Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 2 (2021). С. 208–236

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-208-236 УДК 517.98

ПРАВОСТОРОННЯЯ ОБРАТИМОСТЬ ДВУЧЛЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ГРАДУИРОВАННАЯ ДИХОТОМИЯ

© 2021 г. **А. Б. АНТОНЕВИЧ**

Аннотация. В работе приведен обзор исследований правосторонней обратимости двучленных функциональных операторов. Известно, что обратимость двучленных функциональных операторов равносильна существованию дихотомии решений однородного уравнения. Основной результат заключается во введении нового свойства решений однородного уравнения, названного градуированной дихотомией, и доказательстве того, что существование градуированной дихотомии равносильно правосторонней обратимости рассматриваемых операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Памяти Николая Дмитриевича Копачевского. Изложенные в работе результаты неоднократно докладывались на Крымской осенней математической школе, организованной и руководимой Николаем Дмитриевичем.

1. Введение

При исследовании задачи об ограниченных на полуоси оси решениях системы m дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} - A(t)u(t) = f(t),$$

О. Перроном было обнаружено, что такое свойство имеет место тогда и только тогда, когда множество решений однородной системы *допускает дихотомию* [29]. Это значит, что существует разложение пространства $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ и положительные постоянные C и γ такие, что для решений однородной системы выполнены неравенства

$$\|u(t)\| \leqslant Ce^{-\gamma(t-\tau)}\|u(\tau)\| \quad \text{при } u(0) \in E^s,\ t \geqslant \tau;$$
$$\|u(t)\| \geqslant Ce^{\gamma(t-\tau)}\|u(\tau)\| \quad \text{при } u(0) \in E^u,\ t \geqslant \tau.$$

При этом на всей прямой существование дихотомии равносильно существованию и единственности ограниченного решения. Различные обобщения этого результата были предметом многочисленных исследований (см. [9, 12, 14, 17]).

Аналогичные связи разрешимости с дихотомией решений однородного уравнения имеют место для двучленных функциональных уравнений вида

$$A(x)u(\alpha(x)) - u(x) = f(x), \quad u \in F(X), \tag{1.1}$$

где $A(x)$ — заданная матрица-функция, $\alpha : X \mapsto X$ заданное обратимое отображение, и уравнение рассматривается в банаховом пространстве $F(X)$, состоящем из вектор-функций на множестве X (см. [1, 10, 15, 26]).

Однако для функциональных уравнений возможна качественно другая картина разрешимости, когда для любой правой части решение уравнения существует, но не единственно. В операторной терминологии это означает существование правого обратного для оператора, определенного левой частью уравнения.

В данной работе изложены основные результаты о правосторонней обратимости двучленных функциональных операторов в пространствах $L_2(X, \mu)$, полученные в серии работ А. Б. Антоневича, Ю. Маковской, А. А. Ахматовой, Е. В. Пантелеевой, О. А. Архипенко, А. Шукура, и приведены схемы их доказательств. Принципиально новым в этих исследованиях является то, что обнаружена связь правосторонней обратимости с новым, ранее не встречавшимся, свойством решений однородного уравнения, которое предложено называть *градуированной дихотомией*.

2. Общие подходы к исследованию правосторонней обратимости

2.1. Гиперболические и правосторонне гиперболические операторы. Пусть B есть ограниченный обратимый оператор в банаховом пространстве F. Пусть $R(B) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\}$, где $\sigma(B)$ — спектр оператора, есть спектральный радиус оператора B, $r(B) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B)\} = \frac{1}{R(B^{-1})}$.

Если $|\lambda| > R(B)$, то резольвента $R(B; \lambda) = (B - \lambda I)^{-1}$ представляется в виде ряда по отрицательным степеням λ и положительным степеням B:

$$R(B;\lambda) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1}. \tag{2.1}$$

Если $|\lambda| < r(B)$, то резольвента представляется в виде ряда по неотрицательным степеням λ и положительным степеням обратного оператора B^{-1}:

$$R(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}. \tag{2.2}$$

Если резольвента определена при других значениях λ, то она имеет более сложный вид. В частности, известно следующее утверждение (например, [20, лемма 2.2]).

Теорема 2.1. *Если операторы $B - \lambda I$ обратимы на окружности $|\lambda| = r$, где $r(B) < r < R(B)$, то в окрестности этой окружности резольвента представляется в виде ряда Лорана*

$$R(\lambda, B) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P), \tag{2.3}$$

где P — проектор Рисса, который связан с резольвентой формулой

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R^+(B;\lambda) d\lambda. \tag{2.4}$$

Проектор Рисса коммутирует с B, задает разложение $F = F^+ \oplus F^-$ пространства в прямую сумму инвариантных подпространств и, соответственно, задает разложение оператора $B = B^+ \oplus B^-$ такое, что $R(B^-) < r$, $R((B^+)^{-1}) < \frac{1}{r}$.

Без ограничения общности, заменив B на оператор $\frac{1}{r}B$, можно свести исследование к случаю $r = 1$. Оператор называется *гиперболическим*, если единичная окружность не пересекается с его спектром. В этом случае получаем, что $R(B^-) < 1$, $R((B^+)^{-1}) < 1$.

При исследовании правосторонней обратимости имеет место ряд родственных утверждений.

Правосторонней резольвентой для оператора B в области $\Omega \subset \mathbb{C}$ будем называть операторнозначную функцию $R^+(B;\lambda)$, аналитически зависящую от $\lambda \in \Omega$, такую, что $R^+(B;\lambda)$ есть правый обратный к $B - \lambda I : (B - \lambda I)R^+(B;\lambda) = I$.

Если оператор $B - \lambda I$ необратим и существует правосторонняя резольвента, то таких резольвент много: операторнозначная функция $R_1^+(B;\lambda) = R^+(B;\lambda) + N(\lambda)$ является правосторонней резольвентой тогда и только тогда, когда разность $N(\lambda) = R_1^+(B;\lambda) - R^+(\lambda, B)$ удовлетворяет условию $(B - \lambda)N(\lambda) = 0$, т. е. образ оператора $N(\lambda)$ принадлежит ядру оператора $B - \lambda I$.

Аналогом теоремы 2.1 является следующее утверждение (см. [27]).

Теорема 2.2. *Если для оператора B существует правосторонняя резольвента $R^+(\lambda, B)$, определенная в некотором открытом кольце, содержащем единичную окружность, то ее разложение в ряд Лорана в этом кольце однозначно определяется по коэффициенту P при $\frac{1}{\lambda}$, который связан с резольвентой той же формулой, что и проектор Рисса $P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} R^+(B;\lambda)d\lambda$, а разложение имеет вид, аналогичный* (2.3):

$$R^+(\lambda, B) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P + \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I-P). \tag{2.5}$$

Оператор P перестановочен с B тогда и только тогда, когда $R^+(\lambda, B)$ является (*двусторонней*) *резольвентой, тогда P есть проектор Рисса. Если P есть произвольный оператор, для которого ряд* (2.5) *сходится, то сумма ряда является одной из правосторонних резольвент.*

Оператор, для которого существует правосторонняя резольвента, определенная в некотором открытом кольце, содержащем единичную окружность, будем назвать *правосторонне гиперболическим*.

Проанализируем структуру построенных резольвент. При $|\lambda| \leqslant R(B)$ операторный ряд (2.1) расходится, но для некоторых $f \in F$ аналитическая вектор-функция

$$R^+(B;\lambda)f = -\sum_{k=-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} f, \tag{2.6}$$

определенная при $|\lambda| > R(B)$, аналитически продолжается на более широкую область $Res^+(f)$. При этом равенство $(B - \lambda I)R^+(B;\lambda)f = f$ сохраняется в $Res^+(f)$, т. е. при $\lambda \in Res^+(f)$ существует решение $u = R^+(B;\lambda)f$ уравнения

$$(B - \lambda I)u = f. \tag{2.7}$$

В частности, если ряд в (2.6) абсолютно сходится при некотором λ_0, где $|\lambda_0| < R(B)$, то он абсолютно сходится при $|\lambda| \geqslant |\lambda_0|$ и задает аналитическое продолжение при таких λ.

Аналогично, при $|\lambda| \geqslant r(B)$ операторный ряд (2.2) расходится, но для некоторых $f \in F$ функция

$$R^-(B;\lambda)f = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} f \tag{2.8}$$

аналитически продолжается на некоторую область $Res^-(f)$, и при $\lambda \in Res^-(f)$ существует решение $u = R^-(B;\lambda)f$ уравнения (2.7).

Напомним, что равенство $E = E_1 + E_2$, где E — векторное пространство, E_1 и E_2 — его векторные подпространства, означает, что каждый элемент из E представляется в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$, но при этом допускается, что такое представление не единственно. Если $E = E_1 + E_2$, то подпространства E_1 и E_2 называются *трансверсальными*. Равенство $E = E_1 \oplus E_2$ означает, что представление $x = x_1 + x_2$ единственно. Если E — банахово пространство, то равенство $E = E_1 \oplus E_2$ предполагает дополнительно, что подпространства E_1 и E_2 замкнуты.

Для каждого $r \in (r(B), R(B))$ обозначим через $F^+(r)$ подпространство в F, состоящее из таких f, что ряд (2.6) сходится при $|\lambda| > r$, и обозначим через $F^-(r)$ подпространство, состоящее из таких f, что ряд (2.8) сходится при $|\lambda| < r$.

Теорема 2.3. *Пусть $r(B) \leqslant r^- < 1 < r^+ \leqslant R(B)$ и $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$. Операторы $B - \lambda I$ обратимы справа для всех $\lambda \in K$ тогда и только тогда, когда выполнено условие трансверсальности*

$$F^+(r^+) + F^-(r^-) = F. \tag{2.9}$$

При этом ряд Лорана (2.5) *сходится в кольце K и задает правостороннюю резольвенту тогда и только тогда, когда образ оператора P принадлежит подпространству $F^+(r^-)$, а образ оператора $I - P$ принадлежит подпространству $F^-(r^+)$.*

Таким образом, при исследовании правосторонней обратимости некоторого класса операторов нужно выяснить, для каких из них выполнено условие трансверсальности (2.9), а для построения правосторонней резольвенты требуется найти оператор P, удовлетворяющий условиям теоремы 2.3.

В общем случае оператор P может не быть проектором, но наиболее простую структуру имеют правосторонние резольвенты, порожденные проекторами P. Задание такого проектора равносильно построению подпространств $W^{\pm} \subset F^{\pm}$ таких, что $F = W^{+} \oplus W^{-}$.

Основное содержание данной работы заключается в построении таких проекторов для операторов взвешенного сдвига.

2.2. Локализация в C^*-алгебрах. Исследование операторов часто удается упростить с помощью т. н. локализации. Метод локализации в общей постановке заключается в построении по каждому оператору B из заданного класса $\mathcal{B}$ некоторого семейства вспомогательных операторов, называемых *локальными представителями*, таких, что свойства B описываются с помощью вспомогательных операторов. Эффективность этого метода определяется тем, что вспомогательные операторы обычно устроены более просто и могут быть исследованы достаточно детально.

Например, при исследовании эллиптических дифференциальных операторов в качестве локальных представителей берутся дифференциальные операторы с постоянными, т. н. замороженными, коэффициентами.

Построения локальных представителей обычно согласовано с умножением операторов и поэтому связано с представлениями банаховых алгебр, порожденных рассматриваемым классом операторов. Теория представлений наиболее развита для C^*-алгебр операторов в гильбертовых пространствах (см. [13, 18]). Ниже рассматриваются методы локализации для таких алгебр.

Пусть $\mathcal{B}$ есть произвольная C^*-алгебра, т. е. банахова алгебра с инволюцией, для элементов b которой выполнено условие $\|bb^*\| = \|b\|^2$.

Представлением π алгебры $\mathcal{B}$ называется гомоморфизм этой алгебры в алгебру $LB(H_\pi)$ операторов в гильбертовом пространстве H_π, при котором единица переходит в единичный оператор. Образы $\pi(B)$ элемента $b \in \mathcal{B}$ при различных представлениях рассматриваются как его локальные представители.

Представление π называется *неприводимым*, если в H_π нет нетривиальных подпространств, инвариантных относительно всех операторов $\pi(b)$, $b \in \mathcal{B}$. Образы элемента b при неприводимых представлениях обычно являются простейшими операторами, к анализу которых можно свести исследование b.

Построение метода локализации заключается в нахождении таких наборов представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, при которых свойства оператора b можно описать с помощью свойств его образов $\pi_\tau(b)$.

Говорят, что семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, *разделяет* точки алгебры $\mathcal{B}$, если для любого $b \in \mathcal{B}$, $b \neq 0$, существует такое представление из этого семейства, что $\pi_\tau(b) \neq 0$.

При любом представлении образ обратимого элемента является обратимым. Но при некоторых представлениях образ необратимого элемента может оказаться обратимым.

Говорят, что семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, образует *достаточный набор представлений* алгебры $\mathcal{B}$, если для любого необратимого элемента $b \in \mathcal{B}$ существует такое представление π_τ из этого семейства, что оператор $\pi_\gamma(b)$ необратим.

Для любого множества представлений $\pi_\tau, \tau \in \Gamma$, определяется представление $\pi = \bigoplus\limits_{\gamma} \pi_\tau$, действующее в прямой сумме гильбертовых пространств $H = \bigoplus H_\pi$, которое называется их *прямой суммой*. При этом представлении $\pi(b) = \bigoplus\limits_{\tau} \pi_\tau(b)$, т. е. этот оператор является блочно-диагональным. Обозначим алгебру всех ограниченных блочно-диагональных операторов $\mathrm{Diag}(\bigoplus H_\pi)$ и отметим, что в общем случае $\pi(\mathcal{B})$ есть часть $\mathrm{Diag}(\bigoplus H_\pi)$.

Представление π называется *точным*, если $\ker \pi = \{0\}$. При точном представлении алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна своему образу $\pi(\mathcal{B})$.

Лемма 2.1. *Если семейство представлений $\{\pi_\gamma,\ \gamma \in \Gamma_0\}$, разделяет точки алгебры $\mathcal{B}$, то прямая сумма представлений $\pi = \bigoplus\limits_{\gamma} \pi_\gamma$ является точным представлением и, следовательно, представление π задает изоморфизм исходной алгебры с ее образом $\pi(\mathcal{B})$.*

Это утверждение позволяет свести исследование обратимости элемента $b \in \mathcal{B}$ к исследованию его образов при представлениях π_γ. При этом используется следующее свойство, называемое *наполненностью* операторных C^*-алгебр.

Если у оператора b из C^*-алгебры $\mathcal{B}$ операторов в гильбертовом пространстве H существует обратный b^{-1} в H, то этот обратный также принадлежит $\mathcal{B}$.

Лемма 2.2. *Пусть семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma_0$, разделяет точки алгебры $\mathcal{B}$. Элемент b обратим тогда и только тогда, когда все элементы $\pi_\tau(b)$, $\tau \in \Gamma_0$, обратимы, и нормы обратных ограничены в совокупности: существует такая постоянная C, что для всех $\gamma \in \Gamma_0$ выполнено $\|[\pi_\tau(b)]^{-1}\| \leqslant C$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Если нормы обратных $\pi_\gamma(b)$, $\gamma \in \Gamma_0$, ограничены в совокупности, то у диагонального оператора $\pi(b)$ существует обратный $\pi(b)^{-1}$ в алгебре $\mathrm{Diag}(\bigoplus H_\pi)$. В силу наполненности подалгебры $\pi(\mathcal{B})$ этот обратный принадлежит $\pi(\mathcal{B})$. □

Заметим, что в рассматриваемом случае семейства представлений, разделяющего точки алгебры $\mathcal{B}$, для элементов $b \in \mathcal{B}$ выполняется включение $\Sigma(b) \supset \bigcup\limits_{\pi\in\Gamma_0} \Sigma(\pi(b))$, а равенство может не выполняться.

Исследование обратимости b с помощью семейства представлений, разделяющих точки, представляет собой *слабый метод локализации*: для получения обратимости, кроме проверки обратимости операторов $\pi_\tau(b)$, нужны оценки норм обратных операторов, что требует детальных вычислений.

В случае достаточного набора представлений метод локализации оказывается сильным в том смысле, что для его применения не нужно находить оценки норм операторов $[\pi_\tau(b)]^{-1}$.

Предложение 2.1. *Пусть семейство представлений (π_τ), $\tau \in \Gamma$, образует достаточный набор представлений C^*-алгебры $\mathcal{B}$. Элемент $b \in \mathcal{B}$ обратим тогда и только тогда, когда операторы $\pi_\tau(b)$ обратимы для каждого $\tau \in \Gamma$. В частности, имеет место равенство $\sigma(b) = \bigcup\limits_{\tau\in\Gamma} \sigma(\pi_\tau(b))$.*

Рассмотренные конструкции и утверждения связаны с доказательством одного из основных результатов теории C^*-алгебр, известного как вторая теорема Гельфанда — Наймарка (см. [18, теорема 3.4.1]). Эта теорема утверждает, что каждая абстрактная C^*-алгебра $\mathcal{B}$ допускает точное представление — изоморфна некоторой алгебре операторов в гильбертовом пространстве. Доказательство заключается в проверке того, что прямая сумма всех неприводимых представлений является точным представлением, но в этом доказательстве используется только то, что неприводимые представления разделяют точки алгебры. Однако известно, что семейство всех неприводимых представлений C^*-алгебры $\mathcal{B}$ не только разделяет точки, но и образует достаточный набор представлений. Это следует, например, из [18, теорема 5.1.13]. Таким образом, конструкция, использованная в доказательстве теоремы Гельфанда — Наймарка, является сильным методом локализации. Кроме того, если два представления эквивалентны, то обратимость $\pi_\tau(b)$ для одного из них эквивалентна обратимости образа для второго представления и зависит только от класса эквивалентных представлений. Множество всех классов неприводимых представлений называется *спектром алгебры* и обозначается $Sp(\mathcal{B})$.

Теорема 2.4. *Элемент b из C^*-алгебры $\mathcal{B}$ обратим тогда и только тогда, когда его образы при всех неприводимых представлениях обратимы. В частности, для любого $b \in \mathcal{B}$ имеет место равенство $\sigma(b) = \bigcup\limits_{\pi\in Sp(\mathcal{B})} \sigma(\pi(b))$.*

При исследовании правосторонней обратимости имеют место аналогичные утверждения, но появляются отличия, связанные с тем, что у C^*-алгебр нет свойства наполненности относительно правосторонней обратимости — если $\mathcal{B}$ есть C^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве H и у оператора $b \in \mathcal{B}$ существует правый обратный R в H, то может оказаться, что R не принадлежит $\mathcal{B}$.

Лемма 2.3. *Пусть B есть ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве H, B^* — сопряженный к B. Оператор B правосторонне обратим тогда и только тогда, когда оператор BB^* обратим. При этом оператор R является правым обратным к B тогда и только тогда, когда он представляется в виде*

$$R = (I - Q)B^*(BB^*)^{-1}, \tag{2.10}$$

где Q есть проектор на ядро оператора B.

Если проектор Q ортогональный, то R — правый обратный с минимальной нормой $\|R\| = \sqrt{\|(BB^*)^{-1}\|}$, и такой оператор R принадлежит C^*-алгебре $\mathcal{B}$, порожденной оператором B.

Доказательство. Если оператор BB^* обратим, то формула (2.10) задает оператор R, который является правым обратным к B, так как $BR = BB^*(BB^*)^{-1} - BQ[B^*(BB^*)^{-1}] = I$.

Пусть $BR = I$. Требуется получить для R представление (2.10).

Оператор B в гильбертовом правосторонне обратим тогда и только тогда, когда его образ $\operatorname{Im} B$ совпадает со всем пространством H. Это свойство эквивалентно тому, что $\ker B^* = \{0\}$ и образ $\operatorname{Im} B^*$ замкнут, откуда $\operatorname{Im} B^* = \ker B^{\perp}$.

Поэтому $BB^*(H) = B(\operatorname{Im} B^*) = B(\ker B^{\perp}) = H$, т. е. образ оператора BB^* совпадает со всем пространством. В силу самосопряженности оператора BB^* отсюда следует его обратимость.

Если $BR = I$, то $\ker R = \{0\}$ и оператор $RB = P$ является проектором, так как $(RB)^2 = RB$. При этом $\ker P = \ker B$, и если $x = Ry$, то $Px = RBRy = x$. Следовательно, P есть проектор на $\operatorname{Im}(R)$, осуществляющий разложение $H = \operatorname{Im}(R) \oplus \ker B$, а $I - P$ есть проектор на $\ker B$.

Пусть x есть решение уравнения $Bx = y$ и Q есть проектор на $\ker B$. Векторы вида $x' = x - Qx$ также являются решениями этого уравнения, причем такие решения имеют наименьшую норму тогда и только тогда, когда проектор Q ортогональный.

Далее $RBB^* = PB^*$, и в силу обратимости BB^* получаем требуемое представление правого обратного $R = PB^*(BB^*)^{-1}$.

Для правосторонне обратимого B имеем равенство $\ker B^*B = \ker B$. Известно, что спектр BA может отличаться от спектра AB только на точку 0. Поскольку оператор BB^* обратим, а оператор B^*B необратим, получаем, что 0 есть изолированная точка спектра оператора B^*B. Поэтому соответствующий проектор Рисса принадлежит алгебре $\mathcal{B}$ и задает разложение $H = \ker B \oplus \operatorname{Im} B^* = \ker B^*B \oplus \operatorname{Im} B^*B$. В силу самосопряженности B^*B такой проектор ортогональный. □

Из этой леммы следует, в частности, наполненность операторных C^*-алгебр относительно правосторонней обратимости в следующей формулировке: *если для оператора $B \in \mathcal{B}$ существует правый обратный в H, то существует и правый обратный, принадлежащий $\mathcal{B}$.*

Из сказанного выше получаем аналог теоремы 2.4, который лежит в основе дальнейшего исследования.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{B}$ есть C^*-алгебра операторов в гильбертовом пространстве и семейство представлений (π_γ), $\gamma \in \Gamma$, образует достаточный набор представлений C^*-алгебры $\mathcal{B}$. Оператор $b \in \mathcal{B}$ обратим справа тогда и только тогда, когда операторы $\pi_\gamma(b)$ обратимы справа для всех $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Правосторонняя обратимость оператора B эквивалентна обратимости оператора bb^*. Обратимость оператора bb^* эквивалентна обратимости операторов всех операторов $\pi_\tau(b)\pi_\tau(b)^*$, что, в свою очередь, эквивалентно правосторонней обратимости операторов $\pi_\tau(b)$. □

3. Операторы взвешенного сдвига и методы их исследования

3.1. Операторы взвешенного сдвига и ассоциированные линейные расширения. Прежде чем применять сформулированные выше утверждения к операторам взвешенного сдвига, приведем более детальное описание таких операторов и их свойств.

Пусть задано обратимое непрерывное отображение $\alpha : X \mapsto X$ топологического пространства X и задано банахово пространство $F(X)$ функций на X со значениями в $\mathbb{C}^m$. *Оператором взвешенного сдвига* в $F(X)$ будем называть линейный ограниченный оператор, действующий по формуле

$$Bu(x) = A_0(x)u(\alpha(x)), \quad u \in F(X). \tag{3.1}$$

В первую очередь возникает вопрос об условиях, при которых это выражение задает ограниченный оператор в $F(X)$.

Если $F(X)$ есть пространство $C(X)$ непрерывных ограниченных функций на X, отображение α непрерывно, и матрица-функция $A_0(x)$ непрерывна, то очевидно, что оператор (3.1) ограничен. Но в других пространствах функций условия ограниченности таких операторов имеют более сложный вид, и получение таких условий является предметом отдельных исследований (например [21]).

Ниже мы рассматриваем операторы в пространствах $L_2(X,\mu)$, где μ есть полная σ-аддитивная мера на X, определенная на некоторой σ-алгебре измеримых подмножеств, содержащей борелевские множества, такая, что мера каждого открытого множества положительна. Заметим, что мера μ не предполагается конечной. Приведем условия ограниченности оператора вида (3.1) в $L_p(X,\mu)$ (см. [1]). Эти условия не используют непрерывность отображения α, которое существенно в дальнейшем исследовании.

Говорят, что для меры μ и отображения $\alpha : X \mapsto X$ выполнено *условие согласования*, если $\alpha^{-1}(\omega)$ измеримо для каждого измеримого подмножества ω и выполнено соотношение

$$\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = 0 \ \leftrightarrow \ \mu(\omega) = 0. \tag{3.2}$$

В этом случае также говорят, что отображение α сохраняет класс меры μ, а мера называется *квазиинвариантной*.

Поскольку пространство $L_p(X,\mu)$ состоит из классов эквивалентных функций, условие согласования является необходимым для корректного задания операторов взвешенного сдвига в таких пространствах — в противном случае образы эквивалентных функций могут не быть эквивалентными.

Рассмотрим меру, определенную выражением $\mu_\alpha(\omega) = \mu(\alpha^{-1}(\omega))$. Из условия 3.2 следует, что μ_α и μ взаимно абсолютно непрерывны. Поэтому существует производная Радона—Никодима — такая функция $\varrho(x)$, что $\mu(\alpha^{-1}(\omega)) = \int_\omega \varrho(x)d\mu$, причем $\varrho(x) \neq 0$ почти всюду.

Для производной Радона—Никодима выполнено равенство

$$\int_X u(\alpha(x))\varrho(\alpha^{-1}(x))d\mu = \int_X u(x)\varrho(x)d\mu_\alpha = \int_X u(x)d\mu,$$

из которого следует, что оператор

$$T_\alpha u(x) = \big[\varrho(\alpha^{-1}(x))\big[^{-1/p}\, u(\alpha(x)) \tag{3.3}$$

является изометрическим и обратимым в пространстве $L_p(X,\mu)$, в частности, в пространстве $L_2(X,\mu)$ — унитарным.

Оператор B вида (3.1) в пространствах $L_p(X,\mu)$ и $L_p(X,\mu;\mathbb{C}^m)$ удобно записывать в стандартной форме

$$B = AT_\alpha, \quad \text{где} \quad A(x) = \varrho(\alpha^{-1}(x))^{1/p}A_0(x). \tag{3.4}$$

Такая запись позволяет описывать свойства оператора B с помощью матрицы-функции A, которая называется *приведенным коэффициентом*.

Лемма 3.1. *Оператор* (3.4) *ограничен в пространстве $L_p(X,\mu)$ тогда и только тогда, когда приведенный коэффициент A принадлежит пространству $L_\infty(X,\mu)$, и при этом $\|B\| = \|A\|_\infty$.*

Заметим, что приведенный коэффициент A зависит не только от заданной меры, но и от рассматриваемого p, поэтому спектральные свойства операторов, заданных одним и тем же выражением (3.1) в пространствах $L_p(X,\mu)$, могут быть разными при разных p. Но операторы с одинаковыми приведенными коэффициентами имеют обычно при разных p близкие свойства. В частности, полученные ниже результаты для операторов в пространстве $L_2(X,\mu)$ переносятся на операторы в пространствах $L_p(X,\mu)$.

Укажем некоторые условия на X, μ и отображение α, естественные при анализе рассматриваемых операторов. Всюду ниже считаем, что X есть компактное отделимое пространство.

Топологическое пространство X называется *α-связным*, если его нельзя разложить на непересекающиеся непустые замкнутые α-инвариантные подмножества.

Если $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — непересекающиеся непустые замкнутые α-инвариантные подмножества, то исследование оператора сводится к рассмотрению операторов в $L_p(X_1,\mu)$ и $L_p(X_2,\mu)$. Поэтому естественным является предположение, что пространство X является α-связным.

Особым является случай, когда отображение α периодическое. Если на некотором открытом множестве X_1 отображение является периодическим, то исследование оператора сводится к рассмотрению операторов в $L_p(X_1,\mu)$ и $L_p(X \setminus X_1,\mu)$. Поэтому считаем, что *множество непериодических точек плотно в X*, что исключает случай существования таких открытых подмножеств.

Лемма 3.2. *Если множество непериодических точек плотно в X, то спектр оператора взвешенного сдвига инвариантен относительно вращений вокруг точки* 0.

В частности, если оператор $B - I$ обратим (обратим справа), то при $|\lambda| = 1$ операторы $B - \lambda I$ также обратимы (обратимы справа).

Это утверждение позволяет использовать утверждения о гиперболических и правосторонне гиперболических операторах.

Вспомогательным объектом, с помощью которого удается описывать свойства оператора $B - I$, является *ассоциированное с оператором отображение* β, которое задается следующим образом.

Произведение $E = X \times \mathbb{C}^m$ рассматривается как векторное расслоение над X с естественной проекцией [19]; слоем E_x над точкой $x \in X$ является множество $E_x = \{(x, \xi) : \xi \in \mathbb{C}^m\} = \{x\} \times \mathbb{C}^m$, изоморфное $\mathbb{C}^m$. В каждом слое определена норма $\|(x, \xi)\| := \|\xi\|_{\mathbb{C}^m}$.

Ассоциированное с оператором B отображение $\beta_B : E \mapsto E$ задается формулой

$$\beta_B(x, \xi) = \left(\alpha^{-1}(x), A(\alpha^{-1}(x))\xi\right), \quad x \in X, \quad \xi \in \mathbb{C}^m. \tag{3.5}$$

Если рассматривается фиксированный оператор B, то для упрощения обозначений вместо β_B будем писать β.

При отображении β слой над точкой x линейно отображается в слой над точкой $\alpha^{-1}(x)$, действующие таким образом отображения называются *линейными расширениями отображения* α^{-1} на векторное расслоение E (см. [10]).

Поясним природу этого отображения. Пусть $u(x)$ есть решение однородного уравнения в пространстве всех функций на X; обозначим $u(x) = \xi$, $u(\alpha^{-1}(x)) = \eta$. Если однородное уравнение записать в виде $A(\alpha^{-1}(x)u(x) = u(\alpha^{-1}(x)$, то получаем, что $\eta = A(\alpha^{-1}(x))\xi$, т. е. отображение β задает связь между значениям решения однородного уравнения в точке $\alpha^{-1}(x)$ со значением в точке x. Таким образом, возможность исследования свойств оператора B с помощью ассоциированного с ним линейного расширения β есть аналог отмеченных выше для дифференциальных уравнений связей разрешимости с поведением решений однородного уравнения.

Ниже считаем, что матрица-функция $A(x)$ обратима; тогда существует обратное отображение, которое действует по формуле

$$\beta^{-1}(x, \xi) = (\alpha(x), A^{-1}(x)\xi), \quad x \in X, \quad \xi \in \mathbb{C}^m, \tag{3.6}$$

и является линейным расширением отображения α.

Конструкция линейного расширения согласована с умножением операторов. В частности, линейное расширение, соответствующее оператору B^n, есть β^n.

3.2. Гиперболический подход к исследованию спектра оператора взвешенного сдвига. Согласно лемме 3.2 обратимость оператора $B - I$ равносильна гиперболичности B, а гиперболичность — существованию разложения (2.3). Основной результат при исследовании гиперболичности операторов взвешенного сдвига B формулируется с помощью линейного расширения β и аналогичен классическим утверждениям о существовании дихотомии для дифференциальных уравнений.

Введем ряд понятий, часть из которых будет использована только в последующих разделах.

Каждое подмножество $K \subset E = X \times \mathbb{C}^m$ разбивается на слои $K_x = K \cap E_x$. Подмножество $K \subset E$ называется *векториальным,* если для любого x слой K_x является векторным подпространством в E_x и измеримо зависит от x. Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векториальным подрасслоением,* если слои K_x имеют одинаковую размерность и измеримо зависят от x. Векториальное подмножество $K \subset E$ называется *векторным подрасслоением,* если слои K_x имеют одинаковую размерность и непрерывно зависят от x.

Каждое векториальное подмножество может быть задано с помощью измеримой проекторнозначной функции $p(x)$, проектирующей E_x на K_x, причем эта функция может быть разрывной и размерность слоя K_x может быть разной для разных x. Поскольку здесь не предполагается, что проекторы $p(x)$ ортогональны, существует много таких $p(x)$. В случае векторного подрасслоения проекторнозначная функция $p(x)$ может быть выбрана непрерывной.

Подмножество $K \subset E$ называется *локально устойчивым в положительном направлении (вперед)* относительно β над множеством X_0, если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K, x \in X_0$, и таких $k \geqslant 0$, при которых $\alpha^{-k}(x)] \in X_0$ выполняется неравенство

$$\|\beta^k(x, \xi)\| \leqslant C\gamma^k \|(x, \xi)\|. \tag{3.7}$$

Подмножество $K \subset E$ называется *устойчивым в положительном направлении (вперед)* относительно β над множеством X_0, если неравенство (3.7) выполнено для всех $k \geqslant 0$.

Аналогично, подмножество $K \subset E$ называется *локально устойчивым в отрицательном направлении* (*назад*) относительно β над множеством X_0, если существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что для всех $(x, \xi) \in K$, $x \in X_0$ и таких $k \geqslant 0$, при которых $\alpha^k(x) \in X_0$, выполняется неравенство

$$\|\beta^{-k}(x, \xi)\| \leqslant C\gamma^k \|(x, \xi)\|. \tag{3.8}$$

Подмножества $K \subset E$ называется *устойчивым в отрицательном направлении* (*назад*) относительно β, если неравенство (3.8) выполнено для всех $k \geqslant 0$.

Подмножество подмножество K называют *неустойчивым* в положительном направлении над множеством X_0, если $\alpha^{-1}(X_0) \subset X_0$ и существуют $C > 0$ и $\gamma < 1$ такие, что

$$\|\beta^k(x, \xi)\| \geqslant \frac{C}{\gamma^k} \|(x, \xi)\|, \quad k \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Если множество X_0 двусторонне инвариантно, то устойчивость подмножества K в отрицательном направлении равносильна неустойчивости в положительном направлении, но в дальнейшем существенно то, что общем случае это разные понятия, т. к. неустойчивость не есть отрицание устойчивости.

Векториальные подмножества V^+ и V^- называются *трансверсальными*, если $E_x = V_x^+ + V_x^-$ для всех x. Если $E_x = V_x^+ \bigoplus V_x^-$, то в слое E_x существует проектор $p(x)$ на V_x^+ с ядром E_x^-. Будем говорить, что E есть прямая сумма векториальных подмножеств V^+ и V^- над X_0 (обозначаем $E = V^+ \bigoplus V^-$), если для каждого $x \in X_0$ выполнено $E_x = V_x^+ \bigoplus V_x^-$ и существует постоянная C такая, что $\|p(x)\| \leqslant C$ для всех $x \in X_0$.

Если подмножества V^+ и V^- являются векторными подрасслоениями над X, то в силу компактности X и непрерывности $p(x)$ условие ограниченности норм проекторов $p(x)$ выполнено автоматически. Для векториальных подмножеств $\|p(x)\|$ зависит от взаимного расположения подпространств,

Приведем необходимые понятия и факты о взаимном расположении подпространств для интересующего нас случая, когда L и M суть векторные подпространства конечномерного гильбертова пространства $H = \mathbb{C}^m$ (см. [11]).

Пусть Q_L есть ортогональный проектор на подпространство L. Расстояние от вектора ξ до подпространства L есть $d(\xi, L) = \min\{\|\xi - \eta\| : \eta \in L\} = \|\xi - Q_L \xi\|$.

Отклонением подпространства M от подпространства L называется число $\Theta(M, L) = \max\{d(\xi, L) : \|\xi\| = 1\} = \max\{\|\xi - Q_L \xi\| : \|\xi\| = 1\}$. Это число есть $\sin[\varphi(M, L)]$, где $\varphi(M, L)$ — наибольший угол между вектором из M и его проекцией на L. Вектор $0 \neq \xi \in M$, ортогональный к L, существует тогда и только тогда, когда $\Theta(M, L) = 1$.

Число $d(L, M) = \max\{\Theta(M, L), \Theta(L, M)\} = \|Q_L - Q_M\|$ задает метрику на множестве всех подпространств в H. Множество $G(d, m)$ подпространств фиксированной размерности d в $\mathbb{C}^m$ называется *многообразием Грассмана*. Если $d(M, L) < 1$, то проектор Q_L задает изоморфизм между M и L, и при этом $\cos[\varphi(M, L)]\|\xi\| \leqslant \|Q_L \xi\| \leqslant \|\xi\|$.

Лемма 3.3. *Пусть M_0 есть подпространство в L. Если $d(M, M_0) < 1$, то проектор Q_L задает изоморфизм между M и его проекцией на L.*

Доказательство. Из $d(M, M_0) < 1$ следует, что в M нет векторов, ортогональных к M_0. Тем более нет векторов, ортогональных к L, т. е. проектор Q_L инъективно отображает M в L. $\square$

Число $\rho(M, L) = d(M, L^\perp)$ называется *раствором* между M и L. Это синус наименьшего угла между векторами из M и векторами из L.

Если $H = L \oplus M$, то норма проектора p, задающего это разложение, есть $\frac{1}{\rho(M,L)}$. В частности, если для векториальных подмножеств V^+ и V^- выполнено $E_x = V_x^+ \bigoplus V_x^-$, то они задают разложение в прямую сумму тогда и только тогда, когда $\rho(V_x^+, V_x^-) \geqslant \rho_0 > 0$.

Дихотомией линейного расширения β называется разложение $E = E^+ \bigoplus E^-$ в прямую сумму векторных подрасслоений, где E^+ устойчиво в положительном направлении, а E^- — устойчиво в отрицательном направлении. Если такое разложение существует, то оно единственно и векторные подрасслоения $E^\pm$ инвариантны относительно β. Линейное расширение, для которого существует дихотомия, называется *гиперболическим*. Для гиперболического линейного расширения подрасслоения E^+ и E^- могут быть описаны следующим образом:

$$E^+ = \{(x, \xi) \in E : \beta^n(x, \xi) \to 0 \ \text{ при } \ n \to +\infty\}, \tag{3.10}$$

$$E^- = \{(x,\xi) \in E : \beta^n(x,\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to -\infty\}. \tag{3.11}$$

Такие подмножества определены для произвольных линейных расширений, но в общем случае это не подрасслоения, а векториальные подмножества. Именно эти векториальные подмножества играют существенную роль в дальнейшем исследовании.

Условия обратимости оператора $B - I$ формулируются следующим образом (см. [1]).

Теорема 3.1. *Пусть выполнены указанные выше условия, в частности, множество непериодических точек отображения α всюду плотно в X и приведенный коэффициент $A(x)$ является непрерывной обратимой матричнозначной функцией. Оператор $B-I$ обратим тогда и только тогда, когда линейное расширение β гиперболическое.*

Доказательство. Пусть расширение β гиперболическое и P есть оператор умножения на проекторнозначную функцию $p(x)$, задающую дихотомию. Тогда ряд (2.3) сходится в силу наложенных условий и задает резольвенту, определенную в окрестности единичной окружности.

Если оператор $B - I$ обратим, то B гиперболический и определен проектор Рисса P. Далее из условия перестановочности соответствующего оператора P с B и его степенями получаем, что P есть оператор умножения на непрерывную проекторнозначную функцию $p(x)$, которая задает искомую дихотомию для β. □

Так как при произвольном λ имеем $B - \lambda I = \lambda(\frac{1}{\lambda}B - I)$, свойства $B - \lambda I$ получаем, применяя теорему к оператору $\frac{1}{\lambda}B$, для которого соответствующее линейное расширение есть $\beta_\lambda = \lambda\beta$.

Динамическим спектром линейного расширения β называется множество чисел λ, при которых β_λ не является гиперболическим.

Следствие 3.1. *При сделанных предположениях спектр оператора $B = AT_\alpha$ в пространстве $L_2(X;\mathbb{C}^m)$ совпадает с динамическим спектром линейного расширения β. При этом спектр оператора B состоит не более чем из m колец, которые могут вырождаться в окружности.*

Скалярный случай $m = 1$ особый, так как тогда векторное расслоение E одномерно и при дихотомии либо все E устойчиво в положительном направлении, либо все E устойчиво в отрицательном. Согласно следствию 3.1 спектр оператора B при $m = 1$ есть кольцо $\sigma(B) = \{\lambda : r(B) \leqslant |\lambda| \leqslant R(B)\}$, где $R(B)$ есть спектральный радиус оператора B, а $r(B) = [R(B^{-1})]^{-1}$.

Пусть ν есть нормированная мера на X. Средним геометрическим функции $a \in C(X)$ называется число $S_\nu(a) = \exp \int_X \ln |a(x)| d\nu$.

Теорема 3.2 (см. [1, 15, 26])**.** *Спектральный радиус оператора взвешенного сдвига задается выражением $R(aT_\alpha) = \max\{S_\nu(a) : \nu \in M_\alpha(X)\}$, где $M_\alpha(X)$ есть множество всех борелевских нормированных мер ν на X, инвариантных и эргодических относительно α, а число $r(B)$ задается выражением $r(aT_\alpha) = \min\{S_\nu(a) : \nu \in M_\alpha(X)\}$.*

3.3. Траекторный подход — локализация с помощью сужений на траектории. Локализация, описанная выше для произвольных операторных алгебр, для алгебр, порожденных операторами взвешенного сдвига, осуществляется с помощью следующей конструкции [1, 26].

Пусть $\mathcal{B}$ есть C^*-алгебра, порожденная операторами взвешенного сдвига с заданным отображением α в пространстве $L_2(X, \mathbb{C}^m)$. Она является замыканием в пространстве линейных ограниченных операторов незамкнутой подалгебры $\mathcal{B}_0$, состоящей из конечных сумм вида

$$B = \sum_{-N}^{N} A_j T_\alpha^j, \quad A_j \in C(X, \mathbb{C}^{m\times m}). \tag{3.12}$$

Пусть $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ есть пространство двусторонних последовательностей $u = (u(k)), k \in \mathbb{Z}$, векторов из $\mathbb{C}^m$ с нормой $\|u\| = (\sum\limits_k \|u(k)\|^2)^{1/2}$. Через T обозначим оператор сдвига, действующий в этом пространстве по формуле $(Tu)(k) = u(k+1)$.

Зафиксируем точку $\tau \in X$. По матрице-функции $A(x)$ построим последовательность матриц $A_{j,\tau}(k) = A_j(\alpha^k(\tau))$, составленную из значений $A(x)$ на траектории точки τ.

Оператору (3.12) поставим в соответствие оператор B_τ, действующий в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ по формуле

$$B_\tau = \sum_{j=-N}^{N} A_{j,\tau} T^j. \tag{3.13}$$

Оператор B_τ построен с помощью значений коэффициента A на траектории точки τ, что поясняет название «траекторный подход». В частности, оператору взвешенного сдвига $B = AT_\alpha$ при этой конструкции соответствует дискретный оператор взвешенного сдвига $B_\tau = A_\tau T$, действующий в $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$ по формуле

$$(B_\tau u)(k) = A(\alpha^k(\tau))u(k+1). \tag{3.14}$$

Лемма 3.4. *Для любого $\tau \in X$ отображение $B \to B_\tau$ продолжается до представления π_τ алгебры $\mathcal{B}$ в пространство $l_2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^m)$.*

Основной результат траекторного подхода содержится в следующем утверждении.

Теорема 3.3. *Оператор B из алгебры $\mathcal{B}$ обратим тогда и только тогда, когда все операторы B_τ обратимы. Оператор B из алгебры $\mathcal{B}$ обратим справа тогда и только тогда, когда все операторы B_τ обратимы справа.*

Доказательство этой теоремы состоит из следующих шагов.

Если точка τ не является периодической, то представление π_τ неприводимо. При этом любое бесконечномерное неприводимое представление алгебры $\mathcal{B}$ эквивалентно некоторому представлению π_τ, соответствующему непериодической точке.

Представление π_τ, соответствующее периодической точке τ, приводимо и разлагается в семейство конечномерных неприводимых представлений. При этом любое конечномерное представление порождается одним из (приводимых) представлений, соответствующих некоторой периодической точке.

Из этого следует, что семейство представлений π_τ, $\tau \in X$ образует достаточный набор, и утверждение теоремы получаем из теоремы 2.5.

Заметим, что если точки τ_1 и τ_2 принадлежат одной траектории, то соответствующие операторы подобны. Поэтому если подмножество $X_0 \subset X$ содержит хотя бы одну точку из каждой траектории, то достаточно проверить условие для $\tau \in X_0$.

Теорема 3.3 применима ко всем операторам из рассматриваемой алгебры, в частности, к многочленным операторам вида (3.12). Но в общем случае для таких операторов построенные локальные представители также являются достаточно сложными для анализа. Но если $B = AT_\alpha$ есть оператор взвешенного сдвига, то локальные представители являются дискретными операторами взвешенного сдвига и более доступны для исследования. Это позволяет, например, получить из теорем 3.1 и 3.3 следствие.

Следствие 3.2. *Пусть $B = AT_\alpha$ есть оператор взвешенного сдвига, и B_τ — его локальные представители. Если при всех τ линейные расширения β_τ, ассоциированные с B_τ, гиперболические, то β также является гиперболическим.*

Из гиперболичности β_τ следует выполнение неравенств вида (3.7) для каждой траектории, но при этом постоянные C и γ могут быть разными для разных τ. Следствие утверждает, что существуют постоянные, при которых неравенства вида (3.7) выполнены сразу для всех траекторий.

3.4. Градуированная гиперболичность линейного расширения. Будем говорить, что линейное расширение линейное расширение β *градуировано гиперболическое*, если существует разложение в прямую сумму векториальных подмножеств $E = W^+ \oplus W^-$, где W^+ устойчиво вперед, а W^- устойчиво назад над X. Такое разложение расслоения будем называть *градуированной дихотомией* линейного расширения β; оно задается с помощью ограниченной проекторнозначной функции $p(x)$.

В отличие от случая гиперболичности, таких разложений может быть много, причем наиболее существенно то, что ранги проекторов $p(x)$ могут быть разными для разных x. Поэтому пространство X разбивается на конечное число измеримых подмножеств X_j таких, что над X_j ранги проекторов $p(x)$ одинаковы и сужения $W^\pm$ на X_j суть векториальные подрасслоения. Кроме того, не предполагается, что векториальные подмножества W^+ и W^- инвариантны и их слои $W_x^\pm$ на каждом X_j непрерывно зависят от x, хотя в примерах такие дополнительные свойства выполнены. Из сказанного следует, что для построения градуированной дихотомии надо построить разбиение $X = \coprod\limits_{j=1}^{p} X_j$ на измеримые подмножества и над каждым X_j построить разложение на векториальные подрасслоения.

Если существует градуированная дихотомия, то из определения следует, что при всех x слой $W_x^{\pm}$ принадлежит $E_x^{\pm}$ и $E_x = E_x^{+} + E_x^{-}$, т. е. условие трансверсальности E^{+} и E^{-} необходимо для существования градуированной дихотомии.

Теорема 3.4. *Пусть для линейного расширения β, ассоциированного с оператором $B = AT_\alpha$, существует градуированная дихотомия, $p(x)$ есть соответствующая проекторнозначная функция и P есть оператор умножения на $p(x)$. Тогда ряд* (2.5) *сходится в некотором кольце, содержащем единичную окружность, и его сумма является правосторонней резольвентой для оператора B.*

Теорема 3.4 утверждает, что существование градуированной дихотомии для линейного расширения β, ассоциированного с оператором $B = AT_\alpha$, достаточно для существования правосторонней резольвенты и, в частности, правосторонней обратимости оператора $B - I$. Поскольку трансверсальность является необходимой для существования градуированной дихотомии, задача построения правосторонней резольвенты распадается на два вопроса:

1) является ли условие трансверсальности необходимым и достаточным для правосторонней обратимости $B - I$?
2) как построить градуированную дихотомию для β при условии трансверсальности?

Ответы на эти вопросы получены ниже для операторов, порожденных т. н. отображениями типа Морса—Смейла, имеющими сравнительно простые динамические свойства.

3.5. Градуированная дихотомия линейного расширения, ассоциированного с дискретным оператором взвешенного сдвига. Градуированная дихотомия для β порождает градуированную дихотомию над каждой траекторией с теми же постоянными C и γ, а также, соответственно, для линейных расширений β_τ, ассоциированных с дискретными операторами взвешенного сдвига B_τ.

Пусть $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{C}^m$ и β — линейное расширение, ассоциированное с дискретным оператором взвешенного сдвига. Обсудим, как может быть построена градуированная дихотомия для такого β, и, в частности, поясним необходимость рассмотрения подрасслоений разных размерностей. Рассмотрим множества

$$E^{+}(C,\gamma) = \{(n,\xi) \in E^{+} : \|\beta^{k}(n,\xi)\| \leqslant C\gamma^{k}\|(n,\xi)\|, k \geqslant 0\}, \tag{3.15}$$

$$E^{-}(C,\gamma) = \{(n,\xi) \in E^{-} : \|\beta^{-k}(n,\xi)\| \leqslant C\gamma^{k}\|(n,\xi)\|, k \geqslant 0\}. \tag{3.16}$$

Чтобы разложение $E_n = W_n^{+} \oplus W_n^{-}$ задавало градуированную дихотомию, подпространство W_n^{+} должно быть подмножеством слоя $E^{+}(C,\gamma)_n$, а W_n^{+} — слоя $E^{-}(C,\gamma)_n$. Сложности с выбором требуемых $W_n^{\pm}$ связаны с тем, что слои $E^{\pm}(C,\gamma)_n$ могут не быть векторными подпространствами. Проведенные ниже построения основаны на том, что эти слои имеют следующую специальную структуру. Существуют целые $n_1 < n_2 < \ldots < n_p$, где $p \leqslant m$, такие, что слой $E^{+}(C,\gamma)_n$ совпадает с E_x^{+} при $n \leqslant n_1$ и является векторным подпространством размерности d_1. При $n_1 < n$ слой $E^{+}(C,\gamma)_n$ не является векторным подпространством, но при $n_1 < n \leqslant n_2$ содержит некоторое множество векторных подпространств меньшей размерности d_2. Для каждого из таких n можно выбрать одно из таких подпространств V_n^{2+}, причем достаточно выбрать $V_{n_2}^{2+}$, а остальные можно задать с помощью условия инвариантности, положив $V_n^{2+} = \beta^{-1}(V_{n+1}^{2+})$. Заметим, что с помощью этого условия выделяются подпространства V_n^{2+} не только при $n_1 < n \leqslant n_2$, но и при всех n, т. е. задается подрасслоение V^{2+} над всем $\mathbb{Z}$.

Далее, при $n_2 < n \leqslant n_3$ слои $E^{+}(C,\gamma)_n$ содержат векторные подпространства еще меньшей размерности d_3, и из них можно выбрать одно из подпространств V_n^{3+}, причем достаточно выбрать $V_{n_3}^{3+}$, а остальные задать с помощью условия инвариантности, и т. д. В результате получаем устойчивое вперед векториальное множество V^{+}, составленное при $n_j < n \leqslant n_{j+1}$ из выбранных слоев V_n^{j+}, имеющее ступенчатую структуру — с ростом n размерности слоев убывают в точках n_j, которые будем называть *точками переключения*. При этом в E^{+} возникает градуировка — цепочка вложенных инвариантных подрасслоений $V^{p+} \subset \ldots \subset V^{2+} \subset V^{1+} = E^{+}$ таких, что V^{j+} устойчиво вперед при $n \leqslant n_j$.

Аналогично в $E^{-}(C,\gamma)$ можно построить устойчивое назад векториальное множество V^{-}, у которого размерности слоев V_n^{-} возрастают с ростом n, и $V_n^{-} = E_n^{-}$ при достаточно больших n.

При таком построении может оказаться, что выделенные подпространства V_n^+ и V_n^- не задают разложение слоя E_n. Поэтому далее используется то, что при заданном n слой $E^+(C,\gamma)_n$ содержит не одно, а целое семейство подпространств, слой $E^-(C,\gamma)_n$ также содержит семейство подпространств, и центральным моментом построения является выбор искомых подпространств $W_n^{\pm}$ из этих семейств.

При построении W_n^+ и W_n^- играет роль подрасслоение со слоями $E_n^+ \cap E_n^-$. Так как при больших по модулю отрицательных n слой V_n^+ совпадает с E_n^+, все подпространство $E_n^+ \cap E_n^-$ принадлежит этому слою, и тогда можно положить $W_n^+ = E_n^+$, а в качестве W_n^- взять дополнение к $E_n^+ \cap E_n^-$ в подпространстве E_n^-. Аналогично, при больших положительных n слой V_n^- совпадает с E_n^-, все подпространство $E_n^+ \cap E_n^-$ принадлежит слою V_n^-, и можно положить $W_n^- = E_n^-$, а в качестве W_n^+ взять дополнение к $E_n^+ \cap E_n^-$ в подпространстве E_n^+. А при промежуточных значениях n приходится выбирать подпространства $E_n^{\pm}$ так, что часть подпространства $E_n^+ \cap E_n^-$ попадает в слой V_n^+, а часть — в слой V_n^-. Такой выбор является наиболее сложным местом рассматриваемой конструкции, и он проведен ниже с использованием свойств отображений типа Морса—Смейла.

Заметим, что для рассматриваемого β можно построить градуированную дихотомию с одной точкой переключения. Например, можно, как выше, при $n \leqslant n_1$ положить $W_n^+ = E_n^+$ и в качестве W_n^- взять дополнение к $E_n^+ \cap E_n^-$ в подпространстве E_n^-. А при $n > n_1$ положить $W_n^- = E_n^-$ и в качестве W_n^+ взять дополнение к $E_n^+ \cap E_n^-$ в E_n^+. Такие подпространства задают градуированную дихотомию для β с одной точкой переключения n_1, но требуемые неравенства выполнены с некоторой постоянной C_1, большей, чем C. Поэтому именно требование, чтобы для всех траекторий неравенство выполнялось с одной постоянной C, приводит к необходимости нескольких переключений.

4. Операторы, порожденные отображениями типа Морса—Смейла

4.1. Условие правосторонней обратимости. Обратимое непрерывное отображение $\alpha : X \to X$ будем называть отображением *типа Морса—Смейла*, если у него существует конечное число неподвижных точек $\tau_1, \dots, \tau_p$, а траектория каждой точки x стремится при $n \to +\infty$ к одной из неподвижных точек $\omega^+(x)$ и стремится к неподвижной точке $\omega^-(x)$ при $n \to -\infty$. В классическом определении диффеоморфизма Морса—Смейла есть дополнительные условия (см. [20]), но в рассматриваемых вопросах существенны только указанные свойства. Ниже предполагается, что α является отображением типа Морса—Смейла. Используются множества $E^{\pm}$, заданные (3.10) и (3.11), и следующие понятия и обозначения.

Обозначим через $d(x)$ количество (с учетом кратности) собственных значений матрицы $A(x)$, модули которых меньше 1. Если матрица $A(x)$ гиперболическая, то слой E_x разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$, где $\dim V_x^+ = d(x)$, $\dim V_x^- = m - d(x)$.

Пусть точка τ неподвижная. Множество $\mathrm{Bas}^+(\tau) = \{x \in X : \alpha^n(x) \to \tau \text{ при } n \to +\infty\}$ называется *бассейном*, или *областью притяжения* точки τ при действии α.

Соответственно, множество $\mathrm{Bas}^-(\tau) = \{x \in X : \alpha^{-n}(x) \to \tau \text{ при } n \to +\infty\}$ называется бассейном точки τ при действии α^{-1}.

Определение отображения типа Морса—Смейла равносильно тому, что

$$X = \coprod_j \mathrm{Bas}^+(\tau_j) = \coprod_j \mathrm{Bas}^-(\tau_j).$$

Неподвижная точка τ называется *притягивающей,* если существует окрестность $U(\tau) \subset \mathrm{Bas}^+(\tau)$. Неподвижная точка τ называется *отталкивающей,* если существует окрестность $U(\tau) \subset \mathrm{Bas}^-(\tau)$. Неподвижная точка τ называется *притягивающе-отталкивающей,* если существует окрестность $U(\tau) \subset [\mathrm{Bas}^+(\tau) \cap \mathrm{Bas}^-(\tau)]$. Неподвижная точка τ называется *седловой,* если для любой окрестности $U(\tau)$ множество $U(\tau) \backslash [\mathrm{Bas}^+(\tau) \cap \mathrm{Bas}^-(\tau)] \neq \varnothing$. Иначе говоря, в любой окрестности седловой точки существуют траектории $\alpha^n(x)$, которые покидают эту окрестность при $n \to +\infty$ и при $n \to -\infty$.

Исследование начнем со доказательства леммы, описывающей свойства линейного расширения β в окрестности неподвижной точки.

Лемма 4.1. *Пусть α есть отображение типа Морса—Смейла, точка τ неподвижная и матрица $A(\tau)$ гиперболическая. Тогда в достаточно малой окрестности U точки τ существует* *непрерывная проекторнозначная функция $p(x)$, задающая над U разложение $E = V^+ \oplus V^-$ в прямую сумму подрасслоений, при котором V^+ — локально устойчивое вперед подрасслоение размерности $d(\tau)$, а V^- — локально устойчивое назад подрасслоение размерности $m - d(\tau)$.*

При этом над пересечением $\mathrm{Bas}^-(\tau) \cap U$ подрасслоение V^+ совпадает с E^+ и определено однозначно, оно является (глобально) устойчивым вперед и неустойчивым назад, а над пересечением $\mathrm{Bas}^+(\tau) \cap U$ является неустойчивым вперед. Аналогично, над пересечением $\mathrm{Bas}^-(\tau) \cap U$ подрасслоение V^- совпадает с E^- и определено однозначно, оно является (глобально) устойчивым назад и неустойчивым вперед, а над пересечением $\mathrm{Bas}^+(\tau) \cap U$ является неустойчивым назад.

Доказательство. Построим одно из требуемых разложений. Возьмем $\gamma_1 < 1$ такое, что матрица $A(\tau)$ не имеет собственных значений, удовлетворяющих условию $\gamma_1 < |\lambda| < 1/\gamma_1$, и пусть $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma < 1$. В силу непрерывности $A(x)$ существует окрестность точки τ, в которой у всех матриц $A(x)$ нет собственных значений, лежащих в кольце $\{\lambda : \gamma_2 < |\lambda| < 1/\gamma_2\}$. Тогда проекторы Рисса

$$p(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} [A(x) - \lambda I]^{-1} d\lambda$$

задают разложение $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ в прямую сумму векторных подрасслоений над этой окрестностью. В окрестности можно выбрать базисы $e_k(x)$ в слоях E_x, непрерывно зависящие от x, в которых матрицы $A(x)$ приводятся в блочно-диагональному виду $\widetilde{A}(x) = S(x)A(x)S^{-1}(x) = \mathrm{Diag}\{A^+(x), A^-(x)\}$, где модули собственных значений матриц $A^+(x)$ меньше γ_2, а модули собственных значений матриц $A^-(x)$ больше $1/\gamma_2$.

Для получения требуемых оценок воспользуемся следующим известным приемом.

На слое E_τ существует скалярное произведение, относительно которого подпространства V_τ^+ и V_τ^- ортогональны, и при этом в соответствующей норме $\|A^+(\tau)\| < \gamma < 1$ и $\|(A^-(\tau))^{-1}\| < \gamma$. Зададим это же скалярное произведение на остальных слоях E_x. Тогда в достаточно малой окрестности имеем $\|A^+(x)\| \leqslant \gamma$. Поэтому, если $\xi \in V^+x$ и точки $x, \alpha^{-1}(x), \alpha^{-n+1}(x)$ принадлежат такой окрестности, то $\|\beta^n(x,\xi)\| = \|A^+(\alpha^n(x))A^+(\alpha^{n-1}(x)) \cdots (x)A^+(x)\xi\| \leqslant \gamma^n \|\xi\|$.

Аналогично, если $\xi \in V_x^-$ и точки $x, \alpha(x), \alpha^n(x)$ принадлежат окрестности, то $\|\beta^{-n}(x,\xi)\| = \|A^-(\alpha^n(x))A^-(\alpha^{n-1}(x)) \cdots (x)A(x)\xi\| \leqslant \gamma^n \|\xi\|$.

После перехода к исходной норме, в силу эквивалентности нормы с исходной, получаем требуемые оценки с некоторыми константами C и тем же γ.

Если $\alpha^{-n}(x) \to \tau$ при $n \to +\infty$ и $\xi \in V_x^+$, то $\|\beta^n(x,\xi)\| \to 0$ и, значит, $V^+x \subset E_x^+$. При этом, если $\xi \notin V_x^+$, то $\|\beta^n(x,\xi)\| \to \infty$. Отсюда получаем равенство $V_x^+ = E_x^+$ для $x \in \mathrm{Bas}^-(\tau)$.

Аналогично, для $x \in \mathrm{Bas}^+(\tau)$ получаем, что $V_x^- = E_x^-$. □

Заметим, что для x, не принадлежащих $\mathrm{Bas}^\pm(\tau)$, только конечное число точек траектории принадлежит окрестности U, поэтому очевидно выполнение требуемых неравенств с некоторыми константами C, зависящими от количества точек траектории, принадлежащих окрестности. В утверждении леммы существенно то, что соответствующие неравенства с одной и той же константой C выполнены для всех траекторий, независимо от количества точек траектории, принадлежащих окрестности.

Перейдем к получению условий правосторонней обратимости оператора $B - I$. Согласно теореме 3.3 таким условием является правосторонняя обратимость всех операторов $B_\tau - I$ в пространствах двусторонних последовательностей $l_2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^m)$, возникающих при применении траекторного подхода, т. е. заданных (3.14). В случае отображений типа Морса—Смейла коэффициенты в операторе дискретного взвешенного сдвига B_τ имеют пределы $A(\alpha^k(\tau)) \to A(\omega^\pm(x))$ при $k \to \pm\infty$, т. е. это операторы вида

$$(Bu)(k) := A(k)u(k+1), \tag{4.1}$$

у которых коэффициенты имеют пределы $\lim\limits_{k\to\pm\infty} A(k) = A(\pm\infty)$. Эффективность применения траекторного подхода здесь определяется тем, что такие операторы устроены достаточно просто и могут быть детально исследованы.

Заметим, что пространство $\mathbb{Z}$ не является компактным, но операторы (4.1) можно считать частным случаем операторов взвешенного сдвига на компактных пространства, если вместо $\mathbb{Z}$ рассматривать расширенное пространство $\widetilde{Z} = \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, которое является компактным. Тогда условие существования пределов есть условие непрерывности коэффициента A как функции на $\widetilde{Z}$, и соответствующее отображение действует по формуле

$$\alpha(x) = \begin{cases} x+1, & x \in \mathbb{Z}; \\ \pm\infty, & x = \pm\infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

В частности, применима лемма 4.1.

Лемма 4.2. *Оператор $B - I$, где B — дискретный оператор взвешенного сдвига вида* (4.1)*, обратим справа в пространстве $l_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^m)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие трансверсальности*

$$E_x^+ + E_x^- = E_x \ \text{ для всех } x \in \widetilde{Z}. \tag{4.3}$$

При этом оператор $B - I$ обратим тогда и только тогда, когда также выполнено условие $E_x^+ \cap E_x^- = \{0\}$ для всех x.

Доказательство. Многие свойства операторов вида (4.1) хорошо известны. Прежде всего, ядро оператора $B - I$ и ядро сопряженного оператора $B^* - I$ всегда конечномерны, кроме того, образ такого оператора замкнут (т. е. оператор является фредгольмовым) тогда и только тогда, когда матрицы $A(\pm\infty)$ не имеют собственных значений с модулем 1, т. е. являются гиперболическими. Это условие эквивалентно выполнению условия трансверсальности (4.3) при $x = \pm\infty$. Известна также формула индекса $\operatorname{ind}(B-I) = \dim\ker(B-I) - \dim\ker(B^*-I) = d(+\infty) - d(\infty)$, $d(\pm\infty)$ есть число собственных значений (с учетом алгебраической кратности) матрицы $A(\tau_k)$, модули которых меньше 1.

В силу условия гиперболичности применима лемма 4.1: из нее следует, что E^+ есть векториальное подмножество, инвариантное относительно действия β, которое над $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ является векторным подрасслоением с размерностью слоя $d(-\infty)$ и в точке $+\infty$ имеет размерность слоя $d(+\infty)$.

Аналогично, E^- есть векториальное подмножество, инвариантное относительно действия β^{-1}, которое над $\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ является векторным подрасслоением с размерностью слоя $m - d(+\infty)$ и в точке $-\infty$ имеет размерность слоя $m - d(-\infty)$.

Кроме того, из леммы 4.1 получаем, что если $(x,\xi) \in E_x^+$, то при $n \to +\infty$ последовательность векторов $\beta^n(x,\xi)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью, а если $(x,\xi) \in E_x^-$, то последовательность векторов $\beta^n(x,\xi)$ стремится к нулю с экспоненциальной скоростью при $n \to -\infty$. Решение $u(k)$ однородного уравнения $A(k)u(k+1) - u(k) = 0$ в пространстве всех последовательностей однозначно определяется по начальному условию $u(0)$, а из экспоненциального убывания получаем, что это решение принадлежит пространству $l_2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^m)$ тогда и только тогда, когда $u(0) \in E_0^+ \cap E_0^-$. Поэтому $\dim\ker(B-I) = \dim(E_0^+ \cap E_0^-)$.

Далее заметим, что фредгольмов оператор обратим справа только тогда, когда $\dim\ker(B-I) = \operatorname{ind}(B-I)$. Поскольку фредгольмов оператор может быть обратим справа только тогда, когда его индекс неотрицательный, неравенство $d(-\infty) \geqslant d(-\infty)$ есть еще одно необходимое условие правосторонней обратимости. Поэтому $\dim E_0^+ + \dim E_0^- = d(-\infty) + (m - d(+\infty)) \geqslant m$. Для алгебраической суммы подпространств выполнено равенство $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$. Поэтому равенство $\dim\ker(B-I) = \operatorname{ind}(B-I)$ равносильно тому, что $\dim(E_0^+ + E_0^-) = m$, т. е. $E_0^+ + E_0^- = E_0$. Кроме того, в силу инвариантности E^+ и E^- относительно действия β условие трансверсальности выполнено при всех x. Таким образом, условие трансверсальности (4.3) необходимо и достаточно для правосторонней обратимости оператора $B - I$. ☐

В скалярном случае свойства дискретного оператора $B - I$ описываются в явном виде.

Следствие 4.1. *Пусть $Bu(k) = a(k)u(k+1)$ есть оператор в пространстве скалярных последовательностей такой, что существуют пределы $a(\pm\infty)$. Тогда условие $|a(\pm\infty)| \neq 1$ необходимо и достаточно для односторонней обратимости оператора $B - I$. При этом*:

1) *если $|a(\pm\infty)| > 1$ или $|a(\pm\infty)| < 1$, то оператор $B - I$ обратим*;
2) *если $|a(-\infty)| < 1 < |a(+\infty)|$, то оператор $B - I$ обратим справа*;
3) *если $|a(+\infty)| < 1 < |a(-\infty)|$, то оператор $B - I$ обратим слева.*

Теперь можно сформулировать основной результат об условиях правосторонней обратимости.

Теорема 4.1. *Пусть $B = AT_\alpha$ есть оператор взвешенного сдвига вида, порожденный отображением типа Морса—Смейла, и пусть $E^\pm$ — подмножества в $E = X \times \mathbb{C}^m$, заданные формулами* (3.10) *и* (3.11). *Оператор $B - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда выполнено условие трансверсальности*

$$E_x^+ + E_x^- = E_x \quad \text{для всех } x \in X. \tag{4.4}$$

При выполнении этого условия операторы $B - \lambda I$ обратимы справа при всех λ из некоторого кольца, содержащего единичную окружность.

Доказательство. Согласно теореме (3.3) оператор $B - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда обратимы справа все операторы $B_\tau - I$, $\tau \in X$. Согласно лемме 4.2, это эквивалентно трансверсальности подпространств $E_x^\pm$ в точках каждой траектории и, следовательно, для всех $x \in X$. □

Обратим внимание на то, что размерность пересечения $E_x^+ \cap E_x^-$ может быть разной для x из разных траекторий, в частности, некоторые из операторов $B_\tau - I$ могут быть обратимыми и тогда $E_x^+ \cap E_x^- = 0$ на всей траектории точки τ.

Второй основной результат касается построения правосторонних резольвент.

Теорема 4.2. *Если линейное расширение β порождено отображением типа Морса—Смейла и векториальные подмножества E^+ и E^- трансверсальны над X, то для β существует градуированная дихотомия, с помощью которой может быть построена правосторонняя резольвента.*

Эта общая теорема была получена в итоге серии работ, в которых постепенно усложнялся вид рассматриваемых операторов и, соответственно, усложнялись используемые конструкции.

4.2. Операторы в пространствах скалярных функций. В случае операторов в пространствах скалярных функций условия правосторонней обратимости дискретных операторов, описанные в следствии 4.1, имеют явный вид, что позволяет записать условие правосторонней обратимости $B - I$ также в явном виде. Однако существуют отображения типа Морса—Смейла, для которых эти условия не могут быть выполненными ни при каком коэффициенте a. Поэтому один из вопросов заключается в получении условий на динамику отображения, при которых возможна правосторонняя обратимость.

Динамика отображения типа Морса—Смейла описывается *графом Смейла* $GS(\alpha)$. Это ориентированный граф, множеством вершин которого является множество $S = \{\tau_1, \ldots, \tau_N\}$ всех неподвижных точек; ориентированное ребро (τ_k, τ_l) включается в граф, если существует точка x, для которой $\omega^-(x) = \tau_k$, $\omega^+(x) = \tau_l$. С использованием понятия бассейна это свойство равносильно тому, что $\mathrm{Bas}^+(\tau_l) \cap \mathrm{Bas}^-(\tau_k) \neq \varnothing$.

Разбиение множества вершин $S = S^- \coprod S^+$ будем называть *ориентированным вправо*, если в графе нет ребер, соединяющее точку $\tau_k \in S^-$ с точкой $\tau_l \in S^+$ и ориентированных влево. Заметим, что если граф содержит цикл, то при ориентированном разбиении все вершины цикла принадлежат либо S^+, либо S^-. В частности, если граф $GS(\alpha)$ является циклом, то такого разбиения не существует.

В скалярном случае коэффициент $A(x)$ является скалярной функцией, будем обозначать его через $a(x)$. По непрерывной функция a и числу λ построим подмножества вершин графа

$$S^-(a, \lambda) = \{\tau_k : |a(\tau_k)| < |\lambda|\}, \qquad S^+(a, \lambda) = \{\tau_k : |a(\tau_k)| > |\lambda|\}.$$

Теорема 4.3. *Пусть α есть отображение типа Морса—Смейла, $a(x) \neq 0$ для всех x и $B = aT_\alpha$ — соответствующий оператор взвешенного сдвига в пространстве скалярных функций. Оператор $B - \lambda I$ обратим справа тогда и только тогда, когда множества $S^-(a, \lambda)$ и $S^+(a, \lambda)$ задают разбиение графа $GS(\alpha)$, ориентированное вправо.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что множества $S^-(a, \lambda)$ и $S^+(a, \lambda)$ задают разбиение графа $GS(\alpha)$ тогда и только тогда, когда выполнено необходимое условие правосторонней обратимости $|\lambda| \neq |a(\tau_k)|$. Согласно следствию 4.1 получаем, что если обе точки $\omega^\pm(\tau)$ принадлежат S^- или обе точки принадлежат S^+, то локальный представитель $B_\tau - \lambda$ обратим. А если $\omega^-(\tau) \in S^-$, $\omega^+(\tau) \in S^+$, то оператор $B_\tau - \lambda$ обратим справа. При этом условие того, что множества $S^-(a, \lambda)$ и

$S^+(a,\lambda)$ задают разбиение графа $GS(\alpha)$, ориентированное вправо, есть запись условия, что среди операторов $B_\tau - \lambda$ нет операторов, обратимых слева, но необратимых справа. Таким образом, условие теоремы есть условие правосторонней обратимости всех локальных представителей $B_\tau - \lambda$. □

Из теоремы 4.3 следует, что необходимое и достаточное условие на динамику отображения, при которых оператор $B - \lambda I$ может быть односторонне обратимым, заключается в существовании ориентированного разбиения графа Смейла.

Эта теорема позволяет описать свойства операторов $B - \lambda I$ для разных точек спектра. Согласно теореме 3.2 спектр оператора взвешенного сдвига $B = aT_\alpha$, порожденного отображением типа Морса—Смейла в пространстве скалярных функций $L_2(X,\mu)$, есть кольцо $\sigma(B) = \{\lambda : r(B) \leqslant |\lambda| \leqslant R(B)\}$, где $R(B) = \max\limits_k\{|a(\tau_k)|\}$, $r(B) = \min\limits_k\{|a(\tau_k)|\}$.

Из теоремы 4.3 следует, что если $|\lambda| = |a(\tau_k)|$, то оператор $B - \lambda I$ не является односторонне обратимым. Дополнение в спектре к множеству окружностей $S_k = \{[\lambda : |\lambda| = |a(\tau_k)|\}$ есть объединение открытых колец K_j, и исследовать надо свойства операторов для λ из этих колец. При этом множества $S^\pm(a,\lambda)$ одинаковы для всех λ из фиксированного кольца K_j. Следовательно, операторы $B - \lambda I$ одновременно обратимы или не обратимы справа для всех λ из K_j.

Перейдем к построению правосторонних резольвент.

Пусть B есть дискретный оператор взвешенного сдвига и $|a(-\infty)| < 1 < |a(+\infty)|$. При $|a(-\infty)| < \gamma < 1 < 1/\gamma < |a(+\infty)|$ множество $E^+(C,\gamma) = \{(n,\xi) \in E^+ : \|\beta^k(n,\xi)\| \leqslant C\gamma^k\|(n,\xi)\|, k \geqslant 0\}$ имеет простую структуру. А именно, существует такое N^+, что слои $E^+(C,\gamma)_n = E_n$ при $n \leqslant N^+$ и $E^+((C,\gamma))_n = \{0\}$ при $n = N^+ + 1$. Соответственно, множество $E^-(C,\gamma) = \{(n,\xi) \in E^- : \|\beta^{-k}(n,\xi)\| \leqslant C\gamma^k\|(n,\xi)\|, k \geqslant 0\}$ устроено аналогично: существует такое N^-, что $E^+((C,\gamma))_n = E_n$ при $n \geqslant N^-$ и $E^+(C,\gamma)_n = \{0\}$ при $n = N^- - 1$.

При достаточно большом C получаем, что $N^- \leqslant N^+$ и, более того, для любого N существует C, при котором $N^- \leqslant N \leqslant N^+$. Тогда, если взять

$$W_n^+ = \begin{cases} E_n, & n \leqslant N, \\ \{0\}, & n > N, \end{cases} \qquad W_n^- = \begin{cases} \{0\}, & n \leqslant N, \\ E_n, & n > N, \end{cases}$$

получаем градуированную дихотомию для β.

Это позволяет построить правосторонние резольвенты для B с помощью операторов P_N умножения на последовательности

$$p_N(k) = \begin{cases} 1, & k \leqslant N, \\ 0, & k > N. \end{cases} \tag{4.5}$$

При таком P_N ряд (2.5) сходится и его сумма $R_N^+(\lambda)$ является правосторонней резольвентой для B, а формула $u = R_N^+ f$ задает решение уравнения $(B - \lambda I)u = f$, удовлетворяющее условию $u(N) = 0$.

Построение правых обратных для оператора $B - \lambda I$ на X связано с построением правых обратных для дискретных операторов $B_\tau - \lambda I$, у которых нормы ограничены в совокупности. Это другая формулировка отмеченного в пункте 3.5 условия, что постоянные C и γ, входящие в определение градуированной гиперболичности для линейных расширений β_τ, должны быть общими для всех τ.

При заданном λ для резольвент $R_N^+(\lambda)$ дискретного оператора получаем, что $\|R_N^+\| \to \infty$ при $N \to \pm\infty$, и при каком-то значении N получаем правый обратный указанного вида с наименьшей нормой. Приведенная ниже конструкция фактически содержит выбор для каждого τ такого значения $N(\tau)$, что нормы правых обратных вида $R_{N(\tau)}^+$ ограничены в совокупности. Это приводит к построению требуемой правосторонней резольвенты, у которой соответствующий оператор P является проектором.

Заметим, что для дискретного оператора взвешенного сдвига можно построить резольвенту с наименьшей нормой, но такая резольвента имеет более сложный вид, и соответствующий оператор P не является проектором. Действительно, как отмечено в лемме 2.3, решение уравнения $(B - \lambda I)u = f$, имеющее наименьшую норму, задается как проекция произвольного решения u на ортогональное дополнение к ядру оператора.

Ядро оператора $B-\lambda$ одномерно и порождено последовательностью

$$\omega_\lambda = \frac{1}{\|\widetilde{\omega}\|}\widetilde{\omega}, \qquad \text{где } \widetilde{\omega}(k) = \begin{cases} \lambda^k \Big[\prod\limits_{j=0}^{k-1} a(j)\Big]^{-1}, & k \geqslant 0, \\ \lambda^{-k} \prod\limits_{j=k}^{-1} a(j), & k < 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Поэтому проекция на ядро задается формулой $Qu =< u, \omega_\lambda > \omega_\lambda$, а правосторонняя резольвента с наименьшей нормой задается выражением $R^+(\lambda)f = R_0^+ f - < R_0^+ f,\ \omega_\lambda > \omega_\lambda$.

Лемма 4.3. *Если разбиение множества вершин графа Смейла $S = S^- \coprod S^+$ ориентированно вправо, то существует открытое множество X^+, содержащее S^+ и инвариантное относительно действия α.*

Теорема 4.4. *Пусть $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$ есть одно из указанных выше открытых колец K_j, лежащих в спектре оператора $B = aT_\alpha$, такое, что соответствующее ему разбиение $S = S^- \coprod S^+$ ориентировано вправо, и пусть X^+ есть открытая окрестность множества S^+, инвариантная относительно действия α.*

Если P есть оператор умножения на функцию $p(x) = \begin{cases} 1, & x \in X^+ \\ 0, & x \in X^- = X \setminus X^+ \end{cases}$, *то ряд* (2.5) *сходится и его сумма является правосторонней резольвентой для оператора B.*

Пример 4.1. Пусть $X = [0,1]\times[0,1]$ есть квадрат на плоскости и отображение задано формулой $\alpha : (x_1, x_2) \to (\alpha_0(x_1), \alpha_0(x_2))$, где $\alpha_0 : [0,1] \to [0,1]$ такое дифференцируемое отображение отрезка, что $\alpha_0(0) = 0, \alpha_0(1) = 1$ и $\alpha_0(x) > x$ для $0 < x < 1$. Тогда α есть отображение типа Морса—Смейла, неподвижными точками у которого являются вершины квадрата $\{\tau_1 = (0,0),\ \tau_2 = (1,0),\ \tau_3 = (1,1),\ \tau_4 = (0,1)$. При этом точка τ_1 является отталкивающей, точка τ_3 притягивающей, а точки τ_2 и τ_4 — седловые. Граф содержит пять ребер и у него существует четыре ориентированных вправо разбиения. В качестве соответствующих множеств X^+ можно взять, в зависимости от вида S^+, множества $X^+ = (1/2,1] \times (1/2,1]$ при $S^+ = \{\tau_3\}$; $X^+ = (1/2,1] \times [0,1]$ при $S^+ = \{\tau_2, \tau_3\}$; $X^+ = [0,1] \times (1/2,1]$ при $S^+ = \{\tau_3, \tau_4\}$; $X^+ = X \setminus [0,1/2] \times [0,1/2]$ при $S^+ = \{\tau_2, \tau_3, \tau_4\}$.

В этом примере спектр оператора B разбивается на три кольца, в которых свойства $B - \lambda I$ зависят от того, как упорядочены в порядке возрастания числа $|a(\tau_k)|$, здесь возможны $4! = 24$ случая. Таким образом, даже в этом простом примере для разных коэффициентов a возможно достаточно большое число вариантов.

Результаты этого раздела опубликованы в [4, 24, 25].

4.3. Операторы, порожденные отображениями с простейшей динамикой. В пространствах вектор-функций сначала рассмотрим операторы взвешенного сдвига для одного подкласса отображений типа Морса — Смейла.

Будем говорить, что отображение $\alpha : X \to X$ имеет *простейшую динамику*, если у него существуют только две неподвижные точки τ_1 и τ_2, а траектории остальных точек стремятся к τ_2 при $n \to +\infty$ и стремятся к τ_1 при $n \to -\infty$.

Например, отображение (4.2), соответствующее всем локальным представителям B_τ, имеет простейшую динамику, и, следовательно, еще одним достоинством метода локализации является то, что он сводит исследование операторов, порожденных разными отображениями типа Морса—Смейла, к рассмотрению операторов, порожденных одним отображением с простейшей динамикой.

Первые результаты, связанные с правосторонней обратимостью, относятся к операторам, порожденным непрерывными обратимыми отображениями отрезка $[0,1]$ в себя, такими, что $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 1$ и при этом $\alpha(x) > x$ для $0 < x < 1$. Это модельный пример отображения типа Морса—Смейла с простейшей динамикой. Такие операторы в пространствах скалярных функций были рассмотрены ранее в [16, 28].

Операторы $B = A T_\alpha$, порожденные таким же отображением отрезка в пространствах вектор-функций $L_p([0,1], \mathbb{C}^m)$, были рассмотрены в [2], причем исследовался более общий вопрос о замкнутости образа оператора $B - I$, что равносильно нормальной разрешимости функциональных уравнений вида (1.1). Приведем основной результаты этой работы, которая послужила базой для дальнейших исследований правосторонней обратимости. Доказательства ряда утверждений в [2] были получены с помощью прямых вычислений, но в дальнейшем было обнаружено, что часть из них является следствием общих теорем.

Напомним, что здесь мы рассматриваем векторное расслоение $E = [0,1] \times \mathbb{C}^m$, линейное расширение β, заданное формулой (3.5), ассоциированное с оператором $B = AT_\alpha$, и векториальные подмножества $E^\pm$ в E, заданные формулами (3.10) и (3.11). В рассматриваемом случае $E^\pm$ являются векторными подрасслоениями над $(0,1)$, инвариантными относительно действия β.

Подрасслоения E^+ и E^- будем называть *когерентными*, если $d(x) := \dim(E_x^+ \cap E_x^-) = \mathrm{const}$ для $x \in (0,1)$. Поскольку $d(\alpha(x)) = d(x)$, выполнения этого условия достаточно требовать на каком-либо промежутке вида $[x_0, \alpha(x_0))$. Для трансверсальных подрасслоений условие когерентности выполнено автоматически.

Основным результатом работы [2] является следующее утверждение.

Теорема 4.5. *Пусть $B = AT_\alpha$ — оператор взвешенного сдвига, порожденный модельным отображением отрезка с простейшей динамикой. Образ оператора $B - I$ замкнут тогда и только тогда, когда матрицы $A(0)$ и $A(1)$ гиперболичны и подрасслоения E^+ и E^- когерентны.*

Построение градуированной дихотомии в случае отображения с простейшей динамикой. Пусть $B = AT_\alpha$ — оператор взвешенного сдвига, порожденный отображением с простейшей динамикой, и пусть выполнено условие трансверсальности. Требуется построить разложение $E = W^+ \oplus W^-$, где векториальное подмножество W^+ устойчиво вперед, а W^- устойчиво назад.

В рассматриваемом случае отображения с простейшей динамикой $\alpha^{-n}(x) \to \tau_1$ при $n \to +\infty$ для всех $x \neq \tau_2$. Поэтому, согласно лемме 4.1, над замкнутой окрестностью $U(\tau_1)$ существует разложение $E = E^+ \oplus V^-$, при котором над этой окрестностью E^+ устойчиво вперед, а V^- неустойчиво вперед. При этом для любого $N > 0$ подрасслоение E^+ устойчиво вперед (с другой постоянной C) над образом $X_N^+ = \bigcup\limits_{j=0}^{N} \alpha^j(U(\tau_1))$ для любого $N > 0$. Здесь над X_N^+ неравенство выполняется с другой постоянной C_N, эти постоянные возрастают с ростом N, и E^+ не является устойчивым вперед над всем бассейном $\mathrm{Bas}^-(\tau_1) = X \setminus \tau_2$.

Аналогично, над окрестностью $U(\tau_2)$ и над множеством $X_N^- = \bigcup\limits_{j=0}^{N} \alpha^{-j} jU(\tau_))$ подрасслоение E^- устойчиво назад, а V^- неустойчиво назад.

Из неустойчивости вперед множества V^- не следует, что оно устойчиво назад, так как неустойчивость вперед означает выполнение оценок только для тех n, при которых точки $\alpha^n(x)$ принадлежат окрестности $U(\tau_1)$, а для устойчивости назад нужно выполнение таких же оценок для всех $n > 0$. При больших n точки $\alpha^n(x)$ принадлежат окрестности $U(\tau_2)$, а над этой окрестностью требуемые оценки, согласно той же лемме, выполнены только для векторов из E^-. Поэтому V_x^- над $U(\tau_1)$ нужно выбрать так, чтобы образы $\beta^{-n}(V_x^-)$ при больших n принадлежали E^-. В силу инвариантности E^- это выполнено, если $V_x^- \subset E_x^-$.

Так как очевидно, что $E_x^+ \cap E_x^- \subset E_x^+$, в качестве W^- над X_N^+ можно взять любое подпространство в E_x^-, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$, причем такие дополнения можно выбрать даже непрерывно зависящими от x.

Аналогично, если W^+ есть любое подрасслоение над множеством X_N^- в E_x^+, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$, получаем разложение $E = W^+ \oplus E^-$ над X_N^-, при котором W_x^+ устойчиво вперед, а E^- устойчиво назад.

Далее воспользуемся следующим свойством отображений типа Морса—Смейла.

Лемма 4.4. *Если $\alpha : X \to X$ есть отображение типа Морса—Смейла и замкнутое множество $X_0 \subset X$ не содержит неподвижных точек, то существует такое число N, что для любой траектории количество точек, лежащих в X_0, не превосходит N.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любого N существует точка x_N такая, что количество точек ее траектории, лежащих в X_0, больше N. Так как X_0 компактно, у множества таких точек существует предельная точка x_∞, и количество точек ее траектории, лежащих в X_0, бесконечно. Поэтому у множества таких точек траектории существует предельная точка $x^* \in X_0$.

Но, по определению отображения типа Морса—Смейла, предельная точка любой траектории есть неподвижная точка и $x^* \notin X_0$. □

Пусть $X_0 = X \setminus [U(\tau_1) \cup U(\tau_2)]$ и N есть число, существование которого утверждается в лемме 4.4. Тогда $X_N^+ \cup X_N^- = X$, и если взять, например, множества $X_1 = X_N^+$, $X_2 = X \setminus X_N^+$, то над ними получаем гиперболические разложения.

Пример 4.2. Для конкретности уточним детали построения для модельного примера отображения отрезка. В этом примере множества вида X_N^+ суть отрезки вида $[0, \alpha(x_0)]$, где $x_0 < 1$. Подпространства W_x^- мы задавали как подпространства в E_x^-, дополнительные к пересечению $E_x^+ \cap E_x^-$. Эти подпространства можно выбрать при $x \in [\alpha_{-1}(x_0, x_0]$ так, что они непрерывно зависят от x, и выполнено условие $\beta(W^-_{\alpha^{-1}(x_0)}) = W^-_{x_0}$. Для остальных $x \in (0, \alpha^{-1}(x_0)]$ подпространства W_x^- можно однозначно задать с помощью условия инвариантности $W^-_{\alpha(x)} = \beta(W_x^-)$.

При такой конструкции получаем, что проекторнозначная функция $p(x)$, задающая построенное разложение, непрерывно зависит от x на $(0, x_0]$, при этом ее предел при $x \to 0$ есть $p(0)$, следовательно, она непрерывна на $[0, \alpha(x_0)]$.

Аналогично, проекторнозначная функция $p(x)$ над $[x_0, 1]$, задающая разложение $E_x = W_x^+ \oplus E_x^-$, может быть построена непрерывной.

Проверим, что построенное таким образом подрасслоение W_x^- над $[0, x_0]$ является устойчивым назад. Пусть $x \in (0, x_0]$ и $\nu(x) = \max\{n : \alpha^n(x) \in (0, \alpha(x_0)]\}$. Если $y \leqslant \alpha(x_0)$ и $(y, \eta) \in W_y^-$, то, в силу неустойчивости вперед, выполнено неравенство $\beta^n(y, \eta) \geqslant C\gamma^{-n}\|(y, \eta)\|$. Если положить $(x, \xi) = \beta^n(y, \eta)$, то при $n \leqslant \nu(x)$ получаем требуемое неравенство $\beta^{-n}(x, \xi) \leqslant 1/C\gamma^n\|(x, \xi)\|$. По построению $(x, \xi) \in W_x^- \subset E_x^-$. При $n > \nu(x)$ в силу инвариантности E^- относительно β^{-1} имеем $\beta^{-n}(x, \xi) \in E^-_{\alpha^n(x)}$, и в силу устойчивости назад E^- при $x \geqslant x_0$ получаем требуемое $\beta^{-n}(x, \xi) \leqslant 1/C\gamma^{\nu(x)}\|\beta^{-\nu(x)}(x, \xi)\| \leqslant 1/C\gamma^{\nu(x)}C_1\gamma^{n-\nu(x)}\|(x, \xi)\| = C_2\gamma^n\|(x, \xi)\|$.

Аналогично проверяется устойчивость вперед подрасслоения W_x^+ над $[x_0, 1]$.

При описанной конструкции получаем гиперболическое разложение над $[x_0, 1]$ и гиперболическое разложение над $[0, x_0)$. Это качественно разные разложения, и при переходе через точку x_0 происходит переключение режима — переход от одного разложения к другому, при котором ранги матриц $p(x)$ изменяются.

Пример 4.3. Рассмотрим оператор на отрезке $[0, 2]$, порожденный несколько более сложным отображением, у которого точки 0, 1 и 2 неподвижные, и которое сдвигает остальные точки вправо. Здесь точка 1 *притягивающе-отталкивающая*. При выполнении условия трансверсальности проекторнозначную функцию $p(x)$, задающую локально гиперболическое разложение, можно построить на каждом из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ по описанному выше правилу. При этом из конструкции видно, что построенная матрица-функция $p(x)$ непрерывна в неподвижной точке 1, а уменьшение размерности слоя W_x^+ происходит в некоторой точке $x_0 \in (0, 1)$ и в точке $x_1 \in (1, 2)$.

В этом примере имеем два переключения режима, причем эти переключения происходят вне окрестностей неподвижных точек, так как в достаточно малой окрестности неподвижной точки размерность слоев W_x^+ диктуются разложением коэффициента $A(\tau)$ в этой точке.

Результаты этого раздела опубликованы в [5–7].

4.4. Конструкция градуированной дихотомии в случае модельного отображения квадрата. С помощью леммы 4.4 построение градуированной дихотомии можно свести к построению разложения в окрестности $U(\tau_k)$ каждой неподвижной точки. При этом в окрестностях притягивающих и отталкивающих точек такие разложения строятся как в случае простейшей динамики, а основную сложность представляет построение разложения в окрестности седловой точки.

Пусть τ есть седловая точка и $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ есть разложение в ее окрестности, построенное в лемме 4.1. Это не есть требуемое разложение, так как такое разложение локально устойчиво, а требуется (глобальная) устойчивость. В частности, для устойчивости вперед W^+ нужно выполнение условия $W_x^+ \subset E_x^+$, что не выполнено для всех V_x^+, для устойчивости назад W^- нужно выполнение условия $W_x^- \subset E_x^-$. Требуемое разложение получаем, если в качестве W_x^+ взять проекции подпространств V_x^+ на E_x^+, а в качестве W_x^- взять проекции подпространств V_x^- на E_x^-. При этом проекции могут не быть ортогональными и имеется определенный произвол в их построении, за счет которого можно построить подпространства, удовлетворяющие дополнительным условиям, например, инвариантные. В достаточно малой окрестности точки τ расстояния $d(W_x^{\pm}, V_x^{\pm})$ малы, поэтому из того, что подпространства V_x^+ и V_x^- взаимно дополнительны, следует, что подпространства W_x^+ и W_x^- также взаимно дополнительны, причем для раствора этих подпространств имеет место оценка снизу, обеспечивающая ограниченность соответствующих проекторов $p(x)$.

Такая конструкция в общем случае довольно громоздкая, но качественные отличия от случая простейшей динамики проявляются уже при построении градуированной дихотомии в случае отображения из примера 4.1, у которого точка τ_1 отталкивающая, точка τ_3 притягивающая и точки τ_2 и τ_4 — седловые.

Опишем конструкцию для этого примера более детально. Рассмотрим достаточно малую окрестность U_1 отталкивающей точки τ_1, для конкретности возьмем квадрат вида $U_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1 \leqslant \delta_1, 0 \leqslant x_2 \leqslant \delta_1\}$ с малым δ_1. Согласно лемме 4.1, в этой окрестности E_x^+ является устойчивым вперед векторным подрасслоением размерности $d(\tau_1)$, и полагаем $W_x^+ = E_x^+$, а в качестве W^- можно взять любое подрасслоение в E_x^-, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$. Здесь можно построить подпространства $W_x^{\pm}$ по указанному правилу над разностью $U_1 \setminus \alpha^{-1}(U_1)$, а над $\alpha^{-1}(U_1)$ задать их условия инвариантности $W_x^{\pm} = \beta^n(W_{\alpha^{-n}(x)}^{\pm})$. При этом можно выбрать $W_x^{\pm}$ даже непрерывно зависящими от x. Далее можем построить требуемое разложение над образом этой окрестности $\alpha^N(U_1)$ при любом $N > 0$. Образ $\alpha^N(U_1)$ в нашем примере является квадратом вида $X_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 - \delta, 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 - \delta\}$, где за счет выбора достаточно большого N можем получить квадрат со сколь угодно малым δ.

Аналогично, исходя из малой окрестности притягивающей точки τ_3, строится разложение над любым квадратом вида $X_4 = \{(x_1, x_2) : \delta \leqslant x_1 \leqslant 1, \delta \leqslant x_2 \leqslant 1\}$.

Пусть X_{14} есть наименьшее замкнутое инвариантное подмножество, содержащее пересечение $X_1 \cap X_4$. Это компактное множество, на котором отображение α имеет две неподвижные точки и имеет простейшую динамику. Над этим множеством требуемое разложение получаем с помощью уже построенных. Например, при $x \in X_{14} \cap X_1$ можно взять построенные выше подпространства над X_1, а при $x \in X_{14} \setminus X_1$ можно взять построенные выше подпространства над X_2.

Множество X_{14} не содержит окрестности седловых точек, а именно, построение разложений над окрестностями седловых точек представляет основную сложность.

Рассмотрим седловую точку τ_2. Пусть $E_x = V_x^+ \oplus V_x^-$ есть разложение в окрестности точки τ_2, построенное в лемме 4.1, и $q(x)$ — проекторы, задающие это разложение. Как уже отмечалось, это не есть требуемое разложение.

Обозначим $O(t, s) = \{(x_1, x_2) : t \leqslant x_1 < \alpha(t),\ 0 \leqslant x_2 \leqslant s\}$. При $s = 0$ это полуинтервалы на оси x_1. Также рассмотрим отрезки на сторонах квадрата $\widehat{O}_1(t) = \{(x_1, 0) : t \leqslant x_1 \leqslant 1\}$, $\widehat{O}_2(s) = \{(1, x_2) :\ 0 \leqslant x_2 \leqslant s\}$. Обратим внимание на то, что

$$\dim E_x^- = \begin{cases} d(\tau_3), & x_2 > 0, \\ d(\tau_2), & x_2 = 0, \end{cases}$$

и подпространства E_x^- имеют скачок в точках $x \in O(t, 0)$, в то время как подпространства E_x^+ непрерывно зависят от x.

При $x \in \widehat{O}_1(t)$ подпространство $W_x^- = V_x^- = E_x^-$ определено однозначно. Как и выше, для таких x в качестве W_x^+ можно взять любое подрасслоение в E_x^+, дополнительное к $E_x^+ \cap E_x^-$, и его можно выбрать непрерывно зависящим от x. Поэтому для заданного $\varepsilon > 0$ при t, достаточно близких к 1, выполнено $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant \varepsilon$ и $\Theta(V_x^+, E_x^+) \leqslant \varepsilon$. При достаточно малом s на прямоугольнике $O(t, s)$ выполнено неравенство $\Theta(V_x^+, E_x^+) \leqslant 2\varepsilon$, из которого, согласно лемме 3.3, следует, что ортогональные проекции подпространств V_x^+ на подпространства E_x^+ имеют размерность $d(\tau_2)$, эти ортогональные проекции возьмем в качестве W_x^+ на $O(t, s)$. Здесь также получаем, что $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant 2\varepsilon$.

Над образами $\alpha^n(O(t, s))$ множества $O(t, s)$ определяем подпространства W_x^+ из условия инвариантности — полагаем $W_x^+ = \beta^n(W_{\alpha^{-n}(x)}^+)$.

Проверим, что построенное семейство W^+ подпространств W_x^+ является локально устойчивым вперед. Для $(x, \xi) \in W_x^+$ рассмотрим разложение $\xi = \eta + \nu$, где $\eta = q(x)\xi \in V_x^+$, $\nu = \xi - \eta \in V_x^-$.

Из ограниченности в совокупности проекторов $q(x)$ следует, что $\|\eta\| \leqslant C\|\xi\|$, а из условия $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant 2\varepsilon$ следует, что $\|\xi\| \leqslant C_1\|\eta\|$.

Далее получаем оценки $\|\beta^{-n}(x,\eta)\| \geqslant \gamma^{-n}\|(x,\eta)\| \geqslant \frac{1}{C_1}\gamma^{-n}\|(x,\xi)\|$ и $\|\beta^{-n}(x,\nu)\| \leqslant \gamma^n\|(x,\nu)\| \leqslant C\gamma^n\|(x,\xi)\|$, из которых следует, что $\|\beta^{-n}(x,\xi)\| \geqslant \|\beta^{-n}(x,\eta)\| - \|\beta^{-n}(x,\nu)\| \geqslant \frac{1-CC_1\gamma^2}{C_1}\gamma^{-n}\|(x,\xi)\|$.

Из этого неравенства получаем локальную устойчивость вперед для W^+. Поскольку $(x,\xi) \in E_x^+$, получаем и глобальную устойчивость вперед. Кроме того, для тех n, при которых $\alpha^n(x) \in U(\tau_2)$, после нормировки получаем, что $\frac{1}{\|\beta^{-n}(x,\xi)\|}\|\beta^{-n}(x,\xi) - \beta^{-n}(x,\eta)\| \leqslant C_2\gamma^n$. А из этого неравенства следует, что $d(W_x^+, V_x^+) \leqslant C_2\gamma^n$ для таких x. Точки из $x \in \alpha^n(O(t,s))$ принадлежат окрестности точки $\widehat{x} \in \widehat{O}_2(s) \cap U(\tau_2)$ только при достаточно больших n. Поэтому из полученного неравенства следует, что при стремлении $x = (x_1, x_2)$ к точке $\widehat{x} \in \widehat{O}_2(s) \cap U(\tau_2)$ подпространства W_x^+ стремятся к $V_{\widehat{x}}^+$. В частности, при $x \to \tau_2$ подпространства W_x^+ стремятся к $V_{\tau_2}^+$.

Аналогично, с заменой α и β на обратные, строится устойчивое назад семейство подпространств W_x^-. При $x \to \tau_2 = (1,0)$ построенные подпространства W_x^- стремятся к $V_{\tau_2}^-$.

Таким образом, в достаточно малой окрестности точки τ_2 построенные подпространства W_x^+ близки к $V_{\tau_2}^+$, подпространства W_x^- близки к $V_{\tau_2}^-$. Поэтому из того, что подпространства V_x^+ и V_x^- взаимно дополнительны, следует, что близкие к ним подпространства W_x^+ и W_x^- также взаимно дополнительны, что и требовалось.

Проведенное построение включает в себя построение градуированной дихотомии над траекторией каждой точки $x \in X$. Сопоставим полученный результат с вопросами, отмеченными в пункте 3.5. Пусть точка x из малой окрестности точки τ_1 такова, что при $n_1(x) < n \leqslant n_2(x)$ точки траектории $\alpha^n(x)$ принадлежат построенной окрестности точки τ_2, а затем стремятся к точке τ_3. При этом для разных x разность $n_2(x) - n_1(x)$ может быть сколь угодно большой. Если проследить за видом устойчивых слоев W_x^+ вдоль траектории $\alpha^n(x)$, то получаем, что имеется две точки переключения: при $n \leqslant n_1(x)$ это подпространства размерности $d(\tau_1)$, затем при $n_1(x) < n \leqslant n_2(x)$ это подпространства меньшей размерности $d(\tau_2)$, а при $n > n_2(x)$ — еще меньшей размерности $d(\tau_3)$. Отметим, что при $n_1(x) < n \leqslant n_2(x)$ связь разложения в точках $\alpha^n(x)$ с разложением в точке τ_2 определяется тем, что матрицы $A(\alpha^n(x))$ близки в матрице $A(\tau_2)$. Существенным шагом конструкции является также выбор для каждого x точек переключения $n_1(x)$ и $n_2(x)$, обеспечивающий выполнение требуемых неравенств для всех x с одними и теми же постоянными C и γ, независимо от величины $n_2(x) - n_1(x)$.

5. Операторы, порожденные произвольными отображениями

Операторы взвешенного сдвига в пространствах скалярных функций, порожденные произвольными обратимыми отображениями, были рассмотрены в [3, 4, 23].

Как уже отмечалось, существуют отображения, для которых при любом коэффициенте a оператор $aT_\alpha - \lambda I$ не является односторонне обратимым при всех спектральных значениях λ. Поэтому в первую очередь нужно описать класс отображений, при которых возможна правосторонняя обратимость.

Замкнутое инвариантное множество $A \subset X$ называется *аттрактором* для отображения α, если существует такая окрестность U этого множества, что $\alpha(U) \subset U$ и $A = \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \alpha^n(U)$. Отображение, у которого существует нетривиальный аттрактор, будем называть *отображением с разделимой динамикой*. У такого отображения может существовать много различных аттракторов. Среди отображений типа Морса—Смейла разделимую динамику имеют те, у которых граф Смейла допускает ориентированное разбиение, и каждое такое разбиение задает свой аттрактор.

Основными результатами [4] являются следующие теоремы.

Теорема 5.1. *Функции a, при которых оператор $aT\alpha - I$ необратим, но обратим справа, существуют тогда и только тогда, когда отображение α имеет разделимую динамику.*

Теорема 5.2. *Пусть отображение α имеет разделимую динамику. Оператор $aT\alpha - I$ обратим справа тогда и только тогда, когда существует такой аттрактор A, что для всех эргодических мер ν, носители которых принадлежат A, средние геометрические $S_\nu(a) > 1$,* *а для эргодических мер ν, носители которых принадлежат $X \setminus A$, средние геометрические $S_\nu(a) < 1$.*

При выполнении этого условия правосторонняя резольвента для оператора $aT\alpha$ строится с помощью проектора P, действующего как оператор умножения на характеристическую функцию окрестности U аттрактора A.

Для операторов в пространствах вектор-функций справедлива теорема 3.4, утверждающая, что при любом отображении существование градуированной дихотомии достаточно для построения правосторонней резольвенты. Необходимость этого условия пока доказана только для некоторых модельных примеров с динамикой, более сложной, чем у отображений типа Морса—Смейла. Приведем один из таких результатов, полученный в магистерской диссертации Н. В. Солопова.

Пример 5.1. Пусть $X = \{z : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\}$ есть кольцо на комплексной плоскости. Запишем z в полярных координатах: $z = re^{it}$, и пусть $s = r - 1$. Зададим отображение этого кольца в себя, действующее во введенных координатах по формуле

$$\alpha(z) = \left[1 + s + [s(1-s)]^2\right] \exp\left[i\left(t + \frac{1}{10}\sin^2 t + s(1-s)\right)\right]. \tag{5.1}$$

Сначала опишем динамику этого отображения.

Окружности $S_1 = \{z : |z| = 1\}$ и $S_2 = \{z : |z| = 2\}$ являются замкнутыми инвариантными подмножествами. Отображение $f(s) = s + [s(1-s)]^2$ отрезка $[0,1]$ имеет простейшую динамику — траектория каждой точки $s_0 \in (0,1)$ при действии f стремится к 1 и при действии обратного отображения стремится к 0. Поэтому окружность S_2 является аттрактором для α, а окружность S_1 — аттрактором для обратного отображения, и α есть отображение с разделимой динамикой.

На S_1 отображение действует по формуле $\alpha(t) = \exp\left[i\left(t + \frac{1}{10}\sin^2 t\right)\right]$. У этого отображения точки ± 1 являются неподвижными, причем при $0 < t < \pi$, т. е. на верхней полуокружности, траектории точек стремятся к -1, а при $\pi < t < 2\pi$ траектории точек стремятся к 1. Аналогично отображение действует на S_2, неподвижными являются точки ± 2.

Траектория $z_n = \alpha^n(z_0)$ каждой точки $z_0 = (s_0, t_0)$, где $0 < s_0 < 1$, стремится к наружной окружности S_2 при $n \to +\infty$ и стремится к внутренней окружности S_1 при $n \to -\infty$. Покажем, что такая траектория не имеет предела при $n \to +\infty$.

Координаты точек $z_n = (s_n, t_n)$ задаются выражениями $s_n = f(s_{n-1}) = +s_{n-1} + [s_{n-1}(1-s_{n-1})]^2$, $t_n = t_{n-1} + \frac{1}{10}\sin^2 t_{n-1} + s_{n-1}(1 - s_{n-1})$. Как сказано выше, $s_n \to 1$ при $n \to +\infty$. Покажем, что последовательность t_n неограничено возрастает. Без ограничения общности можем считать, что $s_0 \geqslant 1/2$. Обозначив $h_k = 1 - s_k$ получаем оценку $t_n - t_{n-1} = \frac{1}{10}\sin^2 t_{n-1} + s_{n-1}(1-s_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}h_{n-1}$, откуда следует, что $t_n \geqslant t_0 + \frac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k$.

Здесь отображение f подобрано таким образом, что h_k медленно сходятся к нулю и суммы $\sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k$ неограничено возрастают. Последовательность h_k построена по правилу $h_k = \varphi(h_{k-1})$, где $\varphi(h) = h - [h(1-h)]^2 = h - h^2 + 2h^3 - h^4$. При малых h поведение итераций определяется первыми членами $h - h^2$ разложения функции φ. Такие же первые члены разложения имеет функция $\psi(h) = \frac{h}{h+1}$, для которой последовательность итерации имеет более простой вид, например, при $h'_0 = 1/2$ получаем члены гармонического ряда $h'_k = 1/k$. Отсюда получаем, что суммы $\sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k$ также неограниченно возрастают, последовательность t_n неограничено возрастает и, следовательно, последовательность z_n не имеет предела.

Геометрический смысл этого утверждения в том, что рассматриваемая траектория z_n не стремится к какой-либо точке, а «накручивается» на окружность $|z| = 2$ бесконечное число раз. Особенность поведения данной траектории заключается в том, что она «зависает» в окрестности точки $z = 2$, т. е. имеется большой отрезок траектории, лежащий в окрестности данной точки. Далее траектория совершает обход полуокружности и затем зависает уже над точкой $z = -2$. Далее процесс повторяется, и при этом количество точек траектории, находящихся в окрестностях точек $z = \pm 2$, с каждым оборотом вокруг окружности увеличивается.

Аналогично при $n \to -\infty$ траектория приближаются к внутренней окружности $|z| = 1$, также совершая бесконечное число витков и «зависая» вблизи точек $z = \pm 1$.

Рассмотрим оператор AT_α, порожденный отображением (5.1) в пространстве вектор-функций $L_2(X, \mathbb{C}^m)$. Основной результат заключается в том, что утверждения теорем 4.1 и 4.2 справедливы и для таких операторов.

Опишем основные шаги доказательства. При переходе к дискретным оператором получаем, что последовательность их коэффициентов имеет сложное поведение и их анализ затруднен. Но на граничных окружностях отображение α имеет более простую динамику и является отображением типа Морса—Смейла. При этом граф Смейла этого отображения окружности является циклом. Поэтому операторы $B_\tau - I$, соответствующие точкам этих окружностей, должны быть обратимы, из чего следует, что действие β на обеих окружностях должно быть гиперболическим — над ними существуют разложения $E_z = E_z^+ \oplus E_z^-$.

Для дальнейшего используется нелокальный аналог леммы 4.1, который требует более сложного доказательства.

Лемма 5.1. *Пусть линейное расширение β является гиперболическим над окружностью S_1. Тогда в достаточно малой окрестности U этой окружности τ существует непрерывная проекторнозначная функция $p(x)$, задающая разложения $E = V^+ \oplus V^-$ в прямую сумму подрасслоений, при котором V^+ — устойчивое вперед подрасслоение, совпадающее с E^+, а W^- — локально устойчивое назад подрасслоение.*

Аналогичное разложение имеет место в окрестности окружности S_2.

Следующим шагом является проверка того, что, аналогично лемме 4.2, условие трансверсальности множеств E^+ и E^- необходимо и достаточно для правосторонней обратимости дискретных операторов $B_\tau - I$, несмотря на то, что у них последовательность коэффициентов имеет более сложное поведение.

Далее, при условии трансверсальности, искомая градуированная дихотомия строится аналогично конструкции для отображения с простейшей динамикой. При $s \leqslant 1/2$ возьмем $W^+ = E^+$, а в качестве W^- возьмем подрасслоение в E^-, дополнительное к $E^+ \cap E^-$. При $s \leqslant 1/2$ возьмем $W^- = E^-$, а в качестве W^+ возьмем подрасслоение в E^+, дополнительное к $E^+ \cap E^-$.

6. Краевые задачи для разностных уравнений

Если оператор A обратим справа, то уравнение $Au = f$ имеет решение для всех f, но решение не является единственным. Такая картина разрешимости типична для дифференциальных уравнений, и для них обычно к уравнению добавляются условия, обеспечивающие единственность решения. Ввиду того, что в основополагающих работах такие условия задавались с помощью значений искомой функции на границе области, их называют краевыми условиями, но в дальнейшем рассматривались и более сложные нелокальные условия, зависящие и от значений функции во внутренних точках области определения. С общей точки зрения такое условие есть требование, чтобы решение принадлежало заданному подпространству.

Для функциональных уравнений в случае правосторонней обратимости соответствующих операторов $B - \lambda I$ также возникает вопрос о постановке краевых задач и их разрешимости. Для модельных операторов взвешенного сдвига вида он был рассмотрен в [8, 22]. Изложим основные результаты этих работ.

I. Рассмотрим дискретный оператор взвешенного сдвига $Bu(k) = a(k)u(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, где $a = (a(k))$ — числовая последовательность, у которой существуют пределы $\lim\limits_{k\to\pm\infty} a(k) := a(\pm\infty)$.

Согласно следствию 4.1, оператор $B - \lambda I$ правосторонне обратим тогда и только тогда, когда $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$. При этом правосторонняя резольвента, построенная с помощью проектора (4.5), дает решение уравнения, удовлетворяющее условию $u(N) = 0$.

Более общая краевая задача заключается в том, чтобы найти решение уравнения, удовлетворяющее условию $u \in L$, где L — заданное замкнутое векторное подпространство. Поскольку пространство решений однородного уравнения одномерно, в качестве L следует рассматривать подпространства коразмерности 1. В $l_2(\mathbb{Z})$ каждое такое подпространство имеет вид

$$L_\eta = \{u :< u, \eta > \equiv \sum u(k)\overline{\eta(k)} = 0\}, \quad \eta \in l_2(\mathbb{Z}), \quad \|\eta\| = 1. \tag{6.1}$$

Обратим внимание на то, что это условие нелокально — оно связывает значения $u(k)$ в разных точках. Таким образом, получаем общую постановку краевой задачи: найти решение разностного уравнения

$$a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = f(k), \quad \text{принадлежащее подпространству} \quad L_\eta. \tag{6.2}$$

Ее решение эквивалентно построению правосторонней резольвенты $R^+(B,\lambda)$, состоящей из операторов, образы которых совпадают с подпространством L_η. *Спектром краевой задачи* называется множество λ, при которых нет существования и единственности решения.

При сделанных предположениях подпространство $\ker(B-\lambda I)$ одномерно. Если

$$\omega(k) = \begin{cases} \Big[\prod\limits_{j=0}^{k-1} a(j)\Big]^{-1}, & k \geqslant 0, \\ \prod\limits_{j=k}^{-1} a(j), & k < 0, \end{cases}$$

то последовательность $\omega_\lambda(k) = \omega(k)\lambda^k$ порождает $\ker(B-\lambda I)$. Поэтому однородная задача при заданном λ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\omega_\lambda \in L_\eta$, т. е. $<\omega_\lambda, \eta>= 0$. Это скалярное произведение задает аналитическую функцию переменной λ, представленную рядом Лорана $Q_\eta(\lambda) = <\omega_\lambda, \eta> = \sum\limits_k \eta_k\omega(k)\lambda^k$. Таким образом, необходимым условием корректности задачи при заданном λ является $Q_\eta(\lambda) \neq 0$. Далее прямыми вычислениями проверим, что это условие и достаточно.

Операторнозначная функция $R(B;\lambda)f = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f - \sum\limits_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1}P_0 f$, где P_0 — оператор умножения на последовательность $p_0(k)$, определенную (4.5), задает одно из решений уравнения $(B-\lambda I)u = f$, а именно, удовлетворяющее условию $u(0) = 0$. Решение, принадлежащее L_η, будем искать в виде $u = R(B;\lambda)f + \Psi_\lambda(f)\omega_\lambda$. Из условия $< u, \eta >= 0$ получаем, что

$$\Psi_\lambda(f) = \frac{1}{Q_\eta(\lambda)} < R(B;\lambda)f, \eta >= \frac{1}{Q_\eta(\lambda)} < f, R^*(B;\lambda)\eta > .$$

Заметим, что последовательность $\xi_\lambda = R^*(B;\lambda)\eta$ может быть записана в явном виде. Так как $\frac{1}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda = \frac{1}{<\omega_\lambda,\eta>}\omega_\lambda$ и не изменяется при умножении ω_λ на постоянную, можем считать, что $\|\omega_\lambda\| = 1$.

Теорема 6.1. *Краевая задача* (6.2) *корректна тогда и только тогда, когда* $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$ *и* $Q_\eta(\lambda) \neq 0$. *Правосторонняя резольвента, задающая решение этой задачи, имеет вид*

$$R_\eta(B;\lambda)f = R(B;\lambda)f + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda, \tag{6.3}$$

где $\Phi_\lambda(f) = <f, \xi_\lambda>,\ \xi_\lambda = R^*(B;\lambda)\eta$.

Таким образом, согласно теореме 6.1, спектр краевой задачи есть множество нулей аналитической функции $Q_\eta(\lambda)$, лежащих в кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$ и, следовательно, представляет собой конечное или счетное дискретное множество. Если числа $\eta_k\omega(k)$ убывают достаточно быстро, то эта функция аналитически продолжается на окрестность кольца и может иметь только конечное число нулей. Но если числа $\eta_k\omega(k)$ медленно убывают на бесконечности, то число нулей функции $Q_\eta(\lambda)$ в кольце может быть бесконечным.

Заметим, что резольвента (6.3) краевой задачи является правосторонней резольвентой для оператора B, но она имеет более сложную структуру, чем построенные выше.

II. При анализе краевых задач

$$a(x)u(x+1) - \lambda u(x) = f(x), \quad u \in L \subset L_2(\mathbb{R}), \tag{6.4}$$

для разностного уравнения на прямой появляется ряд отличий и новых вопросов. При условии, что $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$, оператор правосторонне обратим, но, в отличие от дискретного случая, имеет бесконечномерное ядро. Поэтому в первую очередь надо выяснить, для каких бесконечномерных подпространств L краевая задача может оказаться корректной. Условие заключается в том, чтобы существовали λ, при котором L является дополнительным подпространством к $\ker(B-\lambda I)$. Но, ввиду бесконечномерности $\ker(B-\lambda I)$, это условие трудно проверить для произвольного L.

В [8] рассмотрены краевые задачи, в которых подпространства L имеют специальный вид. Это подпространства, которые при локализации соответствуют подпространствам вида (6.1) для соответствующих дискретных операторов.

Пусть $X = \mathbb{Z} \times [0,1]$, где на каждом отрезке задана мера Лебега. Отображение $J : L_2(\mathbb{R}) \ni u \to w \in L_2(X)$, $(Ju)(k,\tau)u(k,\tau) = u(k+\tau)$ является изоморфизмом гильбертовых пространств. Это позволяет рассмотреть $L_2(\mathbb{R})$ как пространство функций на $[0,1]$ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$, и при таком представлении оператор B переходит в операторнозначную функцию B_τ, $\tau \in [0,1]$, где B_τ есть оператор дискретного взвешенного сдвига, полученный при локализации оператора B.

Рассмотрим подпространства L, заданные так, что в $L_2(X)$ для каждого τ выполнено краевое условие вида (6.1). Это подпространства вида $L = \{u(k,\tau) : \sum\limits_k u(k,\tau)\overline{\eta(k,\tau)} = 0\}$, где $\sum\limits_k |\eta(k,\tau)|^2 = 1$ для всех τ. Естественно потребовать, что $\eta(k,\tau)$ измеримо зависит от τ, и тогда функция $\eta(k+\tau) = \eta(k,\tau)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$.

При реализации L как пространства в $L_2(\mathbb{R})$ получаем, что это условие вида

$$\sum_k u(k+\tau)\eta(k+\tau) = 0 \text{ при всех } \tau \in [0,1]. \tag{6.5}$$

При фиксированном τ значения $u(k+\tau)$ не определены, и надо обосновать, что подпространство L задано корректно и замкнуто, поскольку замкнутость является необходимым условием корректной разрешимости задачи.

Пусть $\psi(x)$ есть ограниченная измеримая функция на $\mathbb{R}$, периодическая с периодом 1. Тогда при выполнении (6.5) имеем $\sum\limits_k \psi(k+\tau)u(k+\tau)\overline{\eta(k+\tau)} = 0$ при всех $\tau \in [0,1]$, и условие (6.5) эквивалентно тому, что $\int_0^1 \sum\limits_k \psi(k+\tau)u(k+\tau)\overline{\eta(k+\tau)}d\tau = 0$ для всех ψ.

При переходе к представлению в $L_2(X)$ получаем, что выполнение этого условия равносильно тому, что $\int_X u(k,\tau)\Psi(k,\tau)d\mu = 0$ для любой функции вида $\Psi(k,\tau) = \psi(\tau)\overline{\eta(k,\tau)}$.

Полученное описание подпространства L заключается в том, что это ортогональное дополнение к множеству функций Ψ и, следовательно, является замкнутым подпространством.

Записав для каждого τ по формуле 6.3 резольвенту соответствующей краевой задачи, получаем выражение, которое может служить кандидатом на формулу для резольвенты краевой задачи — если решение существует, то оно задается формулой

$$[R_\eta(B;\lambda)f](k,\tau) = \Big[\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)f - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1}P_0 f\Big] + \frac{\Phi_\lambda(f)}{Q_{\eta,\tau}(\lambda)}\omega_{\lambda,\tau}, \tag{6.6}$$

где $\Phi_\lambda(f)$ есть отображение, ставящее в соответствие функции f из $L_2(X)$ функцию от τ по формуле $\Phi_\lambda(f) =< f_\tau, \xi_{\lambda,\tau} >_{l_2}$, где $\xi_{\lambda,\tau} = R^*(B;\lambda)\eta$. Здесь функция, заданная выражением в квадратной скобке, принадлежит $L_2(X)$, и надо только выяснить, при каких λ функция $g(k,\tau) = \frac{\Phi_{\lambda,\tau}(f)}{Q_{\eta,\tau}(\lambda)}\omega_{\lambda,\tau}$ принадлежит $L_2(X)$ при любом $f \in L_2(X)$. Пусть $|Q_{\eta,\tau}(\lambda) \geqslant d(\lambda) > 0$ для почти всех τ при заданном λ. Так как $\|\omega_{\lambda,\tau}\|_{l_2} = 1$, имеем

$$\int_X |g|^2 d\mu = \int_0^1 |\frac{\Phi_{\lambda,\tau}(f)}{Q_{\eta,\tau}(\lambda)}|^2 d\tau \leqslant \frac{1}{d}\int_0^1 | < f_\tau, \xi_{\lambda,\tau} >_{l_2} |^2 d\tau \leqslant \frac{\|\xi\|^2}{d}\|f\|^2.$$

Теорема 6.2. *Краевая задача* (6.4) *корректна тогда и только тогда, когда* $|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$ *и* $\operatorname{ess\,inf}\limits_\tau |Q_{\eta,\tau}(\lambda)| > 0$, *ее резольвента задается* (6.6).

В частности, если $Q_{\eta,\tau}(\lambda)$ непрерывна как функция двух переменных τ и λ, то спектр краевой задачи есть множество нулей этой функции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения. Операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
2. *Антоневич А. Б.* Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке// Функц. анализ и его прилож. — 2005. — *39*, № 1. — С. 52–69.

3. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А.* Спектральные свойства дискретных операторов взвешенного сдвига// Тр. инст. мат. — 2012. — *20*, № 1. — С. 14–21.
4. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А., Маковска Ю.* Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 3. — С. 3–34.
5. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Правосторонние резольвенты дискретных операторов взвешенного сдвига с матричными весами// Пробл. физ., мат. и техн. — 2013. — *16*, № 3. — С. 45–54.
6. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Правосторонняя гиперболичность операторов, порождённых отображениями типа Морса—Смейла// Вестн. Гродненского ГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. Мат. Физ. Инф., выч. техн. и управл. — 2014. — *170*, № 1. — С. 65–72.
7. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Корректные краевые задачи, правосторонняя гиперболичность и экспоненциальная дихотомия// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 1. — С. 13–29.
8. *Архипенко О. А.* Краевые задачи для разностных уравнений// Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и информ. — 2018. — *206*, № 1. — С. 12–18.
9. *Баскаков А. Г.* Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных соотношений// Усп. мат. наук. — 2013. — *68*, № 1. — С. 77–128.
10. *Бронштейн И. У.* Неавтономные динамические системы. — Кишинев: Штиинца, 1984.
11. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. — М.: Наука, 1969.
12. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. А.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
13. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.
14. *Жиков В. В.* Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения// Изв. АН. Сер. Мат. — 1976. — *40*, № 6. — С. 1380–1408.
15. *Латушкин Ю. Д., Степин А. М.* Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем// Усп. мат. наук. — 1991. — *46*, № 2. — С. 95–165.
16. *Мардиев Р.* Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом// Докл. АН УзССР. — 1985. — *2*, № 2. — С. 5–7.
17. *Массера Х. Л., Шеффер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. — М.: Мир, 1970.
18. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.
19. *Мищенко А. С.* Векторные расслоения и их применения. — М.: Наука, 1984.
20. *Нитески З.* Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.
21. *Стевич С., Чен Р., Чжоу З.* Взвешенные композиционные операторы, действующие из одного пространства Блоха в полидиске в другое// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 2. — С. 131–160.
22. *Шукур Али А., Архипенко О. А.* Резольвента краевой задачи для разностного уравнения// Пробл. физ., мат. и техн. — 2016. — *28*, № 3. — С. 70–75.
23. *Akhmatova A., Antonevich A.* On operators generated by maps with separable dynamics// Proc. Conf. «Geometric Methods in Physics», XXXI Workshop, June 24–30, 2012, Poland. — Basel: Birkhäuser, 2013. — С. 171–178.
24. *Antonevich A., Jakubowska (Makowska) Ju.* On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points// Complex Anal. Oper. Theory. — 2008. — *2*, № 2. — С. 215–240.
25. *Antonevich A., Jakubowska (Makowska) Ju.* Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2010. — *164*, № 4. — С. 497–517.
26. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional differential equations: I.C*-theory. — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1994.
27. *Antonevich A. B., Panteleeva E. V.* Right-side hyperbolic operators// Sci. Publ. State Univ. Novi Pazar. Ser. A. — 2014. — № 1. — С. 1–9.
28. *Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I.* One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces// Integral Equ. Oper. Theory. — 2002. — *42*, № 2. — С. 201–228.
29. *Perron O.* Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen// Math. Z. — 1930. — *32*, № 5. — С. 703–738.

А. Б. Антоневич
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: antonevich@bsu.by

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-2-208-236 UDC 517.98

Right-Sided Invertibility of Binomial Functional Operators and Graded Dichotomy

© 2021 **A. B. Antonevich**

Abstract. In this paper, we consider the right-sided invertibility problem for binomial functional operators. It is known that such operators are invertible iff there exists dichotomy of solutions of the homogeneous equation. New property of solutions of the homogeneous equation named graded dichotomy is introduced and it is proved that right-sided invertibility of binomial functional operators is equivalent to existence of graded dichotomy.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, *Lineynye funktsional'nye uravneniya. Operatornyi podkhod* [Linear Functional Equations. Operator Approach], Universitetskoe, Minsk, 1988 (in Russian).
2. A. B. Antonevich, "Kogerentnaya lokal'naya giperbolichnost' lineynogo rasshireniya i sushchestvennye spektry operatora vzveshennogo sdviga na otrezke" [Coherent local hyperbolicity of a linear extension and essential spectra of a weighted shift operator on a segment], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2005, **39**, No. 1, 52–69 (in Russian).
3. A. B. Antonevich and A. A. Akhmatova, "Spektral'nye svoystva diskretnykh operatorov vzveshennogo sdviga" [Spectral properties of discrete operators of weighted shift], *Tr. inst. mat.* [Proc. Inst. Math.], 2012, **20**, No. 1, 14–21 (in Russian).
4. A. B. Antonevich, A. A. Akhmatova, and Yu. Makovska, "Otobrazheniya s razdelimoy dinamikoy i spektral'nye svoystva porozhdennykh imi operatorov" [Mappings with separable dynamics and spectral properties of the operators generated by them], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2015, **206**, No. 3, 3–34 (in Russian).
5. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Pravostoronnie rezol'venty diskretnykh operatorov vzveshennogo sdviga s matrichnymi vesami" [Right-hand resolvents of discrete weighted shift operators with matrix weights], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2013, **16**, No. 3, 45–54 (in Russian).
6. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Pravostoronnyaya giperbolichnost' operatorov, porozhdennykh otobrazheniyami tipa Morsa—Smeyla" [Right-hand hyperbolicity of operators generated by mappings of Morse–Smale type], *Vestn. Grodnenskogo GU im. Ya. Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inf., vych. tekhn. i upravl.* [Bull. Grodno State Univ. Ya. Kupala. Ser. 2. Math. Phys. Inf. Comp. Tech. Control], 2014, **170**, No. 1, 65–72 (in Russian).
7. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Korrektnye kraevye zadachi, pravostoronnyaya giperbolichnost' i eksponentsial'naya dikhotomiya" [Correct boundary-value problems, right-sided hyperbolicity and exponential dichotomy], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 1, 13–29 (in Russian).
8. O. A. Arkhipenko, "Kraevye zadachi dlya raznostnykh uravneniy" [Boundary-value problems for difference equations], *Tr. BGTU. Ser. 3. Fiz.-mat. nauki i inform.* [Proc. BGTU. Ser. 3. Phys.-Math. Sci. Inf.], 2018, **206**, No. 1, 12–18 (in Russian).
9. A. G. Baskakov, "Issledovanie lineynykh differentsial'nykh uravneniy metodami spektral'noy teorii raznostnykh operatorov i lineynykh sootnosheniy" [Investigation of linear differential equations by methods of spectral theory of difference operators and linear relations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2013, **68**, No. 1, 77–128 (in Russian).
10. I. U. Bronshteyn, *Neavtonomnye dinamicheskie sistemy* [Nonautonomous Dynamical Systems], Shtiintsa, Kishinev, 1984 (in Russian).
11. I. M. Glazman and Yu. I. Lyubich, *Konechnomernyi lineynyi analiz v zadachakh* [Finite-Dimensional Linear Analysis in Problems], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

12. Yu. L. Daletskiy and M. A. Kreyn, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of solutions of differential equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
13. J. Dixmier, *C^*-algebry i ikh predstavleniya* [C^*-Algebras and Their Representations], Nauka, Moscow, 1974 (Russian translation).
14. V. V. Zhikov, "Nekotorye voprosy dopustimosti i dikhotomii. Printsip usredneniya" [Some questions of admissibility and dichotomy. Averaging principle], *Izv. AN. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1976, **40**, No. 6, 1380–1408 (in Russian).
15. Yu. D. Latushkin and A. M. Stepin, "Operatory vzveshennogo sdviga i lineynye rasshireniya dinamicheskikh sistem" [Weighted shift operators and linear extensions of dynamical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 2, 95–165 (in Russian).
16. R. Mardiev, "Kriteriy poluneterovosti odnogo klassa singulyarnykh integral'nykh operatorov s nekarlemanovskim sdvigom" [A criterion for the semi-Noetherian property of a class of singular integral operators with a non-Carleman shift], *Dokl. AN UzSSR* [Rep. Acad. Sci. Uzb. SSR], 1985, **2**, No. 2, 5–7 (in Russian).
17. J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Lineynye differentsial'nye uravneniya i funktsional'nye prostranstva* [Linear Differential Equations and Function Spaces], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
18. G. J. Murphy, *C^*-algebry i teoriya operatorov* [C^*-Algebras and Operator Theory], Faktorial, Moscow, 1997 (Russian translation).
19. A. S. Mishchenko, *Vektornye rassloeniya i ikh primeneniya* [Vector Stratifications and Their Applications], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
20. Z. Nitecki, *Vvedenie v differentsial'nuyu dinamiku* [An Introduction to Differential Dynamics], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
21. C. Stevich, R. Chen, and Z. Chzhou, "Vzveshennye kompozitsionnye operatory, deystvuyushchie iz odnogo prostranstva Blokha v polidiske v drugoe" [Weighted composition operators acting from one Bloch space in a polydisk into another], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2010, **201**, No. 2, 131–160 (in Russian).
22. A. Shukur Ali and O. A. Arkhipenko, "Rezol'venta kraevoy zadachi dlya raznostnogo uravneniya" [Resolvent of a boundary-value problem for a difference equation], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2016, **28**, No. 3, 70–75 (in Russian).
23. A. Akhmatova and A. Antonevich, "On operators generated by maps with separable dynamics," Proc. Conf. *Geometric Methods in Physics*, XXXI Workshop, June 24–30, 2012, Poland, Birkhäuser, Basel, 2013, pp. 171–178.
24. A. Antonevich and Ju. Jakubowska (Makowska), "On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points," *Complex Anal. Oper. Theory*, 2008, **2**, No. 2, 215–240.
25. A. Antonevich and Ju. Jakubowska (Makowska), "Weighted translation operators generated by mappings with saddle points: a model class," *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2010, **164**, No. 4, 497–517.
26. A. Antonevich and A. Lebedev, *Functional differential equations: I.C^*-theory*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1994.
27. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Right-side hyperbolic operators," *Sci. Publ. State Univ. Novi Pazar. Ser. A*, 2014, No. 1, 1–9.
28. A. Yu. Karlovich and Yu. I. Karlovich, "One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces," *Integral Equ. Oper. Theory*, 2002, **42**, No. 2, 201–228.
29. O. Perron, "Die Stabilitatsfrage bei Differentialgleichungen," *Math. Z.*, 1930, **32**, No. 5, 703–738.

A. B. Antonevich
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: antonevich@bsu.by