Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 255–284

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-255-284 УДК 517.968.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

© 2021 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. В работе приводится обзор результатов, посвященных исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Указанные уравнения являются операторными моделями интегродифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в многочисленных приложениях: в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью (уравнения Гуртина—Пипкина), теории усреднения. Наиболее интересные и глубокие результаты обзора посвящены спектральному анализу оператор-функций, являющихся символами изучаемых интегродифференциальных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В статье приводится обзор результатов, посвященных исследованию интегродифференциальных уравнений с операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, полученных авторами в цикле работ [4–21,41–44,72,82–85], также в монографии [12]. Исследуемые уравнения представляют собой операторные обобщения интегродифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в различных приложениях: в теории вязкоупругости, в теории распространения тепла в средах с памятью (уравнения Гуртина—Пипкина), теории усреднения.

Отличительной особенностью представленного подхода является использование методов спектральной теории операторов и оператор-функций при исследовании интегродифференциальных уравнений, а также использование методов комплексного анализа и теории полугрупп. Кратко поясним основные этапы этого подхода на идейном уровне. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактное волновое уравнение, возмущенное вольтерровыми интегральными операторами, поэтому при их исследовании естественно использовать преобразование Лапласа. С помощью него мы получаем выражение для преобразования Лапласа искомого решения, выраженное через символ уравнения, преобразование Лапласа правой части уравнения и начальные данные задачи.

Доказательства результатов о корректной разрешимости опираются на оценки оператор-функций, являющихся символами уравнений в пространствах Харди в правой полуплоскости, а

Работа выполнена в рамках Программы развития Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского университета «Математические методы анализа сложных систем» при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00288А).

также теорему Пэли—Винера. На этом пути мы получаем результаты о корректной разрешимости начальных задач для интегродифференциальных уравнений в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси. Результаты о разрешимости опубликованы в статьях [4–21], а также в главе 3 монографии [12].

Спектральный анализ исследуемых интегродифференциальных уравнений — это прежде всего изучение локализации и структуры спектров оператор-функций, являющихся символами упомянутых уравнений, а также получение их оценок в правой и соответственно в левой полуплоскости. В свою очередь, на этой основе с использованием процедуры контурного интегрирования при обращении преобразования Лапласа получаются результаты о представлении сильных решений в виде суммы рядов по экспонентам, отвечающих точкам спектра оператор-функций.

Структура статьи следующая.

Первый раздел содержит введение, характеризующее общий подход авторов к исследованию рассматриваемых интегродифференциальных уравнений.

Во втором разделе предлагаемой статьи мы приводим формулировки результатов о корректной разрешимости. При этом теоремы 2.1–2.4 посвящены рассмотрению интегродифференциальных уравнений с ядрами, представимыми рядами экспонент с положительными коэффициентами, в теореме 2.5 рассматривается ядро, представимое интегралом Стилтьеса. Корректная разрешимость уравнений с ядрами, имеющих интегрируемую особенность в нуле и представимых в виде суммы функций Работнова с положительными коэффициентами, рассматривается в теоремах 2.6 и 2.7. Интегродифференциальные уравнения, возникающие в теории вязкоупругости, исследуются в теоремах 2.8–2.10.

В третьем разделе статьи представлены утверждения о локализации и структуре спектра оператор-функций, являющихся символами изучаемых уравнений (теоремы 3.7–3.13). На наш взгляд это наиболее интересные, глубокие и трудные результаты статьи. Особый интерес представляет случай оператор-функций с двумя некоммутирующими операторами (теоремы 3.8–3.13).

В четвертом разделе статьи получено представление сильных решений упомянутых уравнений в виде рядов по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функций, являющихся символами рассматриваемых уравнений (теоремы 4.1–4.7). Указанные результаты установлены на основании результатов третьего раздела о локализации спектра и проведении процедуры контурного интегрирования при обращении преобразования Лапласа. В свою очередь, используя полученные представления сильных решений, мы получаем их оценки (теоремы 4.8–4.10).

В пятом разделе статьи представлен полугрупповой подход при исследовании исходных интегродифференциальных уравнений в случае некоммутирующих операторных коэффициентов при наиболее слабых ограничениях на ядра интегральных операторов (теоремы 5.1–5.5). Предлагаемый метод является естественным обобщением и развитием метода, предложенного Н. Д. Копачевским, а также метода, предложенного в монографии [50].

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный.

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ со значениями в H с нормой $\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|^2_H + \|A^n u(t)\|^2_H\right)dt\right)^{1/2}$, $\gamma \geqslant 0$.

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^n)$, см. монографию [34, глава 1]. Для $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^0) = L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, где через $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ обозначено пространство измеримых функций со значениями в пространстве H, снабженное нормой $\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}\|f(t)\|^2{}_H dt\right)^{1/2}$.

2. Разрешимость

2.1. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами, представимыми рядами убывающих экспонент и интегралами Стилтьеса. На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \int_0^t K(t-s)A^2 v(s)ds = q(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.1}$$

$$v(+0) = \psi_0. \tag{2.2}$$

При этом предполагается, что скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \tag{2.3}$$

где числа $c_j > 0$, $\gamma_{j+1} > \gamma_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $\gamma_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$, и предполагается, что

$$K(0) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < \infty. \tag{2.4}$$

Одновременно рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + K(0)A^2u(t) + \int_0^t K'(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.5}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2.6}$$

Замечание. Если $f(t) = q'(t)$, $\varphi_0 = \psi_0$ и $\varphi_1 = q(0)$, то задача (2.5), (2.6) получается из задачи (2.1), (2.2) дифференцированием по переменной t.

Условие (2.4) в рассматриваемом случае означает, что ядро $K'(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$. Если к условию (2.4) добавить условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty, \tag{2.7}$$

то ядро $K'(t)$ принадлежит пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ рассмотрим также следующую задачу для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dv(t)}{dt} + \alpha A^2 v(t) + \int_0^t K(t-s)A^2v(s)ds = q(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.8}$$

$$v(+0) = \psi_0, \tag{2.9}$$

где параметр $\alpha > 0$. Предполагается, что скалярная функция $K(t)$ допускает представление $K(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu(\tau)$, где $d\mu$ — положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Мы также предполагаем, что выполнено следующее условие:

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \infty \tag{2.10}$$

и что носитель μ принадлежит интервалу $(d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$.

Одновременно рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \alpha A^2 \frac{du(t)}{dt} + K(0)A^2u(t) + \int_0^t K'(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.11}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2.12}$$

где параметр $\alpha > 0$. Слагаемое $\alpha A^2 u_t$ соответствует мгновенному трению Кельвина—Фойгта.

Символом уравнения (2.11) является оператор-функция $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda\big(\alpha + \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}\big)A^2$.

Определение 2.1. Вектор-функцию v назовем *сильным решением задачи* (2.1)*,* (2.2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (2.2).

Определение 2.2. Вектор-функцию u назовем *сильным решением задачи* (2.5)*,* (2.6), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.5) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальным условиям (2.6).

В следующих теоремах приводятся результаты о корректной разрешимости задач (2.1), (2.2) и (2.5), (2.6).

Теорема 2.1. *Пусть вектор-функция* $Aq'(t) \in L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_1 \geqslant 0$, $q(0) = 0$ *и выполнено условие* (2.4)*. Тогда*:

1) *если выполнено условие* (2.7) *и* $\psi_0 \in H_2$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.1), (2.2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\left\|Aq'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^2\psi_0\right\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0;
2) *если условие* (2.7) *не выполнено и* $\psi_0 \in H_3$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.1), (2.2) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\left\|Aq'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\psi_0\right\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0.

Теорема 2.2. *Пусть вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_2}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_2 \geqslant 0$ *и выполнено условие* (2.4). *Тогда*:

1) *если выполнено условие* (2.7) *и* $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$, *то для любого* $\gamma > \gamma_2$ *задача* (2.5), (2.6) *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+,A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^2\varphi_0\right\|_H + \|A\varphi_1\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1;
2) *если условие* (2.7) *не выполнено и* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$, *то для любого* $\gamma > \gamma_2$ *задача* (2.5), (2.6) *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H \big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1.

Перейдем к задаче (2.8), (2.9).

Теорема 2.3. *Пусть вектор-функция* $q(t) \in L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_1 \geqslant 0$ *и выполнено условие* (2.10). *Тогда для любого* $\gamma > \gamma_1$ *существует единственная вектор-функция* $v(t) \in W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$, *которая удовлетворяет уравнению* (2.8) *почти всюду на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *и начальному условию* (2.9). *Кроме того, справедлива оценка*
$$\|v\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|q(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A\psi_0\|_H \big) \tag{2.13}$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* ψ_0.

В свою очередь, для задачи (2.11), (2.12) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma_2}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_2 \geqslant 0$ *и выполнено условие* (2.10). *Тогда для любого* $\gamma > \gamma_2$ *существует единственная вектор-функция* $u(t) \in W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *такая, что* $A^2u_t(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *которая удовлетворяет уравнению* (2.11) *почти всюду на полуоси* $\mathbb{R}_+$ *и начальному условию* (2.12). *Кроме того, справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} + \left\|A^2u_t(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant d\big(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^2\varphi_0\right\|_H + \|A\varphi_1\|_H \big) \tag{2.14}$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1.

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения первого порядка:
$$\frac{du(t)}{dt} + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)A^2u(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.15}$$
$$u(+0) = \varphi. \tag{2.16}$$
Предполагается, что скалярная функция $\mathcal{K}(t)$ допускает представление $\mathcal{K}(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t\tau}}{\tau}d\mu(\tau)$, где $d\mu$ — положительная мера, которой соответствует возрастающая, непрерывная справа функция распределения μ. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Мы предполагаем, что выполнено следующее условие:
$$\mathcal{K}(0) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < \infty, \tag{2.17}$$
где носитель μ принадлежит полуоси $(d_1, +\infty)$, $d_1 > 0$. В ряде случаев будет также существенно использоваться условие
$$-\mathcal{K}^{(1)}(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \operatorname{Var}\mu|_0^\infty < +\infty. \tag{2.18}$$

Символом уравнения (2.15) является оператор-функция $\mathcal{L}(\lambda) = \lambda I + \hat{\mathcal{K}}(\lambda)A^2$, где $\mathcal{K}(\hat{\lambda}) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau(\lambda+\tau)}$ — преобразование Лапласа ядра $\mathcal{K}(t)$.

Вначале приведем результат о корректной разрешимости задачи (2.15), (2.16).

Определение 2.3. Вектор-функцию u назовем *сильным решением задачи* (2.15)*,* (2.16), если она принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.8) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (2.16).

Теорема 2.5. *Пусть вектор-функция* $Af^{(1)}(t) \in L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+, H)$ *при некотором* $\gamma_1 \geqslant 0$, $f(0) = 0$ *и выполнено условие* (2.10)*. Тогда*:

1) *если выполнено условие* (2.18) *и* $\varphi \in H_2$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.15)*,* (2.16) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af^{(1)}(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^2\varphi\|_H\big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и вектора* φ;
2) *если условие* (2.18) *не выполнено и* $\varphi \in H_3$, *то для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.15)*,* (2.16) *однозначно разрешима в пространстве* $W^1_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения справедлива оценка*
$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af^{(1)}(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^3\varphi\|_H\big)$$
с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* q *и вектора* φ.

Отметим, что доказательства теорем 2.1–2.5 опубликованы в статьях [11, 13, 84], а также в главе 3 монографии [12].

2.2. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с дробно-экспоненциальными ядрами. Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:
$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K\,(t-s)A^2u\,(s)\,ds = f\,(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.19}$$
$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2.20}$$
где A — самосопряженный положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный.

Скалярная функция $K\,(t)$ имеет представление
$$K\,(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j R_j\,(t)\,, \tag{2.21}$$
в котором $c_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, функции $R_j\,(t)$ — дробно-экспоненциальные функции Работнова (см. [39, гл. I]), которые имеют следующий вид:
$$R_j(t) = t^{\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.22}$$
где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательность $\{\beta_j\}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 < \beta_j < \beta_{j+1},$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \to +\infty$, $j \to +\infty$. Кроме того, выполнены условия
$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\beta_j} < 1, \tag{2.23}$$
$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \tag{2.24}$$
Преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид $\hat{R}_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha + \beta_j}$ (см. [39, гл. I]). При этом под λ^α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$ с разрезом по отрицательной действительной полуоси $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha \arg\lambda}$, $-\pi < \arg\lambda < \pi$.

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (2.19) при однородных начальных условиях, получаем уравнение $L(\lambda)\hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, где оператор-функция
$$L\,(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \hat{K}(\lambda)A^2 \tag{2.25}$$

является символом этого уравнения, а $\hat{u}(\lambda)$ и $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функций $u(t)$ и $f(t)$, соответственно, а $\hat{K}(\lambda)$ — преобразование Лапласа ядра $K(t)$, имеющие представление $\hat{K}(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j}$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Определение 2.4. Будем называть вектор-функцию *u сильным решением задачи* (2.19), (2.20), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$, удовлетворяет уравнению (2.19) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.20).

Определение 2.5. Будем называть вектор-функцию *u обобщенным решением задачи* (2.19), (2.20), если она принадлежит пространству $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяет начальному условию (2.20) и для некоторого $\gamma \geqslant 0$ удовлетворяет тождеству

$$\Big\langle A\Big[u(t) - \int_0^t K(t-s)u(s)ds\Big], Av(t)\Big\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} - \big\langle u'(t), v'(t)\big\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \\ + 2\gamma\big\langle u'(t), v(t)\big\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \langle f(t), v(t)\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + (\varphi_1, v(0))_H \quad (2.26)$$

при всех $v(t) \in W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t)e^{-2\gamma t} = 0$.

Следующая теорема дает достаточные условия корректной разрешимости задачи (2.19), (2.20).

Теорема 2.6. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.21), (2.22) *с постоянной* α $(0 < \alpha < 1)$, *а также выполняются условия* (2.23), (2.24); *кроме того,* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geqslant \gamma_1$ *задача* (2.19), (2.20) *имеет единственное решение, принадлежащее пространству* $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \big\|A^3\varphi_0\big\|_H + \big\|A^2\varphi_1\big\|_H\big)$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 2.7. *Предположим, что вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.21), (2.22) *с постоянной* α $(0 < \alpha < 1)$, *а также выполняется условие* (2.23); *кроме того,* $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geqslant \gamma_1$ *задача* (2.19), (2.20) *имеет единственное обобщенное решение в пространстве* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \big\|A^2\varphi_0\big\|_H + \|A\varphi_1\|_H\big) \quad (2.27)$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Отметим, что доказательства теорем 2.6, 2.7 приведены в статьях [14, 15].

На полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.28)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(0) = \varphi_1. \quad (2.29)$$

Скалярная функция $K(t)$ допускает представление

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j R_j(t), \quad (2.30)$$

в котором $R_j(t)$ — дробно-экспоненциальные функции, которые имеют вид

$$R_j(t) = \frac{t^{-\alpha}e^{-\beta_j t}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad (2.31)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательности $\{c_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяют следующим условиям: $0 < \beta_j < \beta_{j+1,}$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \to +\infty$, $j \to +\infty$. Кроме того, выполнены условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j{}^\theta} < 1, \quad \theta = 1 - \alpha, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \quad (2.32)$$

Как известно (см. [39]), преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид $\hat{R}_j(\lambda) = \frac{1}{(\lambda+\beta_j)^{1-\alpha}}$. При этом под $(\lambda + \beta_j)^{1-\alpha}$ понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = (\lambda + \beta_j)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda \in \mathbb{C}$ с разрезом по полуоси $(-\infty, -\beta_j)$, т. е. $(\lambda + \beta_j)^{1-\alpha} = |\lambda + \beta_j|^{(1-\alpha)} e^{i(1-\alpha)\arg(\lambda+\beta_j)}$, $-\pi < \arg\lambda < \pi$.

Определение 2.6. Вектор-функцию $u(t)$ назовем *сильным решением задачи* (2.28), (2.29), если для некоторого $\gamma > 0$ она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ и удовлетворяет уравнению (2.28) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$, а также начальному условию (2.29).

В следующей теореме приводится результат о корректной разрешимости задачи (2.28), (2.29).

Теорема 2.8. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.30), (2.31) *с постоянной* α *такой, что* $0 < \alpha \leqslant 1/2$, *а также выполняются условия* (2.32). *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma > \gamma_1$, $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$ *задача* (2.28), (2.29) *однозначно разрешима в пространстве* $W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$ *и для ее решения выполнена оценка*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leqslant d\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H\big) \tag{2.33}$$

с постоянной d, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0 *и* φ_1.

Приведем результат о корректной разрешимости задачи (2.28), (2.29) в пространстве Соболева $W^2_{2,\gamma}\left((0,T), A^2\right)$ на конечном интервале $(0,T)$, $T > 0$, снабженном нормой

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}((0,T),A^2)} \equiv \Big(\int_0^T e^{-2\gamma t}\big(\left\|u^{(2)}(t)\right\|^2_H + \left\|A^2 u(t)\right\|^2_H\big)dt\Big)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Теорема 2.9. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}((0,T), H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (2.30), (2.31) *с постоянной* α *такой, что* $0 < \alpha \leqslant 1/2$, *а также выполняются условия* (2.32); *кроме того,* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geqslant \gamma_1$ *задача* (2.28), (2.29) *имеет единственное решение, принадлежащее пространству* $W^2_{2,\gamma}\left((0,T), A^2\right)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}((0,T),A^2)} \leqslant d(T)\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}((0,T),H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H\big) \tag{2.34}$$

с постоянной $d(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

По теореме о следах (см. [34, гл. I]) из теоремы 2.9 вытекает следствие.

Следствие 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9. *Тогда решение* $u(t)$ *задачи* (2.28), (2.29) *удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{t\in[0,T]}\left\|A^{3/2}u(t)\right\|_H + \sup_{t\in[0,T]}\left\|A^{1/2}u^{(1)}(t)\right\|_H \leqslant d_1(T)\big(\|Af\|_{L_{2,\gamma}((0,T),H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H\big)$$

с постоянной $d_1(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Доказательства теорем 2.8 и 2.9 приведены в статье [85].

Здесь уместно отметить, что разрешимость уравнений типа Гуртина—Пипкина в функциональных пространствах, заданных на конечных конечном интервале $(0,T)$, изучалась Л. Пандолфи в работе [73] (см. там соответствующую библиографию).

Ряд интересных результатов о корректной разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева установлен А. Л. Скубачевским в работах [47, 48].

2.3. Интегродифференциальные уравнения, возникающие в теории вязкоупругости с ядрами, представимыми рядами экспонент и интегралами Стилтьеса. Данный раздел посвящен изучению интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами более общего вида. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [50, 63–66]), а также, в частном случае, как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина (см. [35, 61, 69]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью; кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [22, 23, 45, 46, 82]).

Пусть A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ $(\kappa_0 > 0)$, действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Пусть B — симметрический оператор $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $\mathrm{Dom}\,(B)$ $(\mathrm{Dom}\,(A) \subseteq \mathrm{Dom}\,(B))$, неотрицательный, $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\,(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa \|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$, а I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.35}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2.36}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующие представления: $K(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\gamma_k t}$, $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\gamma_k t}$, где коэффициенты $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\gamma_k} < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\gamma_k} < 1. \tag{2.37}$$

Условие (2.37) означает, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (2.37) добавить также условия

$$K(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty, \quad Q(0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \tag{2.38}$$

то ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Интегродифференциальное уравнение (2.35) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, в котором операторы A и B порождаются дифференциальными выражениями $A = -\rho^{-1}\mu\left(\Delta u + \frac{1}{3}\mathrm{grad}(\mathrm{div} u)\right)$, $B = -\frac{1}{3}\rho^{-1}\lambda \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div} u)$, где $u = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ — постоянная плотность, $\rho > 0$, коэффициенты Ламе λ, μ — положительные постоянные, $K(t)$, $Q(t)$ — функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.39}$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трехмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $\mathrm{Dom}(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (2.39). Условия (2.37) имеет конкретный физический смысл (подробнее см. [26, 39]).

В случае, когда оператор $B = 0$ и самосопряженный положительный оператор A может быть реализован как $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0, \pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (2.35) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина—Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью.

Другой класс приложений — это задачи усреднения в многофазных средах, где одной из фаз является упругая (или вязкоупругая) среда, а другой — вязкая (сжимаемая или несжимаемая) жидкость (подробнее см. [22, 23, 45, 46, 51, 82]). Задача усреднения состоит в том, чтобы построить эффективную (усредненную) модель такой двухфазной среды, когда отдельные включения той или иной фазы быстро чередуются при изменении пространственных переменных. Предварительные исследования показывают, что одномерная модель распространения колебаний в такой усредненной (гомогенизированной) среде в абстрактной форме может быть записана как операторное уравнение, рассматриваемое в данной работе.

Следует также отметить, что уравнения рассматриваемого вида возникают в физических задачах. К уравнениям, близким по форме к рассматриваемым в этой статье, относится ряд уравнений и систем уравнений, возникающих в кинетической теории газов. В этих задачах интегральные слагаемые играют роль вязкости. Такое операторное представление вязкости возникает при выводе уравнений газовой динамики непосредственно из законов взаимодействия молекул.

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (2.35) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{2.40}$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\lambda + \gamma_k)}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\lambda + \gamma_k)}. \tag{2.41}$$

Далее устанавливается корректная разрешимость начальной задачи для уравнения (2.35) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуется вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

Введем обозначения: $a := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $b := \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, $A_0 := A + B$. Согласно известному результату [27, с. 361], оператор A_0 является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} — ограниченные, а оператор A_0^{-1} — компактный.

Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H с нормой $\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|_H^2 + \left\|A_0^{n/2}u(t)\right\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}$, $\gamma \geqslant 0$.

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ см. в монографии [34, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

Определение 2.7. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением задачи* (2.35), (2.36), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ ($A_0 = A + B$), удовлетворяет уравнению (2.35) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.36).

Следующая теорема дает достаточное условие корректной разрешимости задачи (2.35), (2.36).

Теорема 2.10. *Пусть выполнено условие* (2.38), *$f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 \geqslant 0$ и $f(0) = 0$; кроме того, $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. Тогда существует такое $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, что для любого $\gamma > \gamma_1$ задача* (2.35), (2.36) *имеет единственное решение в пространстве $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)} \leqslant d\left(\left\|f'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A_0\varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2}\varphi_1\right\|_H\right), \tag{2.42}$$

где константа d не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.43}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \tag{2.44}$$

$$u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{2.45}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующие представления: $K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau)$, $Q(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\eta(\tau)$, где $d\mu$ и $d\eta$ — положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ и η, соответственно. Интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad \int_0^\infty \frac{d\eta(\tau)}{\tau} < 1. \tag{2.46}$$

Условия (2.46) означают, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (2.46) добавить также условия

$$K(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \operatorname{Var}\mu|_0^\infty < +\infty, \quad Q(0) = \int_0^\infty d\eta(\tau) \equiv \operatorname{Var}\eta|_0^\infty < +\infty, \tag{2.47}$$

причем носители μ и η принадлежат полуоси $(d_0, +\infty)$, $d_0 > 0$, тогда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Преобразование Лапласа сильного решения задачи (2.43), (2.44) с начальными условиями $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$ имеет представление $\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda)\hat{f}(\lambda)$. Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (2.43) и имеет следующий вид:

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{2.48}$$

где $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления $\hat{K}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\lambda+\tau}$, $\hat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\eta(\tau)}{\lambda+\tau}$, $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Определение 2.8. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением задачи* (2.43)–(2.45), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ $(A_0 = A + B)$, удовлетворяет уравнению (2.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2.44).

Определение 2.9. Вектор-функцию $u\,(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ назовем *обобщенным* (*слабым*) *решением задачи* (2.43)–(2.45), если $u\,(t)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$-\left\langle u^{(1)}(t), v^{(1)}(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + \left\langle (A+B)^{1/2}u\,(t), (A+B)^{1/2}v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} + 2\gamma\left\langle u^{(1)}(t), v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\left\langle \int_0^t K\,(t-s)\,(A+B)^{-1/2}Au\,(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} -$$
$$-\left\langle \int_0^t Q\,(t-s)\,(A+B)^{-1/2}Bu\,(s)\,ds, (A+B)^{1/2}v\,(t)\right\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle f\,(t), v\,(t)\rangle_{L_{2,\gamma}} - \langle \varphi_1, v\,(0)\rangle = 0$$

для любой вектор-функции $v\,(t) \in W_{2,\gamma}^1\left(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2}\right)$, а также условию (2.2).

Отметим, что по определению пространства $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$ вектор функции $u^{(1)}(t)$ и $A_0^{1/2}u(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$, поскольку норма в этом пространстве определяется как $\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t}\left(\|u^{(1)}(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2}u(t)\|_H^2\right)dt\right)^{1/2}$, $\gamma \geqslant 0$.

Следующие теоремы дают нам достаточное условие корректной разрешимости задачи (2.43)–(2.45).

Теорема 2.11. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47), $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$ *и* $f(0) = 0$; *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.43)–(2.45) *имеет единственное решение в пространстве* $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству* $\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)} \leqslant d\big(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0\varphi_0\|_H + \|A_0^{1/2}\varphi_1\|_H\big)$, *где константа* d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 2.12. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47), $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$, *а также* $\varphi_0 \in H_{1/2}$, $\varphi_1 \in H$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (2.43)–(2.45) *имеет обобщенное решение в пространстве* $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})$, *для которого справедлива оценка* $\|u\|_{W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A_0^{1/2})} \leqslant d\big(\|f(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H + \|\varphi_1\|_H\big)$, *где константа* d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Доказательства теорем 2.10–2.12 опубликованы в статьях [11, 84], а также в главе 3 монографии [12].

Уместно отметить, что в работах [17, 44] получены результаты о корректной разрешимости и получены оценки классических решений задачи вида (2.43)–(2.45), основанные на применении теории полугрупп к исследованию интегродифференциальных уравнений.

3. Спектральный анализ

3.1. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами, представимыми рядами убывающих экспонент и интегралами Стилтьеса. Рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda) := \lambda^2 I + \lambda\hat{K}(\lambda)A^2$, где $\hat{K}(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k(\lambda+\gamma_k)}$ — преобразование Лапласа функции $K(t)$, I — единичный оператор, действующий в пространстве H. Собственные значения оператора A удовлетворяют строгим неравенствам $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n \ldots$; $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Заметим, что оператор-функция $L(\lambda)$ является символом (аналогом характеристического квазиполинома) уравнения (2.5), в то же время оператор-функция $\lambda^{-1}L(\lambda)$ является символом уравнения (2.1).

Рассмотрим сужение $l_n(\lambda) := (L(\lambda)e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2\lambda\hat{K}(\lambda)$ оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n, где $Ae_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Таким образом, получаем счетный набор мероморфных функций $l_n(\lambda)$, $n \in \mathbb{N}$.

Перейдем к вопросу о структуре спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнено условие

$$\sup_k \{\gamma_k(\gamma_{k+1} - \gamma_k)\} = +\infty. \tag{3.1}$$

Отметим, что условие (3.1) использовалось С. А. Ивановым в работе [65] при изучении нулей мероморфных функций вида $l_n(\lambda)/\lambda$ в случае $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N})$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (3.1). *Тогда нули мероморфной функции* $l_n(\lambda)$ *представляют собой счетную серию действительных нулей* $\{\lambda_{k,n} | k \in \mathbb{N}\}$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\ldots - \gamma_{k+1} < x_{k+1} < \lambda_{k+1,n} < -\gamma_k < \ldots < -\gamma_1 < \lambda_{1,n}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

где x_k — *действительные нули функции* $\lambda\hat{K}(\lambda)$, *причем* $\lambda_{1,n} = x_1 = 0$, $\lambda_{k,n} = x_k + O\Big(\frac{1}{a_n^2}\Big)$, $a_n \to +\infty$, *а также пару комплексно-сопряженных нулей* $\lambda_n^{\pm}$, $\lambda_n^{+} = \overline{\lambda_n^{-}}$, *асимптотически представимых в следующем виде*:

1) *если выполнено условие* (2.7), *то*

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\left(\sqrt{K(0)} \cdot a_n + O\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) - \frac{1}{2K(0)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right), \ a_n \to +\infty; \tag{3.3}$$

2) *если условие* (2.7) *не выполнено, то*

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\Theta(\{c_k\}, \{\gamma_k\})a_n + \Phi(a_n, c_k, \gamma_k), \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

где $\Theta(\{c_k\}, \{\gamma_k\})$ — *некоторая положительная постоянная, зависящая от последовательностей* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\operatorname{Re}\Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = O(a_n)$, $\operatorname{Im}\Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = o(a_n)$ *при* $a_n \to +\infty$, *причем* $\lim\limits_{a_n \to \infty} \operatorname{Re}\Phi(a_n, c_k, \gamma_k) = -\infty$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (3.1). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *совпадает с замыканием объединения множества нулей функций* $\{l_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$, *т. е. представим в виде* $\sigma(L) := \overline{\{\lambda_{k,n} | k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lambda_n^{\pm} | n \in \mathbb{N}\}}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_{k,n} = x_k$, *где* x_k — *действительные нули функции* $\lambda\hat{K}(\lambda)$.

Приведем результат о распределении нулей функции $l_n(\lambda)$ в случае, когда ядро $K(t)$ представимо в виде конечного числа экспонент. Рассмотрим функцию

$$l_{n,N}(\lambda) := \lambda^2 + a_n^2\lambda\hat{K}_N(\lambda), \tag{3.5}$$

где $\hat{K}_N(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\gamma_k(\lambda+\gamma_k)}$. Этот результат представляет интерес, так как в случае выполнения условий (2.4) и (2.7) асимптотика нулей функции $l_n(\lambda)$ получается из асимптотики нулей функции $l_{n,N}(\lambda)$ предельным переходом при $N \to +\infty$.

Лемма 3.1. *Нули мероморфной функции* $l_{n,N}(\lambda)$ *представляют собой серию действительных нулей* $\{\mu_{k,n} | k \in \mathbb{N}\}$ *таких, что* $\ldots - \gamma_k < \mu_{k,n} < y_k < -\gamma_{k-1} < \ldots < -\gamma_1 < \mu_{1,n}$, $k = 2, \ldots, N$, *где*

y_k — *действительные нули функции* $\lambda \hat{K}_N(\lambda)$, *причем* $\mu_{1,n} = y_1 = 0$, $\mu_{k,n} = y_k + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right)$, *а также пару комплексно-сопряженных нулей* $\mu_n^\pm$, $\mu_n^+ = \overline{\mu_n^-}$, *асимптотически представимых в виде*

$$\mu_n^\pm = \pm i \left(\sqrt{K_N(0)} \cdot a_n + O\left(\frac{1}{a_n}\right) \right) - \frac{1}{2K_N(0)} \sum_{k=1}^{N} c_k + O\left(\frac{1}{a_n^2}\right), \ a_n \to +\infty. \tag{3.6}$$

Следующая теорема представляет асимптотику комплексных нулей функции $l_n(\lambda)$ при $a_n \to +\infty$ в случае, когда не выполнено условие (2.7), а последовательности $\{c_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ имеют асимптотические представления $c_k = \frac{\mathcal{A}}{k^\alpha} + O\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}}\right)$, $\gamma_k = \mathcal{B}k^\beta + O\left(k^{\beta-1}\right)$, при $k \to +\infty$, где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, константы $\mathcal{A} > 0$, $\mathcal{B} > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha + \beta > 1$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* (2.4) *и* (3.1). *Тогда комплексно-сопряженные нули* $\lambda_n^\pm$, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$ *функции* $l_n(\lambda)$ *асимптотически представимы в виде*

$$\lambda_n^\pm = \pm i\sqrt{K(0)} \cdot a_n - \frac{D\mathcal{A}}{\beta \mathcal{B}^{1-r}(\sqrt{K(0)})^{1+r}} a_n^{1-r} + O(a_n^{1-2r}), \qquad \text{если } 0 < r < \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

$$\lambda_n^\pm = \pm i\sqrt{K(0)} \cdot a_n - \frac{D\mathcal{A}}{\beta \mathcal{B}^{1-r}(\sqrt{K(0)})^{1+r}} a_n^{1-r} + O(1), \qquad \text{если } \frac{1}{2} \leqslant r < 1, \tag{3.8}$$

$$\lambda_n^\pm = \pm i\sqrt{K(0)} \cdot a_n - \frac{1}{2K(0)} \frac{\mathcal{A}}{\beta} \ln a_n + O\left(1\right), \qquad \text{если } \ r = 1, \tag{3.9}$$

при $n \to +\infty$, *где* $r := \frac{\alpha+\beta-1}{\beta}$, *константа* D *зависит от* r *и определяется следующим образом*: $D := \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin(\pi r)} e^{-i(r+1)\frac{\pi}{2}}$.

Замечание 3.1. В случае $c_k = \frac{1}{k^\alpha}$, $\gamma_k = k^\beta$, $a_n = n$ асимптотика комплексных нулей $\lambda_n^\pm$ получена С. А. Ивановым [63].

Доказательства теорем 3.1–3.3 и леммы 3.1 приведены в главе 3 монографии [12], а также в статье [7].

Исследованием задач для дифференциальных и интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами (со слагаемым, соответствующим мгновенному трению Кельвина—Фойгта) занимались многие авторы. Ограничимся здесь упоминанием работы [36], в которой исследовались указанные задачи (без интегральных слагаемых) для абстрактных дифференциальных уравнений, и работы [38], в которой рассмотрены интегродифференциальные уравнения.

Замечание 3.2. Для меры $d\mu$ с компактным носителем и ядра вида $\mathcal{K}(t) = \int_{d_0}^{d_1} \frac{e^{-t\tau}}{\tau} d\mu(\tau)$, $0 < d_0 < d_1 < +\infty$ показано А.И. Еременко и С.А. Ивановым, что спектр оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ может содержать лишь конечное число комплексных собственных значений. При этом возможна ситуация, когда комплексная часть спектра отсутствует (см. [60]). Кроме того, в работе [60] авторы поставили вопрос о структуре невещественного спектра в случае некомпактного носителя меры. В работе [53] А.В. Давыдов и Ю.А. Тихонов дали полный ответ на поставленный вопрос и привели соответствующие примеры.

В следующей лемме приведена оценка оператор-функции $\mathcal{L}^{-1}(\lambda)$ в области $\Omega_{\alpha,R}$, не содержащей спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$.

Лемма 3.2. *Для любых* $\alpha > 0$ *и* $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *найдется такое* $R = R(\alpha, \theta) > 0$, *что в области* $\Omega_{\alpha,R} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > R\} \cap \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda - \pi| > \theta\}$ *справедлива оценка*

$$|\lambda| \ \left\| A^2 \mathcal{L}^{-1}(\lambda) \right\| + |\lambda|^2 \left\| \mathcal{L}^{-1}(\lambda) \right\| \leqslant \text{const}\,. \tag{3.10}$$

Следствие 3.1. *Из оценки* (3.10) *вытекает оценка для оператор-функции* $\mathcal{M}(\lambda) = \lambda^{-1}\mathcal{L}(\lambda)$, *являющейся символом уравнения* (2.8):

$$\left\| A^2 \mathcal{M}^{-1}(\lambda) \right\| + |\lambda| \left\| \mathcal{M}^{-1}(\lambda) \right\| \leqslant \text{const}, \quad \lambda \in \Omega_{\alpha,R}. \tag{3.11}$$

Отметим, что оценка вида (3.11) известна для функционально-дифференциального уравнения параболического типа (см. [4, гл. 1] и соответствующую библиографию).

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия* (2.17), (2.18) *и мера $d\mu$ имеет компактный носитель. Тогда для достаточно больших a_n невещественные собственные значения $\lambda_n^{\pm}$ ($\lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+}$) оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ имеют следующую асимптотику*:

$$\lambda_n^{\pm} = \pm i\sqrt{\mathcal{K}(0)}a_n + \frac{\mathcal{K}'(0)}{2\mathcal{K}(0)} + O\Big(\frac{1}{a_n}\Big),\ a_n \to +\infty. \tag{3.12}$$

Приведем результат о локализации спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ в случае, когда мера $d\mu$ имеет компактный носитель.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4 *и мера $d\mu$ имеет компактный носитель, принадлежащий отрезку $[d_1, d_2]$, $0 < d_1 < d_2$. Тогда найдется такое число y_0, $0 < y_0 < d_1$, что спектр оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ представим в виде $\sigma(\mathcal{L}) := \sigma_R \cup \sigma_I$, где σ_R и σ_I — вещественная и невещественная части спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, соответственно, причем $\sigma_R \subset [-d_2, -d_1 + y_0]$, $\sigma_I = \overline{\Big\{\lambda_n^{\pm} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \lambda_n^- = \overline{\lambda_n^+} | n \in \mathbb{N}\Big\}}$, где $\lambda_n^{\pm}$ — невещественные собственные значения оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, имеющие асимптотическое представление* (3.12).

Доказательства теорем 3.5–3.5 приведены в статье [10].

3.2. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами Работнова. Обозначим через a_j собственные значения оператора A ($Ae_j = a_j e_j$), занумерованные в порядке возрастания: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, a_n \to +\infty$ ($n \to +\infty$). Соответствующие собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства H. Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ (см. (2.25)) на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$l_n(\lambda) = (L(\lambda) e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n^2\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda^{\alpha} + \beta_k}\right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (2.23), (2.24).

Теорема 3.6. *Пусть выполнено условие* (2.23). *Тогда спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в открытой левой полуплоскости.*

Замечание 3.3. Если выполнено условие $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j} > 1$, то в правой полуплоскости имеется бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$. Таким образом, условие (2.23) является необходимым условием устойчивости задачи (2.19), (2.20).

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия* (2.23) *и $c_j = 0$ для всех j, больших некоторого $N \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$ существует два невещественных комплексно-сопряженных нуля ${\lambda_n}^+ = \bar{\lambda}_n^-$ функции $l_n(\lambda)$, имеющих следующую асимптотику*:

$$\lambda_n^{\pm} = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{1-\alpha}\frac{Q}{2} \pm i a_n\Big(1 - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) a_n^{-\alpha}\frac{Q}{2}\Big) + o\left(a_n^{1-\alpha}\right), \quad n \to +\infty, \tag{3.13}$$

где $Q = \sum\limits_{j=1}^{N} c_j$.

Здесь уместно сделать важное замечание.

Замечание 3.4. При $\alpha = 1$ асимптотическая формула (3.13) переходит в асимптотическую формулу (3.3) при $K(0) = 1$.

Доказательства теорем 3.6–3.7 приведены в статьях [14, 15].

3.3. Интегродифференциальные уравнения, возникающие в теории вязкоупругости с ядрами, представимыми рядами экспонент и интегралами Стилтьеса. Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (2.37), (2.38), а также условие

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k^2(\gamma_{k+1} - \gamma_k) = +\infty. \tag{3.14}$$

Существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} = 0. \tag{3.15}$$

Замечание 3.5. Условие (3.15) выполняется в случае степенного поведения последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. когда $\gamma_k \simeq k^{\alpha}$, $\alpha > 0$. В этом случае $\frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} \sim \frac{\alpha}{k} \to 0$ $(k \to \infty)$. В задачах усреднения в многофазных средах последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются последовательностями собственных значений некоторых вспомогательных эллиптических задач и поэтому имеют степенную асимптотику (подробнее см. [22, 23, 82]). В свою очередь, условие (3.15) не выполняется, если последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем больше единицы, т. е. $\gamma_k = cq^k$, $q > 1$, $c > 0$. Подобное поведение членов последовательности γ_k реже встречается в приложениях.

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия* (2.37), (2.38), (3.14), (3.15). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ (2.40) *принадлежит объединению интервалов* $\Delta_k = (-\gamma_k, \tilde{p}_k) \subset (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ $(\gamma_0 = 0)$ *и полосы* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\}$, *где* $\tilde{p}_k = \max\{p_k(\tau'), p_k(\tau'')\}$, $p_k(\tau)$ — *вещественные корни уравнения*

$$\Phi_\tau(p) := \tau \sum_{k=1}^{\infty} a_k (p+\gamma_k)^{-1} + (1-\tau) \sum_{k=1}^{\infty} b_k (p+\gamma_k)^{-1} = 1 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1),$$

принадлежащие интервалам $(-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ $(\gamma_0 = 0)$, $\tau' := \left\|A^{-1/2} A_0 A^{-1/2}\right\|^{-1}$, $\tau'' := \left\|A_0^{-1/2} A A_0^{-1/2}\right\|$, $0 < \tau' < \tau'' \leqslant 1$,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((a_k A + b_k B)f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((a_k A + b_k B)f, f)}{\left((A + B + \gamma_k^2 I)f, f\right)}, \quad f \in D(A).$$

Замечание 3.6. Согласно лемме 2.1 из работы [49], оператор $A^{-1/2} B A^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2} A_0 A^{-1/2} = I + A^{-1/2} B A^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой леммы 2.1 из работы [49] и в силу самосопряженности оператора $A_0 = A + B$, оператор $A_0^{-1/2} A A_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Таким образом, величины τ' и τ'', фигурирующие в формулировке теоремы 3.8, определены корректно.

Теорема 3.9. *Невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметричен относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \mathbb{C} \backslash \{\lambda : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2, |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ *собственные значения являются изолированными, т. е. не имеют точек накопления.*

Отметим, что оператор-функция вида (2.40) в случае конечного числа слагаемых в представлении (2.41) ($a_k = b_k = 0$, $k > N$, $N \in \mathbb{N}$) изучалась в [37]. Теоремы 3.8, 3.9 представляют собой естественное развитие результатов работы [37].

Доказательства теорем 3.8–3.9 приведены в статье [11].

Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ (см. (2.48)) в случае, когда выполнены условия (2.46), (2.47).

Теорема 3.10. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *лежит в открытой левой полуплоскости* $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0\}$ *и справедливо неравенство* $\left\|A^{1/2} L^{-1}(\lambda) A^{1/2}\right\| \leqslant \mathrm{const}$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma > 0$.

Условия (2.46) являются существенными для устойчивости задачи (2.43)–(2.45).

Замечание 3.7. При нарушении условия (2.46), т. е. при выполнении неравенства

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} > 1, \tag{3.16}$$

в правой полуплоскости может оказаться бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$.

Поясним это замечание, рассмотрев следующий частный случай: функция $\eta(\tau) = 0$, оператор $B = 0$, а функция $\mu(\tau)$ — ступенчатая функция, имеющая представление $\mu(\tau) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} c_j \chi[\gamma_j, \gamma_{j+1})$, где $\chi[\gamma_j, \gamma_{j+1})$ — характеристические функции полуинтервалов $[\gamma_j, \gamma_{j+1})$, $0 < \gamma_j < \gamma_{j+1}$, $\gamma_j \to +\infty$

$(j \to +\infty)$. В этом случае условие (3.16) примет вид $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} > 1$. При этом оператор-функция $L(\lambda)$ будет иметь вид $L(\lambda) = \lambda^2 I + A - \widehat{K}(\lambda)$, где $\widehat{K}(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda+\gamma_j}$. В силу сделанных предположений относительно оператора A, собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям a_j $(Ae_j = a_j e_j)$, образуют ортонормированный базис пространства H. При этом $a_j \to +\infty$ $(j \to +\infty)$.

Рассмотрим скалярные функции $l_n(\lambda) = (L(\lambda) e_n, e_n) = \lambda^2 + a_n - a_n \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda+\gamma_j}$, являющиеся сужениями оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерные подпространства, натянутые на собственные векторы e_n. Тогда уравнение $l_n(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, может быть записано в виде $\varphi_n(x) = \psi(x)$, где $\varphi_n(x) = \frac{x^2}{a_n} + 1$, $\psi(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{x+\gamma_j}$. Заметим, что функция $\psi(x)$ на полуоси $[0, +\infty)$ является монотонно убывающей и достигающей своего максимума на полуоси $[0, +\infty)$ при $x = 0$, равного $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} > 1$. Поэтому график функции $\psi(x)$ пересекается с графиками парабол $\varphi_n(x)$ при положительных значениях x_n, являющихся собственными значениями оператор-функции $L(\lambda)$. При этом с ростом n нули x_n будут стремиться к точке x^*, являющейся решением уравнения $\psi(x) = 1$ при положительных x, поскольку $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

В случае $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} = 1$ точка $\lambda = 0$ является собственным значением оператор-функции $L(\lambda)$ бесконечной кратности.

Теорема 3.11. *Пусть выполнены условия* (2.46), (2.47) *и носители мер* $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ *принадлежат отрезку* $[d_1, d_2]$, *где* $0 < d_1 < d_2 < +\infty$. *Тогда для любого сколь угодно малого* $\theta_0 > 0$ *существует такое число* $R_0 > 0$, *что спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит множеству* $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda < 0, |\lambda| < R_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\}$, *где* $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$, $R_0 \geqslant \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{\left((A + B + d_2^2 I)f, f\right)}, \quad f \in D(A).$$

При этом существует такое $\gamma_0 > 0$, *что для оператор-функции* $L^{-1}(\lambda)$ *на множестве* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$ *справедлива оценка* $\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}$.

Утверждение 3.1. *Величина* α_0 *допускает оценку* $\alpha_0 \geqslant -\frac{1}{2}\left\|A_0^{-1/2}(K(0)A + Q(0)B)A_0^{-1/2}\right\|$.

Теорема 3.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.11. *Тогда невещественная часть спектра оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметрична относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \Omega \backslash \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ *собственные значения являются изолированными, т. е. не имеют точек накопления.*

Доказательства теорем 3.11 и 3.12 приведены в статье [84].

Отметим также, что оператор-функция вида (2.25) в случае, когда ядра интегральных операторов являются суммами дробно-экспоненциальных функций (функций Работнова) с положительными коэффициентами, изучалась в [12, 13].

Обозначим через $N(\mu; L(\lambda))$ кратность характеристического числа $\lambda = \mu$ оператор-функции $L(\lambda)$. Введем $\nu(r; \Omega; L(\lambda))$ — функцию распределения характеристических чисел оператор-функции $L(\lambda)$. Предполагая $L(\lambda)$ аналитической оператор-функцией в области Ω, положим $\nu(r; \Omega; L(\lambda)) = \sum\limits_{\mu \in \Omega, |\mu| < r} N(\mu; L(\lambda))$. Причем, если в области $\Omega \cap \{\lambda : |\lambda| < r\}$ лежит бесконечное число характеристических чисел $L(\lambda)$ либо $N(\mu; L(\lambda)) = \infty$ хотя бы в одной точке $\mu \in \Omega$ с $|\mu| < r$, то $\nu(r; \Omega; L(\lambda)) = \infty$. Обозначим область $\Psi_{\theta,\eta} = \{\lambda : |\lambda| > \eta, |\arg\lambda| < \theta\}$, $\pi/2 < \theta < \pi$, причем здесь $-\pi < \arg\lambda \leqslant \pi$. В дальнейшем соотношение $\nu_1(t) \sim \nu_2(t)$ означает, что $\frac{\nu_1(t)}{\nu_2(t)} \to 1$ при $t \to \infty$.

Следуя [40], через Re обозначим множество таких неубывающих функций $\nu(r)$, определенных при достаточно больших вещественных r, что для каждой функции $\nu(r) \in \mathrm{Re}$ существует постоянная $a > 1$, для которой $\nu(ar) \geqslant 2\nu(r)$ при достаточно больших r. Пусть Im — множество неубывающих функций $\nu(r)$, обладающих свойством: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $\nu(r + \delta r) \leqslant (1 + \varepsilon)\nu(r)$.

Обозначим через $P(\lambda)$ оператор-функцию вида $P(\lambda) = \lambda^2 I + A + B$. Используя [40, теорема 2.1] и теорему 3.11, получаем следующий результат.

Теорема 3.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.11, $\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \in \mathrm{Re} \cap \mathrm{Im}$. *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *в области* $\Psi_{\theta,\eta}$ *состоит из дискретных точек спектра и справедливо соотношение* $\nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; P(\lambda)) \sim \nu(r; \Psi_{\theta,\eta}; L(\lambda))$.

Обозначим через $N(r, A_0^{1/2})$ число собственных чисел оператора $A_0^{1/2}$ (посчитанных с учетом кратности), меньших, чем r.

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.13. *Тогда* $\nu(r, \Psi_{\theta,\eta}, L(\lambda)) \sim 2N(r, A_0^{1/2})$.

Утверждение следствия немедленно вытекает из теоремы 3.13 и соотношения $P(\lambda) = \lambda^2 I + A_0 = (\lambda I - iA_0^{1/2})(\lambda I + iA_0^{1/2})$.

Доказательство теоремы 3.13 приведено в недавней статье [18].

4. Представление решений

4.1. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами, представимыми рядами убывающих экспонент и интегралами Стилтьеса. Далее приводятся результаты о представлении решения задачи (2.5), (2.6) в виде суммы ряда по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$.

Теорема 4.1. *Пусть* $f(t) = 0$ *при* $t \in \mathbb{R}_+$, *вектор-функция* $u(t) \in W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$, $\gamma > 0$ *является сильным решением задачи* (2.5), (2.6) *и выполнены условия* (2.4), (3.1). *Тогда для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (2.5), (2.6) *представимо в виде суммы ряда*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^+ \varphi_{0n})\, e^{\lambda_n^+ t} e_n}{l_n'(\lambda_n^+)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_n^- \varphi_{0n})\, e^{\lambda_n^- t} e_n}{l_n'(\lambda_n^-)} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi_{1n} + \lambda_{k,n}\varphi_{0n})\, e^{\lambda_{k,n} t}}{l_n'(\lambda_{k,n})} \right) e_n, \quad (4.1)$$

сходящегося по норме пространства H, *где* $\lambda_{k,n}$ — *действительные нули мероморфной функции* $l_n(\lambda)$, *удовлетворяющие неравенствам* (3.2), $\lambda_n^{\pm}$ — *пара комплексно-сопряженных нулей*, $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$, *асимптотически представимых в виде* (3.3), *если выполнено условие* (2.7), *или в виде* (3.4), *если условие* (2.7) *не выполнено.*

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 *и* $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$. *Тогда ряд, полученный из* (4.1) p*-кратным почленным дифференцированием по* t *при* $p = 0, 1, 2$, *сходится в пространстве* H_{2-p} *равномерно по* t *на любом отрезке* $[t_0, T]$, *где* $0 < t_0 < T < +\infty$. *При этом для всех* $t \in [t_0, T]$ *справедливы оценки* $\left\| \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(t) e_n \right\|_{H_{2-p}}^2 \leqslant d(\|A\varphi_1\|^2 + \|A^2\varphi_0\|^2)$, $p = 0, 1, 2$, *с константой* d, *не зависящей от вектор-функций* φ_1 *и* φ_0.

Кроме того, в случае конечного числа слагаемых в (2.3) (*т. е.* $c_j = 0$ *для* $j > N$, $N \in \mathbb{N}$), *можно положить* $t_0 = 0$.

Теорема 4.3. *Пусть вектор-функция* $f(t) \in C([0, T], H)$ *для любого* $T > 0$, *вектор-функция* $u(t) \in W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ *при некотором* $\gamma > 0$ *является сильным решением задачи* (2.5), (2.6) *и выполнены условия* (2.4), (3.1), $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. *Тогда для любого* $t \in \mathbb{R}_+$ *решение* $u(t)$ *задачи* (2.5), (2.6) *представимо в виде суммы ряда*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_n^+) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_n^-) e_n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \omega_n(t, \lambda_{kn}) \right) e_n, \quad (4.2)$$

сходящегося по норме пространства H, *где* $\omega_n(t, \lambda) = \frac{\int_0^t f_n(\tau) e^{\lambda(t-\tau)} d\tau}{l_n'(\lambda)}$.

Теорема 4.4. *Пусть вектор-функция* $f(t) \in W^2_{2,\gamma^*}(\mathbb{R}_+, A)$ *при некотором* $\gamma^* \geqslant 0$, *вектор-функция* $u(t) \in W^2_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, A^2\right)$, $\gamma > \gamma^*$ *является сильным решением задачи* (2.5), (2.6) *и выполнены условия* (2.4), (3.1), $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{-3/2} < \infty$. *Тогда ряд, полученный из* (4.2) *p-кратным почленным дифференцированием по t при* $p = 0, 1, 2$, *сходится в пространстве* H_{2-p} *равномерно по t на любом отрезке* $[t_0, T]$, *где* $t_0 < T < +\infty$ ($t_0 = 0$ *при* $p = 1, 2$ *и* $t_0 > 0$ *при* $p = 0$), *причем* $\omega_n^{(p)}(t,\lambda) = l_n'(\lambda)^{-1}\left[\left((p-1)f_n'(0) + \lambda^{(p-1)}f_n(0)\right)e^{\lambda t} + \int_0^t f_n^{(p)}(\tau)e^{\lambda(t-\tau)}d\tau\right]$ *и для всех* $t \in [t_0, T]$ *справедливы следующие оценки*:

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)e_n\right\|^2_{H_2} \leqslant d\left\|A^2 f(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+,H)},$$

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(p)}(t)e_n\right\|^2_{H_{2-p}} \leqslant d\left(\left\|A^{2-p}f^{(p)}(t)\right\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+,H)} + \left\|A^{2-p}f(0)\right\|^2_H + (p-1)\left\|f'(0)\right\|^2_H\right), \quad p = 1, 2.$$

На основе теоремы 3.5 о структуре спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$ получим представление решения задачи (2.15), (2.16). Отметим, что в случае, когда ядро $\mathcal{K}(t)$ представимо в виде суммы ряда убывающих экспонент с положительными коэффициентами, результаты о представлении решений получены в работах [9, 43, 83] и подытожены в третьей главе монографии [12].

На комплексной плоскости рассмотрим контур $\Gamma = C_1 \cup \Gamma^+ \cup C_2 \cup \Gamma^-$, где

$$C_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -d_1 + y_0 e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \Gamma^+ = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid -d_2 \leqslant x \leqslant -d_1,\, y = y_0,\, y_0 > 0\},$$
$$C_2 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -d_2 + y_0 e^{i\varphi}, \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{3\pi}{2}\right\}, \quad \Gamma^- = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid -d_2 \leqslant x \leqslant -d_1,\, y = -y_0,\, y_0 > 0\},$$

обходимый по часовой стрелке.

Теорема 4.5. *Пусть в уравнении* (2.15) $f(t) \equiv 0$ *и выполнены условия теоремы* 3.5. *Тогда сильное решение задачи* (2.15), (2.16) *представимо в виде*

$$u(t) = u_I(t) + u_R(t), \tag{4.3}$$

где $u_I(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left[\frac{\exp(\lambda_n^+ t)}{l_n^{(1)}(\lambda_n^+)}\right]\varphi_n e_n$, $u_R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mathcal{L}^{-1}(\lambda)\varphi e^{\lambda t}d\lambda$, λ_n^+ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$, *имеющие асимптотическое представление* (3.12).

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5. *Тогда существует такое* $y_0 > 0$, $0 < y_0 < d_1$, *что для вектор-функций* $u_I(t)$ *и* $u_R(t)$ *справедливы оценки* $\|u_I(t)\|_H \leqslant C_1 e^{\varkappa t}\|\varphi\|_H$, $\|u_R(t)\|_H \leqslant C_2\eta(t)\left\|A^{-2}\varphi\right\|_H$, *где* $\varkappa = \sup\limits_{n\in N}\operatorname{Re}\lambda_n^+$, $C_j > 0$ — *некоторые положительные константы,* $j = 1, 2$,

$$\eta(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2r_0^2(y_0)}{{y_0}^2}\xi^2(t) + 2\pi^2\mu^2(y_0)\left(e^{-2(d_1-y_0)t} + e^{-2(d_2-y_0)t}\right)\right]^{1/2},$$

$$\xi(t) = \frac{e^{d_2 t} - e^{d_1 t}}{t}, \quad r_0(y_0) = \left(\int_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau(\tau^2 + y_0^2)}\right)^{-1}, \quad \mu(y_0) = \left(\int_{d_1}^{d_2}\frac{d\mu(\tau)}{\tau\left((d_2 - d_1 + y_0)^2 + y_0^2\right)}\right)^{-1}.$$

Теорема 4.7. *Пусть в задаче* (2.15), (2.16) $\varphi = 0$ *и выполнены условия теорем* 2.5 *и* 3.5. *Тогда сильное решение задачи* (2.15), (2.16) *представимо в виде*

$$u(t) = w_I(t) + w_R(t), \tag{4.4}$$

где

$$w_I(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t\left[\frac{\exp(\lambda_n^+(t-\tau))}{l_n^{(1)}(\lambda_n^+)} + \frac{\exp(\lambda_n^-(t-\tau))}{l_n^{(1)}(\lambda_n^-)}\right]f_n(\tau)d\tau\right)e_n,$$
$$w_R(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t\left(\int_\Gamma \mathcal{L}^{-1}(\lambda)e^{\lambda(t-\tau)}d\lambda\right)f(\tau)d\tau,$$

$\lambda_n^\pm$ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $\mathcal{L}(\lambda)$, *имеющие асимптотическое представление* (3.12).

Отметим, что в представлении решений (4.3), (4.4) ряды $u_I(t)$, $w_I(t)$, соответствующие невещественной части спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, по своей структуре и характеру поведения близки к представлению в виде ряда Фурье решения волнового уравнения и в этом смысле имеют волновой характер поведения. В свою очередь, члены $u_R(t)$, $w_R(t)$, соответствующие вещественной части спектра оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, в указанном смысле близки к решению уравнения теплопроводности. Уместно отметить, что функция $u_R(t)$ является бесконечно дифференцируемой. Таким образом, решения задачи (2.15), (2.16) по своим свойствам занимают промежуточное положение между решениями волнового уравнения и уравнения теплопроводности.

Отметим, что доказательства теорем 4.5–4.7 приведены в статье [10].

4.2. Интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина с ядрами Работнова. Сформулируем результат о представлении сильного решения задачи (2.19)–(2.20). Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{K}_n(\tau)=\frac{a_n^2\big(\hat{K}_-(-\tau)-\hat{K}_+(-\tau)\big)}{\big(\tau^2+a_n^2\big(1-\hat{K}_+(-\tau)\big)\big)\big(\tau^2+a_n^2\big(1-\hat{K}_-(-\tau)\big)\big)},\quad \hat{K}_\pm(-\tau)=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{\tau^\alpha e^{\pm i\pi\alpha}+\beta_k}.$$

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2, $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $f(t)\equiv 0$. *Тогда сильное решение задачи* (2.19)–(2.20) *представимо в виде* $u(t)=u_I(t)+u_R(t)$, $t>0$, *где вектор-функция* $u_I(t)$ *представима в виде*

$$u_I(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(\omega_n(t,\lambda_n^+)+\omega_n(t,\lambda_n^-)\big)e_n,\quad \omega_n(t,\lambda)=\frac{(\varphi_{1n}+\lambda\varphi_{0n})e^{\lambda t}}{l_n^{(1)}(\lambda)},\tag{4.5}$$

а вектор-функция $u_R(t)$ *представима в виде*

$$u_R(t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{Rn}(t)e_n,\quad u_{Rn}(t)=\int_0^\infty e^{-t\tau}\mathcal{K}_n(\tau)\left(-\tau\varphi_{0n}+\varphi_{1n}\right)d\tau,\tag{4.6}$$

при этом ряды (4.5), (4.6) *сходятся по норме пространства* H, *а* $\lambda_n^\pm$ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $L(\lambda)$, $\varphi_{kn}=(\varphi_k,e_n)$, $n\in\mathbb{N}$, $k=1,2$.

В нижеследующих теоремах 4.8 и 4.9 приведены оценки вектор-функций $u_I(t)$ и $u_R(t)$. Отметим, что компонента $u_I(t)$ соответствует невещественным собственным значениям $\lambda_n^\pm$ и отвечает за волновой характер поведения решений. Компонента $u_R(t)$ отвечает за поведение оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на разрезе отрицательной полуоси.

Обозначим через P_n ортопроектор на подпространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$, а через Q_n ортопроектор на подпространство, ортогональное подпространству P_nH, т. е. $Q_n=I-P_n$, а пространство H представимо в виде ортогональной суммы $H=P_nH\oplus Q_nH$. Приведем результаты об оценке проекций вектор-функции $u_I(t)$ на подпространства Q_nH и P_nH.

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.8. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существуют такое натуральное число* n_0, *что для вектор-функции* $u_I(t)$, *определенной соотношением* (4.5), *выполнены оценки*

$$\|Q_{n_0}u_I(t)\|\leqslant\theta_1\big\|Q_{n_0}e^{-kA^{1-\alpha}t}\varphi_0\big\|+\theta_2\big\|Q_{n_0}e^{-kA^{1-\alpha}t}A^{-1}\varphi_1\big\|,\quad t>0,\tag{4.7}$$

$$0<k=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}c_j-\varepsilon,$$

$$\|P_{n_0}u_I(t)\|\leqslant\theta_3e^{-\delta t}\left\{\|P_{n_0}\varphi_0\|+\big\|P_{n_0}A^{-1}\varphi_1\big\|\right\},\quad t>0,\tag{4.8}$$

с некоторыми положительными постоянными δ, θ_1, θ_2, θ_3, *не зависящими от векторов* φ_0, φ_1.

Следствие 4.1. *Пусть вектор-функция* $u_I(t)$ *определена соотношением* (4.5), *где* $\lambda_n^\pm$ *для каждого достаточно большого* $n\in\mathbb{N}$ *имеют асимптотику* (3.13), *векторы* $\varphi_0\in H_p$, $\varphi_1\in H_{p-1}$, $p\in\mathbb{N}$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое число* $n_0\in\mathbb{N}$, *что выполнены следующие оценки*

$$\|A^pQ_{n_0}u_I(t)\|\leqslant\theta_4\big\|Q_{n_0}e^{-kA^{1-\alpha}t}A^p\varphi_0\big\|+\theta_5\big\|Q_{n_0}e^{-kA^{1-\alpha}t}A^{p-1}\varphi_1\big\|,\quad t>0,\tag{4.9}$$

$$0<k=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}c_j-\varepsilon,$$

$$\|A^p P_{n_0} u_I(t)\| \leqslant \theta_6 e^{-\delta t}\left\{\|P_{n_0}A^p\varphi_0\| + \left\|P_{n_0}A^{p-1}\varphi_1\right\|\right\}, \quad t>0, \tag{4.10}$$

с некоторыми положительными постоянными δ, θ_4, θ_5, θ_6, *не зависящими от векторов* φ_0, φ_1.

Заметим, что в формулировке следствия 4.1 не предполагается, что вектор-функция u является решением задачи (2.19)–(2.20), т. е. разложение (4.5) носит абстрактный характер. Тем не менее, при выполнении условий теоремы 4.8 оценки (4.9), (4.10) можно применить к решению задачи (2.19)–(2.20), причем случаю сильного решения соответствует $p=3$, а случаю обобщенного решения соответствует $p=2$.

Кроме того, в случае реализации оператора A как самосопряженного дифференциального оператора в частных производных по пространственным переменным, оценки (4.9), (4.10) можно рассматривать как оценки компоненты u_I решения u соответствующей начально-краевой задачи для интегродифференциального уравнения в частных производных, отвечающей за волновой характер поведения.

Оценки (4.7), (4.8) показывают, что компонента решения $u_I(t)$, отвечающая невещественной части спектра, экспоненциально убывает.

Теорема 4.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.8. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *вектор-функция* $u_R(t)$, *определяемая соотношением* (4.6)*, допускает оценку*

$$\|u_R(t)\|^2 \leqslant e^{-2\varepsilon t}\left\{k_1\left\|A^{-\alpha}\varphi_0\right\|^2 + k_2\left\|A^{-1-\alpha}\varphi_1\right\|^2\right\} + k_3\left\{\varepsilon^{2(2+\alpha)}\left\|A^{-2}\varphi_0\right\|^2 + \varepsilon^{2(1+\alpha)}\left\|A^{-2}\varphi_1\right\|^2\right\},$$

$t>0$, *с постоянными* k_1, k_2, k_3, *не зависящими от векторов* φ_0, φ_1.

Отметим, что доказательства теорем 4.8–4.10 приведены в статье [16].

5. Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегродифференциальными уравнениями, и их свойства

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0>0$), действующий в пространстве H, имеющий ограниченный обратный. Путь B — симметрический оператор, $(Bx,y)=(x,By)$, действующий в пространстве H с областью определения $\mathrm{Dom}\,(B)$ $(\mathrm{Dom}\,(A)\subseteq \mathrm{Dom}\,(B))$, неотрицательный: $(Bx,x)\geqslant 0$ для любых $x,y\in \mathrm{Dom}\,(B)$, и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\|\leqslant \kappa\,\|Ax\|$, $0<\kappa<1$ для любого $x\in\mathrm{Dom}\,(A)$, а I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+=(0,\infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + (A+B)\,u(t) - \sum_{k=1}^{m}\int_0^t R_k(t-s)\,(a_kA+b_kB)\,u(s)ds = f(t), \quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{5.1}$$

$$u(+0)=\varphi_0, \quad u^{(1)}(+0)=\varphi_1. \tag{5.2}$$

Предположим, что функции $R_k:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} R_k(t) - \text{положительные невозрастающие функции,} \\ R_k(t)\in L_1(\mathbb{R}_+),\ \lim_{t\to+\infty} R_k(t)=0,\ k=1,\ldots,m. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Кроме того, будем предполагать, что выполнены следующие условия: $\sum\limits_{k=1}^{m}\left(a_k\int_0^{+\infty}R_k(s)ds\right)<1$, $\sum\limits_{k=1}^{m}\left(b_k\int_0^{+\infty}R_k(s)ds\right)<1$. Положим $M_k(t)=\int_t^{+\infty}R_k(s)ds=\int_0^{+\infty}R_k(t+s)ds$, $k=1,\ldots,m$. Пусть

$$A_0=\left(1-\sum_{k=1}^{m}\left(a_k\int_0^{+\infty}R_k(s)ds\right)\right)A + \left(1-\sum_{k=1}^{m}\left(b_k\int_0^{+\infty}R_k(s)ds\right)\right)B, \quad A_k=a_kA+b_kB.$$

Из известного результата (см. [27, с. 361]) вытекает, что операторы A_0, A_k являются самосопряженными и положительными для всех $k=1,\ldots,m$.

Отметим, что задачи вида (5.1), (5.2) являются операторными моделями задач, возникающих в теории вязкоупругости (см. [50, 63–66]) и теплофизике (см. [35, 61, 69]). Спектральный анализ уравнения (5.1) в случае, когда ядра $R_k(t)$ представляют собой убывающие экспоненты или функции Работнова (см. [39]), проводился в работах [4–21, 82–85].

Представленные в данной работе результаты являются продолжением и развитием исследований, опубликованных в работах [4–21].

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ норму, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 5.1. Из свойств операторов A и B, согласно [27–52, 54–67], следует, что операторы A_0, A_k являются обратимыми для всех $k = 1, \dots, m$, операторы $Q_k := A_k^{1/2} A_0^{-1/2}$ — допускают ограниченное замыкание в H для всех $k = 1, \dots, m$, а A_0^{-1} — ограниченный оператор.

Определение 5.1. Будем называть вектор-функцию $u(t)$ *классическим решением задачи* (5.1), (5.2), если $u(t) \in C^2(\mathbb{R}_+, H)$, $Au(t)$, $Bu(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, $u(t)$ удовлетворяет уравнению (5.1) для каждого значения $t \in \mathbb{R}_+$ и начальному условию (5.2).

5.1. Полугруппа в расширенном функциональном пространстве. Через Ω_k обозначим весовое пространство $L^2_{r_k}(\mathbb{R}_+, H)$ вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой $||u||_{\Omega_k} = \left(\int_0^{+\infty} r_k(s)||u(s)||_H^2 ds\right)^{1/2}$, $r_k(\tau) := R_k^{-1}(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $k = 1, \dots, m$.

Рассмотрим сильно непрерывную полугруппу $L_k(t)$ левых сдвигов в пространстве Ω_k (см. [59, с. 33], [74]): $L_k(t)\xi(\tau) = \xi(t + \tau)$, $t > 0$. Известно, что линейный оператор $T_k\xi(\tau) = \partial\xi(\tau)/\partial\tau$ в пространстве Ω_k с областью определения $D(T_k) = \{\xi \in \Omega_k : \partial\xi(\tau)/\partial\tau \in \Omega_k\}$ является генератором полугруппы $L_k(t)$ (см. [59, с. 66]).

Введем гильбертово пространство $\mathbb{H} = H \oplus H \oplus \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{m} \Omega_k\right)$ с нормой $\|(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau))\|^2_{\mathbb{H}} = ||v||_H^2 + ||\xi_0||_H^2 + \sum\limits_{k=1}^{m} ||\xi_k||^2_{\Omega_k}$, $\tau > 0$, которое будем называть *расширенным гильбертовым пространством*.

Введем линейный оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с областью определения $D(\mathbb{A}) = \Big\{(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau)) \in \mathbb{H} : v \in H_{1/2},\ \xi_0 + \sum\limits_{k=1}^{m} Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(\tau)d\tau \in H_{1/2},\ \xi_k(\tau) \in D(T_k),\ k = 1, \dots, m\Big\}$, действующий следующим образом:

$$\mathbb{A}(v, \xi_0, \xi_1(\tau), \dots, \xi_m(\tau)) = \Big(-A_0^{1/2}\Big[\xi_0 + \sum_{k=1}^{m} Q_k^* \int_0^{+\infty} \xi_k(\tau)d\tau\Big],\ A_0^{1/2}v,\ R_k(\tau)Q_kA_0^{1/2}v + T_k\xi_k(\tau),\ k = \overline{1, m}\Big).$$

Введем два $(2 + m)$-компонентных вектора вида $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_m(t, \tau)) \in \mathbb{H}$ и $z = (v_0, \xi_{00}, \xi_{10}(\tau), \dots, \xi_{m0}(\tau)) \in \mathbb{H}$.

Рассмотрим следующую задачу Коши в пространстве $\mathbb{H}$:

$$\frac{d}{dt}Z(t) = \mathbb{A}Z(t), \tag{5.4}$$

$$Z(0) = z. \tag{5.5}$$

Определение 5.2. Вектор $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \dots, \xi_m(t, \tau)) \in \mathbb{H}$ называется *классическим решением задачи* (5.4), (5.5), если $v(t), \xi_0(t) \in C^1([0, +\infty), H)$, $\xi_k(t, \tau) \in C^1([0, +\infty), H)$ для любого $\tau > 0$, $k = 1, \dots, m$, $Z(t) \in C([0, +\infty), D(\mathbb{A}))$, вектор $Z(t)$ удовлетворяет уравнению (5.4) для любого $t \in \mathbb{R}_+$и начальному условию (5.5).

Теорема 5.1. *Оператор $\mathbb{A}$ в пространстве $\mathbb{H}$ с плотной областью определения $D(\mathbb{A})$ является максимально диссипативным, т. е. $(\mathbb{A}Z, Z) \leqslant 0$ для всех $Z \in D(\mathbb{A})$ и оператор $\mathbb{A}$ не имеет нетривиальных диссипативных расширений.*

Теорема 5.2. *Линейный оператор $\mathbb{A}$ является генератором сжимающей C_0-полугруппы $S(t) = e^{t\mathbb{A}}$ в пространстве $\mathbb{H}$, при этом решение задачи* (5.4), (5.5) *представимо в виде $Z(t) = S(t)z$, $t > 0$, и для любого $z \in D(\mathbb{A})$ справедливо энергетическое равенство*:

$$\frac{d}{dt}||S(t)z||^2_{\mathbb{H}} = -\sum_{k=1}^{m}\left(\lim_{\tau\to 0+} r_k(\tau)||\xi_k(t, \tau)||_H^2 + \int_0^{+\infty} r'_k(\tau)||\xi_k(t, \tau)||_H^2 d\tau\right).$$

5.2. Экспоненциальная устойчивость. Предположим, что определенные выше функции $R_k(\tau)$ дифференцируемы при $\tau \in (0, +\infty)$, а также для некоторого $\gamma > 0$ и для любого $\tau > 0$ удовлетворяют условиям

$$R_k'(\tau) + \gamma R_k(\tau) \leqslant 0. \tag{5.6}$$

Условие (5.6) хорошо известно в литературе (см., например, [50]). Можно показать, что ядра $R_k(t)$, заданные в виде убывающих экспонент $R_k(t) = e^{-\beta_k t}$, $0 < \beta_k < \beta_{k+1}$, $k = 1, \ldots, m$ или функций Работнова $R_k(t) = \mathcal{Э}_{\alpha-1}(-\beta_k, t) := t^{\alpha-1} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-\beta_k)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta_k < \beta_{k+1}$, $k = 1, \ldots, m$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, удовлетворяют условию (5.6).

Теорема 5.3. *Пусть функции $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям* (5.3), (5.6) *для некоторого $\gamma > 0$ и любого $\tau > 0$ для всех $k = 1, \ldots, m$. Тогда существуют такие постоянные $\theta > 1$ и $\omega > 0$, что для любого $z \in \mathbb{H}$ справедливо неравенство $\|S(t)z\|_{\mathbb{H}} \leqslant \theta \|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t}$.*

Отметим, что доказательства теорем 5.1 и 5.2 приведены в статье [44].

5.3. Корректная разрешимость. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\frac{d}{dt} Z(t) = \mathbb{A} Z(t) + F(t), \tag{5.7}$$

$$Z(0) = z. \tag{5.8}$$

Будем предполагать, что вектор-функция $F(t)$ имеет вид $F(t) := (f_1(t), \underbrace{0, \ldots, 0}_{m+1})$, $f_1(t) = f(t) - \sum\limits_{k=1}^{m} M_k(t) A_k \varphi_0$, вектор имеет вид $z = (\varphi_1, A_0^{1/2} \varphi_0, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m})$.

Теорема 5.4. *Пусть функции $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям* (5.3) *и выполнены следующие условия*:

1) *вектор-функция $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, функция $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, вектор $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$; или*
2) *вектор-функция $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, функция $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = 1, \ldots, m$, вектор $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$.*

Тогда задача (5.7)-(5.8) *имеет единственное классическое решение $Z(t) = (v(t), \xi_0(t), \xi_1(t, \tau), \ldots, \xi_m(t, \tau))$, где $v(t) := u'(t)$, $\xi_0(t) := A_0^{1/2} u(t)$, $u(t)$ — классическое решение задачи* (5.1), (5.2) *и справедлива оценка $\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d\Big(\|z\|_{\mathbb{H}} + \int_0^t \|F(s)\|_{\mathbb{H}} ds\Big)$ с постоянной d, не зависящей от вектор-функции F и векторов φ_0, φ_1.*

Если, кроме того, функции $R_k(\tau)$ удовлетворяют также и условию (5.6), *тогда справедлива оценка $\|Z(t)\|_{\mathbb{H}} \leqslant d\Big(\|z\|_{\mathbb{H}} e^{-\omega t} + \int_0^t e^{-\omega(t-s)} \|F(s)\|_{\mathbb{H}} ds\Big)$ с постоянной d, не зависящей от вектор-функции F, векторов φ_0, φ_1 и постоянной ω, определенной в формулировке теоремы* 5.3.

Теорема 5.5. *Пусть функции $R_k(\tau) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяют условиям* (5.3) *и выполнены следующие условия*:

1) *вектор-функция $A_0^{1/2} f(t) \in C(\mathbb{R}_+, H)$, функция $M_k(t) \in C(\mathbb{R}_+)$, вектор $\varphi_0 \in H_{3/2}$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$; или*
2) *вектор-функция $f(t) \in C^1(\mathbb{R}_+, H)$, функция $M_k(t) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $k = 1, \ldots, m$, вектор $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$.*

Тогда задача (5.1), (5.2) *имеет единственное классическое решение $u(t)$ и справедлива оценка*

$$E_1(t) := \frac{1}{2}\Big(\|u'(t)\|_H^2 + \|A_0^{1/2} u(t)\|_H^2\Big) \leqslant$$
$$\leqslant d\left[\Big(\|\varphi_1\|_H^2 + \|A_0^{1/2}\varphi_0\|_H^2\Big) + \sum_{k=1}^{m} \left(\int_0^t \left(\int_s^{+\infty} R_k(p)dp\right) ds\right)^2 \|A_k \varphi_0\|_H^2 + \left(\int_0^t ||f(s)|| ds\right)^2\right].$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Более того, если функции $R_k(\tau)$ удовлетворяют также и условию (5.6), *тогда справедлива следующая оценка*:

$$E_1(t) := \frac{1}{2}\Big(\left\|u'(t)\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}u(t)\right\|_H^2\Big) \leqslant d\bigg[\Big(\left\|\varphi_1\right\|_H^2 + \left\|A_0^{1/2}\varphi_0\right\|_H^2\Big)e^{-2\omega t} +$$
$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}\left(\int_s^{+\infty} R_k(p)dp\right)ds\right)^2 \|A_k\varphi_0\|_H^2 + \left(\int_0^t e^{-\omega(t-s)}||f(s)||ds\right)^2\bigg]$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f, векторов φ_0, φ_1 и постоянной ω, определенной в формулировке теоремы 5.3.

Отметим, что доказательства теорем 5.4 и 5.5 приведены в статье [44].

Замечание 5.2. Вследствие ограничений объема статьи мы не можем привести здесь формулировки результатов, посвященных исследованию интегродифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u\,(t) - \int_0^t K\,(t-s)A^\theta u\,(s)\,ds = f\,(t)$$

с параметром $\theta \in (0,1)$.

К уравнениям такого вида могут быть сведены задачи, возникающие в ряде приложений. Мы отсылаем читателя к статьям [5, 6, 75], в которых приведено доказательство корректной разрешимости начальных задач для указанных уравнений, а также проведен подробный спектральный анализ оператор-функций, являющихся их символами.

Библиографический комментарий. Следует отметить, что проблемой разрешимости и спектрального анализа вольтерровых интегродифференциальных уравнений на протяжении многих лет занималось большое число исследователей. В рамках одной статьи невозможно охватить все многообразие задач для вольтерровых интегродифференциальных уравнений. Мы ставим перед собой существенно более скромную задачу. Мы постараемся указать наиболее близкие к предмету нашего исследования задачи, а именно, мы остановимся на абстрактных интегродифференциальных уравнениях, т. е. на интегродифференциальных уравнениях с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, к которым сводятся интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающих в задачах вязкоупругости и задачах теплофизики. Однако и при этом значительном сужении тематики количество работ в этом направлении очень велико.

Ограничимся здесь указанием монографий [12,50,66] (см. также приведенную в них библиографию), циклом работ Н. Д. Копачевского и его учеников Д. А. Закоры и Е. В. Семкиной [24–32,67], а также циклом работ авторов [4–21, 41–44, 75–79, 82–85]. Кроме того, мы приводим ряд ссылок на работы С. А. Иванова [60, 63–65], M. C. Dafermos [52], P. Devis [55, 56], Di Blasio [57, 58], W. Desch, R. Miller [54], R. Miller [68–70], J. Munoz Rivera [71], L. Pandolfi [73], J. Prüss [76–78], V. V. Vlasov и J. Wu [86], близкие к предмету рассмотрения настоящей статьи. Здесь уместно также упомянуть монографии по тематике функционально-дифференциальных уравнений А. Л. Скубачевского [47, 48] и J. Wu [87], идейно близких к теории интегродифференциальных уравнений, поскольку изучаемые интегродифференциальные уравнения описывают процессы в средах с памятью. Ряд интересных примеров неустойчивых функционально-дифференциальных уравнений приведен в работе [62].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порождаемые проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1988. — *6*. — С. 5–33.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Операторный подход к исследованию гидродинамической модели Олдройта// Мат. заметки. — 1999. — *65*, № 6. — С. 924–928.
3. *Андронова О. А., Копачевский Н. Д.* О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 11–28.
4. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. — М.: МГУ, 2011.
5. *Власов В. В., Перез Ортиз Р.* Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости и теплофизике// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 4. — С. 630–634.
6. *Власов В. В., Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 3. — С. 369–386.

7. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — *28.* — С. 75–113.
8. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2012. — *6.* — С. 56–60.
9. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ и представление решений абстрактных интегродифференциальных уравнений// Докл. РАН. — 2014. — *454*, № 2. — С. 141–144.
10. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2014. — *75*, № 2. — С. 219–243.
11. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58.* — С. 22–42.
12. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
13. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 9. — С. 1168–1177.
14. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование операторных моделей, возникающих в теории вязкоупругости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 1. — С. 60–73.
15. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и представление решений интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости// Дифф. уравн. — 2019. — *55*, № 4. — С. 574–587.
16. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ и представление решений интегро-дифференциальных уравнений с дробно-экспоненциальными ядрами// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2019. — *80*, № 2. — С. 197–220.
17. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* О свойствах полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 8. — С. 1122–1126.
18. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, представимыми интегралами Стилтьеса// Дифф. уравн. — 2021 (принято к печати).
19. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Докл. РАН. — 2010. — *434*, № 1. — С. 12–15.
20. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39.* — С. 36–65.
21. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45.* — С. 43–61.
22. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191* — № 7. — С. 31–72.
23. *Жиков В. В.* О двухмасштабной сходимости// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23.* — С. 149–187.
24. *Закора Д. А.* Модель сжимаемой жидкости Олдройта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61.* — С. 41–66.
25. *Закора Д. А., Копачевский Н. Д.* О спектральной задаче, связанной с интегро-дифференциальным уравнением второго порядка// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2004. — № 2. — С. 2–18.
26. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
27. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
28. *Копачевский Н. Д.* Задача Коши для линейного интегро-дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2001. — *16.* — С. 139–152.
29. *Копачевский Н. Д.* Вольтерровы интегродифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве. Специальный курс лекций. — Симферополь: «Бондаренко О. А.», 2012.
30. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
31. *Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д., Пашкова Ю. С.* Дифференциально-операторные и интегро-дифференциальные уравнения в проблеме малых колебаний гидродинамических систем// Уч. зап. Симф. гос. ун-та. — 1995. — *41*, № 2. — С. 96–108.

32. *Копачевский Н.Д., Семкина Е.В.* Об интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра второго порядка, неразрешенных относительно старшей производной// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. физ.-мат. науки. — 2013. — *26*, № 1. — С. 52–79.
33. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
34. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
35. *Лыков А.В.* Некоторые проблемные вопросы теории тепломассопереноса// В сб.: «Проблемы тепло- и массопереноса». — Минск: Наука и техника, 1976. — С. 9–82.
36. *Милославский А.И.* Об устойчивости некоторых классов эволюционных уравнений// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*. — С. 118–132.
37. *Милославский А.И.* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости// Деп. в Укр. НИИНТИ. — Харьков, 13.07.87. — № 1229-УК87. — С. 53.
38. *Милославский А.И.* О спектре неустойчивости операторного пучка// Мат. заметки. — 1991. — *49*, № 4. — С. 88–94.
39. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
40. *Радзиевский Г.В.* Асимптотика распределения характеристических чисел оператор-функций, аналитических в угле// Мат. сб. — 1980. — *112*, № 3. — С. 396–420.
41. *Раутиан Н.А.* Об ограниченности одного класса интегральных операторов дробного типа// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 12. — С. 81–106.
42. *Раутиан Н.А.* О представлении решений интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве// Сб. тр. межд. конф. «Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения». — МЭСИ, 2011. — С. 116–134.
43. *Раутиан Н.А.* О структуре и свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Мат. заметки. — 2011. — *90*, № 3. — С. 474–477.
44. *Раутиан Н.А.* Полугруппы, порождаемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 9. — С. 1226–1244.
45. *Сандраков Г.В.* Многофазные осредненные модели диффузии для задач с несколькими параметрами// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2007. — *71*, № 6. — С. 119–72.
46. *Санчес Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
47. *Скубачевский А.Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями в близи границы// Мат. сб. — 1986. — *129*, № 2. — С. 279–302.
48. *Скубачевский А.Л.* Об одном классе функционально-дифференциальных операторов, удовлетворяющих гипотезе Като// Алгебра и анализ. — 2018. — *30*, № 2. — С. 249–273.
49. *Шкаликов А.А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1988. — *177*, № 1. — С. 96–118.
50. *Amendola G., Fabrizio M., Golden J.M.* Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications. — New York—Dordrecht—Heidelberg—London: Springer, 2012.
51. *Biot M.A.* Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media// J. Acoust. Soc. Am. — 1962. — *34*. — С. 1254–1264.
52. *Dafermos C.M.* Asymptotic stability in viscoelasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — *37*. — С. 297–308.
53. *Davydov A.V., Tikhonov Y.A.* Study of Kelvin—Voigt models arising in viscoelasticity// Differ. Equ. — 2018. — *54*, № 12. — С. 1620–1635.
54. *Desch W., Miller R.K.* Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space// J. Differ. Equ. — 1987. — *70*. — С. 366–389.
55. *Devis P.L.* Hyperbolic integrodifferential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1975. — *47*. — С. 155–160.
56. *Devis P.L.* On the hyperbolicity of the equations of the linear theory of heat conduction for materials with memory// SIAM J. Appl. Math. — 1976. — *30*. — С. 75–80.
57. *Di Blasio G.* Parabolic Volterra equations of convolution type// J. Integral Equ. Appl. — 1994. — *6*. — С. 479–508.
58. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *102*. — С. 38–57.
59. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroup for linear evolution equations. — New York—Berlin—Heidelberg: Springer, 1999.
60. *Eremenko A., Ivanov S.* Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations// SIAM J. Math. Anal. — 2011. — *43*. — С. 2296–2306.
61. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* General theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31*. — С. 113–126.

62. *Ismagilov R. S., Rautian N. A., Vlasov V. V.* Examples of very unstable linear partial functional differential equations// arXiv. — 1402.4107v1.
63. *Ivanov S. A.* «Wave type» spectrum of the Gurtin—Pipkin equation of the second order// arXiv. — 1002.2831.
64. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest// J. Math. Anal. Appl. — 2009. — *355*. — C. 1–11.
65. *Ivanov S. A., Sheronova T. L.* Spectrum of the heat equation with memory// arXiv. — 0912.1818v1.
66. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Non-self-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
67. *Kopachevsky N. D., Syomkina E. V.* Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative// Eurasian Math. J. — 2013. — *4*, № 4. — C. 64–87.
68. *Miller R. K.* Volterra integral equations in a Banach space// Funkcialaj Ekvac. — 1975. — *18*. — C. 163–194.
69. *Miller R. K.* An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. — 1978. — *66*. — C. 313–332.
70. *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces// Funkcialaj Ekvac. — 1978. — *21*. — C. 279–305.
71. *Munoz Rivera J. E., Naso M. G., Vegni F. M.* Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — *286*. — C. 692–704.
72. *Myshkis A. D., Vlasov V. V.* On an analogy between the classifications of functional differential equations and partial differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 3. — C. 545–560.
73. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52*. — C. 143–165.
74. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications of partial differential equations. — New York etc.: Springer, 1983.
75. *Perez Ortiz R., Vlasov V. V.* Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space// Electron. J. Qual. Theory Differ Equ. — 2016. — *31*. — C. 1–17.
76. *Prüss J.* On linear Volterra equations of parabolic type in Banach spaces// Trans. Am. Math. Soc. — 1987. — *301*, № 2. — C. 691–721.
77. *Prüss J.* Bounded solutions of Volterra equations// SIAM J. Math. Anal. — 1988. — *19*, № 1. — C. 133–149.
78. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. — Basel—Baston—Berlin: Birkhäuser, 1993.
79. *Rautian N. A.* Well-posedness of Volterra integro-differential equations with fractional exponential kernels// В сб.: «Differential and Difference Equations with Applications». — Cham: Springer, 2020. — C. 517–533.
80. *Shapiro J.* Composition Operators and Classical Function Theory. — New York: Springer, 1993.
81. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
82. *Vlasov V. V., Gavrikov A. A., Ivanov S. A., Knyaz'kov D. Yu., Samarin V. A., Shamaev A. S.* Spectral properties of combined media// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2010. — *164*, № 6. — C. 948–963.
83. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space// В сб.: «Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation», IWOTA 11, Sevilla, Spain, July 3–9, 2011. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2014. — C. 517–535.
84. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2019. — *239*, № 6. — C. 771–787.
85. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2020. — *244*, № 2. — C. 170–182.
86. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 4. — C. 751–768.
87. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer, 1996.

В. В. Власов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: victor.vlasov@math.msu.ru

Н. А. Раутиан
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: nadezhda.rautian@math.msu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-255-284 UDC 517.968.72

Investigation of Integrodifferential Equations by Methods of Spectral Theory

© 2021 **V. V. Vlasov, N. A. Rautian**

Abstract. This paper provides a survey of results devoted to the study of integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. These equations are operator models of integrodifferential partial differential equations arising in numerous applications: in the theory of viscoelasticity, in the theory of heat propagation in media with memory (Gurtin–Pipkin equations), and averaging theory. The most interesting and profound results of the survey are devoted to the spectral analysis of operator functions that are symbols of the integrodifferential equations under study.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. D. Orlova, "Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi, porozhdaemye problemoy malykh dvizheniy vyazkouprugoy zhidkosti" [Evolution and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1988, **6**, 5–33 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. D. Orlova, "Operatornyi podkhod k issledovaniyu gidrodinamicheskoy modeli Oldroyta" [Operator approach to the study of the Oldroyd hydrodynamic model], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 6, 924–928 (in Russian).
3. O. A. Andronova and N. D. Kopachevsky, "O lineynykh zadachakh s poverkhnostnoy dissipatsiey energii" [On linear problems with surface energy dissipation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **29**, 11–28 (in Russian).
4. V. V. Vlasov, D. A. Medvedev, and N. A. Rautian, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i ikh spektral'nyi analiz* [Functional Differential Equations in Sobolev Spaces and Their Spectral Analysis], MGU, Moscow, 2011 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and R. Perez Ortiz, "Spektral'nyi analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti i teplofizike" [Spectral analysis of integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity and thermophysics], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **98**, No. 4, 630–634 (in Russian).
6. V. V. Vlasov, R. Perez Ortiz, and N. A. Rautian, "Issledovanie vol'terrovykh integro-differentsial'nykh uravneniy s yadrami, zavisyashchimi ot parametra" [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels depending on a parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 3, 369–386 (in Russian).
7. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyi analiz abstraktnykh giperbolicheskikh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Correct solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 75–113 (in Russian).
8. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Issledovanie integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti" [Study of integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2012, **6**, 56–60 (in Russian).
9. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spektral'nyi analiz i predstavlenie resheniy abstraktnykh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Spectral analysis and representation of solutions of abstract integrodifferential equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **454**, No. 2, 141–144 (in Russian).
10. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "O svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii teplomassoobmena" [Properties of solutions of integro-differential equations arising in the theory of heat and mass transfer], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2014, **75**, No. 2, 219–243 (in Russian).

11. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Korrektnaya razreshimost’ i spektral’nyi analiz integrodifferentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti” [Well-posedness and spectral analysis of integro-differential equations arising in viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 22–42 (in Russian).
12. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyi analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
13. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Korrektnaya razreshimost’ vol’terrovykh integro-differentsial’nykh uravneniy v gil’bertovom prostranstve” [Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in a Hilbert space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 9, 1168–1177 (in Russian).
14. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie operatornykh modeley, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti” [Investigation of operator models arising in viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 1, 60–73 (in Russian).
15. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Korrektnaya razreshimost’ i predstavlenie resheniy integro-differentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti” [Correct solvability and representation of solutions of integrodifferential equations arising in the theory of viscoelasticity], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 4, 574–587 (in Russian).
16. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Spektral’nyi analiz i predstavlenie resheniy integro-differentsial’nykh uravneniy s drobno-eksponentsial’nymi yadrami” [Spectral analysis and representation of solutions of integrodifferential equations with fractional-exponential kernels], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2019, **80**, No. 2, 197–220 (in Russian).
17. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “O svoystvakh polugrupp, porozhdaemykh vol’terrovymi integro-differentsial’nymi uravneniyami” [Properties of semigroups generated by Volterra integrodifferential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 8, 1122–1126 (in Russian).
18. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie vol’terrovykh integro-differentsial’nykh uravneniy s yadrami, predstavimymi integralami Stilt’esa” [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels representable by Stieltjes integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2021, to be published (in Russian).
19. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Razreshimost’ i spektral’nyi analiz integro-differentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Solvability and spectral analysis of integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **434**, No. 1, 12–15 (in Russian).
20. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Spektral’nyi analiz i korrektnaya razreshimost’ abstraktnykh integrodifferentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65 (in Russian).
21. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Issledovanie operatornykh modeley, voznikayushchikh v zadachakh nasledstvennoy mekhaniki” [Analysis of operator models arising in problems of hereditary mechanics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 43–61 (in Russian).
22. V. V. Zhikov, “Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [An extension and application of the two-scale convergence method], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2000, **191** — No. 7, 31–72 (in Russian).
23. V. V. Zhikov, “O dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [On two-scale convergence], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2003, **23**, 149–187 (in Russian).
24. D. A. Zakora, “Model’ szhimaemoy zhidkosti Oldroyta” [Oldroyd model for compressible fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 41–66 (in Russian).
25. D. A. Zakora and N. D. Kopachevsky, “O spektral’noy zadache, svyazannoy s integro-differentsial’nym uravneniem vtorogo poryadka” [On a spectral problem associated with a second-order integrodifferential equation], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2004, No. 2, 2–18 (in Russian).
26. A. A. Il’yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
27. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
28. N. D. Kopachevsky, “Zadacha Koshi dlya lineynogo integro-differentsial’nogo uravneniya v gil’bertovom prostranstve” [Cauchy problem for a linear integrodifferential equation in a Hilbert space], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2001, **16**, 139–152 (in Russian).

29. N. D. Kopachevsky, *Vol'terrovy integrodifferentsial'nye uravneniya v gil'bertovom prostranstve. Spetsial'nyi kurs lektsiy* [Volterra Integrodifferential Equations in Hilbert Space. Special Course of Lectures], Bondarenko, Simferopol', 2012 (in Russian).
30. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike. Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics. Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
31. N. D. Kopachevsky, L. D. Orlova, and Yu. S. Pashkova, "Differentsial'no-operatornye i integro-differentsial'nye uravneniya v probleme malykh kolebaniy gidrodinamicheskikh sistem" [Differential-operator and integrodifferential equations in the problem of small oscillations of hydrodynamic systems], *Uch. zap. Simf. gos. un-ta* [Sci. Notes Simferopol State Univ.], 1995, **41**, No. 2, 96–108 (in Russian).
32. N. D. Kopachevsky and E. V. Semkina, "Ob integro-differentsial'nykh uravneniyakh Vol'terra vtorogo poryadka, nerazreshennykh otnositel'no starshey proizvodnoy" [On second-order Volterra integrodifferential equations, unresolved with respect to the higher derivative], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. fiz.-mat. nauki* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2013, **26**, No. 1, 52–79 (in Russian).
33. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
34. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
35. A. V. Lykov, "Nekotorye problemnye voprosy teorii teplomassoperenosa" [Some problematic issues of the theory of heat and mass transfer], In: *Problemy teplo- i massoperenosa* [Problems of Heat and Mass Transfer], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976, pp. 9–82 (in Russian).
36. A. I. Miloslavskiy, "Ob ustoychivosti nekotorykh klassov evolyutsionnykh uravneniy" [On the stability of some classes of evolution equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1985, **26**, 118–132 (in Russian).
37. A. I. Miloslavskiy, "Spektral'nye svoystva operatornogo puchka, voznikayushchego v vyazkouprugosti" [Spectral properties of an operator beam arising in viscoelasticity], *Ukr. NIINTI*, Khar'kov, 13.07.87, No. 1229-UK87, 53 (in Russian).
38. A. I. Miloslavskiy, "O spektre neustoychivosti operatornogo puchka" [On the spectrum of instability of an operator beam], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **49**, No. 4, 88–94 (in Russian).
39. Yu. N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Hereditary Solid Body Mechanics], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
40. G. V. Radzievskiy, "Asimptotika raspredeleniya kharakteristicheskikh chisel operator-funktsiy, analiticheskikh v ugle" [Asymptotics of the distribution of characteristic numbers of operator functions analytic in an angle], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1980, **112**, No. 3, 396–420 (in Russian).
41. N. A. Rautian, "Ob ogranichennosti odnogo klassa integral'nykh operatorov drobnogo tipa" [On the boundedness of a class of integral operators of fractional type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2009, **200**, No. 12, 81–106 (in Russian).
42. N. A. Rautian, "O predstavlenii resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami v gil'bertovom prostranstve" [On representation of solutions of integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space], Proc. Int. Conf. *Qualitative Theory of Differential Equations and Applications*, MESI, Moscow, 2011, pp. 116–134 (in Russian).
43. N. A. Rautian, "O strukture i svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike" [On the structure and properties of solutions of integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2011, **90**, No. 3, 474–477 (in Russian).
44. N. A. Rautian, "Polugruppy, porozhdaemye vol'terrovymi integro-differentsial'nymi uravneniyami" [Semigroups generated by Volterra integrodifferential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2020, **56**, No. 9, 1226–1244 (in Russian).
45. G. V. Sandrakov, "Mnogofaznye osrednennye modeli diffuzii dlya zadach s neskol'kimi parametrami" [Multiphase averaged diffusion models for problems with multiple parameters], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2007, **71**, No. 6, 119–72 (in Russian).
46. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
47. A. L. Skubachevskiy, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi usloviyami v blizi granitsy" [Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1986, **129**, No. 2, 279–302 (in Russian).
48. A. L. Skubachevskiy, "Ob odnom klasse funktsional'no-differentsial'nykh operatorov, udovletvoryayushchikh gipoteze Kato" [On a class of functional differential operators satisfying the Kato hypothesis], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2018, **30**, No. 2, 249–273 (in Russian).

49. A. A. Shkalikov, “Sil’no dempfirovannye puchki operatorov i razreshimost’ sootvetstvuyushchikh operator-no-differentsial’nykh uravneniy” [Strongly damped operator pencils and the solvability of the corresponding operator-differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1988, **177**, No. 1, 96–118 (in Russian).
50. G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden, *Thermodynamics of Materials with Memory. Theory and Applications*, Springer, New York—Dordrecht—Heidelberg—London, 2012.
51. M. A. Biot, “Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media,” *J. Acoust. Soc. Am.*, 1962, **34**, 1254–1264.
52. C. M. Dafermos, “Asymptotic stability in viscoelasticity,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308.
53. A. V. Davydov and Y. A. Tikhonov, “Study of Kelvin—Voigt models arising in viscoelasticity,” *Differ. Equ.*, 2018, **54**, No. 12, 1620–1635.
54. W. Desch, R. K. Miller, “Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space,” *J. Differ. Equ.*, 1987, **70**, 366–389.
55. P. L. Devis, “Hyperbolic integrodifferential equations,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1975, **47**, 155–160.
56. P. L. Devis, “On the hyperbolicity of the equations of the linear theory of heat conduction for materials with memory,” *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, **30**, 75–80.
57. G. Di Blasio, “Parabolic Volterra equations of convolution type,” *J. Integral Equ. Appl.*, 1994, **6**, 479–508.
58. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestrari, “L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, **102**, 38–57.
59. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroup for Linear Evolution Equations*, Springer, New York—Berlin—Heidelberg, 1999.
60. A. Eremenko and S. Ivanov, “Spectra of the Gurtin—Pipkin type equations,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2011, **43**, 2296–2306.
61. M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, “General theory of heat conduction with finite wave speed,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
62. R. S. Ismagilov, N. A. Rautian, and V. V. Vlasov, “ Examples of very unstable linear partial functional differential equations,” *arXiv*, 1402.4107v1.
63. S. A. Ivanov, “«Wave type» spectrum of the Gurtin—Pipkin equation of the second order,” *arXiv*, 1002.2831.
64. S. Ivanov and L. Pandolfi, “Heat equations with memory: lack of controllability to the rest,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **355**, 1–11.
65. S. A. Ivanov and T. L. Sheronova, “Spectrum of the heat equation with memory,” *arXiv*, 0912.1818v1.
66. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Non-Self-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
67. N. D. Kopachevsky and E. V. Syomkina, “Linear Volterra integro-differential second-order equations unresolved with respect to the highest derivative,” *Eurasian Math. J.*, 2013, **4**, No. 4, 64–87.
68. R. K. Miller, “Volterra integral equations in a Banach space,” *Funkcialaj Ekvac.*, 1975, **18**, 163–194.
69. R. K. Miller, “An integrodifferencial equation for rigid heat conductors with memory,” *J. Math. Anal.*, 1978, **66**, 313–332.
70. R. K. Miller and R. L. Wheeler, “Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces,” *Funkcialaj Ekvac.*, 1978, **21**, 279–305.
71. J. E. Munoz Rivera, M. G. Naso, and F. M. Vegni, “Asymptotic behavior of the energy for a class of weakly dissipative second-order systems with memory,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **286**, 692–704.
72. A. D. Myshkis and V. V. Vlasov, “On an analogy between the classifications of functional differential equations and partial differential equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2009, **16**, No. 3, 545–560.
73. L. Pandolfi, “The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach,” *Appl. Math. Optim.*, 2005, **52**, 143–165.
74. A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications of partial differential equations*, Springer, New York etc., 1983.
75. R. Perez Ortiz and V. V. Vlasov, “Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space,” *Electron. J. Qual. Theory Differ Equ.*, 2016, **31**, 1–17.
76. J. Prüss, “On linear Volterra equations of parabolic type in Banach spaces,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1987, **301**, No. 2, 691–721.
77. J. Prüss, “Bounded solutions of Volterra equations,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1988, **19**, No. 1, 133–149.
78. J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Baston—Berlin, 1993.
79. N. A. Rautian, “Well-posedness of Volterra integro-differential equations with fractional exponential kernels,” In: *Differential and Difference Equations with Applications*, Springer, Cham, 2020, pp. 517–533.
80. J. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer, New York, 1993.
81. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.

82. V. V. Vlasov, A. A. Gavrikov, S. A. Ivanov, and D. Yu. Knyaz'kov, V. A. Samarin, A. S. Shamaev, "Spectral properties of combined media," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2010, **164**, No. 6, 948–963.
83. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spectral analysis and representations of solutions of abstract integro-differential equations in Hilbert space," In: *Concrete operators, spectral theory, operators in harmonic analysis and approximation*, IWOTA 11, Sevilla, Spain, July 3–9, 2011, Birkhäuser/Springer, Basel, 2014, pp. 517–535.
84. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Spectral analysis of integrodifferential equations in Hilbert spaces," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2019, **239**, No. 6, 771–787.
85. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "A study of operator models arising in problems of hereditary mechanics," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2020, **244**, No. 2, 170–182.
86. V. V. Vlasov and J. Wu, "Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay," *Funct. Differ. Equ.*, 2009, **16**, No. 4, 751–768.
87. J. Wu, *Theory and applications of partial functional differential equations*, Springer, New York, 1996.

V. V. Vlasov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `victor.vlasov@math.msu.ru`

N. A. Rautian
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `nadezhda.rautian@math.msu.ru`