Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 285–294

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-285-294 УДК 519.216

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД К ВЯЗКОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

© 2021 г. **Ю. Е. ГЛИКЛИХ**

Аннотация. Работа представляет собой обзор результатов автора с модификациями и предварительными сведениями по использованию стохастического анализа на соболевских группах диффеоморфизмов плоского n-мерного тора для описания движения вязких жидкостей (неслучайных). Основная идея состоит в замене ковариантных производных на группах диффеоморфизмов в уравнениях, введенных Д. Эбином и Дж. Марсденом для описания идеальных жидкостей, на так называемые производные в среднем случайных процессов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Эта статья посвящена памяти Н. Д. Копачевского, в творчестве которого очень заметную роль играла гидродинамика. Эта работа является обзором лагранжева подхода к гидродинамике, инициированного известными работами В. И. Арнольда [2] и затем Д. Эбина и Дж. Марсдена [5]. В [5] на языке бесконечномерной геометрии групп соболевских диффеоморфизмов компактных многообразий была очень красиво описана гидродинамика идеальных несжимаемых жидкостей. В частности, было показано, что поток идеальной несжимаемой жидкости с нулевой внешней силой описывается уравнением геодезической слабой римановой метрики на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов.

В работах автора было показано, что потоки вязкой несжимаемой жидкости описываются стохастическими аналогами уравнений Эбина и Марсдена, в которых обычная ковариантная производная на группе диффеоморфизмов заменяется так называемыми производными в среднем случайных процессов, введенными в 60-х годах XX века Э. Нельсоном (см. [10–12]) для нужд созданной им стохастической механики (вариант квантовой механики). Хотя конструкция основана на применении стохастического анализа, результаты удается получить для детерминированных (не случайных) вязких жидкостей. Обзор этих результатов (см. [6–9]) вместе со всеми предварительными сведениями и существенными модификациями и является основной целью настоящей работы. В работе также содержатся новые результаты.

В отличие от Эбина и Марсдена, мы рассматриваем гидродинамику только на плоском n-мерном торе. Напомним, что плоский тор получается факторизацией n-мерного евклидова пространства по целочисленной решетке, при которой риманова метрика на торе наследуется из евклидовой метрики пространства.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00048.

2. Производные в среднем

Для простоты изложения мы опишем теорию производных в среднем для процессов в $\mathbb{R}^n$. Однако из-за того, что геометрия на торе наследуется из $\mathbb{R}^n$, это изложение без изменений применяется на торе.

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ в $\mathbb{R}^n$ (где мы фиксируем σ-алгебру борелевских множеств), $t \in [0,T]$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и такой, что $\xi(t)$ принадлежит пространству $L_1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ при всех t. Такой процесс определяет три семейства σ-подалгебр σ-алгебры $\mathcal{F}$:

1) «прошлое» $\mathcal{P}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $0 \leqslant s \leqslant t$;
2) «будущее» $\mathcal{F}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при всех отображениях $\xi(s) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ для $t \leqslant s \leqslant T$;
3) «настоящее» $\mathcal{N}^\xi_t$, порожденное прообразами борелевских множеств из $\mathbb{R}^n$ при отображении $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Все перечисленные семейства предполагаются полными, т. е. содержащими все множества вероятности нуль. Для удобства мы обозначаем через E^ξ_t условное математическое содержание $E(\cdot|\mathcal{N}^\xi_t)$ относительно «настоящего» $\mathcal{N}^\xi_t$ для $\xi(t)$. Следуя Э. Нельсону, введем следующие понятия производных в среднем:

Определение 2.1.

1) *Производная в среднем справа* $D\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент вида
$$D\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E^\xi_t \left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} \right), \tag{2.1}$$
где предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а символ $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к нулю 0 и $\triangle t > 0$.
2) *Производная в среднем слева* $D_*\xi(t)$ процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент
$$D_*\xi(t) = \lim_{\Delta t \to +0} E^\xi_t \left(\frac{\xi(t) - \xi(t-\Delta t)}{\Delta t} \right), \tag{2.2}$$
где (как и в пункте 1) предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а символ $\Delta t \to +0$ означает, что $\Delta t \to 0$ и $\Delta t > 0$.

Замечание 2.1. Если $\xi(t)$ — марковский процесс, то очевидным образом E^ξ_t можно заменить на $E(\cdot|\mathcal{P}^\xi_t)$ в (2.1) и $E(\cdot|\mathcal{F}^\xi_t)$ в (2.2). В первых работах Нельсона предлагались два варианта определения производных в среднем: как в определении 2.1 и с условными математическими ожиданиями относительно «прошлого» и «будущего», как выше, которые совпадают для марковских процессов. Мы не предполагаем, что $\xi(t)$ — марковский процесс, и даем определения с условными математическими ожиданиями относительно «настоящего», принимая во внимание физический принцип локальности: производная должна определяться состоянием системы в «настоящий» момент времени, а не в прошлом и в будущем. Тем не менее, производные относительно прошлого и будущего также возникают во многих задачах для немарковских процессов. Мы называем их *$\mathcal{P}$-производной в среднем* и *$\mathcal{F}$-производной в среднем* и обозначаем символами $D^{\mathcal{P}}$ и $D^{\mathcal{F}}_*$, соответственно. Изучению уравнений и включений с подобными производными в среднем посвящена работа [4].

Мы также используем следующие обобщения понятий производных в среднем справа и слева:

Определение 2.2. *Производная справа* $D^\xi\eta(t)$ процесса $\eta(t)$ относительно процесса $\xi(t)$ в момент времени t есть L_1-случайный элемент вида $D^\xi\eta(t) = \lim\limits_{\triangle t \to +0} E^\xi_t \big(\frac{\eta(t+\triangle t)-\eta(t)}{\triangle t}\big)$, а *производная слева* $D^\xi_*\eta(t)$ процесса $\eta(t)$ относительно $\xi(t)$ имеет вид $D^\xi_*\eta(t) = \lim\limits_{\Delta t \to +0} E^\xi_t \big(\frac{\eta(t)-\eta(t-\Delta t)}{\Delta t}\big)$, где пределы полагаются существующими в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, а $\triangle t \to +0$ означает, что $\triangle t$ стремится к 0 и $\triangle t > 0$.

Следующая производная в среднем строится как небольшая модификация одной идеи Нельсона. Введем дифференциальный оператор D_2, который действует на L_1-случайный процесс $\xi(t)$, $t \in [0,T]$, по правилу $D_2\xi(t) = \lim_{\triangle t \to +0} E_t^\xi \left(\frac{(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*}{\triangle t} \right)$, где $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))$ рассматривается как вектор-столбец (вектор в $\mathbb{R}^n$), а $(\xi(t+\triangle t)-\xi(t))^*$ — это вектор строка (транспонированный или сопряженный вектор), а предел предполагается существующим в $L_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Подчеркнем, что матричное произведение столбца слева и строки справа — это матрица, так что $D_2\xi(t)$ является симметрической неотрицательно определенной матричной функцией на $[0,T] \times \mathbb{R}^n$.

Определение 2.3. D_2 называется *квадратичной производной в среднем.*

Замечание 2.2. Из свойств условного математического ожидания следует, что существуют измеримые по Борелю отображения $a(t,x)$, $a_*(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ и в $\bar{\mathrm{S}}_+$, соответственно, такие, что $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$, $D_*\xi(t) = a_*(t,\xi(t))$ и $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$. Следуя [1], мы называем $a(t,x)$, $a_*(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ *регрессиями*. Напомним стандартное обозначение регрессии:

$$a(t,x) = \lim_{\triangle t \to +0} E\left(\frac{\xi(t+\triangle t) - \xi(t)}{\triangle t} \mid \xi(t) = x \right).$$

Для $a_*(t,x)$ и $\alpha(t,x)$ обозначения аналогичны. Подобные обозначения мы будем использовать ниже.

Напомним, что процесс Ито — это процесс $\xi(t)$ вида $\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t A(s)dw(s)$, где первый интеграл — интеграл Лебега, а второй — интеграл Ито, $A(t): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, зависящий от t, а $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^k$.

Определение 2.4. Процесс Ито $\xi(t)$ называется процессом *диффузионного типа*, если $a(t)$ и $A(t)$ не упреждают относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ и винеровский процесс $w(t)$ подчинен $\mathcal{P}_t^\xi$. Если $a(t) = a(t,\xi(t))$ и $A(t) = A(t,\xi(t))$, где $a(t,x)$ и $A(t,x)$ — измеримые по Борелю отображения из $[0,T]\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и в $L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$, соответственно, то процесс Ито называется *диффузионным процессом.*

Принимая во внимание свойства условного математического ожидания и тот факт, что $\mathcal{N}_t^\xi$ является σ-подалгеброй в $\mathcal{P}_t^\xi$, легко видеть, что для любого мартингала $\eta(t)$ относительно $\mathcal{P}_t^\xi$ выполняется равенство $D^\xi\eta(t) = 0$. Поскольку для процесса диффузионного типа интеграл Ито $\int_0^t A(s)dw(s)$ является мартингалом относительно $\mathcal{P}_t^\xi$, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1 (см. [3])**.** *Для процесса Ито диффузионного типа $\xi(t)$ производная в среднем справа $D\xi(t)$ существует и равна $E_t^\xi(a(t))$. В частности, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, $D\xi(t) = a(t,\xi(t))$.*

Теорема 2.2 (см. [3])**.** *Пусть $\xi(t)$ — процесс диффузионного типа. Тогда $D_2\xi(t) = E_t^\xi[\alpha(t)]$, где $\alpha(t) = A(t)A^*(t)$. В частности, если $\xi(t)$ — диффузионный процесс, то $D_2\xi(t) = \alpha(t,\xi(t))$, где $\alpha(t,x) = A(t,x)A^*(t,x)$ — коэффициент диффузии.*

Теорема 2.3. *Для процесса диффузионного типа $\xi(t)$ равенство $D_2\xi(t) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $A = 0$, и, таким образом, $\xi(t)$ является неслучайным* (*детерминированным*) *процессом.*

Определение 2.5. Производная $D_S = \frac{1}{2}(D + D_*)$ называется *симметрической производной в среднем*. Производная $D_A = \frac{1}{2}(D - D_*)$ называется *антисимметрической производной в среднем.*

Рассмотрим векторы $v^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(a(t,x) + a_*(t,x))$ и $u^\xi(t,x) = \frac{1}{2}(a(t,x) - a_*(t,x))$.

Определение 2.6. $v^\xi(t) = v^\xi(t,\xi(t)) = D_S\xi(t)$ называется *текущей скоростью* процесса $\xi(t)$; $u^\xi(t) = u^\xi(t,\xi(t)) = D_A\xi(t)$ называется *осмотической скоростью* процесса $\xi(t)$.

Физический смысл текущей и осмотической скоростей состоит в следующем. Пусть $\xi(t)$ описывает движение физического процесса, скажем, движение частицы (кредо автора состоит в том, что все физические процессы — случайные с малой дисперсией, так что обычно можно исключить из рассмотрения их стохастичность). Тогда текущая скорость v^ξ — это как раз та характеристика, которую мы обычно рассматриваем как физическую скорость, а осмотическая скорость u^ξ показывает насколько быстро частица «диффундирует» в окружающий континуум, т. е. насколько быстро нарастает «случайность».

Пусть $Y(t,m)$, $t \in [0,l]$ — гладкое зависящее от времени векторное поле на $\mathbb{R}^n$. Определим производные в среднем справа DY и слева D_*Y поля Y вдоль $\xi(t)$ следующим образом:

$$DY(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi \frac{Y(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) - Y(t,\xi(t))}{\Delta t},$$
$$D_*Y(t,\xi(t)) = \lim_{\Delta t\to+0} E_t^\xi \frac{Y(t,\xi(t)) - Y(t-\Delta t,\xi(t-\Delta t))}{\Delta t}.$$

Предположим, что ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$. Тогда соответствующие регрессии DY и D_*Y выражаются формулами

$$DY = \left(\tfrac{\sigma^2}{2}\Delta + X\cdot\nabla + \tfrac{\partial}{\partial t}\right)Y \quad \text{и} \quad D_*Y = \left(\tfrac{-\sigma^2}{2}\Delta + X_*\cdot\nabla + \tfrac{\partial}{\partial t}\right)Y, \tag{2.3}$$

где Δ — оператор Лапласа, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ ($(x^1,\dots,x^n)$ — координаты в $\mathbb{R}^n$), и точка обозначает скалярное произведение $\mathbb{R}^n$.

Производные второго порядка $DD\xi(t)$ и $D_*D_*\xi(t)$ мы описываем как первые производные D от регрессии (т. е. векторного поля) $D\xi$ и, соответственно, D_* от регрессии (векторного поля) $D_*\xi$.

Замечание 2.3. . В случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда по второй формуле (2.3) мы получаем

$$D_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y, \tag{2.4}$$

где правая часть формулы (2.4) совпадает с левой частью уравнения Бюргерса.

3. Группы диффеоморфизмов

Здесь мы опишем некоторые свойства групп соболевских диффеоморфизмов на плоском n-мерном торе (см. подробности в [5] а также их развитие в [7]).

Пусть $\mathcal{T}^n$ — плоский n-мерный тор и $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — его группа соболевских диффеоморфизмов класса $H^s (s > n/2+1)$. Напомним, что для $s > n/2+1$ отображения из H^s имеют гладкость C^1.

$\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ является гильбертовым многообразием и группой относительно суперпозиции с единицей $e = id$. Касательное пространство $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это пространство всех H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Мы обозначаем через β подпространство в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, состоящее из бездивергентных H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$.

Касательное расслоение $T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ — это множество H^s-отображений из $\mathcal{T}^n$ в $T\mathcal{T}^n$ такое, что проекции на $\mathcal{T}^n$ дают отображения из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

В любом $T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ можно определить L^2-скалярное произведение по формуле

$$(X,Y) = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_{f(m)} \mu(dm). \tag{3.1}$$

Семейство этих скалярных произведений образует так называемую *слабую риманову метрику* на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В частности, в $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ скалярное произведение (3.1) принимает вид

$$(X,Y)_e = \int_{\mathcal{T}^n} \langle X(m), Y(m)\rangle_m \mu(dm). \tag{3.2}$$

Правый сдвиг $R_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $R_f(\Theta) = \Theta\circ f$ при $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$, является C^∞-гладким отображением. Касательное отображение к правому сдвигу имеет вид $TR_f(X) = X\circ f$ при $X \in T\mathcal{D}^s(T^n)$.

С другой стороны, левый сдвиг $L_f : \mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, где $L_f(\Theta) = f\circ\Theta$ при $\Theta, f \in \mathcal{D}^s(T^n)$, только непрерывен. Зафиксируем вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и обозначим через $l_x : T^n \to T^n$ отображение $l_x(m) = m + x$ по модулю факторизации по целочисленной решетке пространства $\mathbb{R}^n$. Отметим, что левый сдвиг Ll_x C^∞-гладок.

Напомним, что $T\mathcal{T}^n = \mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Введем операторы $B : T\mathcal{T}^n \to \mathbb{R}^n$ — проекции на второй сомножитель в $\mathcal{T}^n \times \mathbb{R}^n$, и $A(m) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{T}^n_m$ — обратный к B линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n$ на касательное пространство к $\mathcal{T}^n$ в $m \in \mathcal{T}^n$.

Введем $Q_{g(m)} = A(g(m))\circ B$, где $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, $m \in \mathcal{T}^n$. Для каждого $Y \in T_f\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ мы получаем, что $Q_g Y = A(g(m)) \circ B(Y(m)) \in T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ при всех $f \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Лемма 3.1. *Верны соотношения* $TR_{g^{-1}}(Q_g X) = Q_e(TR_{g^{-1}}X)$, $TR_g(Q_{g^{-1}}X) = Q_e(TR_g X)$.

Лемма 3.2. Q_g *является параллельным переносом в* $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ *относительно связности Леви-Чивиты метрики* (3.1)

Доказательства лемм 3.1 и 3.2 можно найти, например, в [7].

Таким образом, для гладкого векторного поля $Y(t)$ вдоль гладкой кривой $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ ковариантная производная в момент времени t^* определяется как $\frac{\bar{D}}{dt}Y(t)|_{t=t^*} = \frac{d}{dt}(Q_{g(t^*)}Y(t))|_{t=t^*}$. Напомним, что (см. [7]) *геодезическая* — это гладкая кривая $g(t)$ в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такая, что

$$\frac{\bar{D}}{dt}\dot{g}(t) = 0. \tag{3.3}$$

Для такой кривой $g(t)$ построим вектор $v(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ по формуле $v(t) = \dot{g}(t) \circ g^{-1}(t)$.

Лемма 3.3. *Если* $g(t)$ *— геодезическая, то кривая* $R_f g(t)$ *— также геодезическая.*

Лемма 3.4. *Пусть* $g(t)$ *— геодезическая и* $x \in \mathbb{R}^n$ *— некоторый вектор. Тогда* $l_x g(t)$ *— геодезическая.*

Рассмотрим оператор $\bar{A} : \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n) \times \mathbb{R}^n \to T\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ такой, что $\bar{A}_e$ совпадает с введенным выше A, и для каждого $g \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ отображение $\bar{A}_g : \mathbb{R}^n \to T_g\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ получается из $\bar{A}_e$ правым сдвигом, т. е. для $X \in \mathbb{R}^n$: $\bar{A}_g(X) = TR_g \circ A_e(X) = (A \circ g)(X)$. Каждое правоинвариантное векторное поле $\bar{A}(X)$ является C^∞-гладким на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ для каждого $X \in \mathbb{R}^n$.

Для любой точки $m \in T^n$ обозначим через $exp_m : T_m T^n \to T^n$ отображение, которое переводит вектор $X \in T_m T^n$ в точку $m + X$ по модулю факторизации по целочисленной решетке на T^n. Семейство таких отображений порождает отображение $\overline{exp} : T_e\mathcal{D}^s(T^n) \to \mathcal{D}^s(T^n)$, которое переводит вектор $X \in T_e\mathcal{D}^s(T^n)$ в $e + X \in \mathcal{D}^s(T^n)$, где $e + X$ — диффеоморфизм T^n вида: $(e + X)(m) = m + X(m)$.

Рассмотрим суперпозицию $\overline{exp} \circ \bar{A}_e : \mathbb{R}^n \to \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению для произвольного $X \in \mathbb{R}^n$ мы получаем, что $\overline{exp} \circ \bar{A}_e(X)(m) = m + X$, т. е. тот же самый вектор X добавляется к каждой точке m.

Пусть $w(t)$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^n$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Построим случайный процесс

$$W^{(\sigma)}(t) = \overline{exp} \circ \bar{A}_e(\sigma w(t)) \tag{3.4}$$

в $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. По построению, для $\omega \in \Omega$ соответствующая выборочная траектория $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ — это диффеоморфизм вида $W^{(\sigma)}_\omega(t)(m) = m + \sigma w_\omega(t)$. Отметим, что для заданного $\omega \in \Omega$ и заданного $t \in \mathbb{R}$ мы получаем, что $w(t)_\omega$ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ совпадает с $l_{w(s)_\omega}$.

Пусть $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ — группа соболевских сохраняющих объем H^s-диффеоморфизмов на $\mathcal{T}^n$ ($s > n/2 + 1$), подгруппа и гильбертово подмногообразие $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ (см. [5, 7]). Так же как для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, можно ввести правый сдвиг и левый сдвиг. Первый — C^∞-гладкий, а второй — непрерывен.

Касательное пространство к $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ в единице $e = id$ обозначается через $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Это пространство всех бездивергентных H^s-векторных полей на $\mathcal{T}^n$. Касательное пространство в $\eta \in \mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ состоит из суперпозиций $X \circ \eta$, где $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Отметим, что касательное отображение к правому сдвигу имеет ту же форму, как просто для правого сдвига: $TR_g X = X \circ g$, $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Правоинвариантное векторное поле $\bar{X}$ на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ порождено единственным вектором $X \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ по формуле $\bar{X}_g = TR_g X = X \circ g$. Отметим, что $\bar{X}$ является C^k-гладким тогда и только тогда, когда X как вектор на $\mathcal{T}^n$ принадлежит соболевскому классу H^{s+k}. В частности, $\bar{X}$ C^∞-гладко тогда и только тогда, когда X C^∞-гладко.

Отметим, что поле операторов A можно рассматривать как отображение $A : \mathbb{R}^n \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Но $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы используем слабую риманову метрику, которая является сужением (3.1) на касательное расслоение $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Рассмотрим ортогональную проекцию $P : H^s \to T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ относительно скалярного произведения (3.2). Из разложения Ходжа (см., например, [5, 7]) вытекает, что эта проекция существует и ядро P является пространством всех градиентов. Так что для произвольного $Y \in H^s$ имеет место представление

$$P(Y) = Y - \operatorname{grad} p, \tag{3.5}$$

где p — некоторая H^{s+1}-функция на $\mathcal{T}^n$ (единственная с точностью до аддитивной константы).

Ковариантная производная на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ вводится формулой $\frac{\tilde{D}}{dt} = P\frac{\bar{D}}{dt}$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\tilde{D}}{dt}\dot{g}(t) = \bar{F}(t, g(t), \dot{g}(t)) \tag{3.6}$$

на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Если F достаточно гладко, для любого начального данного $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = u_0 \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение (3.6) имеет решение, корректно определенное на некотором интервале $t \in [0, T]$. Это решение описывает поток идеальной несжимаемой жидкости на $\mathcal{T}^n$ под действием внешней силы F. Если $F = 0$, это геодезическая связности Леви-Чивиты метрики (3.2) и она описывает поток в отсутствие внешних сил. Ниже, если не сказано противное, мы имеем дело с $g(t)$ в случае $F = 0$.

Замечание 3.1. Используя оператор P и формулу (3.5), мы получаем следующую модификацию формулы (2.4). Как и в замечании 2.3, в случае, когда ξ имеет коэффициент диффузии $\sigma^2 I$, обозначим регрессию $D_*\xi$ символом Y. Тогда $PD_*D_*\xi = \left(\frac{-\sigma^2}{2}\Delta + Y\cdot\nabla + \frac{\partial}{\partial t}\right)Y - \operatorname{grad} p$, где правая часть совпадает с левой частью уравнения Навье—Стокса.

4. Вязкая гидродинамика

Основная идея предлагаемого описания вязкой гидродинамики состоит в использовании на группах диффеоморфизмов стохастических уравнений — аналогов (3.3) и (3.6) — в которых для сжимаемых жидкостей $\frac{\bar{D}}{dt}$ заменяется на D_*D_*, а для несжимаемых — $\frac{\tilde{D}}{dt}$ на PD_*D_*. Осуществляется переход к эйлерову описанию, т. е. соответствующие объекты правыми сдвигами переносятся в касательные пространства в единицах групп, и при этом условное математическое ожидание превращается в обычное (безусловное) математическое ожидание. Затем показывается, что полученные детерминированные векторные поля на торе удовлетворяют различным вариантам уравнения Бюргерса или Навье—Стокса, соответственно. Отметим, что мы строим указанные процессы (решения уравнений) на группах диффеоморфизмов с помощью случайных возмущений потоков пылевидной материи или идеальной несжимаемой жидкости.

Здесь мы предполагаем, что $s > n/2 + 2$. Так что диффеоморфизмы из $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ имеют гладкость C^2, также как и векторные поля из $T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ на торе. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W^{(\sigma)}(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (3.4).

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (3.3) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0) = e$ и $\dot{g}(0) = v_0 \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t \in [0, T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t)\circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t, m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t)\circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида $\eta(t, m) = g(t, m) + \sigma w(t)$. Построим дополнительный случайный процесс $\xi(t) = \eta(T - t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t, m) = g(T - t, m) + \sigma w(T - t)$. Поскольку $w(t)$ — мартингал относительно его собственного «прошлого», из свойств относительного математического ожидания мы выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T - t, m) = v(T - t, g(T - t, m))$ и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \frac{\bar{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Рассмотрим случайный процесс $\xi_t(s) = \xi(s)\circ\xi^{-1}(t) = W^{(\sigma)}(T-s)\circ g(T-s)\circ g^{-1}(T-t)\circ(W^{(\sigma)}(T-t))^{-1}$. Отметим, что случайный диффеоморфизм $(W^{(\sigma)}(T-t))^{-1}$ действует по правилу $(W^{(\sigma)}(T-t))^{-1}(m) = m - \sigma w(T-t)$. При $s = t$ мы получаем $\xi_t(t) = \xi(t)\circ\xi^{-1}(t) = W^{(\sigma)}(T-t)\circ g(T-t)\circ g^{-1}(T-t)\circ(W^{(\sigma)}(T-t))^{-1} = e$. По построению, $m = \xi(t, \xi^{-1}(t, m)) = g(T-t, \xi^{-1}(t, m)) + \sigma w(T-t)$. Тогда $g(T-t, \xi^{-1}(t, m)) = m - \sigma w(T-t)$, так что $\xi^{-1}(t, m) = g^{-1}(T-t, m - \sigma w(T-t))$. Следовательно, $\xi_t(s, m) = \xi(s, g^{-1}(T-t, m - \sigma w(T-t)) = g(T-s, g^{-1}(T-t, m - \sigma w(T-T)) + \sigma w(T-t)$.

Отметим, что $\xi_t(t, m) = m - \sigma w(T-t) + \sigma w(T-t) = m$, т. е. $\xi_t(t) = e \in \mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ-алгебра «настоящее» $\mathcal{N}^\xi_t$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_*, мы получаем, что $D_*\xi_t(s) = E(v(T-t, m-\sigma w(T-t))) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(T-t)} v(T-t))$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t,m) = E(v(t, m-\sigma w(t)))$ (в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} v(t))$).

Теорема 4.1. *$V(T-t,m)$ удовлетворяет уравнению Бюргерса*

$$\frac{d}{dt}V(T-t,m) + (V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m) - \frac{\sigma^2}{2}\nabla^2 V(T-t,m) = 0, \tag{4.1}$$

где ∇^2 — оператор Лапласа—Бельтрами, который на плоском торе совпадает с обычным лапласианом.

Доказательство. Выберем $t\in[0,T]$ и $\omega\in\Omega$ и рассмотрим кривую $\zeta_{t,\omega}(s)$, $s\in[0,T]$, зависящую от параметра ω, вида

$$\zeta_{t,\omega}(s) = R^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} g(T-s, g^{-1}(T-t)) = g(T-s, g^{-1}(T-t, m-\sigma w(T))). \tag{4.2}$$

Отметим, что $\zeta_{t,\omega}(s)$ задана по аналогии с $\xi_{t,\omega}(s)$, введенной выше, но в формуле для $\xi_{t,\omega}(s)$ имеется дополнительный стохастический член $\sigma w(T-s)$. Таким образом, мы можем рассматривать $\zeta_{t,\omega}(s)$ как гладкую кривую с начальным условием $\zeta_{t,\omega}(t) = \mathbb{R}^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} e = (W^{(\sigma)}_\omega(T-t))^{-1}$. Отметим, что $\frac{d}{ds} l_{(\sigma w_\omega(T-t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t} = Q_e \frac{d}{ds}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t} = -Q_e T R^{-1}_{W^{(\sigma)}_\omega(T-t)} v(T-t)$.

Поскольку $g(T-s)$ — геодезическая, по лемме 3.4 кривая $\zeta_{t,\omega}(s)$ — тоже геодезическая при почти всех $\omega\in\Omega$. Напомним, что действие $W^{(\sigma)}_\omega(t)$ совпадает с действием $l_{\sigma w(t)_\omega}$. Значит, $W^{(\sigma)}_\omega(t)\zeta_{t,\omega}(s) = l_{\sigma w(T-t)_\omega}\zeta_{t,\omega}(s)$ тоже геодезическая. Итак, $\frac{\bar D}{ds}\frac{d}{ds} l_{\sigma w(s)_\omega}\zeta_{t,\omega}(s) = 0$.

Напомним, что $EQ_e T\mathbb{R}^{-1}_{W_\omega(T-t)} v(T-t) = V(T-t)$ и $D_*\xi_t(s) = V(T-t)$. Из этого мы выводим, что $D_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = D_*V(T-t, \xi_t(s))_{|s=t} = -E\big(\frac{\bar D}{ds}\frac{d}{ds} l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t}\big) = 0$. Но поскольку $D_*\xi_t(s)_{|s=t} = V(T-t)$, по формуле (2.4) мы получаем, что $D_*D_*\xi_t(s)_{|s=t}$ совпадает с левой частью уравнения (4.1). ☐

Теперь перейдем к случаю несжимаемых жидкостей.

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (3.6) с $F=0$. Рассмотрим $u(t) = \dot g(t)\circ g^{-1}(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор можно также представить как бездивергентное векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $u(t,m)$. Напомним (см., например, [5]), что $u(t,m)$ удовлетворяет уравнению Эйлера без внешней силы: $\frac{\partial u}{\partial t} = -P((u\cdot\nabla)u)$, которое после применения формулы (3.5) принимает обычный вид $\frac{\partial u}{\partial t} + (u\cdot\nabla)u - \operatorname{grad} p = 0$.

Рассмотрим введенный выше процесс $W^{(\sigma)}(t)$. По построению он принимает значения в $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Таким образом, на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ мы можем повторить приведенную выше конструкцию для $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$, т. е. определить $\eta(t) = W^{(\sigma)}(t)\circ g(t)$, где $t\in[0,T]$ и $\xi(t) = \eta(T-t)$ (т. е. в конечномерных обозначениях $\xi(t,m) = g(T-t,m) + \sigma w(T-t)$). Легко видеть, что $D_*\xi(t) = \dot g(T-t,m) = u(T-t, g(T-t,m))$, и, таким образом, $\bar P D_*D_*\xi(t) = \frac{\tilde D}{ds}\dot g(s)_{|s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$.

Так же, как выше, процесс $\xi_t(s) = \xi(s)\circ\xi^{-1}(t)$ обладает свойством $\xi_t(t) = e$. Его конечномерное описание в точности аналогично случаю $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $U(t,m) = E\big(u(t, m-\sigma w(t))\big)$ (прямой аналог $V(t,m)$). Мы также обозначим это поле как бесконечномерный вектор $U(t) = E\big(Q_e T R^{-1}_{W^{(\sigma)}(t)} u(t)\big)$.

Лемма 4.1. *Векторное поле $U(t,m)$ бездивергентно.*

Доказательство. По построению, для элементарного события $\omega\in\Omega$ диффеоморфизм $(W(t)_\omega)^{-1}$ представляет собой сдвиг тора целиком на постоянный вектор. Следовательно, Q_e, примененное к $TR^{-1}_{W(t)_\omega} u(t)$, означает параллельный перенос на торе бездивергентного векторного поля $u(t)$ целиком на тот же самый постоянный вектор назад. Так что $Q_e T R^{-1}_{W(t)} u(t)$ — случайное бездивергентное векторное поле на торе. Следовательно его математическое ожидание бездивергентно. ☐

Итак, $U(t) \in T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$. Легко показать, что $D_*\xi_t(s)_{|s=t} = U(T-t)$.

Введем $\zeta_{t,\omega}(s)$ аналогично формуле (4.2). Отметим, что на $\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ оператор l_x не переводит геодезические в геодезические. Так что мы имеем

$$PD_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = PD_*U(T-t,\xi_t(s))_{|s=t} = -PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t}) \neq 0.$$

Следовательно, нет аналога теоремы 4.1. Принимая во внимание формулу (3.5), мы можем доказать только следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Поле $U(T-t)$ удовлетворяет уравнению Навье—Стокса*

$$\frac{d}{dt}U(T-t,m)+(U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2U(T-t,m)-\operatorname{grad}p = -PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$$

с внешней силой $-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$.

Отметим, что сила $-PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$ однозначно восстанавливается по каждому потоку $g(t)$ идеальной несжимаемой жидкости с использованием формулы (4.2) и ковариантной производной. Таким образом, если рассмотреть в $T_e\mathcal{D}^s_\mu(\mathcal{T}^n)$ уравнение $PD_*D_*\xi_t(s)_{|s=t} = PE(\frac{\bar{D}}{ds}\frac{d}{ds}l_{(\sigma w_\omega(t))}\zeta_{t,\omega}(s)_{|s=t})$, оно предыдущими рассуждениями преобразуется в уравнение Навье—Стокса с нулевой внешней силой

$$\frac{d}{dt}U(T-t,m)+(U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m)-\frac{\sigma^2}{2}\nabla^2U(T-t,m)-\operatorname{grad}p = 0.$$

5. Возможные обобщения на неньютоновские жидкости

Здесь мы рассмотрим жидкости, у которых в уравнениях Бюргерса и Навье—Стокса вязкий член описывается не оператором Лапласа с коэффициентом вязкости, а другим оператором чисто второго порядка $\mathfrak{B}(t)$ с симметрической положительно определенной матрицей, не зависящей от пространственных переменных, но, возможно, зависящей от времени. В этот класс операторов входит, например, случай с оператором Лапласа, но с коэффициентом диффузии, зависящим от времени, а также случай, когда вязкий член описывается суммой оператора Лапласа и еще какого-то оператора.

Из того, что матрица оператора $\mathfrak{B}(t)$ симметрична и положительно определена, нетрудно увидеть, что существует оператор $\mathbf{B}(t)$, также не зависящий от пространственных переменных, но, возможно, зависящий от времени, такой, что $\mathfrak{B}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$.

Используя оператор $\mathbf{B}(t)$, мы заменим винеровский процесс $W^{(\sigma)}$ на группах диффеоморфизмов, использованный в предыдущем разделе, на процесс

$$W(t) = \overline{exp}\circ\bar{A}_e\left(\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)\right). \tag{5.1}$$

По построению, для $\omega\in\Omega$ соответствующая выборочная траектория $W_\omega(t)$ — это диффеоморфизм вида $W_\omega(t)(m) = m + \int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega$. Отметим, что для заданного $\omega\in\Omega$ и заданного $t\in\mathbb{R}$ мы получаем, что $\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega$ — постоянный вектор в $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для заданного ω и t действие $W_\omega(t)$ совпадает с $l_{\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)_\omega}$.

Как и в предыдущем разделе, мы предполагаем, что $s > n/2+2$. Везде ниже мы используем один и тот же стохастический процесс $W(t)$, построенный из выбранного нами винеровского процесса $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ по формуле (5.1).

Пусть $g(t)$ — решение уравнения (3.3) на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$ с начальным условием $g(0)=e$ и $\dot{g}(0) = v_0\in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Это решение существует на некотором интервале $t\in[0,T]$. Рассмотрим $v(t) = \dot{g}(t)\circ g^{-1}(t)\in T_e\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Этот бесконечномерный вектор может быть также описан как векторное поле на $\mathcal{T}^n$, которое мы обозначим $v(t,m)$.

Рассмотрим случайный процесс $\eta(t) = W(t)\circ g(t)$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. В конечномерном представлении $\eta(t)$ является случайным диффеоморфизмом на $\mathcal{T}^n$ вида $\eta(t,m) = g(t,m)+\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)$. Построим дополнительный случайный процесс $\xi(t) = \eta(T-t)$, или, в конечномерном описании, $\xi(t,m) = g(T-t,m)+\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$. Поскольку $\int_0^t \mathbf{B}(s)dw(s)$ — мартингал относительно его собственного «прошлого», из свойств условного математического ожидания мы выводим, что $D_*\xi(t) = \dot{g}(T-t,m) = v(T-t,g(T-t,m))$ и поэтому $D_*D_*\xi(t) = \frac{\bar{D}}{ds}\dot{g}(s)|_{s=T-t} = 0$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$.

Рассмотрим случайный процесс $\xi_t(s) = \xi(s)\circ\xi^{-1}(t) = W(T-s)\circ g(T-s)\circ g^{-1}(T-t)\circ(W(T-t))^{-1}$. Отметим, что случайный диффеоморфизм $(W(T-t))^{-1}$ действует по правилу $(W(T-t))^{-1}(m) = m - \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$. При $s = t$ мы получаем $\xi_t(t) = \xi(t)\circ\xi^{-1}(t) = W(T-t)\circ g(T-t)\circ g^{-1}(T-t)\circ (W(T-t))^{-1} = e$. По построению $m = \xi(t,\xi^{-1}(t,m)) = g(T-t,\xi^{-1}(t,m)) + \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$. Тогда $g(T-t,\xi^{-1}(t,m)) = m - \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$, так что $\xi^{-1}(t,m) = g^{-1}(T-t, m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s))$. Следовательно, $\xi_t(s,m) = \xi(s, g^{-1}(T-t,m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)) = g(T-s, g^{-1}(T-t,m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)) + \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s)$.

Отметим, что $\xi_t(t,m) = m - \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s) + \int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)w(s) = m$, т. е. $\xi_t(t) = e$ на $\mathcal{D}^s(\mathcal{T}^n)$. Тогда σ-алгебра «настоящее» $\mathcal{N}_t^\xi$ тривиальна, и это означает, что условное математическое ожидание относительно этой σ-алгебры совпадает с обычным математическим ожиданием. Таким образом, принимая во внимание соотношения между $v(t)$ и $g(t)$ и определение D_*, мы получаем, что $D_*\xi_t(s) = E(v(T-t, m-\int_0^{T-t}\mathbf{B}(s)dw(s))) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W(T-t)}v(T-t))$.

Введем на $\mathcal{T}^n$ векторное поле $V(t,m) = E(v(t,m-\int_0^t\mathbf{B}(s)dw(s)))$ (в бесконечномерном описании $V(t) = E(Q_e T\mathbb{R}^{-1}_{W(t)}v(t))$).

Теорема 5.1. *$V(T-t,m)$ удовлетворяет следующему аналогу уравнения Бюргерса*:
$$\frac{\partial}{\partial t}V(T-t,m) + (V(T-t,m)\cdot\nabla)V(T-t,m) - \frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)V(T-t,m) = 0,$$
где $\mathfrak{B}(t)$ — дифференциальный оператор второго порядка $\mathfrak{B}(t) = \mathfrak{B}^{ij}(t)\frac{\partial}{\partial x^i\partial x^j}$ с матрицей $(\mathfrak{B}^{ij})(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{B}^*(t)$.

Доказательство теоремы 5.1 в точности аналогично доказательству теоремы 4.1 с заменой $W^{(\sigma)}$ на W.

Переход к случаю несжимаемых жидкостей также аналогичен тому, что описано в предыдущем разделе, с заменой $W^{(\sigma)}$ на W. Получается аналог уравнения Навье—Стокса с вязким членом вида $-\frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)U(T-t,m)$: $\frac{\partial}{\partial t}U(T-t,m) + (U(T-t,m)\cdot\nabla)U(T-t,m) - \frac{1}{2}\mathfrak{B}(t)U(T-t,m) - \operatorname{grad} p = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Партасарати К.* Введение в теорию вероятностей и теорию меры. — М.: Мир, 1988.
2. *Arnol'd V.* Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits// Ann. Inst. Fourier. — 1966. — *16*, № 1. — С. 319–361.
3. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Differential inclusions with mean derivatives// Dyn. Syst. Appl. — 2007. — *16*, № 1. — С. 49–71.
4. *Azarina S. V., Gliklikh Yu. E.* Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past// Int. J. Differ. Equ. — 2009. — *4*, № 1. — С. 27–41.
5. *Ebin D. G., Marsden J.* Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid// Ann. Math. — 1970. — *92*, № 1. — С. 102–163.
6. *Gliklikh Yu. E.* Solutions of Burgers—Reynolds and Navier—Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows// J. Nonlinear Math. Phys. — 2010. — *17*, Suppl. 1. — С. 15–29.
7. *Gliklikh Yu. E.* Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics. — London: Springer, 2011.
8. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms// Appl. Anal. — 2015. — *94*, № 6. — С. 1116–1127.
9. *Gliklikh Yu. E., Zalygaeva M. E.* On derivation of Oskolkov's equations for noncompressible viscous Kelvin—Voight fluid by stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms// Glob. Stoch. Anal. — 2019. — *6*, № 2. — С. 69–77.
10. *Nelson E.* Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics// Phys. Rev. — 1966. — *150*, № 4. — С. 1079–1085.
11. *Nelson E.* Dynamical theory of Brownian motion. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1967.
12. *Nelson E.* Quantum fluctuations. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1985.

Ю. Е. Гликлих

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: `yeg@math.vsu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-285-294 UDC 519.216

Stochastic Lagrange Approach to Viscous Hydrodynamics

© 2021 **Yu. E. Gliklikh**

Abstract. The work is a survey of the author's results with modifications and preliminary information on the use of stochastic analysis on Sobolev groups of diffeomorphisms of a flat n-dimensional torus to describe the motion of viscous fluids (nonrandom ones). The main idea is to replace the covariant derivatives on the groups of diffeomorphisms in the equations introduced by D. Ebin and J. Marsden to describe ideal fluids by the so-called mean derivatives of random processes.

REFERENCES

1. K. Partasarati, *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i teoriyu mery* [Introduction to Probability and Measure Theory], Mir, Moscow, 1988 (Russian translation).
2. V. Arnol'd, "Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluides parfaits," *Ann. Inst. Fourier*, 1966, **16**, No. 1, 319–361.
3. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "Differential inclusions with mean derivatives," *Dyn. Syst. Appl.*, 2007, **16**, No. 1, 49–71.
4. S. V. Azarina and Yu. E. Gliklikh, "Stochastic differential equations and inclusions with mean derivatives relative to the past," *Int. J. Differ. Equ.*, 2009, **4**, No. 1, 27–41.
5. D. G. Ebin and J. Marsden, "Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid," *Ann. Math.*, 1970, **92**, No. 1, 102–163.
6. Yu. E. Gliklikh, "Solutions of Burgers—Reynolds and Navier—Stokes equations via stochastic perturbations of inviscid flows," *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2010, **17**, Suppl. 1, 15–29.
7. Yu. E. Gliklikh, *Global and stochastic analysis with applications to mathematical physics*, Springer, London, 2011.
8. Yu. E. Gliklikh and M. E. Zalygaeva, "Non-Newtonian fluids and stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms," *Appl. Anal.*, 2015, **94**, No. 6, 1116–1127.
9. Yu. E. Gliklikh and M. E. Zalygaeva, "On derivation of Oskolkov's equations for noncompressible viscous Kelvin—Voight fluid by stochastic analysis on the groups of diffeomorphisms," *Glob. Stoch. Anal.*, 2019, **6**, No. 2, 69–77.
10. E. Nelson, "Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics," *Phys. Rev.*, 1966, **150**, No. 4, 1079–1085.
11. E. Nelson, *Dynamical theory of Brownian motion*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1967.
12. E. Nelson, *Quantum fluctuations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1985.

Yu. E. Gliklikh
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: yeg@math.vsu.ru