M$ такое, что $L+M$ инвариантно. $\Pi_k$-представление называется *расщепимым*, если оно имеет расщепляющее подпространство $L$ размерности $k$. Эквивалентное условие: $L$ является инвариантно дополняемым в $L^\perp$. Представление называется *аппроксимативно расщепимым*, если оно имеет максимальное неположительное инвариантное подпространство $L$ такое, что $L = \cap_n(H_n \cap L^\perp)$, где $H_n$ — убывающая последовательность невырожденных инвариантных подпространств. Наконец, важную роль играют разложения в полупрямые суммы, введенные в рассмотрение, по существу, уже в первых работах Наймарка; их определение удобно формулировать в терминах так называемых двойных расширений.

Заметим, что если $L$ — максимальное нейтральное подпространство, инвариантное для представления $\pi$ в $H$, то $L^\perp = L + \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Естественным образом, $\pi$ индуцирует в $L$ представление $\lambda$, а в $\mathfrak{H}$ — *-представление $\tau$, поэтому сужение $\pi|_{L^\perp}$ представления $\pi$ на $L^\perp$ является расширением $\lambda$ с помощью $\tau$. Точно так же $\pi$ — это расширение представления $\pi|_{L^\perp}$ с помощью представления $\widetilde{\lambda}$ алгебры $A$ представления в $M$, которое можно считать сопряженным к $\lambda$, отождествляя $M$ с $L^*$ с помощью формы $[\cdot,\cdot]$: $\widetilde{\lambda}(a) = \widetilde{\lambda}(a^*)^*$.

В матричной записи, соответствующей разложению $H = L + \mathfrak{H} + M$, это выглядит аналогично (2.2):

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \lambda(a) & p(a) & \gamma(a) \\ 0 & \tau(a) & \widetilde{p}(a) \\ 0 & 0 & \widetilde{\lambda}(a) \end{pmatrix}.$$

Здесь $p : A \to B(\mathfrak{H}, L)$ — 1-коцикл, определяющий первое расширение, $\widetilde{p} : A \to B(M, \mathfrak{H})$ — отображение, поточечно сопряженное к $p$ (т. е. $\widetilde{p}(a) = p(a^*)^*$), $\gamma : A \to B(M, L)$ — отображение, дополняющее $\widetilde{p}$ до 1-коцикла со значениями в $B(M, L^\perp) = B(M, \mathfrak{H} + L)$, который определяет второе расширение. Следующее обозначение подчеркивает природу $\pi$ как двойного расширения: $\pi = ee(\lambda, \tau, p, \gamma)$.

Термин «1-коцикл» связан с тем, что для любой пары представлений $\pi_1, \pi_2$ алгебры $A$ в пространствах $X_1, X_2$ пространство $B(X_2, X_1)$ получает естественную структуру $A$-бимодуля: $aTb = \pi_1(a)T\pi_2(b)$. Теперь, как обычно, коцепи — это полилинейные отображения из $A^n$ в

$B(X_2, X_1)$, операторы кограницы $d_k$ задаются стандартной формулой, пространства $k$-коциклов $\mathcal{Z}_k$ — это ядра операторов $d_k$, а пространства кограниц $\mathcal{B}_k$ — образы $d_{k-1}$. Наконец, когомологии — это фактор-пространства $\mathcal{H}_k = \mathcal{Z}_k/\mathcal{B}_k$. В частности, тот факт, что $p$ — это 1-коцикл (точнее, $(\lambda, \tau)$)-1-коцикл), означает просто равенство $p(ab) = \lambda(a)p(b) + a\tau(b)$. Если $p$ является кограницей, то первое расширение тривиально (изоморфно прямой сумме представлений), и вообще, два расширения эквивалентны, если соответствующие коциклы когомологичны (т. е. их разность — кограница). Вопрос о том, продолжается ли первое расширение до двойного, был поставлен и решен, вместе с рядом других задач, Р. С. Исмагиловым [14] (в контексте представлений групп); для этого необходимо и достаточно, чтобы 2-коцепь $(a, b) \to p(a)\widetilde{p}(b)$ была кограницей относительно пары представлений $\lambda, \widetilde{\lambda}$. Коциклы, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть *нейтральными*.

Единственность продолжения равносильна тривиальности группы первых $(\lambda, \widetilde{\lambda})$-когомологий.

Следующий результат, опубликованный впервые в [67, лемма 19.30], основан на идеях работы Р. С. Исмагилова о представлениях группы Лоренца [13]: если алгебра редуктивна и ее первая группа когомологий $\mathcal{H}^1(\alpha, \rho)$ равна нулю для всех неприводимых конечномерных представлений $\alpha$ и неприводимых *-представлений $\rho$, то любое ее представление в пространстве Понтрягина является прямой суммой базового представления и конечного числа неприводимых представлений.

Ответ на вопрос об аппроксимативной расщепляемости базового представления $\pi$ может быть дан в терминах 1-коцикла $p$: для этого в коммутанте образа представления $\tau$ должна существовать возрастающая к единице последовательность проекторов $Q_n$ такая, что все коциклы $a \mapsto p(a)Q_n$ являются кограницами. В [67, теоремы 20.26 и 20.27] показано, что при некоторых естественных ограничениях на $A$ аппроксимативная расщепляемость эквивалентна замыкаемости коцикла $p$.

Для двойных расширений разложимость в полупрямую сумму влечет аппроксимативную разложимость; обратное верно, если $A = A^2$ (см. [67, предложение 21.18 и его обсуждение]).

В работе В. С. Шульмана [46] была предложена когомологически оснащенная версия теоремы Стайнспринга и основанная на ней ГНС-конструкции для представлений *-алгебр в пространствах с индефинитной метрикой. Чтобы сформулировать эти результаты, введем необходимые определения.

Пусть $\lambda$ — представление алгебры $A$ в гильбертовом пространстве $L$. Линейное отображение $\gamma : A \to B(L)$ (т. е. 1-коцепь в $(\lambda, \widetilde{\lambda})$-когомологии) называется *$\lambda$-диссипацией*, если его кограница $d\gamma$ — вполне положительное отображение (напомним, что билинейное отображение $\Phi : A \times A \to B(L)$ называется *вполне положительным*, если $\sum\limits_{i,j}(\Phi(a_i^*, a_j)\xi_i, \xi_j) \geqslant 0$ для любых $a_i \in A, \xi_i \in L$).

**Теорема** (о факторизации). *Пусть $\Phi : A \times A \to L$ — вполне положительный 2-коцикл, тогда существуют и единственны гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\Phi$, *-представление $\pi_\Phi$ алгебры $A$ в $\mathfrak{H}_\Phi$ и 1-коцикл $p_\Phi : A \to B(L, \mathfrak{H}_\Phi)$ такие, что $\overline{p_\Phi(A)L} = \mathfrak{H}_\Phi$ и $\Phi(a, b) = p_\Phi(a^*)^* p_\Phi(b)$ для любых $a, b \in A$.*

Напомним, что классическая ГНС-конструкция состоит в построении *-представления алгебры по положительному функционалу; легко видеть, что положительные функционалы — это в точности $\lambda$-диссипации при $\lambda = 0$ и одномерном $K$. В следующей теореме $J$-симметричное представление строится по произвольной $\lambda$-диссипации.

**Теорема.** *Пусть $\gamma : A \to B(L)$ — некоторая $\lambda$-диссипация, $\Phi = d\gamma$, и пусть пространство $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\Phi$, *-представление $\pi = \pi_\Phi$ алгебры $A$ в $\mathfrak{H}_\Phi$ и 1-коцикл $p = p_\Phi : A \to B(L, \mathfrak{H}_\Phi)$ построены по $\Phi$ в соответствии с теоремой о факторизации. Тогда пространство $H = L + \mathfrak{H} + L$ с индефинитным скалярным произведением $[\xi_1 + z_1 + \eta_1, \xi_2 + z_2 + \eta_2] = (\xi_1, \eta_2)_{\mathcal{H}} + (z_1, z_2)_{\mathfrak{H}} + (\xi_2, \eta_1)_{\mathcal{H}}$ является пространством Крейна (пространством $\Pi_k$, если $\dim L = k < \infty$) и представление $n_{\lambda,\gamma}$ алгебры $A$ в $H$, заданное формулой $n_{\lambda,\gamma}(a)(\xi + z + \eta) = (\widetilde{\lambda}(a)\xi + p(a)z + \gamma(a)\eta) + (\pi(a)z + p(a)\eta) + \lambda(a)\eta$, $J$-симметрично.*

Обратно, всякое базовое представление банаховой *-алгебры в $\Pi_k$ является $J$-унитарно эквивалентным прямой сумме некоторого «ГНС-представления» $n_{\lambda,\gamma}$ и *-представления.

Многие следствия этой теоремы, а также другие результаты гомологического характера о представлениях в $\Pi_k$ можно найти в главах 19 и 21 книги Э. В. Киссина и В. С. Шульмана [67].

В частности, там доказано, что при некоторых дополнительных условиях неразложимые в полупрямую сумму ГНС-представления соответствуют крайним лучам в конусе $\lambda$-диссипаций.

## 4. $J$-унитарные представления групп

Из теоремы М. А. Наймарка [29] следует, что любое $J$-унитарное представление коммутативной группы в $\Pi_k$ имеет $k$-мерное инвариантное неположительное подпространство. В [31] М. А. Наймарк перенес этот результат на все связные разрешимые группы. В работе К. Сакаи [78] было доказано, что утверждение переносится на все связные аменабельные группы. Так как группа движений $M_n$ пространства $\mathbb{R}_n$ аменабельна, то, разумеется, утверждение верно и для нее; К. Сакаи [81] показал, что если сужение $J$-унитарного представления $\pi$ группы $M_n$ в $\Pi_1$ на подгруппу вращений $SO(n)$ содержит каждое свое неприводимое подпредставление с конечной кратностью, то $\pi$ разлагается в прямую сумму $\pi_1[+]\pi_2$, первое из которых действует в $(n+2)$-мерном подпространстве типа $\Pi_1$, а второе унитарно. При $n = 2$ аналогичный результат получен в той же работе для представлений в $\Pi_k$. Аналогичные задачи для представлений коммутативных групп рассматривались в работе [79] того же автора. В этих работах существенно использовалась теория когомологий и, в частности, результаты А. Гишарде [55].

Важную роль в теории $J$-унитарных представлений сыграли работы Р. С. Исмагилова [11, 13] о представлениях группы Лоренца. С одной стороны, теория представлений группы Лоренца тесно связана с задачами релятивистской физики и изучение ее представлений в $\Pi_k$ вполне согласуется с общим интересом физиков-теоретиков к индефинитным моделям фазовых пространств физических систем. С другой стороны, полупростые группы Ли образуют класс, до некоторой степени противоположный классу аменабельных групп, что в индефинитном случае сказывается уже в том, что они имеют неприводимые представления в $\Pi_k$. В [13] полностью описаны неприводимые $J$-унитарные представления группы Лоренца в пространствах Крейна; доказательства основывались на классических результатах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [8], а также Д. П. Желобенко [9]. В частности, было установлено, что все они действуют в пространствах Понтрягина. Показано также, что любое $J$-унитарное представление в $\Pi_k$ раскладывается в прямую сумму базового представления и конечного числа неприводимых. Результаты работы [13] подробно изложены в главе 25 книги [67], где также получена некоторая дополнительная информация об аппроксимативном разложении базовых представлений.

Именно с этих работ Р. С. Исмагилова в теории $J$-унитарных представлений начал применяться когомологический подход. Здесь, также как и в более поздних работах Сакаи, использовались классические определения когомологических понятий, *когомологии представлений*. В работах В. С. Киссина и В. С. Шульмана [68, 69] использовались *когомологии пар представлений* — аналогичные тем, что вводились выше для алгебр ($(\lambda,\rho)$-когомологии, $(\lambda,\widetilde{\lambda})$-когомологии и т. д.). Эта модификация не принципиальна, но технически иногда удобна; кроме того, терминология не требует переделки при переходе от представлений групп к представлениям групповых алгебр.

В [68, 69] изучались $J$-унитарные представления связных нильпотентных групп. Как следует из сказанного ранее, здесь можно ограничиться рассмотрением двойных расширений $ee(\lambda, U, p, \gamma)$, где $\lambda$ — представление в $L$, $U$ — унитарное представление в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $p$ — нейтральный $(\lambda, U)$-коцикл, а $\gamma$ — согласованная с $p$ $\lambda$-диссипация. Важную роль в их исследовании играет следующий результат более общего характера, полученный в [68].

**Теорема.** *Пусть $\lambda$ и $U$ — представления связной нильпотентной группы $G$. Если*
$$Sp(\lambda(h)) \cap Sp(U(h)) = \varnothing \tag{4.1}$$
*для некоторого $h \in G$, то $\mathcal{H}^1(\lambda, U) = 0$.*

Пусть $\chi$ — характер связной нильпотентной (в дальнейшем эти условия подразумеваются) группы $G$, т. е. мультипликативный функционал на $G$. Будем говорить, что $\chi$ *присоединен* к представлению $\lambda$, если $\lambda(g)x = \chi(g)x$ для некоторого вектора $x \neq 0$ и всех $g \in G$. Множество всех характеров, присоединенных к $\lambda$, обозначим $\operatorname{sign}(\lambda)$. Будем называть представление $\lambda$ *монотетическим*, если $\operatorname{sign}(\lambda)$ одноточечное.

Обозначим через $\mathcal{Z}^1_\nu(\lambda, U)$ множество всех нейтральных $(\lambda, U)$-коциклов. В [68] показано, что если $\lambda$ монотетично и соответствующий характер слабо содержится в представлении $U$, то $\mathcal{Z}^1_\nu(\lambda, U)$

плотно в пространстве $\mathcal{Z}^1(\lambda, U)$ всех $(\lambda, U)$-коциклов относительно топологии равномерной сходимости на компактах.

Нетрудно показать, что коцикл, когомологичный нейтральному, нейтрален, поэтому естественно определяется множество $\mathcal{H}^1_\nu(\lambda, U)$ нейтральных 1-когомологий. Оно не всегда является подгруппой в $\mathcal{H}^1(\lambda, U)$ и может быть весьма сложно устроено даже в случае, когда $\lambda = \iota$, тривиальное представление, а $U = \iota_m$, представление единичными операторами в $\mathbb{C}^m$. В [69] дано полное описание нейтральных $(\iota, \iota_m)$-коциклов произвольной связной нильпотентной группы. Для важного случая группы Гейзенберга $T_n$, т. е. группы верхнетреугольных $n \times n$-матриц с единицами на диагонали, это описание выглядит следующим образом.

Пусть $A$ — такая $m \times (n-1)$ матрица, что для матрицы $B = A^*A = (b_{ij})$ выполнены условия: $\operatorname{Im} b_{ij} = 0$ при $|i-j| > 1$, тогда $\xi(g) = A(g_{12}, \ldots, g_{n-1,n})^T$ — нейтральный $(\iota, \iota_m)$-коцикл, и все нейтральные коциклы имеют такой вид.

В [69] неразложимые $\Pi_k$-представления связных нильпотентных групп разбиты на 4 класса, три из которых содержат только конечномерные представления (их исследование значительно облегчает упомянутая выше классификация нейтральных $(\iota, \iota_m)$-коциклов), а четвертый состоит из двойных расширений $\mathfrak{ee}(\lambda, U, \xi, \gamma)$ таких, что все характеры из $\operatorname{sign}(\lambda)$ унитарны и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^\Omega \oplus \mathfrak{H}^0$, где:

а) $\mathfrak{H}^\Omega, \mathfrak{H}^0$ — $U$-инвариантные подпространства, $\dim \mathfrak{H}^\Omega \leqslant n_G \dim L$ и $\dim \mathfrak{H}^0 = \infty$;
б) $\operatorname{sign}(U|_{\mathfrak{H}^\Omega}) \subseteq \operatorname{sign}(\lambda)$;
в) $U|_{\mathfrak{H}^0}$ не является спектрально дизъюнктным (в смысле (4.1)) с каждым характером $\chi$ из $\operatorname{sign}(\lambda)$.

В заключение заметим, что пример, построенный в [69], обнаружил неожиданный эффект: неразложимое $\Pi_k$-представление связной нильпотентной группы может не быть монотетичным (для коммутативных групп это не так).

Перейдем теперь к изучению ограниченных $\Pi_k$-представлений произвольных групп.

Как уже говорилось, в работе М. Г. Крейна [16] существование максимального неположительного подпространства (сокращенно MNPS), инвариантного для $J$-унитарного оператора, было доказано с помощью применения теоремы Шаудера—Тихонова о неподвижной точке. Нас будет интересовать обобщение этого подхода на группы операторов, поэтому опишем конструкцию более подробно.

Каждый $J$-унитарный оператор $U$ естественно определяет (биективное) преобразование множества всех MNPS. С другой стороны, каждому MNPS $L$ соответствует сжимающий оператор $W = W_L : H_- \to H_+$ такой, что $L$ является его графиком. Таким образом, $U$ определяет отображение $\phi_U$ замкнутого единичного шара $\mathcal{B}_1(H_-, H_+)$ в пространстве $\mathcal{B}(H_-, H_+)$ в себя. Это отображение непосредственно выписывается через элементы блок-матрицы оператора $U$, соответствующие разложению $H = H_1 \oplus H_2$, где $H_1 = H_-$, $H_2 = H_+$: $\phi_U(W) = (U_{21} + U_{22}W)(U_{11} + U_{12}W)^{-1}$.

В [16] было показано, что если «уголок» $U_{12}$ оператора $U$ компактен, то «дробно-линейное» отображение $\phi_U$ WOT-непрерывно; так как шар $\mathcal{B}_1(H_-, H_+)$ WOT-компактен, то теорема о неподвижной точке обеспечивает существование оператора $W$ такого, что $\phi_U(W) = W$. Это означает, что график этого оператора — MNPS, инвариантное для $U$.

Заметим, что для операторов в $\Pi_k$ условие компактности уголка выполняется автоматически, так что теорема Крейна влечет существование инвариантного MNPS для любого $J$-унитарного оператора в $\Pi_k$.

Поскольку нас интересует наличие MNPS, инвариантного для всех элементов некоторой группы $J$-унитарных операторов, развитие этого подхода требует получения удобных результатов об общих неподвижных точках семейств отображений. Результаты такого рода хорошо известны для групп аффинных преобразований (теоремы Маркова, Какутани, Рыль-Нарджевского), однако дробно-линейные преобразования $\phi_U$ аффинными не являются. Вопрос о существовании общей неподвижной точки для коммутативной группы дробно-линейных преобразований был впервые поставлен и решен Дж. Хельтоном [57]:

**Теорема.** *Пусть $H_1$ и $H_2$ — гильбертовы пространства, причем $\dim H_1 < \infty$. Тогда любое коммутативное семейство дробно-линейных преобразований замкнутого единичного шара пространства $\mathcal{B}(H_1, H_2)$ имеет общую неподвижную точку.*

Доказательство в [57] использовало теорему М. А. Наймарка. В работе [56] Хельтон доказал (основываясь на рассмотрении дробно-линейных преобразований), что коммутативная группа $J$-унитарных операторов на пространстве Крейна $H_1 \oplus H_2$ имеет инвариантное MNPS, если она содержит компактное возмущение оператора вида $A \oplus B$, где спектры слагаемых не пересекаются. Это существенно обобщает теорему Наймарка, поскольку в пространстве $\Pi_k$ единичный оператор является компактным возмущением оператора $J = (-1) \oplus 1$.

В работе В. С. Шульмана [43] было замечено, что для вещественных пространств $\Pi_1$ все дробно-линейные отображения обладают свойством «квазиаффинности»: они переводят любой отрезок в отрезок. Там же было получено обобщение на квазиаффинные отображения теоремы Какутани о существовании неподвижной точки у любой равностепенно непрерывной группы аффинных отображений, и как следствие — доказательство существования инвариантного MNPS у ограниченной группы $J$-унитарных операторов в вещественном пространстве $\Pi_1$. Далее, А. И. Логинов [23] получил важное обобщение теоремы Маркова: любое коммутативное семейство квазиаффинных отображений компактного выпуклого подмножества локально выпуклого пространства имеет неподвижную точку.

Перенос основного результата работы [43] на комплексные $\Pi_1$-пространства был осуществлен в работе В. С. Шульмана [44], где использовалось модифицированное понятие выпуклости для подмножеств единичного шара гильбертова пространства. Соответственно, было установлено, что ограниченная группа $J$-унитарных операторов в комплексном пространстве $\Pi_1$ имеет инвариантное отрицательное подпространство.

Общая (т. е. относящаяся к пространствам Понтрягина произвольного индекса индефинитности) теорема о неподвижных точках групп дробно-линейных отображений была получена в работах М. И. Островского, Л. Туровской и В. С. Шульмана [74, 75].

**Теорема.** *Пусть* $\dim H_2 = k < \infty$, *и пусть группа* $G$ *дробно-линейных преобразований открытого единичного шара* $\mathfrak{B}$ *пространства* $\mathcal{B}(H_2, H_1)$ *имеет хотя бы одну орбиту, отделенную от границы шара (т. е.* $\sup_{\phi\in G} \|\phi(K)\| < 1$ *для некоторого* $K \in \mathfrak{B}$*). Тогда найдется точка* $K_0 \in \mathfrak{B}$ *такая, что* $\phi(K_0) = K_0$ *для всех* $\phi \in G$.

Отсюда можно сделать вывод, что всякое ограниченное $J$-унитарное представление группы в $\Pi_k$ имеет $k$-мерное инвариантное отрицательное подпространство.

Как следует из сказанного ранее, приведенный результат влечет подобие любого ограниченного $J$-унитарного $\Pi_k$-представления $\pi$ любой группы $G$ унитарному представлению. В работе Э. Киссина, Ю. В. Туровского и В. С. Шульмана [70] замечено, что константа подобия (т. е. точная нижняя грань чисел $\|V\|\|V^{-1}\|$ по всем операторам $V$, реализующим подобие) не превосходит $2C^2 + 1$, где $C = \sup_{g\in G} \|\pi(g)\|$. Тот факт, что полученная оценка не зависит от числа отрицательных квадратов, делает естественным предположение, что результат справедлив и для случая $k = \infty$ (т. е. для представлений в пространствах Крейна). Однако в [70] показано, что это неверно.

Доказательство теоремы о неподвижных точках в [74] существенно использовало глубокий результат Шафрира [86] о гиперболичности метрики Каратеодори в $\mathfrak{B}$ (эта работа переведена с иврита на английский и помещена в [74] как приложение). Напротив, подход в [75] основан на весьма общих фактах о неподвижных точках групп изометрий в метрических пространствах. Чтобы их сформулировать, напомним, что метрическое пространство $(\mathcal{X}, d)$ называется *b-компактным* (см. [90]), если любое центрированное семейство шаров $E_{a,r} = \{x \in X : d(a,x) \leqslant r\}$ имеет непустое пересечение. Подмножество $M \subset \mathcal{X}$ называется *b-выпуклым*, если оно является пересечением некоторого семейства шаров. Точка $a \in M$ называется *диаметральной*, если $\sup\{d(a,x) : x \in M\} = \mathrm{diam}(M)$. Если любое неодноточечное $b$-выпуклое подмножество пространства $\mathcal{X}$ имеет недиаметральную точку, то говорят, что $\mathcal{X}$ имеет нормальную структуру.

**Теорема** (см. [75])**.** *Пусть метрическое пространство* $(\mathcal{X}, d)$ *b-выпукло и имеет нормальную структуру. Если некоторая группа изометрий пространства* $(\mathcal{X}, d)$ *имеет ограниченную орбиту, то она имеет и неподвижную точку* $x_0$, *которая принадлежит пересечению всех b-выпуклых множеств, содержащих* $O$.

В нашем случае эта теорема применяется к пространству $(\mathfrak{B}, \rho)$, где $\rho$ — метрика Каратеодори в $\mathfrak{B}$; так как дробно-линейные преобразования биголоморфны, то они сохраняют $\rho$. Разумеется, для такого применения потребовалось сначала доказать, что пространство $(\mathfrak{B}, \rho)$ $b$-выпукло и имеет нормальную структуру, однако это существенно проще гиперболичности.

Одно из приложений этого результата относится к теории квази-положительно определенных функций на группе. Следуя М. Г. Крейну [17], скажем, что функция $\phi$ на группе $G$ является *квази-положительно определенной* индекса $k$, если $\phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$ при $g \in G$, и для любого набора элементов $g_1, \ldots, g_n \in G$ квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} \phi(g_i^{-1}g_j)z_i\overline{z_j}$ имеет не более $k$ отрицательных квадратов.

**Теорема** (Е. В. Киссин, Ю. В. Туровский, В. С. Шульман, см. [70]). *Любая ограниченная квази-положительно определенная функция индекса $k$ на группе представима в виде разности $\phi_1 - \phi_2$, где функции $\phi_i$ положительно определенные, причем $\varphi_2$ имеет ранг $k$ (т. е. ранги всех матриц $(\phi_2(g_i^{-1}g_j))_{i,j=1}^n$ не превосходят $k$).*

Ранее Сакаи [80], доказал этот результат для аменабельных групп. Ограниченные квази-положительно определенные функции на коммутативных группах подробно изучались в связи с задачами теории вероятностей (см. статью Сасвари [84] и цитируемые там источники).

Авторы выражают искреннюю благодарность В. И. Чилину за внимательное чтение рукописи и полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Введение в теорию пространств Понтрягина. Приложения индефинитной метрики. Специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2008.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Введение в теорию пространств Крейна. Приложения индефинитной метрики. Специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «Форма», 2010.
3. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Приложения индефинитной метрики. — Симферополь: ДИАЙПИ, 2014.
4. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, I// Теор. мат. физ. — 1983. — *54*, № 1. — С. 57–77.
5. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, II// Теор. мат. физ. — 1985. — *2*, № 1. — С. 30–44.
6. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, III// Теор. мат. физ. — 1987. — *70*, № 2. — С. 181–191.
7. *Дадашян К. Ю., Хоружий С. С.* О полевых алгебрах в квантовой теории с индефинитной метрикой, IV// Теор. мат. физ. — 1987. — *72*, № 3. — С. 340–351.
8. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* Унитарные представления классических групп// Тр. МИАН. — 1950. — *36*. — С. 3–288.
9. *Желобенко Д. П.* Описание одного класса представлений группы Лоренца// Докл. АН СССР. — 1958. — *121*, № 4. — С. 586–590.
10. *Иохвидов И. С.* Унитарные операторы в пространствах с индефинитной метрикой// Заметки НИИ мат. и мех. Харьков. ун-та. — 1949. — *21*. — С. 79–86.
11. *Исмагилов Р. С.* Описание унитарных представлений группы Лоренца в пространстве с индефинитной метрикой// Докл. АН СССР. — 1964. — *158*, № 2. — С. 268–270.
12. *Исмагилов Р. С.* Кольца операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Докл. АН СССР. — 1966. — *171*, № 2. — С. 269–271.
13. *Исмагилов Р. С.* Унитарные представления группы Лоренца в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1966. — *30*, № 3. — С. 497–522.
14. *Исмагилов Р. С.* О задаче расширения представлений// Мат. заметки. — 1984. — *35*, № 1. — С. 99–106.
15. *Исмагилов Р. С.* О неприводимости представлений группы токов// Функц. анализ и его прилож. — 1994. — *28*. — С. 21–30.
16. *Крейн М. Г.* Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой// Усп. мат. наук. — 1950. — *5*, № 2. — С. 180–190.
17. *Крейн М. Г.* Об интегральном представлении непрерывной эрмитово-индефинитной функции с конечным числом отрицательных квадратов// Докл. АН СССР. — 1959. — *125*, № 1. — С. 31–34.
18. *Либерзон В. И., Шульман В. С.* Операторно-неприводимые алгебры операторов в пространстве Понтрягина $\Pi_1$// Изв. АН СССР. — 1971. — *35*, № 5. — С. 1159–1170.
19. *Либерзон В. И., Шульман В. С.* Невырожденные операторные алгебры в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1973. — *37*, № 3. — С. 533–538.

20. *Литвинов С. Н.* Бициклические WJ*-алгебры в пространстве Понтрягина типа $\Pi_1$// Функц. анализ и его прилож. — 1992. — *26*, № 3. — С. 46–54.
21. *Логинов А. И.* О коммутативных симметричных алгебрах операторов в пространствах Понтрягина// Изв. АН СССР. — 1969. — *33*, № 3. — С. 559–569.
22. *Логинов А. И.* Полные коммутативные симметричные операторные алгебры в пространстве Понтрягина $\Pi_1$// Мат. сб. — 1971. — *84*, № 4. — С. 575–582.
23. *Логинов А. И.* Одно обобщение теоремы Маркова—Какутани о неподвижной точке// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 2. — С. 65–66.
24. *Логинов А. И., Шульман В. С.* Неприводимые $J$-симметричные алгебры операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Докл. АН СССР. — 1978. — *240*, № 1. — С. 21–23.
25. *Логинов А. И., Шульман В. С.* Векторнозначная двойственность для модулей над банаховыми алгебрами// Изв. АН СССР. — 1993. — *57*, № 4. — С. 3–35.
26. *Ломоносов В. И.* Об инвариантных подпространствах семейства операторов, коммутирующих с вполне непрерывным// Функц. анализ и его прилож. — 1973. — *7*, № 3. — С. 55–56.
27. *Машарипова С. Ш., Чилин В. И.* Функциональное исчисление в симметричных операторных алгебрах в пространстве Понтрягина $\Pi_1$// Докл. АН Узбек. ССР. — 1994. — *14*. — С. 10–12.
28. *Машарипова С. Ш., Чилин В. И.* Теорема плотности Капланского для симметричных операторных алгебр в $\Pi_1$// Узбек. мат. ж. — 1996. — *2*. — С. 68–75.
29. *Наймарк М. А.* О перестановочных унитарных операторах в пространстве $\Pi_k$// Докл АН СССР. — 1963. — *149*. — С. 1261–1263.
30. *Наймарк М. А.* О коммутативных алгебрах операторов в пространстве $\Pi_k$// Докл АН СССР. — 1965. — *161*, № 4. — С. 767–770.
31. *Наймарк М. А.* Об унитарных представлениях разрешимых групп в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1963. — *27*. — С. 1181–1185.
32. *Наймарк М. А.* О структуре унитарных представлений локально компактных групп в пространствах Понтрягина $\Pi_1$// Изв. АН СССР. — 1965. — *29*, № 4. — С. 689–770.
33. *Наймарк М. А.* О структуре унитарных представлений локально компактных групп и симметричных представлений в пространствах Понтрягина $\Pi_k$// Изв. АН СССР. — 1966. — *30*, № 5. — С. 1111–1132.
34. *Наймарк М. А., Исмагилов Р. С.* Представления групп и алгебр в пространствах с индефинитной метрикой// Итоги науки и техн. Сер. Мат. Мат. анализ. — 1969. — *1968*. — С. 73–105.
35. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространствах с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. — 1944. — *8*. — С. 243–280.
36. *Соболев С. Л.* О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью// Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1949. — № 1. — С. 55–60.
37. *Филлипс Р. С.* Расширение дуальных подпространств, инвариантных относительно алгебры// Математика. — 1964. — *8*, № 6. — С. 81–108.
38. *Филлипс Р. С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы операторов в частных производных// Математика. — 1962. — *6*, № 4. — С. 11–70.
39. *Шкаликов А. А.* О существовании инвариантных подпространств у диссипативных операторов в пространствах с индефинитной метрикой// Тр. МИАН. — 2005. — *248*. — С. 294–303.
40. *Штраус В. А.* Функциональное представление алгебры, порожденной самосопряженным оператором в пространстве Понтрягина// Функц. анализ и его прилож. — 1986. — *20*, № 1. — С. 91-92.
41. *Шульман В. С.* Банаховы симметричные алгебры операторов в пространстве типа $\Pi_1$// Мат. сб. — 1972. — *89*, № 2. — С. 264–279.
42. *Шульман В. С.* О представлениях С*-алгебр в пространствах с индефинитной метрикой// Мат. заметки. — 1977. — *22*. — С. 583–592.
43. *Шульман В. С.* Одна теорема о неподвижной точке// Функц. анализ и его прилож. — 1979. — *13*, № 1. — С. 88-89.
44. *Шульман В. С.* О неподвижных точках дробно-линейных отображений// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 2. — С. 93–94.
45. *Шульман В. С.* О модулях над операторными алгебрами// Функц. анализ и его прилож. — 1983. — *17*, № 2. — С. 94–95.
46. *Шульман В. С.* Факторизация вполне положительных коциклов и ГНС-конструкция представлений в пространствах Понтрягина// Функц. анализ и его прилож. — 1997. — *31*, № 3. — С. 91–94.
47. *Benderskii O. Ya., Litvinov S. N., Chilin V. I.* Description of commutative symmetric algebras of operators on Pontryagin space $\Pi_1$// J. Operator Theory. — 1997. — *37*. — С. 201–222.
48. *Blackadar B., Cuntz J.* Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C*-algebras// J. Operator Theory. — 1991. — *26*. — С. 255–282.

49. *Bratteli O., Robinson D.* Unbounded derivations of C*-algebras, I// Commun. Math. Phys. — 1975. — *42.* — С. 253–268.
50. *Bratteli O., Robinson D.* Unbounded derivations of C*-algebras, II// Commun. Math. Phys. — 1976. — *46.* — С. 11–30.
51. *Chilin V. I., Masharipova S. Sh.* Functional calculus for the algebra of operators generated by a self-adjoint operator in Pontryagin's space $\Pi_1$// Proc. 8th Int. Conf. «Topological Algebras and Their Applications», 2014. — Berlin—Boston: Walter de Gruyter, 2018. — С. 55–72.
52. *Chilin V. I., Masharipova S. Sh.* Functional calculus for the algebra of operators generated by a selfadjoint operator in Pontryagin's space $\Pi_1$. II. Exceptional case in the model of type 1// Indian J. Math. — 2016. — *58.* — С. 18–37.
53. *Cuntz J.* Locally C*-equivalent algebras// J. Funct. Anal. — 1976. — *23.* — С. 95–106.
54. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Indefinite linear algebra and applications. — Basel: Birkhäuser, 2005.
55. *Guichardet A.* Sur la cohomologie des groupes topologiques// Bull. Sci. Math. — 1971. — *95.* — С. 161–176.
56. *Helton J. W.* Unitary operators on a space with an indefinite inner product// J. Funct. Anal. — 1970. — *6.* — С. 412–440.
57. *Helton J. W.* Operators unitary in an indefinite metric and linear fractional transformations// Acta Sci. Math. — 1971. — *32.* — С. 261–266.
58. *Jorgensen P. E. T., Muhly P. S.* Selfadjoint extensions satisfying the Weyl operator commutation relations// J. D'Anal. Math. — 1980. — *37.* — С. 46–99.
59. *Kissin E.* Symmetric operator extensions of unbounded derivations of C*-algebras// J. Funct. Anal. — 1988. — *81.* — С. 38–53.
60. *Kissin E.* Dissipative implementations of *-derivationa of C*-algebras and representations in indefinite metric spaces// J. London. Math. Soc. (2). — 1991. — *43.* — С. 451–464.
61. *Kissin E.* Representational indices of derivations of C*-algebras and representations of *-algebras on Krein spaces// J. Reine Angew Math. — 1993. — *439.* — С. 71–92.
62. *Kissin E.* Semigroups of representational indices of derivations of C*-algebras// J. Funct. Anal. — 1994. — *126.* — С. 139–168.
63. *Kissin E.* Derivations of C*-algebras which contain all compact operators and representations of Q-subalgebras of these algebras on $\Pi_k$-spaces// J. London. Math. Soc. (2). — 1995. — *51.* — С. 161–174.
64. *Kissin E.* Derivations of C*-algebras and representations on deficiency spaces of skew-symmetric operators// Proc. London Math. Soc. (3). — 1998. — *76*, № 2. — С. 476–496.
65. *Kissin E., Loginov A. I., Shulman V. S.* Derivations of C*-algebras and almost Hermitian representations on $\Pi_k$-spaces// Pacific J. Math. — 1996. — *174.* — С. 411–430.
66. *Kissin E., Shulman V. S.* Differential properties of some dense subalgebras of C*-algebras// Proc. Edinb. Math. Soc. — 1994. — *37.* — С. 399–422.
67. *Kissin E., Shulman V. S.* Representations on Krein spaces and derivations of C*-algebras. — Harlow: Longman, 1997.
68. *Kissin E., Shulman V. S.* Non-unitary representations of nilpotent groups, I: Cohomologies, extensions and neutral cocycles// J. Funct. Anal. — 2015. — *269.* — С. 2564–2610.
69. *Kissin E., Shulman V. S.* Representations of nilpotent groups on spaces with indefinite metric// Integral Equ. Operator Theory. — 2017. — *87.* — С. 81–116.
70. *Kissin E., Shulman V. S., Turovskii V. S.* Pontryagin—Krein theorem: Lomonosov's proof and relared results// В сб.: «The Mathematical legacy of Victor Lomonosov. Operator theory». — Berlin: De Gruyter, 2020. — С. 231–250.
71. *Lomonosov V. I.* On stability of non-negative invariant subspaces// В сб.: «New Results in Operator Theory and Its Applications: the Israel M. Glazman Memorial Volume». — Basel: Birkhäuser, 1997. — С. 186–189.
72. *Naimark M. A.* Kommutative algebren von operatoren im raume $\Pi_1$// Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1964. — *9*, № 6. — С. 499–528.
73. *Nakazato H.* Indefinite inner product spaces and derivations// Math. Japonica. — 1990. — *35.* — С. 1119–1124.
74. *Ostrovskii M., Shulman V. S., Turowska L.* Unitarizable representations and fixed points of groups of holomorphic transformations of operator balls// J. Funct. Anal. — 2009. — *257.* — С. 2476–2496.
75. *Ostrovskii M., Shulman V. S., Turowska L.* Fixed points of holomorphic transformations of operator balls// Q. J. Math. — 2011. — *62.* — С. 173–187.
76. *Ota S.* Certain operator algebras induced by *-derivations in C*-algebras on an indefinite product space// J. Funct. Anal. — 1978. — *30.* — С. 238–244.

77. *Pisier G.* Similarity problems and completely bounded maps. Includes the solution to «The Halmos Problem». — Berlin: Springer, 2001.
78. *Sakai K.* On $J$-unitary representations of amenable groups// Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. — 1977. — *26.* — С. 33–41.
79. *Sakai K.* On indecomposable unitary representations of Locally compact abelian groups in $\Pi_n$-spaces// Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ. — 1978. — *27.* — С. 1–20.
80. *Sakai K.* On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontryagin spaces// J. Math. Kyoto Univ. — 1979. — *19.* — С. 71–90.
81. *Sakai K.* Some remarks on unitary representations of the Euclidean motion group in $\Pi_n$-spaces// Sci. Rep. Kagoshima Univ. — 1980. — *29.* — С. 13–26.
82. *Sakai K.* On indecomposable unitary representations of the 2-dimensional Euclidean motion group in finite-dimensional indefinite inner product spaces// Sci. Rep. Kagoshima Univ. — 1980. — *29.* — С. 27–51.
83. *Samei E., Wiersma M.* Quasi-Hermitian locally compact groups are amenable// Adv. Math. — 2020. — *359.* — 106897.
84. *Sasvari Z.* On bounded functions with a finite number of negative squares// Monatsh. Math. — 1985. — *99.* — С. 223–234.
85. *Schwartz J. T.* Subdiagonalization of operators in Hilbert space with compact imaginary part// Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — *15.* — С. 159–172.
86. *Shafrir I.* Operators in hyperbolic spaces// PhD Thesis. — Haifa: Technion — Israel Institute of Technology, 1990.
87. *Shulman V. S.* Quasivectors and Tomita—Takesaki theory for operator algebras on $P_1$-spaces// Rev. Math. Phys. — 1997. — *9*, № 6. — С. 749–783.
88. *Strauss V.* On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space// Oper. Matrices. — 2018. — *12*, № 3. — С. 837–853.
89. *Strauss V.* On a functional calculus for unitary operators in Pontryagin spaces// Oper. Matrices. — 2020. — *14*, № 3. — С. 971–999.
90. *Takahashi W.* A convexity in metric spaces and non-expansive mappings. I// Kodai Math. Sem. Rep. — 1970. — *22.* — С. 142–149.
91. *Tong Y.* Commutative $J$-von Neumann algebras on Pontryagin spaces// Chinese Ann. Math. Ser. A. — 1993. — *14.* — С. 429–436.
92. *Tong Y.* Two density theorems for sets of operators on Pontryagin spaces// Acta Math. Sinica. — 1994. — *37*, № 1. — С. 1–11.
93. *Tong Y.* Uniformly closed symmetric operator algebras on Pontryagin spaces// Chinese Ann. Math. Ser. A. — 1994. — *15.* — С. 603–611.
94. *Tong Y.* A density theorem on the operator algebras in Pontryagin spaces// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *268.* — С. 143–156.
95. *Van Daele A.* A framework to study commutational problems// Bull. Soc. Math. France. — 1978. — *106.* — С. 289–309.
96. *Yang H.* On the symmetry of ideal in operator algebras on Pontryagin spaces// Acta Math. Sinica. — 2004. — *47.* — С. 915–920.
97. *Yang H.* Structure of ideals of operator algbras on Pontryagin spaces// Chinese Ann. Math. Ser. A. — 2007. — *28*, № 1. — С. 103–110.
98. *Yang H.* The operator algebras of class I on the Pontryagin spaces// J. Systems Sci. Math. Sci. — 2013. — *33*, № 2. — С. 993–1006.
99. *Yang H.* Classification and general forms of operator algebras on Pontryagin space// Acta Math. Sinica. — 2015. — *58*, № 3. — С. 401–408.
100. *Yang H., Fang Y., Liu S.* General form of operator algebras on Pontryagin spaces with neutral invariant subspaces// Linear Algebra Appl. — 2007. — *425.* — С. 184–209.
101. *Yang H., Fang Y., Liu S.* Invariant subspaces of JC*-algebras on $\Pi_1$-spaces// J. Systems Sci. Math. Sci. — 2008. — *28*, № 10. — С. 1268–1274.

Э. В. Киссин
STORM/SCDM, London Metropolitan University, London, UK
E-mail: `e.kissin@londonmet.ac.uk`

В. С. Шульман
Вологодский государственный университет, Вологда, Россия
E-mail: `victor.shulman80@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-295-315 UDC 817

# On Representations of Groups and Algebras in Spaces with Indefinite Metric

© 2021 **E. V. Kissin, V. S. Shulman**

**Abstract**. The paper contains a survey of known results on the structure of $J$-symmetric operator algebras in Pontryagin and Krein spaces, as well as on representations of groups and *-algebras in these spaces.

## REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Pontryagina: spetsial'nyi kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: a Special Course of Lectures], Forma, Simferopol', 2008 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Vvedenie v teoriyu prostranstv Kreyna. Prilozheniya indefinitnoy metriki. Spetsial'nyi kurs lektsiy* [Introduction to the Theory of Kreyn Spaces: a Special Course of Lectures], Forma, Simferopol', 2010 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Prilozheniya indefinitnoy metriki* [Applications of Indefinite Metric], DIAYPI, Simferopol', 2014 (in Russian).
4. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, I" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, I], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1983, **54**, No. 1, 57–77 (in Russian).
5. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, II" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, II], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1985, **2**, No. 1, 30–44 (in Russian).
6. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, III" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, III], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1987, **70**, No. 2, 181–191 (in Russian).
7. K. Yu. Dadashyan and S. S. Khoruzhiy, "O polevykh algebrakh v kvantovoy teorii s indefinitnoy metrikoy, IV" [On field algebras in quantum theory with an indefinite metric, IV], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1987, **72**, No. 3, 340–351 (in Russian).
8. I. M. Gel'fand and M. A. Naymark, "Unitarnye predstavleniya klassicheskikh grupp" [Unitary representations of classical groups], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1950, **36**, 3–288 (in Russian).
9. D. P. Zhelobenko, "Opisanie odnogo klassa predstavleniy gruppy Lorentsa" [Description of one class of representations of the Lorentz group], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **121**, No. 4, 586–590 (in Russian).
10. I. S. Iokhvidov, "Unitarnye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Unitary operators in spaces with indefinite metric], *Zametki NII mat. i mekh. Khar'kov. un-ta* [Notes Inst. Math. Mech. Kharkov Univ.], 1949, **21**, 79–86 (in Russian).
11. R. S. Ismagilov, "Opisanie unitarnykh predstavleniy gruppy Lorentsa v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Description of unitary representations of the Lorentz group in a space with an indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **158**, No. 2, 268–270 (in Russian).
12. R. S. Ismagilov, "Kol'tsa operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Rings of operators in spaces with indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **171**, No. 2, 269–271 (in Russian).
13. R. S. Ismagilov, "Unitarnye predstavleniya gruppy Lorentsa v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Unitary representations of the Lorentz group in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1966, **30**, No. 3, 497–522 (in Russian).

14. R. S. Ismagilov, "O zadache rasshireniya predstavleniy" [An the problem of extending representations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1984, **35**, No. 1, 99–106 (in Russian).
15. R. S. Ismagilov, "O neprivodimosti predstavleniy gruppy tokov" [On irreducibility of representations of a group of currents], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1994, **28**, 21–30 (in Russian).
16. M. G. Kreyn, "Ob odnom primenenii printsipa nepodvizhnoy tochki v teorii lineynykh preobrazovaniy prostranstv s indefinitnoy metrikoy" [On one application of the fixed point principle in the theory of linear transformations of spaces with indefinite metric], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1950, **5**, No. 2, 180–190 (in Russian).
17. M. G. Kreyn, "Ob integral'nom predstavlenii nepreryvnoy ermitovo-indefinitnoy funktsii s konechnym chislom otritsatel'nykh kvadratov" [On integral representation of a continuous Hermitian-indefinite function with a finite number of negative squares], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **125**, No. 1, 31–34 (in Russian).
18. V. I. Liberzon and V. S. Shul'man, "Operatorno-neprivodimye algebry operatorov v prostranstve Pontryagina $\Pi_1$" [Operator-irreducible operator algebras in the Pontryagin space $\Pi_1$], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1971, **35**, No. 5, 1159–1170 (in Russian).
19. V. I. Liberzon and V. S. Shul'man, "Nevyrozhdennye operatornye algebry v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Nondegenerate operator algebras in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1973, **37**, No. 3, 533–538 (in Russian).
20. S. N. Litvinov, "Bitsiklicheskie WJ*-algebry v prostranstve Pontryagina tipa $\Pi_1$" [Bicyclic WJ*-algebras in the Pontryagin space of type $\Pi_1$], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1992, **26**, No. 3, 46–54 (in Russian).
21. A. I. Loginov, "O kommutativnykh simmetrichnykh algebrakh operatorov v prostranstvakh Pontryagina" [On commutative symmetric operator algebras in Pontryagin spaces], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1969, **33**, No. 3, 559–569 (in Russian).
22. A. I. Loginov, "Polnye kommutativnye simmetrichnye operatornye algebry v prostranstve Pontryagina $\Pi_1$" [Complete commutative symmetric operator algebras in the Pontryagin space $\Pi_1$], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1971, **84**, No. 4, 575–582 (in Russian).
23. A. I. Loginov, "Odno obobshchenie teoremy Markova—Kakutani o nepodvizhnoy tochke" [One generalization of the Markov–Kakutani fixed point theorem], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 2, 65–66 (in Russian).
24. A. I. Loginov and V. S. Shul'man, "Neprivodimye $J$-simmetrichnye algebry operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Neprivodimye $J$-simmetrichnye algebry operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **240**, No. 1, 21–23 (in Russian).
25. A. I. Loginov and V. S. Shul'man, "Vektornoznachnaya dvoystvennost' dlya moduley nad banakhovymi algebrami" [Vector-valued duality for modules over Banach algebras], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1993, **57**, No. 4, 3–35 (in Russian).
26. V. I. Lomonosov, "Ob invariantnykh podprostranstvakh semeystva operatorov, kommutiruyushchikh s vpolne nepreryvnym" [On invariant subspaces of the family of operators commuting with a completely continuous one], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1973, **7**, No. 3, 55–56 (in Russian).
27. S. Sh. Masharipova and V. I. Chilin, "Funktsional'noe ischislenie v simmetrichnykh operatornykh algebrakh v prostranstve Pontryagina $\Pi_1$" [Functional calculus in symmetric operator algebras in the Pontryagin space $\Pi_1$], *Dokl. AN Uzbek. SSR* [Rep. Acad. Sci. Uzbek SSR], 1994, **14**, 10–12 (in Russian).
28. S. Sh. Masharipova and V. I. Chilin, "Teorema plotnosti Kaplanskogo dlya simmetrichnykh operatornykh algebr v $\Pi_1$" [Kaplansky's density theorem for symmetric operator algebras in $\Pi_1$], *Uzbek. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 1996, **2**, 68–75 (in Russian).
29. M. A. Naymark, "O perestanovochnykh unitarnykh operatorakh v prostranstve $\Pi_k$" [On permutation unitary operators in the space $\Pi_k$], *Dokl AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1963, **149**, 1261–1263 (in Russian).
30. M. A. Naymark, "O kommutativnykh algebrakh operatorov v prostranstve $\Pi_k$" [On commutative algebras of operators in the space $\Pi_k$], *Dokl AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1965, **161**, No. 4, 767–770 (in Russian).
31. M. A. Naymark, "Ob unitarnykh predstavleniyakh razreshimykh grupp v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [On unitary representations of solvable groups in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1963, **27**, 1181–1185 (in Russian).
32. M. A. Naymark, "O strukture unitarnykh predstavleniy lokal'no kompaktnykh grupp v prostranstvakh Pontryagina $\Pi_1$" [On the structure of unitary representations of locally compact groups in Pontryagin spaces $\Pi_1$], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1965, **29**, No. 4, 689–770 (in Russian).

33. M. A. Naymark, "O strukture unitarnykh predstavleniy lokal'no kompaktnykh grupp i simmetrichnykh predstavleniy v prostranstvakh Pontryagina $\Pi_k$" [On the structure of unitary representations of locally compact groups and symmetric representations in Pontryagin spaces $\Pi_k$], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1966, **30**, No. 5, 1111–1132 (in Russian).
34. M. A. Naymark and R. S. Ismagilov, "Predstavleniya grupp i algebr v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Representations of groups and algebras in spaces with indefinite metric], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Math. Anal.], 1969, **1968**, 73–105 (in Russian).
35. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [Hermitian operators in spaces with indefinite metric], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1944, **8**, 243–280 (in Russian).
36. S. L. Sobolev, "O dvizhenii simmetrichnogo volchka s polost'yu, napolnennoy zhidkost'yu" [On the motion of a symmetrical top with a cavity filled with fluid], *Zhurn. prikl. mekh. i tekhn. fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 1949, No. 1, 55–60 (in Russian).
37. R. S. Phillips, "Rasshirenie dual'nykh podprostranstv, invariantnykh otnositel'no algebry" [The extension of dual subspaces invariant under an algebra], *Matematika* [Mathematics], 1964, **8**, No. 6, 81–108 (Russian translation).
38. R. S. Phillips, "Dissipativnye operatory i giperbolicheskie sistemy operatorov v chastnykh proizvodnykh" [Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations], *Matematika* [Mathematics], 1962, **6**, No. 4, 11–70 (Russian translation).
39. A. A. Shkalikov, "O sushchestvovanii invariantnykh podprostranstv u dissipativnykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [On existence of invariant subspaces for dissipative operators in spaces with indefinite metric], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 294–303 (in Russian).
40. V. A. Shtraus, "Funktsional'noe predstavlenie algebry, porozhdennoy samosopryazhennym operatorom v prostranstve Pontryagina" [Functional representation of the algebra, generated by a self-adjoint operator in a Pontryagin space], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1986, **20**, No. 1, 91-92 (in Russian).
41. V. S. Shul'man, "Banakhovy simmetrichnye algebry operatorov v prostranstve tipa $\Pi_1$" [Banach symmetric operator algebras in a space of type $\Pi_1$], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **89**, No. 2, 264–279 (in Russian).
42. V. S. Shul'man, "O predstavleniyakh C*-algebr v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy" [On representations of C*-algebras in spaces with indefinite metric], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1977, **22**, 583–592 (in Russian).
43. V. S. Shul'man, "Odna teorema o nepodvizhnoy tochke" [One fixed point theorem], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1979, **13**, No. 1, 88-89 (in Russian).
44. V. S. Shul'man, "O nepodvizhnykh tochkakh drobno-lineynykh otobrazheniy" [On fixed points of linear-fractional mappings], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 2, 93–94 (in Russian).
45. V. S. Shul'man, "O modulyakh nad operatornymi algebrami" [On modules over operator algebras], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1983, **17**, No. 2, 94–95 (in Russian).
46. V. S. Shul'man, "Faktorizatsiya vpolne polozhitel'nykh kotsiklov i GNS-konstruktsiya predstavleniy v prostranstvakh Pontryagina" [Factorization of completely positive cocycles and the GNS-construction of representations in Pontryagin spaces], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1997, **31**, No. 3, 91–94 (in Russian).
47. O. Ya. Benderskii, S. N. Litvinov, and V. I. Chilin, "Description of commutative symmetric algebras of operators on Pontryagin space $\Pi_1$," *J. Operator Theory*, 1997, **37**, 201–222.
48. B. Blackadar and J. Cuntz, "Differential Banach algebra norms and smooth subalgebras of C*-algebras," *J. Operator Theory*, 1991, **26**, 255–282.
49. O. Bratteli and D. Robinson, "Unbounded derivations of C*-algebras, I," *Commun. Math. Phys.*, 1975, **42**, 253–268.
50. O. Bratteli and D. Robinson, "Unbounded derivations of C*-algebras, II," *Commun. Math. Phys.*, 1976, **46**, 11–30.
51. V. I. Chilin and S. Sh. Masharipova, "Functional calculus for the algebra of operators generated by a self-adjoint operator in Pontryagin's space $\Pi_1$," Proc. 8th Int. Conf. *Topological Algebras and Their Applications, 2014*, Walter de Gruyter, Berlin—Boston, 2018, pp. 55–72.
52. V. I. Chilin and S. Sh. Masharipova, "Functional calculus for the algebra of operators generated by a selfadjoint operator in Pontryagin's space $\Pi_1$. II. Exceptional case in the model of type 1," *Indian J. Math.*, 2016, **58**, 18–37.
53. J. Cuntz, "Locally C*-equivalent algebras," *J. Funct. Anal.*, 1976, **23**, 95–106.

54. I. Gohberg, P. Lancaster, and L. Rodman, *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Birkhäuser, Basel, 2005.
55. A. Guichardet, "Sur la cohomologie des groupes topologiques," *Bull. Sci. Math.*, 1971, **95**, 161–176.
56. J. W. Helton, "Unitary operators on a space with an indefinite inner product," *J. Funct. Anal.*, 1970, **6**, 412–440.
57. J. W. Helton, "Operators unitary in an indefinite metric and linear fractional transformations," *Acta Sci. Math.*, 1971, **32**, 261–266.
58. P. E. Jorgensen and P. S. Muhly, "Selfadjoint extensions satisfying the Weyl operator commutation relations," *J. D'Anal. Math.*, 1980, **37**, 46–99.
59. E. Kissin, "Symmetric operator extensions of unbounded derivations of C*-algebras," *J. Funct. Anal.*, 1988, **81**, 38–53.
60. E. Kissin, "Dissipative implementations of *-derivationa of C*-algebras and representations in indefinite metric spaces," *J. London. Math. Soc. (2)*, 1991, **43**, 451–464.
61. E. Kissin, "Representational indices of derivations of C*-algebras and representations of *-algebras on Krein spaces," *J. Reine Angew Math.*, 1993, **439**, 71–92.
62. E. Kissin, "Semigroups of representational indices of derivations of C*-algebras," *J. Funct. Anal.*, 1994, **126**, 139–168.
63. E. Kissin, "Derivations of C*-algebras which contain all compact operators and representations of Q-subalgebras of these algebras on $\Pi_k$-spaces," *J. London. Math. Soc. (2)*, 1995, **51**, 161–174.
64. E. Kissin, "Derivations of C*-algebras and representations on deficiency spaces of skew-symmetric operators," *Proc. London Math. Soc. (3)*, 1998, **76**, No. 2, 476–496.
65. E. Kissin, A. I. Loginov, and V. S. Shulman, "Derivations of C*-algebras and almost Hermitian representations on $\Pi_k$-spaces," *Pacific J. Math.*, 1996, **174**, 411–430.
66. E. Kissin and V. S. Shulman, "Differential properties of some dense subalgebras of C*-algebras," *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 1994, **37**, 399–422.
67. E. Kissin and V. S. Shulman, *Representations on Krein Spaces and Derivations of C*-Algebras*, Longman, Harlow, 1997.
68. E. Kissin and V. S. Shulman, "Non-unitary representations of nilpotent groups, I: Cohomologies, extensions and neutral cocycles," *J. Funct. Anal.*, 2015, **269**, 2564–2610.
69. E. Kissin and V. S. Shulman, "Representations of nilpotent groups on spaces with indefinite metric," *Integral Equ. Operator Theory*, 2017, **87**, 81–116.
70. E. Kissin and V. S. Shulman, V. S. Turovskii, "Pontryagin—Krein theorem: Lomonosov's proof and relared results," In: *The Mathematical legacy of Victor Lomonosov. Operator theory*, De Gruyter, Berlin, 2020, pp. 231–250.
71. V. I. Lomonosov, "On stability of non-negative invariant subspaces," In: *New Results in Operator Theory and Its Applications: the Israel M. Glazman Memorial Volume*, Birkhäuser, Basel, 1997, pp. 186–189.
72. M. A. Naimark, "Kommutative algebren von operatoren im raume $\Pi_1$," *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1964, **9**, No. 6, 499–528.
73. H. Nakazato, "Indefinite inner product spaces and derivations," *Math. Japonica*, 1990, **35**, 1119–1124.
74. M. Ostrovskii, V. S. Shulman, and L. Turowska, "Unitarizable representations and fixed points of groups of holomorphic transformations of operator balls," *J. Funct. Anal.*, 2009, **257**, 2476–2496.
75. M. Ostrovskii, V. S. Shulman, and L. Turowska, "Fixed points of holomorphic transformations of operator balls," *Q. J. Math.*, 2011, **62**, 173–187.
76. S. Ota, "Certain operator algebras induced by *-derivations in C*-algebras on an indefinite product space," *J. Funct. Anal.*, 1978, **30**, 238–244.
77. G. Pisier, *Similarity Problems and Completely Bounded Maps. Includes the Solution to «The Halmos Problem»*, Springer, Berlin, 2001.
78. K. Sakai, "On $J$-unitary representations of amenable groups," *Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ.*, 1977, **26**, 33–41.
79. K. Sakai, "On indecomposable unitary representations of Locally compact abelian groups in $\Pi_n$-spaces," *Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ.*, 1978, **27**, 1–20.
80. K. Sakai, "On quasi-positive definite functions and unitary representations of groups in Pontryagin spaces," *J. Math. Kyoto Univ.*, 1979, **19**, 71–90.
81. K. Sakai, "Some remarks on unitary representations of the Euclidean motion group in $\Pi_n$-spaces," *Sci. Rep. Kagoshima Univ.*, 1980, **29**, 13–26.
82. K. Sakai, "On indecomposable unitary representations of the 2-dimensional Euclidean motion group in fnite-dimensional indefinite inner product spaces," *Sci. Rep. Kagoshima Univ.*, 1980, **29**, 27–51.

83. E. Samei and M. Wiersma, "Quasi-Hermitian locally compact groups are amenable," *Adv. Math.*, 2020, **359**, 106897.
84. Z. Sasvari, "On bounded functions with a finite number of negative squares," *Monatsh. Math.*, 1985, **99**, 223–234.
85. J. T. Schwartz, "Subdiagonalization of operators in Hilbert space with compact imaginary part," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 159–172.
86. I. Shafrir, "Operators in hyperbolic spaces," *PhD Thesis*, Technion — Israel Institute of Technology, Haifa, 1990.
87. V. S. Shulman, "Quasivectors and Tomita—Takesaki theory for operator algebras on $P_1$-spaces," *Rev. Math. Phys.*, 1997, **9**, No. 6, 749–783.
88. V. Strauss, "On the weakly closed algebra generated by a unitary operator in a Pontryagin space," *Oper. Matrices*, 2018, **12**, No. 3, 837–853.
89. V. Strauss, "On a functional calculus for unitary operators in Pontryagin spaces," *Oper. Matrices*, 2020, **14**, No. 3, 971–999.
90. W. Takahashi, "A convexity in metric spaces and non-expansive mappings. I," *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1970, **22**, 142–149.
91. Y. Tong, "Commutative $J$-von Neumann algebras on Pontryagin spaces," *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 1993, **14**, 429–436.
92. Y. Tong, "Two density theorems for sets of operators on Pontryagin spaces," *Acta Math. Sinica*, 1994, **37**, No. 1, 1–11.
93. Y. Tong, "Uniformly closed symmetric operator algebras on Pontryagin spaces," *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 1994, **15**, 603–611.
94. Y. Tong, "A density theorem on the operator algebras in Pontryagin spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **268**, 143–156.
95. A. Van Daele, "A framework to study commutational problems," *Bull. Soc. Math. France*, 1978, **106**, 289–309.
96. H. Yang, "On the symmetry of ideal in operator algebras on Pontryagin spaces," *Acta Math. Sinica*, 2004, **47**, 915–920.
97. H. Yang, "Structure of ideals of operator algbras on Pontryagin spaces," *Chinese Ann. Math. Ser. A*, 2007, **28**, No. 1, 103–110.
98. H. Yang, "The operator algebras of class I on the Pontryagin spaces," *J. Systems Sci. Math. Sci.*, 2013, **33**, No. 2, 993–1006.
99. H. Yang, "Classification and general forms of operator algebras on Pontryagin space," *Acta Math. Sinica*, 2015, **58**, No. 3, 401–408.
100. H. Yang, Y. Fang, and S. Liu, "General form of operator algebras on Pontryagin spaces with neutral invariant subspaces," *Linear Algebra Appl.*, 2007, **425**, 184–209.
101. H. Yang, Y. Fang, and S. Liu, "Invariant subspaces of JC*-algebras on $\Pi_1$-spaces," *J. Systems Sci. Math. Sci.*, 2008, **28**, No. 10, 1268–1274.



E. V. Kissin
STORM/SCDM, London Metropolitan University, London, UK
E-mail: `e.kissin@londonmet.ac.uk`

V. S. Shulman
Vologda State University, Vologda, Russia
E-mail: `victor.shulman80@gmail.com`