Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 237–254

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-237-254 УДК 517.984

ИНДЕКСЫ ДЕФЕКТА БЛОЧНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ: ОБЗОР

© 2021 г. **В. С. БУДЫКА, М. М. МАЛАМУД, К. А. МИРЗОЕВ**

Аннотация. Работа является обзорной. Ее основной объект — бесконечные симметричные блочные матрицы Якоби $\mathbf{J}$ с $m \times m$-матричными элементами. Обсуждаются результаты, в которых общие блочные матрицы Якоби являются самосопряженными или могут иметь максимальные либо промежуточные индексы дефекта. Также обсуждаются условия, гарантирующие дискретность спектра матриц Якоби $\mathbf{J}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

*Посвящается памяти нашего друга, коллеги
и блестящего математика Н. Д. Копачевского.*

1. Введение

Пусть $\Sigma(\cdot) = \Sigma(\cdot)^*$ — неубывающая, непрерывная слева $m \times m$ матричная функция на прямой $\mathbb{R}$, имеющая бесконечное число точек роста. Предположим, что функция $\Sigma(\cdot)$ нормирована следующим образом: $\Sigma(t-0) = \Sigma(t)$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \Sigma(t) = 0$. Стандартным образом эта функция порождает $m \times m$ матричную меру на прямой.

Следуя М. Г. Крейну [2,3] (см. также [4,5]), предполагаем, что эта мера конечна и порождает матричную проблему моментов на прямой, т. е. существуют следующие матричные интегралы Римана—Стилтьеса:

$$S_n := \int_{-\infty}^{\infty} t^n d\Sigma(t), \qquad n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что последовательность матриц $\{S_n\}_0^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ положительна в следующем смысле: для любой последовательности векторов $\xi_j = \operatorname{col}\bigl(\xi_{j,1}, \xi_{j,2}, \dots, \xi_{j,m}\bigr) \in \mathbb{C}^m$, $j \in \mathbb{N}_0$, и любого многочлена $R(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} \xi_j t^j$ с векторными коэффициентами $R(t) (\in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m)$ имеем

$$\sum_{j,k=0}^{n} \xi_k^* S_{j+k} \xi_j = \sum_{j,k=0}^{n} \langle S_{j+k}\xi_j, \xi_k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} d\left\langle \Sigma(t)\left(\sum_0^n \xi_j t^j\right), \sum_0^n t^k \xi_k \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} R^*(t) d\Sigma(t) R(t) \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $\langle x, y\rangle$ обозначает скалярное произведение в пространстве $\mathbb{C}^m$.

Это неравенство доказывает достаточность в следующем классическом результате.

© Российский университет дружбы народов, 2021

Эта работа доступна по лицензии Creative Commons 4.0 International
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.ru

Теорема 1.1 (см. [3,5]). *Необходимым и достаточным условием разрешимости матричной проблемы моментов* (1.1) *является условие положительности*

$$\sum_{j,k=0}^{n} \xi_k^* S_{j+k} \xi_j \geqslant 0, \qquad \xi_j \in \mathbb{C}^m, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.3}$$

Схема доказательства. Кратко наметим идею доказательства достаточности. С этой целью для каждой пары векторных многочленов $R(t) = \sum_0^n \xi_j t^j$, $Q(t) = \sum_0^n \eta_k t^k (\in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m)$, где $\xi_j, \eta_k \in \mathbb{C}^m$, положим

$$\langle R(t), Q(t)\rangle_S = \left\langle \sum_0^n \xi_j t^j, \sum_0^n \eta_k t^k \right\rangle_S := \sum_{j,k=0}^{n} \eta_k^* S_{j+k} \xi_j = \sum_{j,k=0}^{n} \langle S_{j+k}\xi_j, \eta_k\rangle, \qquad n \in \mathbb{N}_0. \tag{1.4}$$

Более того, для простоты положим, что неравенство в (1.3) является строгим, т. е. $\langle R(t), R(t)\rangle_S > 0$ для любых $R \in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m \setminus \{\mathbb{O}\}$. Тогда из (1.4) и (1.3) следует, что билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ определяет скалярное произведение в $\mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m$. Таким образом, векторное пространство $\mathfrak{H}'_S := \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m$ становится предгильбертовым пространством. Пополняя его, приходим к гильбертову пространству $\mathfrak{H}_S$. □

Далее определим оператор умножения A' на $\mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^m$, полагая

$$A' : R(t) = \sum_0^n \xi_j t^j \to tR(t) = \sum_0^n \xi_j t^{j+1}. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что оператор A' является симметричным: $\langle A'R, Q\rangle_S = \langle R, A'Q\rangle_S$, и потому допускает замыкание $A = \overline{A'}$ в $\mathfrak{H}_S$. Можно легко доказать, что индексы дефекта оператора A конечны и выполнено $n_+(A),\ n_-(A) \leqslant m$.

Если $n_+(A) = n_-(A)$, то оператор A допускает самосопряженное расширение $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ в $\mathfrak{H}_S$. Иначе такое расширение может быть найдено среди расширений оператора A в более широком пространстве $\widetilde{\mathfrak{H}}_S \supset \mathfrak{H}_S$. Пусть $E_{\widetilde{A}}(t)$ — (ортогональная) спектральная функция (разложение единицы) оператора $\widetilde{A}$, т. е. $\widetilde{A} = \int_{\mathbb{R}} t\, dE_{\widetilde{A}}(t)$. Пусть $P_{\mathcal{H}}$ — ортопроектор в $\mathfrak{H}_S$ на подпространство $\mathcal{H} := \mathbb{C}^m$ постоянных векторных многочленов, и пусть $\Sigma_{\widetilde{A}}(t) := P_{\mathcal{H}} E_{\widetilde{A}}(t) \upharpoonright \mathcal{H}$. Тогда из (1.4) и (1.5) следует, что для любой пары постоянных векторов $\xi, \eta \in \mathcal{H}(= \mathbb{C}^m)$ выполнено

$$\begin{aligned} \langle S_{j+k}\xi, \eta\rangle &= \left\langle \xi t^j, \eta t^k \right\rangle_S = \left\langle \widetilde{A}^j \xi, \widetilde{A}^k \eta \right\rangle_S = \left\langle \widetilde{A}^{j+k} \xi, \eta \right\rangle_S = \\ &= \int_{\mathbb{R}} t^{j+k}\, d(E_{\widetilde{A}}(t)\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}} t^{j+k}\, d(\Sigma_{\widetilde{A}}(t)\xi, \eta), \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Тогда $m \times m$ мера $\Sigma(t) = \Sigma_{\widetilde{A}}(t)$ является решением матричной проблемы моментов (1.1). Можно доказать, что любое матричное решение $\Sigma(t)$ задачи (1.1) допускает единственное представление $\Sigma(t) = \Sigma_{\widetilde{A}}(t)$ с некоторым самосопряженным расширением $\widetilde{A} = \widetilde{A}^*$ оператора A и справедлива эквивалентность $\Sigma_{\widetilde{A}_1}(t) = \Sigma_{\widetilde{A}_2}(t) \Longleftrightarrow \widetilde{A}_1 = \widetilde{A}_2$. □

Ассоциируем с мерой Σ гильбертовы пространства $L^2(\Sigma; \mathcal{H})$ и $L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$ вектор-функций и матричных функций, соответственно (см. [5, 28]). В дальнейшем будем полагать, что мера Σ такая, что $(R, R)_{L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})} := \int_{\mathbb{R}} R(t)\, d\Sigma(t) R^*(t) > 0$ для любого матричного многочлена $R(t) = \sum_0^n C_j t^j \in \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}^{m\times m}$, где C_n обратимы. Используя это условие и применяя ортогонализацию (см. [5]), можно определить последовательность «ортонормальных» матричных многочленов $\{P_j(t)\}_0^\infty (\subset L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H}))$, где $P_0(t) = \mathbb{I}_m$ и выполнено

$$(P_j, P_k)_{L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})} := \int_{\mathbb{R}} P_j(t)\, d\Sigma(t) P_k^*(t) = \delta_{jk} \mathbb{I}_m, \qquad \deg P_j(t) = j, \quad j,k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.7}$$

Система $\{P_j(t)\}_0^\infty$ не обязательно полна в $L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$. Обозначим через $\widetilde{L}^2(\Sigma; \mathcal{H})$ и $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$ подпространства в $L^2(\Sigma; \mathcal{H})$ и $L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma; \mathcal{H})$, порожденные векторными и матричными многочленами, соответственно. Видно, что последовательность $\{P_j(t)\}_0^\infty$ образует «ортонормальный базис» в $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$. Следовательно, полагая $P_{-1}=0$ и используя «ортогональные» соотношения (1.7), получаем, что

$$tP_j(t)=\sum_k C_{j,k}P_k(t)=C_{j,j-1}P_{j-1}(t)+C_{j,j}P_j(t)+C_{j,j+1}P_{j+1}(t),\qquad C_{j,k}\in\mathbb{C}^{m\times m},\tag{1.8}$$

где матричные коэффициенты $C_{j,k}$ при $|j-k|\leqslant 1$ даются формулами

$$\mathcal{A}_j:=C_{j,j}=\int_{\mathbb{R}}tP_j(t)\,d\Sigma(t)P_j^*(t),\quad \mathcal{B}_j:=C_{j,j+1}=\int_{\mathbb{R}}t\,P_j(t)d\Sigma(t)P_{j+1}^*(t),$$
$$C_{j,j-1}=\int_{\mathbb{R}}t\,P_j(t)d\Sigma(t)P_{j-1}^*(t)=\mathcal{B}_{j-1}^*,$$

и $C_{j,k}=(tP_j,P_k)_{L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})}=0$ при $|j-k|>1$. Следовательно, матричное представление оператора A (1.5) в базисе $\{P_j(t)\}_0^\infty$ в $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$ дается блочной матрицей Якоби

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_0&\mathcal{B}_0&\mathbb{O}_m&\mathbb{O}_m&\mathbb{O}_m&\dots\\ \mathcal{B}_0^*&\mathcal{A}_1&\mathcal{B}_1&\mathbb{O}_m&\mathbb{O}_m&\dots\\ \mathbb{O}_m&\mathcal{B}_1^*&\mathcal{A}_2&\mathcal{B}_2&\mathbb{O}_m&\dots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\tag{1.9}$$

где $\mathcal{A}_j=\mathcal{A}_j^*\in\mathbb{C}^{m\times m}$ — $m\times m$-матричные элементы, а элементы $\mathcal{B}_j\in\mathbb{C}^{m\times m}$ обратимы, $j\in\mathbb{N}_0$.

Согласно М. Г. Крейну (см. [2,3]), матрица $\mathbf{J}$ также называется матрицей Якоби с матричными элементами.

Пусть $l_0^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^p)$ — линеал конечных последовательностей в пространстве $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)$. Отображение $l_0^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)\ni f\to\mathbf{J}f$ определяет линейный симметричный, но не замкнутый оператор $\mathbf{J}^0$. Замыкание оператора $\mathbf{J}^0$ определяет минимальный замкнутый симметричный оператор $\mathbf{J}_{\min}$ в $l^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^p)$. В дальнейшем будем отождествлять минимальный оператор $\mathbf{J}_{\min}$ с матрицей $\mathbf{J}$ вида (1.9) и писать $\mathbf{J}_{\min}=\mathbf{J}$. Также полагаем $\mathbf{J}_{\max}=\mathbf{J}^*$.

Наконец, введем преобразование Фурье

$$\mathcal{F}:l_0^2(\mathbb{N};\mathbb{C}^m)\to\widetilde{L}^2(\Sigma;\mathcal{H}),\qquad \xi=\{\xi_j\}_0^\infty\to\mathcal{F}[\xi](t):=\widehat{\xi}(t)=\sum_0^\infty P_j^*(t)\xi_j\tag{1.10}$$

и заметим, что в силу (1.7) формулы $\xi_j=\int_{\mathbb{R}}P_j(t)\,d\Sigma(t)\widehat{\xi}(t)$, $j\in\mathbb{N}_0$, позволяют восстановить векторные коэффициенты $\xi_j(\in\mathbb{C}^m)$ из $\widehat{\xi}(t)$. Используя (1.10), (1.5) и (1.8), приходим к тождеству

$$A\mathcal{F}[\xi](t)=\sum_0^\infty tP_j(t)^*\xi_j=\sum_0^\infty[P_{j-1}^*(t)B_{j-1}+P_j^*(t)\mathcal{A}_j+P_{j+1}^*(t)B_j^*]\xi_j=\mathcal{F}[\mathbf{J}\xi](t),$$

означающему, что оператор $\mathbf{J}$ унитарно эквивалентен оператору $A=\overline{A'}$ (1.5), следовательно, $n_\pm(\mathbf{J})=n_\pm(A)$.

Оператор $\mathbf{J}=\mathbf{J}_{\min}$ симметричен, $\mathbf{J}\subset\mathbf{J}^*$, хотя не обязательно самосопряжен, т. е. индексы дефекта $n_\pm(\mathbf{J}):=\dim\mathfrak{N}_{\pm i}(\mathbf{J}):=\dim\ker(\mathbf{J}^*\mp iI)$ могут быть нетривиальными. Вообще говоря, $0\leqslant n_\pm(\mathbf{J})\leqslant m$ (см. [2,3,5]). Кроме того, есть еще одно ограничение: индексы достигают максимального значения только одновременно, т. е. $n_+(\mathbf{J})=m\iff n_-(\mathbf{J})=m$ (см. [1]). В работах [16,17] показано, что также справедливо обратное утверждение: для любой пары чисел $\{n_-,n_+\}$, удовлетворяющих неравенству $0\leqslant n_-,n_+<m$ либо $n_\pm=m$, существует блочная матрица Якоби $\mathbf{J}$ с $n_\pm(\mathbf{J})=n_\pm$.

Согласно М. Крейну [2,3] ассоциируем с матрицей $\mathbf{J}$ разностное матричное выражение

$$(LV)_n=\mathcal{B}_{n-1}^*V_{n-1}+\mathcal{A}_nV_n+\mathcal{B}_nV_{n+1},\qquad V_0=\mathbb{I}_m,\ V_{-1}=\mathbb{O}_m,\quad V_n\in\mathbb{C}^{m\times m},\ n\in\mathbb{N}_0.\tag{1.11}$$

Известно (см. [2,3,5]), что решение задачи Коши $(LV)_n=zV_n$ при начальных условиях (1.11) является последовательностью матричных многочленов $\{P_n(z)\}_0^\infty$. Последовательно находим

$$P_0(z)=\mathbb{I}_m,\quad P_1(z)=\mathcal{B}_0^{-1}(z\mathbb{I}_m-\mathcal{A}_0),\quad P_2(z)=\mathcal{B}_1^{-1}((z\mathbb{I}_m-\mathcal{A}_1)P_1(z)\mathcal{B}_0),\quad\dots.\tag{1.12}$$

Из (1.11) и (1.12) следует, что последовательность $\{P_n(z)\}_0^\infty$, будучи матричным решением системы (1.8), образует ортогональную систему в $L^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$ (см. (1.7)) с мерой $\Sigma(t):=P_{\mathcal{H}}E_{\mathbf{J}}(t)\upharpoonright\mathcal{H}$, являющейся сужением любой спектральной (не обязательно ортогональной) меры $E_{\mathbf{J}}(t)$ блочной матрицы Якоби $\mathbf{J}$.

М. Крейном [2] (см. также [5]) было показано, что для любых $z \in \mathbb{C}_\pm$ существует матричный предел $H(z) = \lim\limits_{k\to\infty}\Big(\sum\limits_{n=0}^{k} P_n^*(\overline{z})P_n(z)\Big)^{-1}$, где $\operatorname{rank}(H(z)) = n_\pm(\mathbf{J})$. Также им было установлено, что с каждой матрицей Якоби $\mathbf{J}$ ассоциирована некоторая матричная проблема моментов, и эта проблема имеет единственное (нормализованное) решение, если $n_-(\mathbf{J})\cdot n_+(\mathbf{J}) = 0$. Более того, этот случай известен как определенный случай матричной проблемы моментов. Если $n_\pm(\mathbf{J}) = m$ (см. [2]), то ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(\overline{z})P_n(z) =: H^{-1}(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.13}$$

равномерно сходится на компактных подмножествах в $\mathbb{C}$. Заметим, что в этом случае дефектное подпространство есть $\mathfrak{N}_z := \ker(\mathbf{J}^* - zI) = \{\{P_n(z)h\}_0^\infty : h \in \mathbb{C}^p\}$.

Тогда говорят, что для матрицы $\mathbf{J}$ (и соответствующей матричной проблемы моментов) имеет место вполне неопределенный случай (см. [2, 3] и [5, гл. VII, §2]). В этом случае для каждого матричного решения Σ соответствующей проблемы моментов (1.1) ряд (1.13) определяет воспроизводящее ядро подпространства $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$ целых матричных функций, порожденных матричными многочленами $\{P_n(z)\}_0^\infty$ в $L^2(\mathbb{R};\Sigma)$. Известно (см. [2, 3] и [4] при $m = 1$), что подпространство $\widetilde{L}^2_{\mathrm{mat}}(\Sigma;\mathcal{H})$ состоит из целых матричных функций минимального экспоненциального типа: $\lim\limits_{|z|\to\infty}\frac{\ln\|H^{-1}(z)\|}{|z|} = 0$.

Задача вычисления индексов дефекта матриц Якоби является первой главной проблемой, естественным образом возникающей в спектральной теории как таких матриц, так и соответствующих проблем моментов. М.Г. Крейном (см. [2, 3]) было установлено, что матричная проблема моментов, ассоциированная с матрицей Якоби $\mathbf{J}$, имеет единственное решение (нормализованное в определенном смысле) тогда и только тогда, когда одно из чисел n_- или n_+ равно нулю. Этот вопрос привлекает существенное внимание, в частности, в течение последних двадцати лет (см., например, [2, 3, 6–12, 16–18, 20–26, 30]). Особенно выделим недавние работы [31] ($m = 1$) и [7–10] ($m \geqslant 1$), где были найдены новые различные условия самосопряженности блочных матриц Якоби.

В недавних работах [8–11] были установлены некоторые условия дискретности блочных матриц Якоби. Они покрывают ряд предыдущих результатов в скалярном случае ($m = 1$) (см. [13, 14, 19]).

Мы посвящаем эту работу нашему другу, коллеге и замечательному математику Николаю Дмитриевичу Копачевскому, который ушел из жизни 18 мая 2020 г. Он был создателем и душой Крымской осенней математической школы-симпозиума с 1990 г. Эта школа была замечательным математическим явлением с исключительно теплой и неповторимой атмосферой. Каждый из нас провел в ней много незабываемых минут.

2. Условия самосопряженности блочных матриц Якоби

В скалярном случае ($m = 1$) первое условие самосопряженности матрицы Якоби $\mathbf{J}$ получено Карлеманом (см. [4, 5]) и в настоящее время широко известно. Этот результат был обобщен на матричный случай Березанским [5, теорема VII.2.9] и выглядит так.

Теорема 2.1 (см. [5], тест Карлемана)**.** *Предположим, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathcal{B}_j\|^{-1} = +\infty. \tag{2.1}$$

Тогда (*минимальный*) *оператор Якоби* $\mathbf{J}$ *самосопряжен, т. е.* $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\min} = \mathbf{J}_{\max} = \mathbf{J}^*$.

Условие (2.1) не является необходимым для самосопряженности оператора $\mathbf{J}$ даже в скалярном случае ($m = 1$). Для демонстрации этого факта рассмотрим блочную матрицу Якоби:

$$\mathbf{J}' = \begin{pmatrix} 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_0 & 0 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & b_1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Утверждение 2.1. *Пусть* $\mathbf{J}'$ *— матрица Якоби вида* (2.2) *с произвольной последовательностью* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. *Тогда матрица* $\mathbf{J}'$ *является самосопряженной, т. е.* $n_\pm(\mathbf{J}') = 0$.

Доказательство. Из уравнений (1.11) при $\mathcal{A}_n = 0$ и $\mathcal{B}_n = b_n$ или из выражений (1.12) следует, что $P_{2j-1}(0) = Q_{2j}(0) = 0$, $P_{2j}(0) = (-1)^j b_{2j-1}^{-1} b_{2j-2} b_{2j-3}^{-1} \dots b_1^{-1} b_0$, $Q_{2j+1}(0) = (-1)^j b_{2j}^{-1} b_{2j-1} b_{2j-2}^{-1} \dots b_1 b_0^{-1}$. Учитывая эти соотношения и вид матрицы (2.2), получаем $P_{2j}(0) = (-1)^j$, $Q_{2j+1}(0) = (-1)^j$ и, следовательно, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(P_n^2(0) + Q_n^2(0)) = \infty$. Согласно [4, с. 108], это соотношение эквивалентно самосопряженности матрицы $\mathbf{J}'$ (см. также [27, утверждение 10] для доказательства этого результата методами теории расширений). □

Однако условие (2.1) является точным для некоторых классов матриц Якоби. Более точно, Березанским было показано (см. [5, теорема VII.1.5] и [4, гл. I, с. 39]), что если $m = 1$ и условие (2.1) нарушено, то при определенных дополнительных предположениях об элементах $\mathcal{A}_n$ и $\mathcal{B}_n$ оператор $\mathbf{J}$ удовлетворяет $n_\pm(\mathbf{J}) = 1$. Матричный вариант этого результата, а также его обобщения будут рассмотрены в разделе 3.

Следующий результат о самосопряженности был впервые получен Петропулу и Веласкесом [31] в скалярном случае. Далее он был обобщен на матричный случай Бройтигам и Мирзоевым [7, теоремы 12–16].

Теорема 2.2 (см. [7]). *Оператор Якоби* $\mathbf{J}$, *индуцированный матрицей Якоби* (1.9), *самосопряжен, если элементы* $\mathcal{A}_n$ *обратимы и выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\|\mathcal{B}_n\| F_{1,n}} = \infty$, $F_{1,n} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|$;

(ii) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\|\mathcal{B}_n\| F_{2,n}} = \infty$, *где* $F_{2,n} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|\big(\|\mathcal{A}_{n-1}^{-1}\mathcal{B}_{n-2}^*\| + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}\|\big) + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|\big(\|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_n^*\| + \|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}\|\big)$;

(iii) *если существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что при* $n \geqslant N-1$ *имеем* $\|\mathcal{A}_{n-1}^{-1}\mathcal{B}_{n-1}\|^2 + \|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_n^*\|^2 < \frac{1}{2}$, $n \geqslant N$;

(iv) *если существует* $N \in \mathbb{N}$ *такое, что при* $n \geqslant N-2$ *имеем* $\|\mathcal{A}_{n-1}^{-1}\mathcal{B}_{n-1}\|^2\big(\|\mathcal{A}_{n-2}^{-1}\mathcal{B}_{n-2}\|^2 + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|^2\big) + \|\mathcal{A}_{n+1}^{-1}\mathcal{B}_n^*\|^2\big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^2 + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^*\|^2\big) < \frac{1}{4}$, $n \geqslant N$.

Доказательство этого результата в [7] существенно опирается на технику матричных ортогональных многочленов второго рода. Последние определяются как последовательность $\{Q_n(\cdot)\}_1^\infty$, образующая второе матричное решение разностной системы (1.11), удовлетворяющее начальным условиям $Q_0(\cdot) := \mathbb{O}_m$, $Q_1(\cdot) := \mathcal{B}_0^{-1}$.

Следующий результат о самосопряженности был получен недавно первыми двумя авторами в [9,10]. Он расширяет и усиливает теорему 2.2.

Теорема 2.3 (см. [9,10]). *Пусть* $\mathbf{J}$ *— блочная матрица Якоби вида* (1.9), *и пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n, \dots\}$ *— ее блочно-диагональная часть с* $\ker\mathcal{A} = \{0\}$. *Положим также, что при некотором* $N \in \mathbb{N}_0$

$$a_1(N) := \sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|\Big) < \infty, \tag{2.3}$$

$$a_2(N) := \sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^*\|\Big) < \infty. \tag{2.4}$$

Если $a_1(N)a_2(N) \leqslant 1$, *то оператор* $\mathbf{J}$ *существенно самосопряжен в* $\operatorname{dom}\mathcal{A}(\subset l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m))$. *При этом* $\mathbf{J}$ *самосопряжен в* $\operatorname{dom}\mathbf{J} = \operatorname{dom}\mathcal{A}$, *если неравенство строгое*: $a_1(N)a_2(N) < 1$.

Доказательство этой теоремы основано на тесте Шура и теореме Като—Реллиха.

Следствие 2.1 (см. [9,10]). *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $a_1(N) \leqslant 1$ *и* $a_2(N) \leqslant 1$,

(ii) $a_1(N) \leqslant 1$ *и* $a_2(N) < 1$ ($a_1(N) < 1$ *и* $a_2(N) \leqslant 1$).

Тогда (*минимальный*) *блочный оператор Якоби* $\mathbf{J}$ *самосопряжен.*

Следствие 2.2 (см. [9,10]). *Пусть* $\mathbf{J}$ — *блочная матрица Якоби вида* (1.9), *пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_n, \dots\}$, $\ker \mathcal{A} = \{0\}$, *и пусть* $s \in [1; +\infty)$. *Положим также, что для некоторого* $N \in \mathbb{N}_0$ *выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

$$\text{(i)}\quad b_1(N,s) := \sup_{n \geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\|^s\Big) \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{2.5}$$

$$\text{(ii)}\quad b_2(N,s) := \sup_{n \geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^*\|^s\Big) \leqslant \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{2.6}$$

$$\text{(iii)}\quad \sup_{n \geqslant N}\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\| \leqslant \frac{1}{2}, \qquad \sup_{n \geqslant N}\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^*\| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}$ *существенно самосопряжен в* $\operatorname{dom}\mathcal{A}$. *При этом* $\mathbf{J}$ *самосопряжен в* $\operatorname{dom}\mathbf{J} = \operatorname{dom}\mathcal{A}$, *если неравенства* (2.5) *и* (2.6) *строгие.*

Замечание 2.1.

(i) Заметим, что в соответствии с неравенством о степенных средних функции $b_1(N,s)$ и $b_2(N,s)$ монотонно возрастают по s, т. е. $s_1 < s_2 \Longrightarrow b_j(N,s_1) < b_j(N,s_2)$, $j \in \{1,2\}$, следовательно, условия (2.5) и (2.6) становятся более ограничительными при возрастании s. В частности, условия (2.5) и (2.6) более ограничительны, чем условия (2.3) и (2.4), соответственно.

(ii) Следствие 2.2 (ii) при $s = 2$ в случае строгого неравенства в (2.6) было доказано другим методом в [7] (теорема 2.2 (iii)).

Наконец, перейдем к недавним результатам по самосопряженности оператора $\mathbf{J}$, полученным недавно Свидерским [33].

Теорема 2.4 (см. [33, теорема 1]). *Положим* $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{B}_n^{-1}\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\|\mathcal{B}_n^{-1}\mathcal{A}_n\| = 0$, *а также*[1] $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\|[\mathcal{B}_{n+1}\mathcal{B}_{n+1}^* - \mathcal{B}_n^*\mathcal{B}_n]^-\|}{\|\mathcal{B}_n\|^2} < \infty$; $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\|\mathcal{B}_n\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{A}_n\mathcal{B}_n\|}{\|\mathcal{B}_n\|^2} < \infty$; $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\|\mathcal{B}_n\|^2} = \infty$. *Тогда оператор Якоби* $\mathbf{J}$ *самосопряжен.*

Далее при $m = 1$ рассмотрим оператор Якоби $\mathbf{J}$, ассоциированный с последовательностями вида

$$\mathcal{B}_{kN+i} = \beta_i\tilde{\mathcal{B}}_k, \quad \mathcal{A}_{kN+i} = \alpha_i\tilde{\mathcal{B}}_k, \quad (i = 0,1,\dots,N-1;\ k \geqslant 0), \tag{2.8}$$

где α и β — N-периодические последовательности и $\tilde{\mathcal{B}}$ — положительная последовательность. Последовательности α и β называются *модулирующими последовательностями*. Оказывается, что спектральные свойства оператора $\mathbf{J}$ зависят от следа такой матрицы:

$$\mathcal{F}(0) := \prod_{i=1}^{N}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} & -\frac{\alpha_i}{\beta_i}\end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Следующая теорема показывает, что в такой постановке оператор $\mathbf{J}$ всегда будет самосопряженным, независимо от последовательности $\tilde{\mathcal{B}}$.

Теорема 2.5 (см. [32, теорема A]). *Пусть* $m = 1$, *и пусть число* N *положительно. Положим* $\mathcal{F}(0) = \gamma\mathbb{I}$ *для некоторого* $|\gamma| = 1$, *где матрица* $\mathcal{F}(0)$ *определена в* (2.9). *Тогда оператор* $\mathbf{J}$, *ассоциированный с последовательностями* (2.8), *всегда самосопряжен и* $0 \notin \sigma_p(\mathbf{J})$.

[1] Для любого оператора $X = X^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ положим $X^- = XE_X(-\infty,0)$ где $E_X(-\infty,0)$ — спектральная проекция.

3. Блочные матрицы Якоби с максимальными индексами дефекта

В этой главе будут даны некоторые недавние результаты о матрицах $\mathbf{J}$ с максимальными индексами дефекта $n_{\pm}(\mathbf{J}) = m$. Первый результат в этом направлении был получен Березанским (см. [5, гл. VII, теорема 1.5]) и гласит следующее.

Теорема 3.1 (см. [5]). *Пусть $m = 1$ и пусть $\mathbf{J}$ — скалярная матрица Якоби* (1.9) *с элементами $a_n = \mathcal{A}_n \in \mathbb{R}$ и $b_n = \mathcal{B}_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$. Положим $|a_n| \leqslant C$ и $b_{n-1} \cdot b_{n+1} \leqslant b_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $n_{\pm}(\mathbf{J}) = 1$ при нарушении условия Карлемана* (2.1), *т. е.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^{-1} < +\infty$.

Следующий результат получен Костюченко и Мирзоевым под влиянием теоремы 3.1 и может считаться ее далеко идущим обобщением.

Теорема 3.2 (см. [24, теорема 4]). *Положим, что $\|\mathcal{A}_n\| \leqslant C$, $n \in \mathbb{N}_0$ и*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \|\mathcal{B}_j^{*-1}\mathcal{B}_{j+1}{\mathcal{B}_{j+2}^{*}}^{-1} \dots \mathcal{B}_{j+2s-1}{\mathcal{B}_{j+2s}^{*}}^{-1}\| < +\infty.$$

Тогда индексы дефекта оператора Якоби $\mathbf{J}$ максимальны, т. е. $n_{\pm}(\mathbf{J}) = m$.

Положим, что обобщенная симметричная матрица Якоби $\mathbf{J}_k^{(0)}$ имеет только две ненулевых диагонали. А именно, пусть элементы $\mathcal{C}_{ij}$ этой матрицы удовлетворяют следующим условиям: $\mathcal{C}_{ij} = 0$, если $|i - j| \neq k$, $\mathcal{C}_{i,i+k} = \mathcal{B}_i$, и $\mathcal{C}_{ij} = \mathcal{C}_{ji}^{*}$, $i, j \in \mathbb{N}_0$, где k — известное положительное целое число и $\mathcal{B}_i$ — последовательность обратимых $m \times m$ матриц.

Теорема 3.3 (см. [25, теорема 1.1]). *Матрица Якоби $\mathbf{J}_k^{(0)}$ имеет максимальные индексы дефекта тогда и только тогда, когда матричные элементы $\mathcal{B}_i$ удовлетворяют условиям* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_{(2j-1)k+s}^{-1}\mathcal{B}_{(2j-2)k+s}^{*} \dots \mathcal{B}_{k+s}^{-1}\mathcal{B}_s^{*}\|^2 < +\infty$ *при* $s = 0, 1, \dots, 2k - 1$.

Следующий результат является прямым обобщением теоремы Березанского 3.1 на случай блочных матриц и совпадает с ней при $m = 1$ и $k = 1$.

Следствие 3.1 (см. [25, следствие 1.3]). *Положим, что неравенства $\|\mathcal{B}_{j-k}\| \cdot \|\mathcal{B}_{j+k}\| \leqslant \|\mathcal{B}_j^{-1}\|^{-2}$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_j\|^{-1} < +\infty$ выполнены, начиная с некоторого $j > k$. Тогда матрица Якоби $\mathbf{J}_k^{(0)}$ имеет максимальные индексы дефекта.*

Согласно [26], введем матрицы $\mathcal{C}_n$, полагая $\mathcal{C}_0 := \mathcal{B}_1^{*-1}$, $\mathcal{C}_1 := \mathbb{I}_m$, и

$$\mathcal{C}_n = \begin{cases} (-1)^j \mathcal{B}_{2j-1}^{-1}\mathcal{B}_{2j}^{*} \dots \mathcal{B}_2^{*}\mathcal{B}_1^{-1}, & \text{если } n = 2j, \\ (-1)^j \mathcal{B}_{2j}^{-1}\mathcal{B}_{2j-1}^{*} \dots \mathcal{B}_2^{-1}\mathcal{B}_1^{*}, & \text{если } n = 2j+1, \end{cases} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Теорема 3.4 (см. [26]). *Пусть последовательность $\{\mathcal{C}_n\}_0^{\infty}$ задана выражением* (3.1). *Если выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_n\|^2 < +\infty \qquad и \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \|\mathcal{C}_n^{*}\mathcal{A}_n\mathcal{C}_n\| < +\infty, \tag{3.2}$$

то для матрицы $\mathbf{J}$ вида (1.9) *имеет место вполне неопределенный случай, т. е. $n_{\pm}(\mathbf{J}) = m$.*

Следствие 3.2 (см. [26, следствие 1]). *Пусть элементы матрицы $\mathbf{J}$ удовлетворяют условиям* $\|\mathcal{B}_{n-1}\| \cdot \|\mathcal{B}_{n+1}\| \leqslant \|\mathcal{B}_n^{-1}\|^{-2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_n\|^{-1} < +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{A}_n\| \cdot \|\mathcal{B}_n\|^{-1} < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда $n_{\pm}(\mathbf{J}) = m$.*

Следствие 3.2 является обобщением теоремы, полученной Березанским (см. [5, гл. VIII, §1, п. 2, теорема 1.5]) о вполне неопределенности матриц Якоби со скалярными элементами.

Теорема 3.5 (см. [26, теорема 1]). *Пусть элементы матрицы $\mathbf{J}$ удовлетворяют условиям* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\|\mathcal{C}_n\|^2 < +\infty$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} n\|\mathcal{C}_{2n+i}^{*}\mathcal{A}_{2n+i}\mathcal{C}_{2n+i}\| < \frac{1}{2}$ $(i = 0, 1)$. *Тогда для блочной матрицы Якоби $\mathbf{J}$ имеет место вполне неопределенный случай, т. е. $n_{\pm}(\mathbf{J}) = m$.*

4. Матрицы Якоби с промежуточными индексами дефекта

В этом разделе представлены некоторые результаты о промежуточных индексах дефекта блочных матриц Якоби $\mathbf{J}$. Сначала отметим, что в соответствии с результатом, полученным Дюкаревым [16], для любой допустимой пары неотрицательных целых чисел $n_\pm \leqslant m$ существует блочная матрица Якоби $\mathbf{J}$, где $n_\pm(\mathbf{J}) = \mathbf{n}_\pm$.

Следующий результат принадлежит Костюченко и Мирзоеву [24, теорема 3] (см. также недавнюю работу [7]).

Теорема 4.1 (см. [7, 24])**.** *Пусть выполнено одно из условий*:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_n^{-1}\| = +\infty$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_{n+1}^{-1}\mathcal{A}_{n+1}\mathcal{B}_n^{-1}\| = +\infty$;

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{B}_{n+1}^{-1}(\mathcal{A}_{n+2}\mathcal{B}_{n+1}^{-1}\mathcal{A}_{n+1} - \mathcal{B}_{n+1}^{*})\mathcal{B}_n^{-1}\| = +\infty.$

Тогда индексы дефекта оператора Якоби $\mathbf{J}$ *не являются максимальными.*

В случае $m = 1$ условие (i) теоремы 4.1 совпадает с условием Карлемана (2.1), а условие (ii) совпадает с условием Денниса—Уолла (см. [4, гл. I, Дополнения и задачи, 2, с. 37]). В работе [7] можно найти другие более громоздкие формулы, обеспечивающие то же утверждение.

Следующий результат был получен Дюкаревым в [17].

Теорема 4.2 (см. [17, теорема 2])**.** *Пусть целые числа* $m \geqslant 1$ *и* $m_1 \geqslant 0$ *удовлетворяют условию* $0 \leqslant m_1 \leqslant m$, *а диагональные элементы матриц* $\widetilde{\mathcal{B}}_n$ *и* $\mathcal{R}_n$ *определяются формулами*

$$\widetilde{\mathcal{B}}_n = \operatorname{diag}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1}}_{m_1}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{m-m_1}\Bigg), \quad n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_0 = \mathbb{I}_m, \quad \mathcal{R}_n = \sqrt{\mathbb{I}_m + \widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}^2}, \quad n \geqslant 1.$$

Далее, пусть блоки $\mathcal{A}_n$ *и* $\mathcal{B}_n$ *матриц Якоби* $\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}}$(1.9) *имеют вид* $\mathcal{A}_n = \mathbb{O}_m$, $n \geqslant 0$, $\mathcal{B}_0 = \widetilde{\mathcal{B}}_0$, $\mathcal{B}_n = \widetilde{\mathcal{B}}_{n-1}^{-1}\mathcal{R}_n\widetilde{\mathcal{B}}_n^{-1}$, $n \geqslant 1$. *Тогда* $n_\pm(\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}}) = m_1$.

5. Дискретность спектра блочных матриц Якоби

В этом разделе представлены недавние результаты о дискретности спектра блочных матриц Якоби.

Теорема 5.1 (см. [32, теорема B])**.** *Пусть* $m = 1$, *и пусть выполнены предположения теоремы* 2.5. *Если* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{\tilde{\mathcal{B}}_k} = 0$, *то* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathbf{J}) = \varnothing$.

Заключение теоремы 5.1 было известно только при $\alpha_n \equiv 0$ и $\beta_n \equiv 1$. В частности, это доказали Домбровски и Педерсен [15].

Как обычно, через $\mathcal{S}_p(\mathfrak{H})$ обозначим идеал Неймана—Шатена в $\mathfrak{H}$.

Теорема 5.2 (см. [9, 10])**.** *Пусть* $\mathbf{J}$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с блочной матрицей Якоби* (1.9) *в* $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$, *и пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots\}$, $\ker \mathcal{A} = \{0\}$. *Предположим, что* $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$ *и* $p \in (0, \infty]$. *Пусть также* $a_1(N)$ *и* $a_2(N)$ *определены в* (2.3) *и* (2.4), *соответственно, и пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $\sqrt{a_1(N)a_2(N)} < 1$;

(ii) $a_1(N) \leqslant 1$ *и* $a_2(N) < 1$ ($a_1(N) < 1$ *и* $a_2(N) \leqslant 1$);

(iii) *для некоторых* $N \in \mathbb{N}_0$ *и* $s \in [1; +\infty)$

$$\sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_{n-1}^{*}\|^s\Big) < \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{5.1}$$

(iv) *для некоторых* $N \in \mathbb{N}_0$ *и* $s \in [1; +\infty)$

$$\sup_{n\geqslant N}\Big(\|\mathcal{A}_n^{-1}\mathcal{B}_n\|^s + \|\mathcal{A}_{n+2}^{-1}\mathcal{B}_{n+1}^{*}\|^s\Big) < \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{5.2}$$

(v) *для некоторого* $N \in \mathbb{N}_0$

$$\sup_{n \geqslant N} \|\mathcal{A}_n^{-1} \mathcal{B}_n\| < \frac{1}{2}, \qquad \sup_{n \geqslant N} \|\mathcal{A}_n^{-1} \mathcal{B}_{n-1}^*\| < \frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}$ *самосопряжен и* $\mathbf{J}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

Как обычно, обозначим модуль матрицы $\mathcal{A}_n$ через $|\mathcal{A}_n| := \sqrt{\mathcal{A}_n^2}$.

Теорема 5.3 (см. [10]). *Пусть* $\mathbf{J}$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с блочной матрицей Якоби вида* (1.9) *в* $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$, *и пусть* $\mathcal{A} := \operatorname{diag}\{\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots\} (= \mathcal{A}^*)$.

(1) *Положим* $0 \in \rho(\mathcal{A})$, $s \in [1; +\infty)$, *и пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $$\limsup_{n\to\infty} \Big(\big\| |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_n \cdot |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \big\| + \big\| |\mathcal{A}_{n+2}|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_{n+1}^* \cdot |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \big\| \Big) < 1; \tag{5.4}$$

(ii) $$\limsup_{n\to\infty} \Big(\big\| |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_n \cdot |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \big\|^s + \big\| |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_{n-1}^* \cdot |\mathcal{A}_{n-1}|^{-1/2} \big\|^s \Big) < \frac{1}{2^{s-1}}; \tag{5.5}$$

(iii) $$\limsup_{n\to\infty} \big\| |\mathcal{A}_{n+1}|^{-1/2} \cdot \mathcal{B}_n^* \cdot |\mathcal{A}_n|^{-1/2} \big\| < \frac{1}{2}. \tag{5.6}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}$ *является симметричным в* $l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m)$ *с равными индексами дефекта и допускает самосопряженное расширение* $\widetilde{\mathbf{J}} = \widetilde{\mathbf{J}}^*$ *с* $0 \in \rho(\widetilde{\mathbf{J}})$.

(2) *Если, кроме того,* $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$ *для некоторого* $p \in (0; \infty]$, *то резольвента любого самосопряженного расширения лежит в классе* $\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$, *в частности,* $\widetilde{\mathbf{J}}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$. *Более того, если* $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$, *то* $\mathbf{J}^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

(3) *Если оператор* $\mathcal{A}$ *имеет дискретный спектр, то любое самосопряженное расширение оператора* $\mathbf{J}$, *включая* $\widetilde{\mathbf{J}}$, *также имеет дискретный спектр. В частности, если* $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$, *то его спектр дискретен.*

В скалярном случае пункт (iii) теоремы 5.3 представляет собой результат Кожухари и Янаса [14] (см. также [13]).

Следствие 5.1 (см. [13,14]). *Пусть* $m = 1$, *и пусть* $\mathbf{J}$ — *скалярная матрица Якоби вида* (1.9) *с элементами* $a_n = \mathcal{A}_n \in \mathbb{R}$ *и* $b_n = \mathcal{B}_n \in \mathbb{C}$. *Положим также, что*

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty \qquad \text{и} \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{|b_n|^2}{|a_n a_{n+1}|} < \frac{1}{4}. \tag{5.7}$$

Если $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$, *то его спектр дискретен.*

Замечание 5.1.

(i) Следствие 5.1 было получено Кожухари и Янасом [14] другим способом. Иначе говоря, условие дискретности в скалярном случае можно найти в [13]. Если $\mathbf{J} \neq \mathbf{J}^*$, то $n_\pm(\mathbf{J}) = 1$ и каждое самосопряженное расширение $\mathbf{J}$ дискретно. В этом случае условия (5.7) теряют силу для дискретности.

(ii) В скалярном случае ($m = 1$) дискретность спектра матрицы Якоби $\mathbf{J} = \mathbf{J}^*$ была доказана Янасом и Набоко в [19] с использованием другого метода при условиях $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n^2 + b_{n-1}^2}{a_n^2} < \frac{1}{2}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Отметим, что первое условие означает дискретность диагональной части $\mathcal{A}$ матрицы $\mathbf{J}$, а второе условие совпадает с условием (5.1) для $s = 2$.

(iii) В скалярном случае ($m = 1$) другое условие дискретности матрицы Якоби $\mathbf{J}$ было установлено Свидерски в недавней работе [32, теорема B (c)].

(iv) Следует отметить, что условия (5.4)–(5.6) не гарантируют самосопряженности матрицы $\mathbf{J}$ в общем случае. Более того, для любых значений $k \leqslant m$ существуют матрицы Якоби $\mathbf{J}$ с нетривиальными индексами $n_+(\mathbf{J}) = n_-(\mathbf{J}) = k$, удовлетворяющие (5.6). Простые примеры таких матриц $\mathbf{J}$ естественным образом возникают в связи с операторами Дирака с точечными взаимодействиями (см. утверждение 6.4 ниже).

6. Индексы дефекта и дискретность спектра некоторых классов матриц Якоби

В этом разделе, следуя недавним работам [9–11], рассмотрим самосопряженность и дискретность некоторых классов блочных матриц Якоби. В [9–11, 20, 21, 23] показано, что определенные спектральные свойства матриц Якоби этих классов строго коррелируют со свойствами операторов Шредингера и Дирака с точечными взаимодействиями.

6.1. Матрицы Якоби классов $\mathcal{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ и $\mathcal{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$. Обозначим через $\mathcal{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ класс блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})=\begin{pmatrix} \frac{1}{r_1^2}\widetilde{\alpha}_1 & \frac{1}{r_1r_2d_2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{1}{r_1r_2d_2}\mathbb{I}_m & \frac{1}{r_2^2}\widetilde{\alpha}_2 & \frac{1}{r_2r_3d_3}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{1}{r_2r_3d_3}\mathbb{I}_m & \frac{1}{r_3^2}\widetilde{\alpha}_3 & \frac{1}{r_3r_4d_4}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & -\frac{1}{r_3r_4d_4}\mathbb{I}_m & \frac{1}{r_4^2}\widetilde{\alpha}_4 & \frac{1}{r_4r_5d_5}\mathbb{I}_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Здесь $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}(\subset\mathbb{R}_+)$, $r_n:=\sqrt{d_n+d_{n+1}}$, и

$$\widetilde{\alpha}_n:=\alpha_n+\Big(\frac{1}{d_n}+\frac{1}{d_{n+1}}\Big)\mathbb{I}_m,\qquad \alpha_n=\alpha_n^*\subset\mathbb{C}^{m\times m},\quad n\in\mathbb{N}. \tag{6.1}$$

Применяя теоремы 5.2 и 5.3 к матрицам $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$, получаем следующие два результата.

Теорема 6.1 (см. [9, 10]). *Пусть* $\mathcal{A}:=\operatorname{diag}\big\{\frac{\widetilde{\alpha}_1}{r_1^2},\frac{\widetilde{\alpha}_2}{r_2^2},\dots\big\}$, *где* $\widetilde{\alpha}_n$ *определено в* (6.1) *и* $\ker\mathcal{A}=\{0\}$. *Положим также, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

$$\text{(i)}\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{r_n}{k_n}\big\|\widetilde{\alpha}_n^{-1}\big\|<\frac{1}{2},\quad k_n:=\min\{r_{n-1}d_n;r_{n+1}d_{n+1}\}; \tag{6.2}$$

$$\text{(ii)}\quad \limsup_{n\to\infty} r_n^s\Big(\frac{1}{r_{n-1}^sd_n^s}+\frac{1}{r_{n+1}^sd_{n+1}^s}\Big)\big\|\widetilde{\alpha}_n^{-1}\big\|^s<\frac{1}{2^{s-1}},\quad s\in[1;+\infty); \tag{6.3}$$

$$\text{(iii)}\quad \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{r_{n+1}^s}\left(\frac{r_n^s}{d_{n+1}^s}\big\|\widetilde{\alpha}_n^{-1}\big\|^s+\frac{r_{n+2}^s}{d_{n+2}^s}\big\|\widetilde{\alpha}_{n+2}^{-1}\big\|^s\right)<\frac{1}{2^{s-1}},\quad s\in[1;+\infty). \tag{6.4}$$

Тогда матрица Якоби $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *является самосопряженной, а ее спектр дискретен.*

Кроме того, если какое-либо из условий (6.2), (6.3), (6.4) *выполняется при замене знака неравенства на знак равенства, то матрица* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *будет самосопряженной.*

Теорема 6.2 (см. [10]). *Пусть диагональ* $\mathcal{A}^{(1)}:=\operatorname{diag}\big\{\frac{\widetilde{\alpha}_1}{r_1^2},\frac{\widetilde{\alpha}_2}{r_2^2},\dots\big\}$ *матрицы Якоби* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *имеет дискретный спектр,* $\ker\mathcal{A}^{(1)}=\{0\}$, *и пусть* $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{d_{n+1}}\big\||\widetilde{\alpha}_n|^{-1/2}\cdot|\widetilde{\alpha}_{n+1}|^{-1/2}\big\|<\frac{1}{2}$. *Тогда*:

(1) $n_+(\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}))=n_-(\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}))\leqslant m$, *и спектр любого самосопряженного расширения матрицы* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *дискретен. В частности, матрица* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *имеет дискретный спектр, когда она самосопряжена.*

(2) *Если, кроме того,* $\{d_n\}_1^\infty\notin l^2(\mathbb{N})$, *то матрица* $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжена и дискретна.*

Обозначим через $\mathcal{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H},m)$ множество, состоящее из блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})=\begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_p & -\frac{1}{d_1^2}\mathbb{I}_p & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_p & \frac{\alpha_1}{d_2} & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_p & -\frac{1}{d_2^2}\mathbb{I}_p & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{1}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_p & \frac{\alpha_2}{d_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Применяя снова теоремы 5.2 и 5.3 к матрицам $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$, приходим к следующим результатам.

Теорема 6.3 (см. [10,11]). *Пусть диагональная матрица* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$ (*часть диагонали* $\mathcal{A}^{(2)}$ *матрицы* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})(\in \mathcal{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}, m))$ *имеет дискретный спектр,* $\ker \mathcal{A}' = \{0\}$, *и пусть*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\left\||\alpha_n|^{-1/2}\right\|}{d_n^{1/2}} < \frac{1}{2}, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\left\||\alpha_n|^{-1/2}\right\|}{d_{n+1}^{1/2}} < \frac{1}{2}. \tag{6.5}$$

Тогда:

(1) $n_+(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_-(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m$, *и спектр любого самосопряженного расширения матрицы* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *дискретен. В частности, матрица* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *имеет дискретный спектр, когда она самосопряжена.*

(2) *Если, кроме того,* $\{d_n\}_1^\infty \notin l^2(\mathbb{N})$, *тогда матрица* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *самосопряжена и ее спектр дискретен.*

Утверждение 6.1 (см. [10]). *Пусть* $\{d_n\}_{n=1}^\infty \in l^{2p}(\mathbb{N})$ *при* $p \in (\frac{1}{2}, \infty]$, $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$, *и пусть выполнены условия* (6.5). *Если также* $(\mathcal{A}')^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$, *то справедливы следующие утверждения*:

(i) $n_+(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) = n_-(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})) \leqslant m$;

(ii) $(\widetilde{\mathbf{J}}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$ *для любого самосопряженного расширения* $\widetilde{\mathbf{J}}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ *матрицы* $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$.

Более того, если $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) = \left(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})\right)^*$, *то* $(\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H}) - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

6.2. Матрицы Якоби классов $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ **и** $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$**.** Обозначим через $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ класс блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}d_2^{1/2}}\mathbb{I}_m & \frac{\alpha_1}{d_2} & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \frac{\alpha_2}{d_3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Здесь $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}(\subset \mathbb{R}_+)$, $\alpha = \{\alpha_n\}_1^\infty \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha_n = \alpha_n^*$ и $\nu(x) := \frac{1}{\sqrt{1+(c^2x^2)^{-1}}} = \frac{cx}{\sqrt{1+c^2x^2}}$.

Далее, обозначим через $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$ класс блочных матриц Якоби вида

$$\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}) := \begin{pmatrix} \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \frac{\nu(d_1)}{d_1^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu^2(d_1)}{d_1^3}(\beta_1 + d_1\mathbb{I}_m) & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}\,{d_2}^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_1)}{d_1^{3/2}{d_2}^{1/2}}\mathbb{I}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^2}\mathbb{I}_m & -\frac{\nu^2(d_2)}{d_2^3}(\beta_2 + d_2\mathbb{I}_m) & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \frac{\nu(d_2)}{d_2^{3/2}d_3^{1/2}}\mathbb{I}_m & \dots \\ \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \mathbb{O}_m & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{6.7}$$

6.2.1. Матрицы из классов $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ *и* $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$ *с максимальными индексами дефекта.* Сначала обсудим условия на матрицы из класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$, при которых они имеют максимальные индексы дефекта.

Теорема 6.4 (см. [8,10,12]). *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с матрицей Якоби вида* (6.6). *Также пусть последовательность* $\alpha := \{\alpha_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$

самосопряженных матриц удовлетворяет условию

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{c} \|\alpha_k\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}\right)^2 < +\infty. \tag{6.8}$$

Тогда оператор $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ имеет максимальные индексы дефекта, $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$.

Следствие 6.1 (см. [10]). *Пусть $\mathbf{J}_{X,0}$ — минимальный оператор Якоби, ассоциированный с матрицей Якоби (6.6) с нулевой последовательностью $\{\alpha_n\}_1^\infty \equiv \mathbb{O}$. Тогда оператор $\mathbf{J}_{X,0}$ имеет максимальные индексы дефекта тогда и только тогда, когда $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$.*

Аналогичные результаты справедливы для матриц из класса $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}, m)$.

Теорема 6.5 (см. [8,10]). *Пусть $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — минимальный оператор Якоби, ассоциированный в $l^2(\mathbb{N}_0;\mathbb{C}^m)$ с матрицей (6.7). Предположим, что последовательность $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=2}^{\infty} d_n \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + c\, \|\beta_k\|_{\mathbb{C}^{m\times m}}\right)^2 < +\infty. \tag{6.9}$$

Тогда индексы дефекта матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ максимальны, т. е. $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$.

Следствие 6.2 (см. [10]). *Индексы дефекта матрицы $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ максимальны при $\{d_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N})$ и $\{\beta_n\}_1^\infty \in l^1(\mathbb{N};\mathbb{C}^{m\times m})$.*

Следствие 6.3 (см. [10]). *Индексы дефекта матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ максимальны, если $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} (1 + c\|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}})^2 < 1$. В частности, $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$, когда выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

(i) $\limsup_{n\to\infty}(d_{n+1}/d_n) = 0$ *и* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < \infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(d_{n+1}/d_n) =: (1/d)$ *при* $d > 1$ *и* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} < c(\sqrt{d} - 1)$.

Замечание 6.1. При $\beta = \mathbb{O}_m$ следствие 6.1 справедливо, если матрицу Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ заменить на $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$.

Считая, что $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, естественно заменить последовательность $\{\nu(d_n)\}$ в (6.7) на эквивалентную последовательность $\{cd_n\}$ и получить следующую матрицу:

$$\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_p & \frac{c}{d_1}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \frac{c}{d_1}\mathbb{I}_p & -\frac{c^2}{d_1}(\beta_1 + d_1\mathbb{I}_p) & \frac{c}{(d_1 d_2)^{1/2}}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \frac{c}{(d_1 d_2)^{1/2}}\mathbb{I}_p & \mathbb{O}_p & \frac{c}{d_2}\mathbb{I}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{c}{d_2}\mathbb{I}_p & -\frac{c^2}{d_2}(\beta_2 + d_2\mathbb{I}_p) & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \frac{c}{(d_2 d_3)^{1/2}}\mathbb{I}_p & \dots \\ \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \mathbb{O}_p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Утверждение 6.2 (см. [8,10]). *Пусть матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D})$ заданы формулами* (6.7) *и* (6.10)*, соответственно. Пусть также $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{d_{n-1}^2}{d_n} = 0$. Тогда*:

(i) $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = n_\pm(\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))$;

(ii) *в частности, если последовательность $\beta := \{\beta_n\}_1^\infty (\subset \mathbb{C}^{m\times m})$ удовлетворяет условию* (6.9)*, то $n_\pm(\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$.*

6.2.2. Самосопряженность и дискретность спектра матриц из класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$.

Теорема 6.6 (см. [10,11]). *Пусть $\{d_n\}_{n=1}^\infty \notin l^1(\mathbb{N})$. Пусть также спектр диагональной матрицы $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$ дискретен и выполнено условие*

$$\limsup_{n\to\infty} \||\alpha_n|^{-1/2}\| < \frac{1}{2\sqrt{c}}. \tag{6.11}$$

Тогда оператор Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ самосопряжен в $l^2(\mathbb{N},\mathbb{C}^m)$ и его спектр дискретен.

Отметим, что теперь условие (5.6) превращается в условие (6.11).

Теорема 6.7 (см. [10]). *Пусть диагональная часть* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$ *дискретна, и пусть* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$. *Если условие* (6.11) *выполнено, то* $n_+(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = n_-(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) \leqslant m$, *и спектр каждого самосопряженного расширения оператора* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *дискретен. В частности, если* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) = \mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})^*$, *то спектр этого оператора дискретен.*

Утверждение 6.3 (см. [10]). *Пусть* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$, *и пусть* $\mathcal{A}' := \operatorname{diag}\left\{\frac{\alpha_1}{d_2}, \frac{\alpha_2}{d_3}, \dots\right\}$. *Предположим, что* $(\mathcal{A}')^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$. *Кроме того, если выполнено условие* (6.11), *то резольвента любого самосопряженного расширения* $\widetilde{\mathbf{J}}_{X,\alpha}$ *оператора* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *принадлежит классу* $\mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$. *Более того, если* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) = (\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))^*$, *то* $(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}) - i\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{S}_p(l^2(\mathbb{N}_0; \mathbb{C}^m))$.

Теорема 6.4 позволяет построить *симметричный, но не самосопряженный* оператор Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$, который в то же время удовлетворяет условию (5.6) (см. замечание 5.1 (iv)).

Утверждение 6.4 (см. [10]). *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ — *минимальный оператор Якоби, ассоциированный с матрицей* (6.6), *и пусть* $d_n = \frac{C_1}{(1+r)^{2(n-1)}n^2}$ *и* $\alpha_n = rc\mathbb{I}_m$, *где* $r > 4$. *Тогда* $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$ *и каждое самосопряженное расширения оператора* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *имеет дискретный спектр. В то же время матрица* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *удовлетворяет условию* (6.11).

Замечание 6.2. В утверждении 6.4 условия (5.4)–(5.6) трансформируются в условие (6.11). При этом теорема 5.3 не гарантирует самосопряженности матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ даже в скалярном случае ($m = 1$).

6.2.3. Сравнение различных результатов о вполне неопределенности. Сначала покажем, что матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ никогда не удовлетворяют условиям теоремы 3.4, тем самым предоставляя новый класс матриц Якоби с максимальными индексами дефекта $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$.

Утверждение 6.5 (см. [8, 10]). *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ — *матрица Якоби вида* (6.6), *и пусть* $\mathcal{C}_n$ — *матрицы вида* (3.1), *составленные из элементов матрицы* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$. *Тогда второй ряд в* (3.2) *расходится, следовательно, матрица* $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ *не удовлетворяет условиям теоремы* 3.4.

В то же время теорема 6.4 описывает широкий подкласс класса $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}, m)$ с максимальными индексами дефекта $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = m$.

Замечание 6.3. Очевидно, утверждение 6.5 представляет интерес только в случае $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$. Действительно, если $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \notin l^1(\mathbb{N})$, то в силу теста Карлемана (2.1) $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})) = 0$.

Далее опишем область применимости теоремы 3.4 к матрицам $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$.

Утверждение 6.6 (см. [8, 10]). *Пусть* $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$. *Пусть* $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — *матрица Якоби вида* (6.7), *а* $\mathcal{C}_n$ — *матрицы вида* (3.1), *составленные из элементов матрицы* $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$. *Тогда второй ряд в* (3.2) *сходится тогда и только тогда, когда* $\{\beta_n\}_1^{\infty} \in l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$.

Замечание 6.4. Утверждение 6.6 показывает, что условия теоремы 3.4 в сравнении с условиями теоремы 6.5 являются слишком ограничительными для того, чтобы их можно было применить к матрицам Якоби $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$, удовлетворяющим условию (6.9). Условия утверждения 6.6 совпадают с условиями следствия 6.2. Однако условия следствия 6.3, а следовательно, и теоремы 6.5, значительно слабее, чем условия утверждения 6.6. Для демонстрации этого факта рассмотрим простые примеры:

(i) Пусть $d_n = 2^{-n^2}$ и $\|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = 1$. Очевидно, условия следствия 6.3 (i) выполнены и $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$. В то же время $\{\beta_n\}_1^{\infty} \notin l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$, и условия следствия 6.2 (утверждения 6.6) нарушены.

(ii) Пусть $d_n = 2^{-n}$ и $\|\beta_n\|_{\mathbb{C}^{m\times m}} = 2^{-1}c(\sqrt{2} - 1)$. Тогда матрица $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ удовлетворяет условиям следствия 6.3 (ii) при $d = 2$, следовательно, $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$. В то же время $\{\beta_n\}_1^{\infty} \notin l^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}^{m\times m})$, и условия следствия 6.2 (утверждения 6.6) нарушены.

Таким образом, следствие 6.3 гарантирует равенства $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})) = m$ для матриц $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$, описанных выше, в то время как эти матрицы не удовлетворяют условиям теоремы 3.4.

Далее, сравним результаты о матрицах $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ с теоремой 3.1 при $m=1$ и следствием 3.1 при $m>1$.

Утверждение 6.7 (см. [10]). *Пусть $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — блочные матрицы Якоби, удовлетворяющие условиям теорем* 6.4 *и* 6.5, *соответственно. Положим также, что $\beta_n=-d_n$, т. е. матрица $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ имеет нулевую диагональ. Тогда $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))=n_\pm(\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D}))=m$, а матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ никогда не удовлетворяют условиям следствия* 3.1.

Замечание 6.5. Отметим, что теоремы 6.4 и 6.5 описывают новые классы блочных матриц Якоби $\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D},m)$ и $\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D},m)$ с максимальными индексами дефекта. Эти матрицы не удовлетворяют условиям Костюченко—Мирзоева и Березанского (см. теорему 3.4 и следствие 3.1).

6.2.4. Матрицы с промежуточными индексами дефекта. Вместе с условием (2.1) естественно рассмотреть следующий вариант условия Карлемана:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|\mathcal{B}_j^{-1}\|=\infty. \tag{6.12}$$

В скалярном случае оба условия совпадают. Покажем, что при выполнении условия (6.12) для каждого $p<m$ существуют блочные матрицы Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})\in\mathcal{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D},m)$, удовлетворяющие условию (6.12) с индексами $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))=p$.

Утверждение 6.8 (см. [10]). *Пусть $\{d_n^{(1)}\}_1^\infty\in l^1(\mathbb{N})$, $\{d_n^{(2)}\}_1^\infty\notin l^1(\mathbb{N})$ и $d_n^{(1)}\geqslant 0$, $d_n^{(2)}\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть также $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(d_{n-1}^{(1)})^2}{d_n^{(1)}}=0$, $m=m_1+m_2$, $m_1,m_2\in\mathbb{N}$, и пусть внедиагональные блочные элементы матрицы $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ допускают представления $\mathcal{B}_n=\mathcal{B}_n^{(1)}\oplus\mathcal{B}_n^{(2)}$, где*

$$\mathcal{B}_n^{(1)}=\begin{cases}\frac{c}{d_{j+1}^{(1)}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j,\\ \frac{c}{\sqrt{d_{j+1}^{(1)}d_{j+2}^{(1)})}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j+1,\end{cases}\qquad \mathcal{B}_n^{(2)}=\begin{cases}\frac{c}{d_{j+1}^{(2)}}\mathbb{I}_{m_2}, & n=2j,\\ \frac{c}{\sqrt{d_{j+1}^{(2)}d_{j+2}^{(2)}}}\mathbb{I}_{m_2}, & n=2j+1,\end{cases}$$

$$\mathcal{A}_n=\begin{cases}\frac{\alpha_j}{d_{j+1}^{(1)}}, & n=2j,\\ -\frac{c}{d_{j+1}^{(1)}}\mathbb{I}_m, & n=2j+1.\end{cases}$$

Положим также, что $\alpha_n:=\alpha_n^{(1)}\oplus\alpha_n^{(2)}$, где последовательность $\{\alpha_n^{(1)}\}\subset\mathbb{C}^{m_1\times m_1}$ и удовлетворяют условию (6.8), *в то время как последовательность $\{\alpha_n^{(2)}\}\subset\mathbb{C}^{m_2\times m_2}$ является произвольной. Тогда*:

(i) *матрица $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ удовлетворяет условию* (6.12);

(ii) $n_\pm(\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D}))=m_1$;

(iii) *кроме того, если $d_n^{(2)}\geqslant d_n^{(1)}$ при достаточно больших n и выполнено условие* (6.11), *то каждое самосопряженное расширение оператора $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ имеет дискретный спектр.*

Доказательство извлекается из теоремы 6.4, теста Карлемана (2.1) и теоремы 5.3.

Наконец, следуя [8,10], рассмотрим еще одно приложение теоремы 6.5 (и утверждения 6.2).

Утверждение 6.9 (см. [8,10]). *Пусть $\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D})(\in\mathcal{J}_{X,\beta}(\mathbf{D},m_1))$ — блочная матрица Якоби с элементами $\beta_n=-d_n\mathbb{I}_{m_1}$ и $d_n=\frac{c}{(n+1)\sqrt{n^2+1}}$, $n\geqslant 1$. Пусть $m=m_1+m_2$, и пусть $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D})$ — блочная матрица Якоби с $m\times m$-элементами $\mathcal{B}_n=\mathcal{B}_n^{(1)}\oplus\mathcal{B}_n^{(2)}$,*

$$\mathcal{B}_n^{(1)}=\begin{cases}\frac{c}{d_{j+1}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j,\\ \frac{c}{\sqrt{d_{j+1}d_{j+2}}}\mathbb{I}_{m_1}, & n=2j+1,\end{cases}\qquad \mathcal{B}_n^{(2)}=\sqrt{2}\,\mathbb{I}_{m_2},\qquad \mathcal{A}_n=\mathbb{O}_m.$$

Тогда $n_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))=n_\pm(\mathbf{J}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))=m_1$.

Интересно отметить, что блочная матрица Якоби $\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D})$, построенная в утверждении 6.9, незначительно отличается от матрицы Якоби $\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}}$, построенной в теореме 4.2 Дюкаревым [17] в рамках совершенно другого подхода. В частности, имеем $n_\pm(\mathbf{J}_{\mathrm{Dyuk}})=n_\pm(\widehat{\mathbf{J}}'_{X,\beta}(\mathbf{D}))=m_1$.

Замечание 6.6. Еще одно утверждение о промежуточных индексах дефекта блочных матриц Якоби может быть найдено в [8, утверждение 2] и [10, раздел 8].

Приложения матриц Якоби $\mathbf{J}^{(1)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ и $\mathbf{J}^{(2)}_{X,\alpha}(\mathbf{H})$ к операторам Шредингера с δ-взаимодействиями можно найти в работах [20–22] (скалярный случай, $m = 1$) и работах [7, 9, 10, 23] (случай $m > 1$).

Приложения матриц Якоби $\mathbf{J}_{X,\alpha}(\mathbf{D})$ и $\mathbf{J}_{X,\beta}(\mathbf{D})$ к операторам Дирака с δ-взаимодействиями содержатся в работах [12] ($m = 1$) и [8–11] (матричный случай, $m > 1$).

Отметим также, что в работе [29] матрицы Якоби применяются к исследованию индексов дефекта дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами.

Благодарности. Разделы 2–4 написаны при поддержке РНФ (грант № 20-11-20261). Разделы 5, 6 поддержаны Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коган В. И.* Об операторах, порожденных $\mathbb{I}_p$-матрицами, в случае максимальных индексов дефекта// Теор. функций, функц. анализ. и их прилож. — 1970. — *11*. — С. 103–107.
2. *Крейн М. Г.* Бесконечные J-матрицы и матричная проблема моментов// Докл. АН СССР. — 1949. — *69*, № 2. — С. 125–128.
3. *Крейн М. Г.* Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m)// Укр. мат. ж. — 1949. — *1*, № 2. — С. 3–66.
4. *Akhiezer N. I.* The classical moment problem and some related questions in analysis. — Edinburgh—London: Oliver & Boyd Ltd, 1965.
5. *Berezansky Ju. M.* Expansions in eigenfunctions of self-adjoint operators. — Providence: AMS, 1968.
6. *Braeutigam I. N., Mirzoev K. A.* Deficiency numbers of operators generated by infinite Jacobi matrices// Dokl. Math. — 2016. — *93*, № 2. — С. 170–174.
7. *Braeutigam I. N., Mirzoev K. A.* On deficiency numbers of operators generated by Jacobi matrices with operator elements// St. Petersburg Math. J. — 2019. — *30*, № 4. — С. 621–638.
8. *Budyka V. S., Malamud M. M.* On the deficiency indices of block Jacobi matrices related to Dirac operators with point interactions// Math. Notes. — 2019. — *106*. — С. 1009–1014.
9. *Budyka V. S., Malamud M. M.* Self-adjointness and discreteness of the spectrum of block Jacobi matrices// Math. Notes. — 2020. — *108*. — С. 445–450.
10. *Budyka V. S., Malamud M. M.* Deficiency indices of Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions on a discrete set// ArXiv. — 2021. — 2012.15578.
11. *Budyka V. S., Malamud M. M., Posilicano A.* To spectral theory of one-dimensional matrix Dirac operators with point matrix interactions// Dokl. Math. — 2018. — *97*. — С. 115–121.
12. *Carlone R., Malamud M., Posilicano A.* On the spectral theory of Gesztesy—Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on a discrete set// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 9. — С. 3835–3902.
13. *Chihara T.* Chain sequences and orthogonal polynomials// Trans. Am. Math. Soc. — 1962. — *104*. — С. 1–16.
14. *Cojuhari P., Janas J.* Discreteness of the spectrum for some unbounded matrices// Acta Sci. Math. — 2007. — *73*. — С. 649–667.
15. *Dombrowski J., Pedersen S.* Orthogonal polynomials, spectral measures, and absolute continuity// J. Comput. Appl. Math. — 1995. — *65*. — С. 115–124.
16. *Dyukarev Yu. M.* Deficiency numbers of symmetric operators generated by block Jacobi matrices// Sb. Math. — 2006. — *197*, № 8. — С. 1177–1203.
17. *Dyukarev Yu. M.* Examples of block Jacobi matrices generating symmetric operators with arbitrary possible values of the deficiency numbers// Sb. Math. — 2010. — *201*, № 12. — С. 1791–1800.
18. *Dyukarev Yu. M.* On conditions of complete indeterminacy for the matricial hamburger moment problem// В сб.: «Complex Function Theory, Operator Theory, Schur Analysis and Systems Theory». — Cham: Birkhäuser, 2020. — С. 327–353.
19. *Janas J., Naboko S.* Multithreshold spectral phase transition for a class of Jacobi matrices// Oper. Theory Adv. Appl. — 2001. — *124*. — С. 267–285.
20. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* One-dimensional Schrödinger operator with δ-interactions// Funct. Anal. Appl. — 2010. — *44*, № 2. — С. 151–155.
21. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set// J. Differ. Equ. — 2010. — *249*, № 2. — С. 253–304.
22. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schröodinger operators with local point interactions: a review// Proc. Sympos. Pure Math. — 2013. — *87*. — С. 232–262.

23. *Kostenko A. S., Malamud M. M., Natyagailo D. D.* Matrix Schrödinger operator with δ-interactions// Math. Notes. — 2016. — *100*, № 1. — С. 49–65.
24. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Three-term recurrence relations with matrix coefficients. The completely indefinite case// Math. Notes. — 1998. — *63*, № 5-6. — С. 624–630.
25. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients// Funct. Anal. Appl. — 1999. — *33*. — С. 25–37.
26. *Kostyuchenko A. G., Mirzoev K. A.* Complete indefiniteness tests for Jacobi matrices with matrix entries// Funct. Anal. Appl. — 2001. — *35*. — С. 265–269.
27. *Malamud M. M.* On a formula of the generalized resolvents of a nondensely defined Hermitian operator// Ukr. Math. J. — 1992. — *44*. — С. 1522–1547.
28. *Malamud M. M., Malamud S. M.* Spectral theory of operator measures in Hilbert space// St. Petersbg. Math. J. — 2004. — *15*, № 3. — С. 323–373.
29. *Mirzoev K. A., Konechnaya N. N., Safonova T. A., Tagirova R. N.* Generalized Jacobi matrices and spectral analysis of differential operators with polynomial coefficients// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2021. — *252*, № 2. — С. 213–224.
30. *Mirzoev K. A., Safonova T. A.* On the deficiency index of the vector-valued Sturm—Liouville operator// Math. Notes. — 2016. — *99*, № 2. — С. 290–303.
31. *Petropoulou E., Velázquez L.* Self-adjointness of unbounded tridiagonal operators and spectra of their finite truncations// J. Math. Anal. Appl. — 2014. — *420*. — С. 852–872.
32. *Świderski G.* Periodic perturbations of unbounded Jacobi matrices III: The soft edge regime// J. Approx. Theory. — 2018. — *233*. — С. 1–36.
33. *Świderski G.* Spectral properties of block Jacobi matrices// Constr. Approx. — 2018. — *48*, № 2. — С. 301–335.

Будыка Виктория Сергеевна
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;
Донецкая академия управления и государственной службы, Донецк
E-mail: budyka.vik@gmail.com

Маламуд Марк Михайлович
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: malamud3m@gmail.com

Мирзоев Карахан Агахан оглы
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-237-254 UDC 517.984

Deficiency Indices of Block Jacobi Matrices: Survey

© 2021 **V. Budyka, M. Malamud, K. Mirzoev**

Abstract. The paper is a survey and concerns with infinite symmetric block Jacobi matrices **J** with $m \times m$-matrix entries. We discuss several results on general block Jacobi matrices to be either self-adjoint or have maximal as well as intermediate deficiency indices. We also discuss several conditions for **J** to have discrete spectrum.

© Peoples' Friendship University of Russia, 2021
This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

REFERENCES

1. V. I. Kogan, "Ob operatorakh, porozhdennykh $\mathbb{I}_p$-matritsami, v sluchae maksimal'nykh indeksov defekta" [Operators that are generated by $\mathbb{I}_p$-matrices in the case of maximal deficiency indices] *Teor. Funkts., Funkts. Anal. Prilozh.* [Theor. Funct. Funct. Anal. Appl], 1970, **11**, 103–107 (in Russian).
2. M. G. Krein, "Beskonechnye J-matritsy i matrichnaya problema momentov" [Infinite J-matrices and the matrix moment problem] *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1949, **69**, No. 2, 125–128 (in Russian).
3. M. G. Krein, "Osnovnye polozheniya teorii predstavleniya ermitovykh operatorov s indeksom defekta (m, m)" [The fundamental propositions of the theory of Hermitian operators with deficiency index (m, m)," *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 1949, **1**, No. 2, 3–66 (in Russian).
4. N. I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis*, Oliver & Boyd Ltd, Edinburgh—London, 1965.
5. Ju. M. Berezansky, *Expansions in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators*, AMS, Providence, 1968.
6. I. N. Braeutigam and K. A. Mirzoev, "Deficiency numbers of operators generated by infinite Jacobi matrices," *Dokl. Math.*, 2016, **93**, No. 2, 170–174.
7. I. N. Braeutigam and K. A. Mirzoev, "On deficiency numbers of operators generated by Jacobi matrices with operator elements," *St. Petersburg Math. J.*, 2019, **30**, No. 4, 621–638.
8. V. S. Budyka and M. M. Malamud, "On the deficiency indices of block Jacobi matrices related to Dirac operators with point interactions," *Math. Notes*, 2019, **106**, 1009–1014.
9. V. S. Budyka and M. M. Malamud, "Self-adjointness and discreteness of the spectrum of block Jacobi matrices," *Math. Notes*, 2020, **108**, 445–450.
10. V. S. Budyka and M. M. Malamud, "Deficiency indices of Jacobi matrices and Dirac operators with point interactions on a discrete set," *ArXiv*, 2021, 2012.15578.
11. V. S. Budyka, M. M. Malamud, and A. Posilicano, "To spectral theory of one-dimensional matrix Dirac operators with point matrix interactions," *Dokl. Math.*, 2018, **97**, 115–121.
12. R. Carlone, M. Malamud, and A. Posilicano, "On the spectral theory of Gesztesy—Šeba realizations of 1-D Dirac operators with point interactions on a discrete set," *J. Differ. Equ.*, 2013, **254**, No. 9, 3835–3902.
13. T. Chihara, "Chain sequences and orthogonal polynomials," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1962, **104**, 1–16.
14. P. Cojuhari and J. Janas, "Discreteness of the spectrum for some unbounded matrices," *Acta Sci. Math.*, 2007, **73**, 649–667.
15. J. Dombrowski and S. Pedersen, "Orthogonal polynomials, spectral measures, and absolute continuity," *J. Comput. Appl. Math.*, 1995, **65**, 115–124.
16. Yu. M. Dyukarev, "Deficiency numbers of symmetric operators generated by block Jacobi matrices," *Sb. Math.*, **197**, 2006, No. 8, 1177–1203.
17. Yu. M. Dyukarev, "Examples of block Jacobi matrices generating symmetric operators with arbitrary possible values of the deficiency numbers," *Sb. Math.*, 2010, **201**, No. 12, 1791–1800.
18. Yu. M. Dyukarev, "On conditions of complete indeterminacy for the matricial hamburger moment problem," In: *Complex Function Theory, Operator Theory, Schur Analysis and Systems Theory*, Birkhäuser, Cham, 2020, pp. 327–353.
19. J. Janas and S. Naboko, "Multithreshold spectral phase transition for a class of Jacobi matrices," *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2001, **124**, 267–285.
20. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, "One-dimensional Schrödinger operator with δ-interactions," *Funct. Anal. Appl.*, 2010, **44**, No. 2, 151–155.
21. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, "1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set," *J. Differ. Equ.*, 2010, **249**, No. 2, 253–304.
22. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, "1-D Schröodinger operators with local point interactions: a review," *Proc. Sympos. Pure Math.,* 2013, **87**, 232–262.
23. A. S. Kostenko, M. M. Malamud, and D. D. Natyagailo, "Matrix Schrödinger operator with δ-interactions," *Math. Notes*, 2016, **100**, No. 1, 49–65.
24. A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev, "Three-term recurrence relations with matrix coefficients. The completely indefinite case," *Math. Notes*, 1998, **63**, No. 5-6, 624–630.
25. A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev, "Generalized Jacobi matrices and deficiency numbers of ordinary differential operators with polynomial coefficients," *Funct. Anal. Appl.*, 1999, **33**, 25–37.
26. A. G. Kostyuchenko and K. A. Mirzoev, "Complete indefiniteness tests for Jacobi matrices with matrix entries," *Funct. Anal. Appl.*, 2001, **35**, 265–269.
27. M. M. Malamud, "On a formula of the generalized resolvents of a non-densely defined Hermitian operator," *Ukr. Math. J.*, 1992, **44**, 1522–1547.
28. M. M. Malamud and S. M. Malamud, "Spectral theory of operator measures in Hilbert space," *St. Petersbg. Math. J.*, 2004, **15**, No. 3, 323–373.

29. K. A. Mirzoev, N. N. Konechnaya, T. A. Safonova, and R. N. Tagirova, “Generalized Jacobi matrices and spectral analysis of differential operators with polynomial coefficients,” *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2021, **252**, No. 2, 213–224.
30. K. A. Mirzoev and T. A. Safonova, “On the deficiency index of the vector-valued Sturm—Liouville operator,” *Math. Notes*, 2016, **99**, No. 2, 290–303.
31. E. Petropoulou and L. Velázquez, “Self-adjointness of unbounded tridiagonal operators and spectra of their finite truncations,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2014, **420**, 852–872.
32. G. Świderski, “Periodic perturbations of unbounded Jacobi matrices III: The soft edge regime,” *J. Approx. Theory*, 2018, **233**, 1–36.
33. G. Świderski, “Spectral properties of block Jacobi matrices,” *Constr. Approx.*, 2018, **48**, No. 2, 301–335.

Viktoriya S. Budyka
Peoples Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Donetsk Academy of Management and Public Administration, Donetsk
E-mail: budyka.vik@gmail.com

Mark M. Malamud
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: malamud3m@gmail.com

Karahan A. Mirzoev
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: mirzoev.karahan@mail.ru