Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 1 (2021). С. 130–191

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-130-191 УДК 517.955

УСРЕДНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2021 г. **А. А. МИЛОСЛОВА, Т. А. СУСЛИНА**

Аннотация. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается широкий класс матричных эллиптических операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ порядка $2p$ (где $p \geqslant 2$) с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами (зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$). Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Изучается поведение операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ при $\tau > 0$ и малом ε. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к экспоненте $e^{-\mathcal{A}^0 \tau}$ от эффективного оператора $\mathcal{A}^0$. Получена также аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Установлены оценки погрешностей найденных приближений, зависящие от двух параметров: ε и τ. При фиксированном $\tau > 0$ погрешности имеют точный порядок $O(\varepsilon)$. Результаты применяются к вопросу о поведении решения задачи Коши для параболического уравнения $\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau)$ в $\mathbb{R}^d$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 17-11-01069.

1. Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Эта теория изучает поведение решений дифференциальных уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами и является широкой областью теоретической и прикладной науки. Обширная литература посвящена задачам усреднения; в первую очередь, укажем монографии [1, 9, 16, 22].

1.1. Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач усреднения в $\mathbb{R}^d$. В серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [2–5] был предложен и развит *теоретико-операторный подход* к задачам теории усреднения. С помощью этого подхода изучался широкий класс матричных самосопряженных ДО второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$A = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{D} = -i\nabla, \quad \operatorname{ord} b(\mathbf{D}) = 1. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная матрица-функция размера $m\times m$, периодическая относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ. Далее, $b(\mathbf{D})$ — $(m\times n)$-матричный однородный ДО первого порядка. Предполагается, что $m \geqslant n$, и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. При сделанных предположениях оператор A сильно эллиптичен. Простейший пример оператора вида (1.1) — скалярный эллиптический оператор $A = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$ (оператор акустики); оператор теории упругости также допускает запись в виде (1.1). Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [2, 4, 5].

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Для всякой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ используем обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим оператор $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, коэффициенты которого быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

В [2] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной матрицей*. Была получена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

В [3, 4] была найдена более точная аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$. В [5] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой погрешности

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.3}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — так называемый *корректор*; этот оператор содержит быстро осциллирующий множитель, а потому зависит от ε, при этом $\|K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$.

Теоретико-операторный подход применялся и к параболическим задачам теории усреднения. В работах [20, 25] было показано, что при фиксированном $\tau > 0$ и $\varepsilon \to 0$ операторная экспонента $e^{-A_\varepsilon \tau}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к экспоненте от эффективного оператора A^0. При этом выполняется оценка

$$\|e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A^0\tau}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac12} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Более точная аппроксимация экспоненты $e^{-A_\varepsilon \tau}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка $O(\varepsilon^2)$ была найдена в работе [6]. В [26] была получена аппроксимация операторной экспоненты $e^{-A_\varepsilon \tau}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой погрешности

$$\|e^{-A_\varepsilon \tau} - e^{-A^0\tau} - \varepsilon K(\varepsilon,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac12} + \varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau > 0. \tag{1.5}$$

Здесь $K(\varepsilon,\tau)$ — соответствующий корректор.

Оценки (1.2)–(1.5) точны по порядку параметра ε; постоянные контролируются явно в терминах данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Метод исследования в работах [2–6, 20, 25, 26] основан на масштабном преобразовании, разложении оператора A в прямой интеграл (на основе теории Флоке—Блоха) и аналитической теории возмущений. При этом было выяснено, что резольвенту и экспоненту для оператора A_ε можно аппроксимировать в терминах пороговых характеристик оператора A на краю спектра. В этом смысле процедура гомогенизации является проявлением *спектрального порогового эффекта*.

Упомянем также работу [21], в которой получены аналоги оценок (1.2), (1.3) для резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной регулярной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ с двухпараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ).

Другой подход к получению операторных оценок погрешности (так называемый *модифицированный метод первого приближения* или *метод сдвига*) был предложен В. В. Жиковым [8] и развит им совместно с С. Е. Пастуховой [28, 29]. В упомянутых работах операторные оценки погрешности были получены для операторов акустики и упругости. По поводу дальнейших результатов см. обзор [10].

Отдельный интерес представляет задача усреднения для периодических эллиптических ДО высокого четного порядка. В работах Н. А. Вениаминова [7] и А. А. Кукушкина и Т. А. Суслиной [12] теоретико-операторный подход был развит применительно к таким операторам. В [7] изучался оператор вида $\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D}^p)^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}^p$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричный равномерно положительно определенный тензор порядка $2p$, периодический относительно решетки Γ. При $p = 2$ такой оператор возникает в теории упругих пластин (см. [9]). В [7] был получен аналог оценки (1.2):

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{B}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

В работе [12] изучался более общий класс ДО высокого порядка — аналог операторов вида (1.1):

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \operatorname{ord} b(\mathbf{D}) = p \geqslant 2,$$

где $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная матрица-функция размера $m \times m$, периодическая относительно решетки Γ, а $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный однородный ДО порядка p. Считаем $p \geqslant 2$. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. При сделанных предположениях оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ сильно эллиптичен. Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. В [12] изучалось поведение резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной регулярной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Была получена оценка погрешности

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1(\zeta)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

а также найдена аппроксимация резольвенты по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, с оценкой погрешности

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon, \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2(\zeta)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

При этом отслежена зависимость величин $C_1(\zeta)$, $C_2(\zeta)$ от параметра ζ, так что найденные оценки являются двухпараметрическими.

Упомянем также недавние работы [17–19], в которых с помощью теоретико-операторного подхода найдена более точная аппроксимация резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка $O(\varepsilon^{2p})$.

Метод сдвига применялся к эллиптическим операторам высокого порядка в работах С. Е. Пастуховой [13–15, 24].

1.2. Постановка задачи. Основные результаты. В предлагаемой работе мы продолжаем изучение задач усреднения для описанных выше операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ порядка $2p$ в $\mathbb{R}^d$. Также мы изучаем более общие операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon f^\varepsilon = (f^\varepsilon)^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon, \tag{1.6}$$

где $f(\mathbf{x})$ — периодическая матрица-функция размера $n \times n$ такая, что $f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Наша цель — получить аппроксимацию операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ при фиксированном $\tau > 0$ и малом ε в различных операторных нормах.

Наш *первый основной результат*: показано, что при фиксированном $\tau > 0$ и $\varepsilon \to 0$ оператор $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к оператору $e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}$. Установлена оценка погрешности вида

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau \geqslant 0. \tag{1.7}$$

Это неравенство является обобщением оценки (1.4) на случай операторов высокого порядка. Выяснилось, что для более общих операторов вида (1.6) аналогичный результат справедлив для «окаймленной» операторной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$:

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau \geqslant 0.$$

Здесь f_0 — некоторая постоянная матрица (см. (9.1)) и $\mathcal{A}^0 = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0 f_0$.

Далее, выделено условие на оператор, при котором эти результаты допускают усиление: при этом условии вместо (1.7) выполнена оценка

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau \geqslant 0.$$

Упомянутое условие формулируется в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра; оно автоматически выполняется для скалярного оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ (т. е. $n = 1$) с вещественными коэффициентами. Тем самым, обнаружен новый эффект, характерный для операторов высокого порядка: в «скалярном вещественном» случае возможна аппроксимация экспоненты от оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ через экспоненту от эффективного оператора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ без учета каких-либо корректоров. Такого эффекта нет для операторов второго порядка. Отметим, что аналогичный эффект для операторов высокого порядка наблюдается и при аппроксимации резольвенты или экспоненты вида $e^{-i\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$; см. [14, 17, 18, 27].

Аналогичное усиление имеет место и для оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$.

Второй основной результат: найдена аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ в «энергетической» норме. Установлены оценки

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau > 0,$$

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \ \tau > 0,$$

а также найдено приближение оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ (отвечающего «потоку») по $(L_2 \to L_2)$-норме. Здесь $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)$ — соответствующий корректор. Он содержит быстро осциллирующий множитель, а потому зависит от ε; при этом $\|\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$. Аналогичные результаты получены и для окаймленной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$.

Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются затем к вопросу о поведении решения задачи Коши для параболического уравнения. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau > 0, \\ &\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}\boldsymbol{\phi} + \int_0^\tau e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon(\tau-\widetilde{\tau})} \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}.$$

На основе этого представления из результатов об аппроксимации операторной экспоненты мы извлекаем результаты об аппроксимациях решения $\mathbf{u}_\varepsilon$. Выясняется, что при фиксированном $\tau > 0$

решение сходится по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной задачи

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau>0,\\ &\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d.\end{aligned}$$

Получена оценка погрешности, а также аппроксимация решения по норме в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Рассмотрена также более общая задача Коши (см. ниже (15.31)); результаты для нее можно извлечь из результатов о поведении оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$.

1.3. Метод. Мы опираемся на теоретико-операторный подход. Поясним метод на примере вывода оценки (1.7). За счет масштабного преобразования выполнено тождество

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \varepsilon^{-2p}\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Поэтому оценка (1.7) равносильна неравенству

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Далее применяем теорию Флоке—Блоха. С помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ с периодическими коэффициентами раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и зависящим от параметра $\mathbf{k}$ (*квазиимпульса*). Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ представляет собой аналитическое операторное семейство с дискретным спектром. Мы полагаем $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, где $t = |\mathbf{k}|$ и $\boldsymbol{\theta} = \dfrac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$, и изучаем семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) =: A(t,\boldsymbol{\theta})$ методами аналитической теории возмущений относительно одномерного параметра t. Роль невозмущенного оператора играет $\widehat{\mathcal{A}}(0)$. Точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $\widehat{\mathcal{A}}(0)$ кратности n; соответствующее собственное подпространство $\mathfrak{N}$ состоит из постоянных вектор-функций в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Тогда при $t \leqslant t^0$ на интервале $[0,\delta]$ оператор $A(t,\boldsymbol{\theta})$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а интервал $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Числа δ и t^0 контролируются явно. Выясняется, что только выделенная часть спектра существенна для нашей задачи. В силу аналитической теории возмущений существуют вещественно аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и ветви собственных элементов $\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$. При этом набор $\{\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})\}$, $l=1,\dots,n$, образует ортонормированный базис в собственном подпространстве оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, отвечающем отрезку $[0,\delta]$. Рассматриваются степенные разложения для этих аналитических ветвей:

$$\begin{aligned}&\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) t^{2p} + \mu_l(\boldsymbol{\theta}) t^{2p+1} + \dots, \quad \gamma_l(\boldsymbol{\theta})>0, \quad l=1,\dots,n,\\ &\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\varphi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l=1,\dots,n.\end{aligned}$$

Набор $\{\omega_l(\boldsymbol{\theta})\}, l=1,\dots,n$, образует ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. Коэффициенты этих степенных разложений называют *пороговыми характеристиками* операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ на краю спектра. В их терминах определяется так называемый *спектральный росток* $S(\boldsymbol{\theta})$. Это самосопряженный оператор в n-мерном пространстве $\mathfrak{N}$ такой, что

$$S(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l=1,\dots,n.$$

Основной технический результат — это аппроксимация экспоненты $e^{-A(t,\boldsymbol{\theta})\tau}$ в терминах спектрального ростка:

$$\left\| e^{-A(t,\boldsymbol{\theta})\tau} - e^{-t^{2p}S(\boldsymbol{\theta})\tau} P \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{C}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau>0, \quad t\leqslant t^0.$$

Здесь P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на $\mathfrak{N}$. Росток удается вычислить: справедливо представление

$$S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}),$$

где g^0 — эффективная матрица. Выясняется, что эффективный оператор имеет тот же самый спектральный росток, а это дает возможность перейти к аппроксимации экспоненты $e^{-A(t,\boldsymbol{\theta})\tau}$ через $e^{-A^0(t,\boldsymbol{\theta})\tau}$. В итоге приходим к искомой оценке (1.7).

Изучение семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$, представляющего собой полиномиальный операторный пучок, удобно вести в рамках абстрактной теоретико-операторной схемы, предложенной в работах [7, 12]. В рамках абстрактной схемы в некотором гильбертовом пространстве изучается полиномиальный пучок операторов вида $A(t) = X(t)^*X(t)$, где $X(t) = \sum_{j=0}^{p} t^j X_j$. Пучок $A(t)$ моделирует семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = A(t,\boldsymbol{\theta})$, но параметр $\boldsymbol{\theta}$ в абстрактной постановке отсутствует. В главе 1 мы развиваем далее абстрактную схему и получаем нужные аппроксимации операторной экспоненты $e^{-A(t)\tau}$.

1.4. План статьи. Работа состоит из трех глав. В главе 1 (разделы 2–4) содержится нужный абстрактный теоретико-операторный материал. Здесь получены основные результаты на абстрактном уровне. Глава 2 (разделы 5–11) посвящена изучению периодических ДО, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В разделе 5 введен класс операторов $\mathcal{A}$, описаны решетки и преобразование Гельфанда. Раздел 6 посвящен разложению оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. В разделе 7 описаны эффективные характеристики оператора $\widehat{\mathcal{A}}$ (случай $f = \mathbf{1}$), введен эффективный оператор. В разделе 8 с помощью абстрактных результатов найдена аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}$. В разделе 9 рассмотрено более общее семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и найдено приближение окаймленной экспоненты $fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^*$. В разделе 10 с помощью разложения в прямой интеграл из результатов раздела 8 выводится аппроксимация экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$. Аналогичным образом в разделе 11 мы выводим приближение для окаймленной экспоненты $fe^{-\mathcal{A}\tau}f^*$ из результатов раздела 9. В главе 3 (разделы 12–15) рассматриваются задачи усреднения. В коротком разделе 12 описаны операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, а также оператор масштабного преобразования. Разделы 13 и 14 посвящены выводу основных результатов о приближении экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}$ и окаймленной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}(f^\varepsilon)^*$. Наконец, в разделе 15 мы применяем полученные результаты к усреднению решений задачи Коши. Приложение (раздел 16) посвящено обсуждению другого способа получения результатов об усреднении операторной экспоненты.

1.5. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$ соответственно; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $X : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} X$ обозначается его область определения, а через $\operatorname{Ker} X$ его ядро. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то символ $\mathfrak{N}^\perp$ означает его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp = I - P$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно; $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ — единичная матрица размера $n \times n$. Если a — матрица размера $m \times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$.

Классы L_q вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций порядка s в области $\mathcal{O}$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. В случае $n = 1$ пишем просто $L_q(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств векторнозначных или матричнозначных функций.

Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $D_j = -i\partial_j = -i\partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,n$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Если $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ — мультииндекс и $\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_d) \in \mathbb{R}^d$, то $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$, $\mathbf{k}^\alpha := k_1^{\alpha_1}\cdots k_d^{\alpha_d}$, $\mathbf{D}^\alpha := D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$. Для двух мультииндексов α,β запись $\beta \leqslant \alpha$ означает, что $\beta_j \leqslant \alpha_j$, $j = 1,\dots,d$; для числа сочетаний из α по β используем стандартное обозначение $C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1}\cdots C_{\alpha_d}^{\beta_d}$.

Используем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Символами $C, \mathcal{C}, \mathfrak{C}, c, \mathfrak{c}$ обозначаются различные постоянные в оценках.

Глава 1

АБСТРАКТНАЯ ТЕОРЕТИКО-ОПЕРАТОРНАЯ СХЕМА

2. Абстрактная схема для полиномиальных операторных пучков

В данном разделе кратко описаны результаты абстрактной схемы, заимствованные из [7,12,19].

2.1. Полиномиальные пучки вида $A(t) = X(t)^* X(t)$**.** Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Рассматривается семейство самосопряженных операторов

$$A(t) = X(t)^* X(t) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $X(t) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — полиномиальный операторный пучок вида

$$X(t) = \sum_{j=0}^{p} t^j X_j, \quad t \in \mathbb{R}, \ p \in \mathbb{N}, \ p \geqslant 2.$$

Случай, когда $p = 1$, подробно изучен в [2, 3, 5]. Об операторах $X_j : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $j = 0, \ldots, p$, предполагаем следующее. Считаем, что X_0 *плотно определен и замкнут*, X_p — *ограничен*, а области определения операторов $X_0, \ldots, X_p$ удовлетворяют дополнительному условию.

Условие 2.1. *Выполнены соотношения*

$$\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j \subset \operatorname{Dom} X_p = \mathfrak{H}, \quad j = 1, \ldots, p-1, \ t \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, предполагается, что операторы X_j при $j = 1, \ldots, p-1$ подчинены оператору X_0.

Условие 2.2. *Для* $j = 0, \ldots, p-1$ *и для любого* $u \in \operatorname{Dom} X_0$ *выполнено неравенство*

$$\|X_j u\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant C_0 \|X_0 u\|_{\mathfrak{H}_*}, \tag{2.2}$$

где C_0 — *некоторая константа* (*очевидно,* $C_0 \geqslant 1$).

Из сделанных предположений следует, что оператор $X(t)$ *замкнут* на области $\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0$, если $|t| \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. Условие 2.2 также влечет следующее соотношение для ядер операторов X_j:

$$\operatorname{Ker} X_0 \subset \operatorname{Ker} X_j, \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

Оператор (2.1) порождается замкнутой в $\mathfrak{H}$ неотрицательной квадратичной формой

$$a(t)[u, u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0.$$

Введем следующие обозначения: $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$;

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0; \quad \mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*.$$

Через P и P_* обозначим ортопроекторы пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и пространства $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$ соответственно. Наложим следующее условие.

Условие 2.3. $\lambda_0 = 0$ — *изолированная точка спектра оператора* A_0, *причем*

$$n := \dim \mathfrak{N} < \infty; \quad n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty.$$

Через $F(t, \sigma)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(t)$ для отрезка $[0, \sigma]$ и положим $\mathfrak{F}(t, \sigma) := F(t, \sigma)\mathfrak{H}$. Зафиксируем число $\delta > 0$ такое, что

$$\delta \leqslant \min \left\{ \frac{d^0}{36}, \frac{1}{4} \right\}, \tag{2.3}$$

где d^0 — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0. Далее, выберем положительное число t^0, удовлетворяющее условию

$$t^0 \leqslant \sqrt{\delta} (C^\circ)^{-1}, \quad \text{где} \quad C^\circ = \max\{(p-1)C_0, \|X_p\|\}, \tag{2.4}$$

а C_0 — постоянная из условия 2.2. Отметим, что $t^0 \leqslant 1/2$. Оператор $X(t)$ автоматически замкнут при $|t| \leqslant t^0$, поскольку $t^0 \leqslant (2(p-1)C_0)^{-1}$. В работе [7, предложение 3.10] выяснено, что

$$F(t, \delta) = F(t, 3\delta), \quad \operatorname{rank} F(t, \delta) = n, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.5}$$

Это означает, что при $|t| \leqslant t^0$ оператор $A(t)$ на промежутке $[0, \delta]$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а промежуток $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Для краткости обозначим

$$F(t) := F(t, \delta); \quad \mathfrak{F}(t) := \mathfrak{F}(t, \delta).$$

2.2. Операторы Z, R и S. Положим $\mathcal{D} = \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^{\perp}$. Заметим, что множество $\mathcal{D}$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{D}} = (X_0 f_1, X_0 f_2)_{\mathfrak{H}_*}, \quad f_1, f_2 \in \mathcal{D},$$

образует гильбертово пространство.

Пусть $v \in \mathfrak{H}_*$. Рассмотрим уравнение $X_0^*(X_0\psi - v) = 0$ для элемента $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в слабом смысле:

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (v, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}. \tag{2.6}$$

Правая часть в (2.6) является антилинейным непрерывным функционалом над $\zeta \in \mathcal{D}$. Следовательно, в силу теоремы Рисса существует единственное решение $\psi \in \mathcal{D}$, причем $\|X_0\psi\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|v\|_{\mathfrak{H}_*}$. Теперь, пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и $v = -X_p\omega$. В этом случае решение уравнения (2.6) обозначим через $\psi(\omega)$. Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathcal{D}$ соотношением

$$Zu = \psi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{2.7}$$

Отметим равенства $PZ = 0$ и $Z^*P = 0$, вытекающие из определения оператора Z. В [12, (1.11)] проверена оценка

$$\|Z\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant \frac{\|X_p\|}{6\sqrt{\delta}}. \tag{2.8}$$

Далее, определим ограниченный оператор $R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$ равенством

$$R\omega = X_0\psi(\omega) + X_p\omega, \quad \omega \in \mathfrak{N}. \tag{2.9}$$

Другое представление оператора R дается формулой $R = P_* X_p|_{\mathfrak{N}}$. Самосопряженный оператор $S = R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ называется *спектральным ростком* операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$. Иначе говоря,

$$S = P X_p^* P_* X_p|_{\mathfrak{N}}.$$

Ясно, что

$$\|S\| \leqslant \|X_p\|^2. \tag{2.10}$$

Говорят, что росток S *невырожден*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$.

2.3. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов. Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [11]) при $|t| \leqslant t^0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_j(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_j(t)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$A(t)\varphi_j(t) = \lambda_j(t)\varphi_j(t), \quad j = 1, \ldots, n, \ \ |t| \leqslant t^0,$$

причем набор $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ образует ортонормированный базис в $\mathfrak{F}(t)$. Если $t_* \leqslant t^0$ достаточно мало, то при $|t| \leqslant t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения (см. [7, теорема 3.15])

$$\lambda_j(t) = \gamma_j t^{2p} + \mu_j t^{2p+1} + \ldots, \quad \gamma_j \geqslant 0, \ \mu_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \ldots, n, \tag{2.11}$$

$$\varphi_j(t) = \omega_j + \varphi_j^{(1)} t + \varphi_j^{(2)} t^2 + \ldots, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

При этом набор $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ образует ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Числа γ_j и векторы ω_j являются собственными для спектрального ростка S, т. е.

$$S\omega_j = \gamma_j \omega_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Это позволяет нам записать следующие представления для операторов P, SP, $F(t)$ и $A(t)F(t)$:

$$P = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \omega_j)\omega_j, \tag{2.14}$$

$$SP = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j (\cdot, \omega_j)\omega_j, \tag{2.15}$$

$$F(t) = \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \varphi_j(t))\varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.16}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)(\cdot, \varphi_j(t))\varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.17}$$

Сопоставляя (2.11), (2.12), (2.14)–(2.17), получаем, что при $|t| \leqslant t_*$ справедливы степенные разложения

$$F(t) = P + tF_1 + \ldots,$$
$$A(t)F(t) = t^{2p} SP + t^{2p+1} G + \ldots;$$

подробнее см. [19, п. 1.3].

2.4. Пороговые аппроксимации. В [7, п. 4.2] (см. также [12, п. 2.2] и [19, § 3]) были найдены аппроксимации операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$ при $|t| \leqslant t^0$ в терминах операторов S и P (так называемые *пороговые аппроксимации*). Приведем их здесь в виде теоремы. Всюду ниже через $c(p)$ обозначаются различные постоянные, зависящие только от p.

Теорема 2.1. *Пусть $A(t)$ — операторное семейство, введенное в пункте* 2.1. *Пусть $\delta > 0$ — фиксированное число, подчиненное* (2.3). *Пусть $F(t) = F(t, \delta)$ — спектральный проектор оператора $A(t)$ для интервала $[0, \delta]$, а P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$. Пусть $S : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ — спектральный росток семейства $A(t)$ при $t = 0$. Тогда справедливы оценки*

$$\|F(t) - P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1|t|, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.18}$$

$$\|A(t)F(t) - t^{2p} SP\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_2|t|^{2p+1}, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.19}$$

где число t^0 подчинено условию (2.4). *Постоянные C_1, C_2 определены выражениями $C_1 = c(p)C_T$, $C_2 = c(p)C_T^{2p+1}$, где*

$$C_T := p\, C_0^2 + \|X_p\|^2 \delta^{-1}, \tag{2.20}$$

а C_0 — константа из (2.2).

Нам понадобятся также более точные аппроксимации операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$, полученные в [19, теорема 3.2].

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Положим*

$$F_p := ZP + PZ^*, \tag{2.21}$$

$$G := (RP)^* X_1 Z + (X_1 Z)^* RP, \tag{2.22}$$

где операторы Z и R определены в пункте 2.2. *В терминах разложений* (2.11) *и* (2.12) *оператор G имеет вид*

$$G = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}} \omega_j + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \left((\cdot, \varphi_j^{(1)})_{\mathfrak{H}} \omega_j + (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}} \varphi_j^{(1)} \right).$$

Справедливы оценки

$$\|F(t) - P\| \leqslant C_3|t|^p, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.23}$$

$$\|A(t)F(t) - t^{2p} SP - t^{2p+1} G\| \leqslant C_4 t^{2p+2}, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.24}$$

Справедливы представление

$$F(t) = P + t^p F_p + F_*(t) \tag{2.25}$$

и оценка

$$\|F_*(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_5|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Постоянные C_3, C_4, C_5 *имеют вид*

$$C_3 = c(p)C_T^p, \quad C_4 = c(p)C_T^{2p+2}, \quad C_5 = c(p)C_T^{p+1},$$

где C_T *определено в* (2.20).

Нам также потребуется оценка

$$\|A(t)F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant t^{2p}\|S\| + C_2|t|^{2p+1} \leqslant C_6 t^{2p}, \quad |t| \leqslant t^0,$$

где $C_6 = \|X_p\|^2 + C_2$. Она прямо следует из (2.10), (2.19) с учетом того, что $t^0 \leqslant 1$. Таким образом, при $|t| \leqslant t^0$ собственные значения $\lambda_j(t)$ оператора $A(t)$ удовлетворяют неравенствам $\lambda_j(t) \leqslant C_6 t^{2p}$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$\|A(t)^{1/2}F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sqrt{C_6}|t|^p, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.26}$$

Кроме того, справедлива следующая оценка (см. [12, (3.52)] и доказательство в [19, теорема 3.2])

$$\|A(t)^{1/2}F_*(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_7|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0; \quad C_7 = c(p)C_T^{p+1}. \tag{2.27}$$

3. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-A(t)\tau}$

3.1. Старший член аппроксимации. Наша цель в этом разделе — получить аппроксимацию оператора $e^{-A(t)\tau}$ при больших значениях $\tau \geqslant 0$ в терминах спектрального ростка S. По сравнению с предположениями раздела 2 нам понадобится дополнительное условие.

Условие 3.1. *Найдется такая постоянная* $c_* > 0$, *что при* $|t| \leqslant t^0$ *справедливо неравенство*

$$A(t) \geqslant c_* t^{2p} I. \tag{3.1}$$

Условие 3.1 равносильно тому, что собственные значения $\lambda_j(t)$ оператора $A(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_j(t) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j = 1, \ldots, n, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.2}$$

В силу (2.11) из (3.2) вытекает, что $\gamma_j \geqslant c_*$. С учетом (2.13) отсюда следует, что

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{3.3}$$

Это обеспечивает невырожденность спектрального ростка. Дальнейшие рассмотрения проводятся в предположении, что $|t| \leqslant t^0$. Очевидно,

$$e^{-A(t)\tau} = e^{-A(t)\tau}F(t) + e^{-A(t)\tau}F(t)^\perp. \tag{3.4}$$

В силу (2.5) оператор $F(t)^\perp$ — это спектральный проектор оператора $A(t)$ для интервала $[3\delta, +\infty)$, а потому

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t)^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-3\delta\tau}, \ \tau \geqslant 0. \tag{3.5}$$

Очевидно,

$$e^{-A(t)\tau}F(t) = Pe^{-A(t)\tau}F(t) + P^\perp e^{-A(t)\tau}F(t). \tag{3.6}$$

Поскольку $P^\perp F(t) = (F(t) - P)F(t)$, то с учетом (3.1) получаем

$$\|P^\perp e^{-A(t)\tau}F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} = \|(F(t) - P)e^{-A(t)\tau}F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-c_* t^{2p}\tau}\|F(t) - P\|. \tag{3.7}$$

Положим

$$\Sigma(t,\tau) := Pe^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P, \tag{3.8}$$

$$\mathcal{E}(t,\tau) := e^{t^{2p}S\tau}\Sigma(t,\tau) = e^{t^{2p}S\tau}Pe^{-A(t)\tau}F(t) - P. \tag{3.9}$$

Дифференцируя (3.9) по τ, получаем

$$\mathcal{E}'(t,\tau) := \frac{d\mathcal{E}(t,\tau)}{d\tau} = e^{t^{2p}S\tau}P(t^{2p}SP - A(t)F(t))e^{-A(t)\tau}F(t).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(t,\tau) = \mathcal{E}(t,0) + \int\limits_0^\tau \mathcal{E}'(t,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau} =$$

$$= PF(t) - P - \int\limits_0^\tau e^{t^{2p}S\widetilde{\tau}} P(A(t)F(t) - t^{2p}SP)e^{-A(t)\widetilde{\tau}}F(t)\, d\widetilde{\tau}.$$

Тогда

$$\Sigma(t,\tau) = e^{-t^{2p}S\tau}\mathcal{E}(t,\tau) =$$

$$= e^{-t^{2p}S\tau}P(F(t) - P) - \int\limits_0^\tau e^{-t^{2p}S(\tau-\widetilde{\tau})} P(A(t)F(t) - t^{2p}SP)e^{-A(t)\widetilde{\tau}}F(t)\, d\widetilde{\tau}.$$

Отсюда, используя (3.1) и (3.3), получаем

$$\|\Sigma(t,\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-c_* t^{2p}\tau}\left(\|F(t) - P\| + \tau\|A(t)F(t) - t^{2p}SP\|\right). \tag{3.10}$$

Объединяя (3.6)–(3.8) и (3.10), приходим к неравенству

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-c_* t^{2p}\tau}\left(2\|F(t) - P\| + \tau\|A(t)F(t) - t^{2p}SP\|\right). \tag{3.11}$$

Вместе с (2.18) и (2.19) это дает

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \left(2C_1|t| + C_2|t|^{2p+1}\tau\right)e^{-c_* t^{2p}\tau}. \tag{3.12}$$

Положим $\alpha = |t|^p\sqrt{c_*\tau}$. Тогда оценка (3.12) принимает вид

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2p}}\Phi_1(\alpha), \quad \tau > 0,$$

где

$$\Phi_1(\alpha) := \left(2C_1 c_*^{-\frac{1}{2p}}\alpha^{\frac{1}{p}} + C_2 c_*^{-1-\frac{1}{2p}}\alpha^{2+\frac{1}{p}}\right)e^{-\alpha^2}.$$

Оценивая максимум функции $\Phi_1(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, приходим к неравенству

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_8^\circ \tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{3.13}$$

где

$$C_8^\circ = 2C_1 c_*^{-\frac{1}{2p}} + C_2 c_*^{-1-\frac{1}{2p}}. \tag{3.14}$$

Легко проверить, что $e^{-3\delta\tau} \leqslant (3\delta\tau)^{-\frac{1}{2p}}$. Отсюда, учитывая (3.4), (3.5) и (3.13), получаем

$$\|e^{-A(t)\tau} - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_8^\circ\tau^{-\frac{1}{2p}} + e^{-3\delta\tau} \leqslant \left(C_8^\circ + (3\delta)^{-\frac{1}{2p}}\right)\tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0. \tag{3.15}$$

Мы используем (3.15) при $\tau \geqslant 1$, а при $0 < \tau < 1$ оцениваем левую часть (3.15) через 2. Объединяя эти оценки и полагая

$$C_8 := 2\max\left\{2, C_8^\circ + (3\delta)^{-\frac{1}{2p}}\right\}, \tag{3.16}$$

приходим к следующему результату.

Теорема 3.1. *Пусть $A(t)$ — операторное семейство, введенное в пункте* 2.1. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Пусть P — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$, а $S : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ — спектральный росток семейства $A(t)$ при $t = 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|e^{-A(t)\tau} - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \frac{C_8}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.17}$$

Число t^0 подчинено условию (2.4). *Постоянная C_8 определена согласно* (3.14), (3.16) *и зависит лишь от p, δ, постоянной C_0 из* (2.2), *$\|X_p\|$ и c_*.*

В случае, когда $G = 0$, результат может быть усилен.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть* G — *оператор* (2.22). *Предположим, что* $G = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|e^{-A(t)\tau} - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \frac{C_9}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.18}$$

Постоянная C_9 *определена ниже согласно* (3.20), (3.22) *и зависит лишь от* p, δ, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|X_p\|$ *и* c_*.

Доказательство. Используя неравенство (3.11), оценки (2.23), (2.24) и условие $G = 0$, получаем

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \left(2C_3|t|^p + C_4t^{2p+2}\tau\right)e^{-c_*t^{2p}\tau} \leqslant \left(2C_3t^2 + C_4t^{2p+2}\tau\right)e^{-c_*t^{2p}\tau}.$$

В последнем переходе мы учли, что $|t|^p \leqslant t^2$ при $|t| \leqslant t^0$, поскольку $p \geqslant 2$ и $t^0 \leqslant 1$.

Полагая снова $\alpha = |t|^p\sqrt{c_*\tau}$, запишем получившееся неравенство в виде

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{p}}\Phi_2(\alpha), \quad \tau > 0,$$

где

$$\Phi_2(\alpha) := \left(2C_3c_*^{-\frac{1}{p}}\alpha^{\frac{2}{p}} + C_4c_*^{-1-\frac{1}{p}}\alpha^{2+\frac{2}{p}}\right)e^{-\alpha^2}.$$

Оценивая максимум функции $\Phi_2(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, приходим к неравенству

$$\|e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_9^\circ\tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau > 0, \tag{3.19}$$

где

$$C_9^\circ = 2C_3c_*^{-\frac{1}{p}} + C_4c_*^{-1-\frac{1}{p}}. \tag{3.20}$$

Используя (3.4), (3.5) и (3.19) и учитывая неравенство $e^{-3\delta\tau} \leqslant (3\delta\tau)^{-\frac{1}{p}}$, получаем

$$\|e^{-A(t)\tau} - e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_9^\circ\tau^{-\frac{1}{p}} + e^{-3\delta\tau} \leqslant \left(C_9^\circ + (3\delta)^{-\frac{1}{p}}\right)\tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau > 0. \tag{3.21}$$

Мы применяем (3.21) при $\tau \geqslant 1$, а при $0 < \tau < 1$ оцениваем левую часть (3.21) через 2. Полагая

$$C_9 := 2\max\left\{2, C_9^\circ + (3\delta)^{-\frac{1}{p}}\right\}, \tag{3.22}$$

приходим к оценке (3.18). $\square$

3.2. Аппроксимация операторной экспоненты в «энергетической» норме. В этом пункте мы получим другую аппроксимацию оператора $e^{-A(t)\tau}$ (в «энергетической» норме). А именно, мы изучаем оператор $A(t)^{1/2}e^{-A(t)\tau}$. Наша цель — доказать следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть* $A(t)$ — *операторное семейство* (2.1), *причем выполнены условия пункта* 2.1, *а также условие* 3.1. *Пусть* P — *ортопроектор пространства* $\mathfrak{H}$ *на подпространство* $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$, Z — *оператор* (2.7), *а* S — *спектральный росток семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедлива оценка*

$$\|A(t)^{1/2}\left(e^{-A(t)\tau} - (I + t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{10}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.23}$$

Число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянная* C_{10} *определена ниже согласно* (3.30), (3.37), (3.38) *и зависит лишь от* p, δ, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|X_p\|$ *и* c_*.

Доказательство. Положим

$$\mathfrak{A}(t,\tau) := A(t)^{1/2}e^{-A(t)\tau}, \tag{3.24}$$

и представим этот оператор в виде

$$\mathfrak{A}(t,\tau) = \mathfrak{A}(t,\tau)F(t)^\perp + \mathfrak{A}(t,\tau)F(t)(F(t) - P) + F(t)\mathfrak{A}(t,\tau)P. \tag{3.25}$$

В силу спектральной теоремы с учетом (2.5) и элементарного неравенства $x^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$ имеем

$$\|\mathfrak{A}(t,\tau)F(t)^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sup_{\lambda\geqslant 3\delta}\lambda^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda\tau} \leqslant (3\delta)^{-\frac{1}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0, \ |t| \leqslant t^0. \tag{3.26}$$

Далее, в силу (3.2) при $\tau > 0$ и $0 < |t| \leqslant t^0$ выполнено

$$\|\mathfrak{A}(t,\tau)F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\lambda_j(t)^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda_j(t)\tau}\right) \leqslant \tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j(t)^{-\frac{1}{2p}} \leqslant c_*^{-\frac{1}{2p}}|t|^{-1}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}.$$

Вместе с (2.18) это влечет

$$\|\mathfrak{A}(t,\tau)F(t)(F(t)-P)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1 c_*^{-\frac{1}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ |t| \leqslant t^0. \tag{3.27}$$

Последний член в правой части (3.25) можно представить в виде

$$F(t)\mathfrak{A}(t,\tau)P = A(t)^{1/2}F(t)(e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P)P + A(t)^{1/2}F(t)e^{-t^{2p}S\tau}P. \tag{3.28}$$

Из (2.26) и (3.12) следует, что при $\tau > 0$ и $|t| \leqslant t^0$

$$\begin{aligned}&\|A(t)^{1/2}F(t)(e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P)P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{C_6}|t|^p\left(2C_1|t| + C_2|t|^{2p+1}\tau\right)e^{-c_*t^{2p}\tau} = \tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}\Phi_3(\alpha),\end{aligned}$$

где $\alpha = |t|^p\sqrt{c_*\tau}$ и

$$\Phi_3(\alpha) := \sqrt{C_6}\left(2C_1 c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\alpha^{1+\frac{1}{p}} + C_2 c_*^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}\alpha^{3+\frac{1}{p}}\right)e^{-\alpha^2}.$$

Оценивая максимум функции $\Phi_3(\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$, приходим к оценке

$$\|A(t)^{1/2}F(t)(e^{-A(t)\tau}F(t) - e^{-t^{2p}S\tau}P)P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C'_{10}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \tag{3.29}$$

где

$$C'_{10} = \sqrt{C_6}\left(2C_1 c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + C_2 c_*^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2p}}\right). \tag{3.30}$$

Из (3.24)–(3.29) при $\tau > 0$ и $|t| \leqslant t^0$ получаем

$$\begin{aligned}&\|A(t)^{1/2}\left(e^{-A(t)\tau} - (I + t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\right)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \\ &\leqslant \tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}\left((3\delta)^{-\frac{1}{2p}} + C_1 c_*^{-\frac{1}{2p}} + C'_{10}\right) + \|A(t)^{1/2}(F(t) - P - t^pZ)e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

Обозначим

$$\Xi(t,\tau) = e^{-t^{2p}S\tau}P. \tag{3.32}$$

Осталось оценить норму оператора

$$\mathcal{I}(t,\tau) := A(t)^{1/2}(F(t) - P - t^pZ)\Xi(t,\tau). \tag{3.33}$$

В силу (2.21), (2.25) и тождества $Z^*P = 0$ имеем $(F(t) - P - t^pZ)P = F_*(t)P$, а потому

$$\mathcal{I}(t,\tau) = A(t)^{1/2}F_*(t)\Xi(t,\tau). \tag{3.34}$$

Из (3.3) следует, что

$$\|\Xi(t,\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} = \|e^{-t^{2p}S\tau}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant e^{-c_*t^{2p}\tau}. \tag{3.35}$$

Чтобы оценить оператор (3.34), используем оценки (2.27) и (3.35). С учетом элементарного неравенства $x^{\frac{1}{2p}+\frac{1}{2}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$ имеем

$$\|\mathcal{I}(t,\tau)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_7|t|^{p+1}e^{-c_*t^{2p}\tau} \leqslant C''_{10}\tau^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ |t| \leqslant t^0, \tag{3.36}$$

где

$$C''_{10} = C_7 c_*^{-\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}. \tag{3.37}$$

В итоге, комбинируя соотношения (3.31)–(3.33) и (3.36), приходим к искомой оценке (3.23) с постоянной

$$C_{10} = (3\delta)^{-\frac{1}{2p}} + C_1 c_*^{-\frac{1}{2p}} + C'_{10} + C''_{10}. \tag{3.38}$$

$\square$

Замечание 3.1. Мы отследили зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Ниже при применении абстрактных результатов к дифференциальным операторам существенно следующее. Постоянные C_8, C_9, C_{10} из теорем 3.1, 3.2, 3.3 после возможного завышения можно считать многочленами от переменных C_0, $\|X_p\|$, $\delta^{-\frac{1}{2p}}$, $c_*^{-\frac{1}{2p}}$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p.

4. Операторное семейство вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты

4.1. Оператор вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$**.** Пусть $\widehat{\mathfrak{H}}$ — еще одно комплексное сепарабельное гильбертово пространство. Пусть задан изоморфизм $M : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$.

Пусть $\widehat{X}(t) : \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — операторный пучок вида

$$\widehat{X}(t) = \sum_{j=1}^{p} t^j \widehat{X}_j, \quad t \in \mathbb{R},$$

удовлетворяющий всем условиям пункта 2.1. При этом пространство $\mathfrak{H}_*$ остается прежним. Предположим, что

$$M \operatorname{Dom} X_j = \operatorname{Dom} \widehat{X}_j, \quad X_j = \widehat{X}_j M, \quad j = 0, 1, \dots, p. \tag{4.1}$$

Тогда $X(t) = \widehat{X}(t)M$. В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим семейство самосопряженных операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Тогда

$$A(t) = M^*\widehat{A}(t)M.$$

Ниже все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, помечаются «шляпкой». Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$.

В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим оператор

$$Q := (MM^*)^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{4.2}$$

Оператор Q ограничен и положительно определен вместе с Q^{-1}. Через $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ обозначим блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}} = \operatorname{Ker} \widehat{X}_0$:

$$Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} := \widehat{P}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}}. \tag{4.3}$$

Очевидно, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Несложно проверить, что ортопроектор P пространства $\mathfrak{H}$ на подпространство $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ пространства $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}; \tag{4.4}$$

ср. [25, предложение 1.2], где это тождество было проверено в случае $p = 1$.

Для $\widehat{A}(t)$ определим оператор $\widehat{Z}$ по аналогии с (2.7). Для каждого $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ определяется решение $\widehat{\psi} = \widehat{\psi}(\widehat{\omega})$ задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi} + \widehat{X}_p\widehat{\omega}) = 0, \quad \widehat{\psi} \perp \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Тогда

$$\widehat{Z}\widehat{u} = \widehat{\psi}(\widehat{P}\widehat{u}), \quad \widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}. \tag{4.5}$$

Наряду с $\widehat{Z}$ нам понадобится оператор $\widehat{Z}_Q$. Пусть $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ и пусть $\widehat{\psi}_Q = \widehat{\psi}_Q(\widehat{\omega})$ — решение задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_Q + \widehat{X}_p\widehat{\omega}) = 0, \quad Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Определим оператор $\widehat{Z}_Q$ соотношением

$$\widehat{Z}_Q\widehat{u} = \widehat{\psi}_Q(\widehat{P}\widehat{u}), \quad \widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}.$$

Ясно, что $\widehat{\psi}_Q = \widehat{\psi} + \widehat{\omega}_Q$, где элемент $\widehat{\omega}_Q \in \widehat{\mathfrak{N}}$ определяется из условия $Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}$. Тогда

$$\widehat{\omega}_Q = -(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(Q\widehat{\psi}).$$

Таким образом,

$$\widehat{Z}_Q = \widehat{Z} - (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}Q\widehat{Z}. \tag{4.6}$$

Отсюда, в частности, следуют равенства
$$\widehat{X}_0\widehat{Z}_Q = \widehat{X}_0\widehat{Z}, \quad \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q = \widehat{X}_1\widehat{Z}. \tag{4.7}$$
Мы учли, что $\widehat{\mathfrak{N}} = \operatorname{Ker}\widehat{X}_0 \subset \operatorname{Ker}\widehat{X}_1$.

Легко проверить, что
$$\widehat{Z}_Q = MZM^{-1}\widehat{P}, \tag{4.8}$$
где Z — оператор (2.7); ср. [3, лемма 6.1]. Оператор $\widehat{R}$ для семейства $\widehat{A}(t)$ определяется по аналогии с (2.9):
$$\widehat{R} := (\widehat{X}_0\widehat{Z} + \widehat{X}_p)|_{\widehat{\mathfrak{N}}} = (\widehat{X}_0\widehat{Z}_Q + \widehat{X}_p)|_{\widehat{\mathfrak{N}}}.$$
Здесь второе равенство следует из (4.7). Оператор R, определенный в (2.9), и оператор $\widehat{R}$ связаны соотношением
$$R = \widehat{R}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.9}$$

Наконец, спектральный росток $\widehat{S} := \widehat{R}^*\widehat{R} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ операторного семейства $\widehat{A}(t)$ и росток S семейства $A(t)$ связаны соотношением
$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{4.10}$$

Для $\widehat{A}(t)$ введем оператор $\widehat{G}$ по аналогии с (2.22). Тогда с учетом (4.7)
$$\widehat{G} := (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z} + (\widehat{X}_1\widehat{Z})^*\widehat{R}\widehat{P} = (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q + (\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q)^*\widehat{R}\widehat{P}. \tag{4.11}$$
В силу (4.1), (4.8) и (4.9) оператор G, определенный в (2.22), и оператор (4.11) связаны соотношением
$$G = PM^*\widehat{G}MP. \tag{4.12}$$

Замечание 4.1. Поскольку оператор G нетривиально действует только в подпространстве $\mathfrak{N}$, используя (4.4) и (4.12), легко проверить, что равенство $G = 0$ равносильно равенству $\widehat{G} = 0$.

4.2. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты $Me^{-A(t)\tau}M^*$.

В предположениях пункта 4.1 мы находим аппроксимацию оператора
$$Me^{-A(t)\tau}M^* = Me^{-M^*\widehat{A}(t)M}M^* : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$$
в терминах спектрального ростка $\widehat{S}$ семейства $\widehat{A}(t)$ и изоморфизма M.

Пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — оператор (4.3). Положим
$$M_0 = (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}. \tag{4.13}$$
Пусть S — спектральный росток семейства $A(t)$. С помощью (4.4) и (4.10) легко проверить справедливость тождества
$$Me^{-t^{2p}S\tau}PM^* = M_0e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}; \tag{4.14}$$
ср. [25, предложение 2.3], где это тождество проверено в случае $p = 1$.

Теорема 4.1. *Пусть $A(t)$ и $\widehat{A}(t)$ — операторные семейства, удовлетворяющие условиям пункта* 4.1. *Пусть выполнено условие* 3.1. *Пусть $\widehat{P}$ — ортопроектор пространства $\widehat{\mathfrak{H}}$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}} = \operatorname{Ker}\widehat{A}(0)$, а $\widehat{S} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$. Пусть оператор M_0 определен в* (4.13). *Тогда справедлива оценка*
$$\left\| Me^{-A(t)\tau}M^* - M_0e^{-t^{2p}M_0\widehat{S}M_0\tau}M_0\widehat{P} \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \frac{C_8\|M\|^2}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{4.15}$$
Число t^0 подчинено условию (2.4). *Постоянная C_8 определена согласно* (3.14), (3.16) *и зависит лишь от p, δ, постоянной C_0 из* (2.2), *$\|X_p\|$ и c_*.*

Доказательство. Домножая операторы под знаком нормы в (3.17) на M слева и на M^* справа, получаем
$$\left\| Me^{-A(t)\tau}M^* - Me^{-t^{2p}S\tau}PM^* \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \frac{C_8\|M\|^2}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0.$$
Отсюда с учетом тождества (4.14) вытекает искомое неравенство (4.15). $\square$

Аналогичным образом, из теоремы 3.2 с учетом замечания 4.1 вытекает следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть оператор* $\widehat{G}$ *определен в* (4.11). *Предположим, что* $\widehat{G} = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| M e^{-A(t)\tau} M^* - M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \frac{C_9 \|M\|^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянная* C_9 *определена согласно* (3.20), (3.22) *и зависит лишь от* p, δ, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|X_p\|$ *и* c_*.

Теперь из теоремы 3.3 мы выводим следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть оператор* $\widehat{Z}$ *определен в* (4.5). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{A}(t)^{1/2} \left(M e^{-A(t)\tau} M^* - (I + t^p \widehat{Z}) M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right) \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_{11} \tau^{-\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}, \quad \tau > 0, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{4.16}$$

Число t^0 *подчинено условию* (2.4). *Постоянная* C_{11} *зависит лишь от* p, δ, $\widehat{\delta}$, *постоянной* C_0 *из* (2.2), $\|\widehat{X}_p\|$, $\|X_p\|$, c_*, $\|M\|$, $\|M^{-1}\|$.

Доказательство. В силу (4.8) и (4.14) имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{A}(t)^{1/2} \left(M e^{-A(t)\tau} M^* - (I + t^p \widehat{Z}_Q) M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right) \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} = \\ &= \left\| \widehat{X}(t) M \left(e^{-A(t)\tau} - (I + t^p Z) e^{-t^{2p} S \tau} P \right) M^* \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \\ &\leqslant \|M\| \left\| A(t)^{1/2} \left(e^{-A(t)\tau} - (I + t^p Z) e^{-t^{2p} S \tau} P \right) \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из оценки (3.23) вытекает неравенство

$$\left\| \widehat{A}(t)^{1/2} \left(M e^{-A(t)\tau} M^* - (I + t^p \widehat{Z}_Q) M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right) \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_{10} \|M\| \tau^{-\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}, \quad \tau > 0, \ |t| \leqslant t^0. \tag{4.17}$$

Остается показать, что в пределах допустимой погрешности можно заменить $\widehat{Z}_Q$ на $\widehat{Z}$ в левой части (4.17). В силу (4.6) имеем

$$\widehat{X}(t)(\widehat{Z}_Q - \widehat{Z}) = t^p \widehat{X}_p (\widehat{Z}_Q - \widehat{Z}) = -t^p \widehat{X}_p (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \widehat{P} Q \widehat{Z}.$$

Мы учли, что $\widehat{\mathfrak{N}} \subset \operatorname{Ker} \widehat{X}_j$, $j = 0, \ldots, p-1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{A}(t)^{1/2} \left(t^p (\widehat{Z}_Q - \widehat{Z}) M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right) \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} = \\ &= \left\| \widehat{X}(t) \left(t^p (\widehat{Z}_Q - \widehat{Z}) M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right) \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} = \\ &= t^{2p} \left\| \widehat{X}_p (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \widehat{P} Q \widehat{Z} M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant \\ &\leqslant \|\widehat{X}_p\| \|M\|^4 \|M^{-1}\|^2 \|\widehat{Z}\| \, t^{2p} e^{-c_* t^{2p} \tau}, \quad \tau > 0, \ |t| \leqslant t^0. \end{aligned}$$

В последнем переходе мы учли тождество (4.14) и неравенство (3.3), а также оценку $\|(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \widehat{P}\| \leqslant \|M\|^2$, вытекающую из тождества $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1} \widehat{P} = M P M^*$ (см. (4.4)). Согласно (2.8) имеем $\|\widehat{Z}\| \leqslant \dfrac{1}{6} \widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}} \|\widehat{X}_p\|$, где $\widehat{\delta}$ — аналог величины δ для оператора $\widehat{A}(t)$.Теперь, используя элементарное неравенство $x^{\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}} e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, получаем

$$\left\| \widehat{A}(t)^{1/2} \left(t^p (\widehat{Z}_Q - \widehat{Z}) M_0 e^{-t^{2p} M_0 \widehat{S} M_0 \tau} M_0 \widehat{P} \right) \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}} \leqslant C_{12} \tau^{-\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}, \quad \tau > 0, \ |t| \leqslant t^0, \tag{4.18}$$

где

$$C_{12} = \frac{1}{6} \widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}} \|\widehat{X}_p\|^2 \|M\|^4 \|M^{-1}\|^2 c_*^{-\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}}. \tag{4.19}$$

Мы учли, что $t^0 \leqslant 1$.

Теперь из (4.17) и (4.18) вытекает искомая оценка (4.16) с постоянной

$$C_{11} = C_{10}\|M\| + C_{12}. \tag{4.20}$$

□

Замечание 4.2. Из замечания 3.1 и соотношений (4.19), (4.20) следует, что постоянную C_{11} из теоремы 4.3 после возможного завышения можно считать многочленом от переменных C_0, $\|\widehat{X}_p\|$, $\|X_p\|$, $\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}}$, $\delta^{-\frac{1}{2p}}$, $c_*^{-\frac{1}{2p}}$, $\|M\|$, $\|M^{-1}\|$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p.

Глава 2

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В $\mathbb{R}^d$. ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРНОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

5. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

5.1. Факторизованные операторы порядка $2p$ в $\mathbb{R}^d$. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматриваются дифференциальные операторы, формально заданные выражением

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}). \tag{5.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — равномерно положительно определенная и ограниченная измеримая матрица-функция размера $m \times m$ (в общем случае $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами):

$$c'\mathbf{1}_m \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant c''\mathbf{1}_m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \quad 0 < c' \leqslant c'' < \infty. \tag{5.2}$$

Матрица-функция $f(\mathbf{x})$ размера $n \times n$ (с комплексными элементами) предполагается ограниченной и ограниченно обратимой:

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{5.3}$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta, \tag{5.4}$$

где b_β — $(m \times n)$-матрицы с постоянными элементами, вообще говоря, комплексными. Считаем, что $m \geqslant n$, а символ

$$b(\boldsymbol{\xi}) := \sum_{|\beta|=p} b_\beta \boldsymbol{\xi}^\beta, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d,$$

оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг, т. е.

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Последнее условие равносильно оценкам

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}; \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty, \tag{5.5}$$

с некоторыми положительными константами α_0, α_1. Без ограничения общности можно считать нормы матриц b_β ограниченными константой $\sqrt{\alpha_1}$:

$$|b_\beta| \leqslant \sqrt{\alpha_1}, \quad |\beta| = p. \tag{5.6}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}$ дается через квадратичную форму. Из условий (5.2) следует, что матрицу $g(\mathbf{x})$ можно представить в факторизованном виде

$$g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x}),$$

причем h, $h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Например, можно положить $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})^{1/2}$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{X} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, действующий по правилу

$$(\mathcal{X}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})), \quad \operatorname{Dom} \mathcal{X} = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) :\ f\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\},$$

и квадратичную форму

$$a[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{5.7}$$

Проверим следующие неравенства:

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2\, d\mathbf{x} \leqslant a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in\operatorname{Dom}\mathcal{X}, \tag{5.8}$$

где $|\mathbf{D}^p\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 := \sum\limits_{|\beta|=p} |\mathbf{D}^\beta \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2$. Во-первых, в силу равенства Парсеваля

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),$$

где $\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Отсюда и из (5.5) следует, что

$$\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p}|\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1\|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p}|\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{5.9}$$

Наконец, при помощи элементарных неравенств

$$c'_p \sum_{|\beta|=p} |\boldsymbol{\xi}^\beta|^2 \leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \leqslant c''_p \sum_{|\beta|=p} |\boldsymbol{\xi}^\beta|^2, \quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d, \tag{5.10}$$

где постоянные c'_p и c''_p зависят только от d и p, приходим к искомым соотношениям (5.8) с постоянными

$$c_0 = c'_p\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_1 = c''_p\alpha_1\|g\|_{L_\infty}. \tag{5.11}$$

Следовательно, форма (5.7) замкнута и неотрицательна. По определению, $\mathcal{A}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, отвечающий форме (5.7).

5.2. Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$. В дальнейшем функции g, h и f предполагаются периодическими относительно некоторой решетки $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$. Пусть $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$ — базис в $\mathbb{R}^d$, порождающий решетку Γ, т. е.

$$\Gamma = \Big\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j\mathbf{a}_j,\ \nu_j\in\mathbb{Z}\Big\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \Big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d :\ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \kappa_j\mathbf{a}_j,\ 0<\kappa_j<1\Big\}. \tag{5.12}$$

Базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle\mathbf{b}_j,\mathbf{a}_l\rangle = 2\pi\delta_{jl}$. Порожденная им решетка

$$\widetilde{\Gamma} = \Big\{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^d \zeta_j\mathbf{b}_j,\ \zeta_j\in\mathbb{Z}\Big\}$$

называется *двойственной* к решетке Γ. Ячейка решетки $\widetilde{\Gamma}$ может быть определена аналогично (5.12), однако удобнее рассматривать центральную зону Бриллюэна двойственной решетки:

$$\widetilde{\Omega} := \Big\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\ 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}\Big\}. \tag{5.13}$$

Область $\widetilde{\Omega}$ является фундаментальной областью решетки $\widetilde{\Gamma}$. Обозначим $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$ и заметим, что $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Обозначим через r_0 радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$|\mathbf{k}+\mathbf{b}| \geqslant r_0, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \quad 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}. \tag{5.14}$$

Положим $\mathcal{B}(r) := \big\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d : |\mathbf{k}|\leqslant r\big\}$, $r>0$. Под $\widetilde{H}^s(\Omega;\mathbb{C}^n)$ понимается подпространство функций из $H^s(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье $\{\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}\}_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \mapsto \mathbf{v}$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} e^{i\langle \mathbf{b},\mathbf{x}\rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma}; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$:

$$\int_\Omega |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2.$$

5.3. Преобразование Гельфанда. Первоначально *преобразование Гельфанда* $\mathcal{U}$ определяется на функциях из класса Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d,$$

а затем $\mathcal{U}$ распространяется по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) \, d\mathbf{k} =: \mathcal{K}. \tag{5.15}$$

Соотношение $\mathbf{v} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ эквивалентно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)$ при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \int_\Omega \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p \, \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 \right) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную Γ-периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ под действием преобразования Гельфанда переходит в оператор умножения на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ из (5.15). Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

6. Разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

6.1. Формы $a(\mathbf{k})$ и операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, определенный соотношениями

$$\begin{gathered} (\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})(f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})), \\ \operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)\} =: \mathfrak{D}. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$a(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}. \tag{6.2}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье и соотношений (5.2) и (5.5) легко проверить, что при всех $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ выполнены оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant a(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}, \tag{6.3}$$

где

$$a_*(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p} |\widehat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{v} = f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n). \tag{6.4}$$

Отсюда с учетом (5.10) получаем

$$c_0 \int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p (f\mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p (f\mathbf{u})|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D},$$

где постоянные c_0, c_1 определены в (5.11). Следовательно, оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})$ замкнут, а форма (6.2) замкнута и неотрицательна. Самосопряженный оператор в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, отвечающий форме $a(\mathbf{k})$, обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Формально можно записать

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f(\mathbf{x}). \tag{6.5}$$

6.2. Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ позволяют нам частично диагонализовать оператор $\mathcal{A}$ в прямом интеграле $\mathcal{K}$ (см. (5.15)). Пусть $\widetilde{\mathbf{u}} = \mathcal{U}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \operatorname{Dom} a(\mathbf{k}) = \mathfrak{D} \text{ при почти всех } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{6.6}$$

$$a[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\widetilde{\Omega}} a(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot), \widetilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{6.7}$$

Наоборот, если $\widetilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{K}$ удовлетворяет (6.6) и интеграл в (6.7) сходится, то $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom} a$ и (6.7) выполнено. Таким образом, под действием преобразования Гельфанда оператор $\mathcal{A}$ превращается в прямом интеграле $\mathcal{K}$ в умножение на операторнозначную функцию $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$. Все это можно кратко выразить формулой

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{6.8}$$

6.3. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему. Для $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t = |\mathbf{k}|, \quad \boldsymbol{\theta} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|},$$

и рассмотрим t как параметр возмущения. В то же время все построения будут зависеть от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, и мы должны заботиться о равномерности оценок по этому параметру.

Применяя метод, описанный в разделе 2, положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$. Согласно (5.4) и (6.1), имеем:

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta (\mathbf{D} + \mathbf{k})^\beta f = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma \mathbf{k}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma f =$$
$$= h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta} C_\beta^\gamma t^{|\beta-\gamma|} \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma f.$$

Следовательно, оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})$ допускает запись в виде

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + \sum_{j=1}^{p} t^j X_j(\boldsymbol{\theta}).$$

Здесь оператор

$$X_0 = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \mathbf{D}^\beta f = h b(\mathbf{D}) f$$

замкнут на области определения

$$\operatorname{Dom} X_0 = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)\} = \mathfrak{D}, \tag{6.9}$$

«промежуточные» операторы $X_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1, \ldots, p-1$, заданы соотношениями

$$X_j(\boldsymbol{\theta}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma \leqslant \beta,\ |\gamma|=p-j} C_\beta^\gamma \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma} \mathbf{D}^\gamma f \tag{6.10}$$

на областях определения

$$\operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : \ f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^{p-j}(\Omega; \mathbb{C}^n)\}, \tag{6.11}$$

а оператор

$$X_p(\boldsymbol{\theta}) = h \sum_{|\beta|=p} b_\beta \boldsymbol{\theta}^\beta f = h b(\boldsymbol{\theta}) f$$

ограничен из $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$.

Из (6.9) и (6.11) видно, что условие 2.1 выполнено:

$$\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) \subset \operatorname{Dom} X_p(\boldsymbol{\theta}) = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

В силу (5.5) справедлива оценка

$$\|X_p(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_\infty}. \tag{6.12}$$

Легко проверить, что ядро оператора X_0 имеет вид

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} X_0 = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \tag{6.13}$$

а потому $\dim \mathfrak{N} = n$; ср. [12, предложение 5.1], где этот факт установлен в случае $f = \mathbf{1}_n$.

Пусть $n_* = \dim \operatorname{Ker} X_0^*$. Соотношение $m \geqslant n$ обеспечивает выполнение условия $n_* \geqslant n$. Более того, поскольку

$$\mathfrak{N}_* = \operatorname{Ker} X_0^* = \{\mathbf{q} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^m) : \ h^*\mathbf{q} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^m) : \ b(\mathbf{D})^*(h^*\mathbf{q}) = 0\},$$

то реализуется альтернатива: либо $n_* = \infty$ (если $m > n$), либо $n_* = n$ (если $m = n$).

Из [12, предложение 5.2] вытекает выполнение условия 2.2, а именно: при $j = 1, \dots, p-1$ справедливы оценки

$$\|X_j(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_j \|X_0\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}, \tag{6.14}$$

где

$$\widetilde{C}_j = \alpha_1^{\frac{1}{2}} \alpha_0^{-\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} (2r_0)^{-j} \Big(\sum_{|\beta|=p} \ \sum_{\gamma \leqslant \beta, \ |\gamma|=p-j} C_\beta^\gamma \Big). \tag{6.15}$$

Отметим, что постоянные $\widetilde{C}_j$ не зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а зависят лишь от d, p, j, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и r_0.

В силу компактности вложения $\operatorname{Dom} a(0) = \mathfrak{D}$ в пространство $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ спектр оператора $\mathcal{A}(0)$ дискретен. Точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $\mathcal{A}(0)$ кратности n, соответствующее собственное подпространство $\mathfrak{N}$ описано в (6.13).

Используя вариационные соображения, с помощью нижней оценки (6.3) и (6.4) легко оценить расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$:

$$d^0 \geqslant \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} (2r_0)^{2p}. \tag{6.16}$$

Ср. [2, гл. 2, п. 2.2], где такая оценка получена в случае операторов второго порядка, а также [12, (5.17)], где рассмотрен случай $f = \mathbf{1}_n$.

Следуя абстрактной схеме, зафиксируем положительное число $\delta \leqslant \min\left\{\dfrac{d^0}{36}, \dfrac{1}{4}\right\}$. С учетом (6.16) положим

$$\delta = \min\left\{\frac{\alpha_0 r_0^{2p}}{4\|g^{-1}\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2}, \frac{1}{4}\right\}. \tag{6.17}$$

Неравенства (6.14) позволяют в качестве постоянной C_0 из (2.2) принять

$$C_0 = \max\{1, \widetilde{C}_1, \dots, \widetilde{C}_{p-1}\}, \tag{6.18}$$

где константы $\widetilde{C}_j$ определены в (6.15). Постоянная C_0 зависит лишь от d, p, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и r_0. (Отметим, что от f постоянная C_0 не зависит.)

Постоянная $C^\circ = \max\{(p-1)C_0, \|X_p(\boldsymbol{\theta})\|\}$ (см. (2.4)) сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$. С учетом (6.12) (завышая константу) примем значение

$$C^\circ = \max\left\{(p-1)C_0, \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_\infty}\right\},$$

не зависящее от $\boldsymbol{\theta}$. В соответствии с (2.4), положим

$$t^0 = \sqrt{\delta}(C^\circ)^{-1} = \frac{\sqrt{\delta}}{\max\left\{(p-1)C_0, \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_\infty}\right\}}. \tag{6.19}$$

Отметим, что $t^0 \leqslant 1$, поскольку $(p-1)C_0 \geqslant 1$ и $\delta \leqslant 1$. Следовательно,

$$t^0 \leqslant (t^0)^{\frac{1}{p}} \leqslant \delta^{\frac{1}{2p}} \alpha_1^{-\frac{1}{2p}} \|g\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{2p}} \|f\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{p}} \leqslant 4^{-\frac{1}{2p}} \alpha_0^{\frac{1}{2p}} \alpha_1^{-\frac{1}{2p}} \|g\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{2p}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{2p}} \|f\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{p}} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-\frac{1}{p}} r_0 < r_0.$$

В последнем переходе использованы очевидные неравенства $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty} \geqslant 1$ и $\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \geqslant 1$. Таким образом, шар $\mathcal{B}(t^0)$ находится внутри шара $\mathcal{B}(r_0)$ и тем самым целиком содержится в $\widetilde{\Omega}$.

6.4. Невырожденность спектрального ростка. Из нижней оценки (6.3) и (6.4) с учетом (5.13) вытекает неравенство

$$a(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} |\mathbf{k}|^{2p} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}.$$

Тем самым,

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^{2p} I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \tag{6.20}$$

где

$$c_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}. \tag{6.21}$$

Этим проверено выполнение условия 3.1.

Таким образом, мы убедились, что операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k}) =: A(t,\boldsymbol{\theta})$ удовлетворяет всем предположениям абстрактной схемы. Существенно, что δ, t^0 и c_* не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (6.17), (6.19), (6.21)).

Сейчас аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta})$ и аналитические ветви собственных функций $\varphi_j(t,\boldsymbol{\theta})$, $j = 1,\dots,n$, $|t| \leqslant t^0$, операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ (см. пункт 2.3) зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Из (6.20) следуют неравенства

$$\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j = 1,\dots,n, \quad t = |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{6.22}$$

Разложения (2.11), (2.12) принимают вид

$$\lambda_j(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_j(\boldsymbol{\theta}) t^{2p} + \mu_j(\boldsymbol{\theta}) t^{2p+1} + \dots, \quad j = 1,\dots,n, \tag{6.23}$$

$$\varphi_j(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_j(\boldsymbol{\theta}) + \varphi_j^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) t + \dots, \quad j = 1,\dots,n.$$

Из (6.22) и (6.23) следует, что $\gamma_j(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_*$, $j = 1,\dots,n$. Отсюда вытекает (см. (2.13)), что росток $S(\boldsymbol{\theta})$ семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ невырожден независимо от $\boldsymbol{\theta}$, и выполнена оценка

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{6.24}$$

7. Эффективные характеристики в случае $f = \mathbf{1}_n$

7.1. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$. Случай, когда $f = \mathbf{1}_n$, является для нас базовым. В этом случае условимся помечать все объекты «шляпкой». Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, имеет вид

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{7.1}$$

а соответствующие операторы $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = \widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$, действующие в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, принимают вид

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \tag{7.2}$$

(при периодических граничных условиях).

При $f = \mathbf{1}_n$ ядро (6.13) состоит из постоянных вектор-функций:

$$\widehat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}. \tag{7.3}$$

Ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}$ действует как усреднение по ячейке:

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{7.4}$$

Параметры (6.17), (6.19), (6.21) сейчас принимают вид

$$\widehat{\delta} = \min\left\{ \frac{\alpha_0 r_0^{2p}}{4\|g^{-1}\|_{L_\infty}}, \frac{1}{4} \right\}, \tag{7.5}$$

$$\widehat{t}^{\,0} = \frac{(\widehat{\delta})^{\frac12}}{\max\left\{ (p-1)C_0, \alpha_1^{\frac12} \|g\|_{L_\infty}^{\frac12} \right\}}, \tag{7.6}$$

$$\widehat{c}_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}. \tag{7.7}$$

В силу (6.20) при $f = \mathbf{1}_n$ выполнена оценка

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \geqslant \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^{2p} I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \tag{7.8}$$

7.2. Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Для операторного семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ операторы Z, R и S, введенные в абстрактных терминах в пункте 2.2, зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}$. Они были построены в [12, п. 5.3].

Чтобы описать эти операторы, введем матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ размера $n \times m$, являющуюся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m\right) = 0, \qquad \int\limits_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{7.9}$$

Уравнение здесь понимается в слабом смысле: для каждого $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$ выполнено включение $\Lambda\mathbf{C} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и интегральное тождество

$$\int\limits_{\Omega} \langle g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})\mathbf{C} + \mathbf{C}), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n).$$

Согласно [12, п. 5.3]), оператор $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$ имеет вид

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda] b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{7.10}$$

где $[\Lambda]$ — оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$. Оператор $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ задается равенством

$$\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) = [h(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m)] b(\boldsymbol{\theta})|_{\widehat{\mathfrak{N}}}. \tag{7.11}$$

Тогда (см. [12, п. 5.3]) спектральный росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ действует в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (7.3)) и представляется в виде

$$\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{7.12}$$

Здесь g^0 — так называемая *эффективная матрица*. Постоянная матрица g^0 размера $m \times m$ определяется равенством

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m\right). \tag{7.13}$$

Оказывается, что эффективная матрица g^0 положительно определена. Отсюда еще раз следует невырожденность спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, которая уже обсуждалась в пункте 6.4.

Отметим некоторые свойства эффективной матрицы; см. [12, предложения 5.3–5.5].

Предложение 7.1. *Пусть g^0 — эффективная матрица, определенная в* (7.13). *Введем обозначения*

$$\overline{g} = |\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{g} = \left(|\Omega|^{-1} \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Выполнены оценки

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{7.14}$$

В случае, когда $m = n$, выполнено равенство $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (7.14) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта—Рейсса. Из (7.14) вытекают следующие оценки норм матриц g^0 и $(g^0)^{-1}$:

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{7.15}$$

Предложение 7.2.

1°. *Пусть $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$. Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{7.16}$$

2°. *Пусть $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$. Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \ \mathbf{v}_k \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n); \quad k = 1, \dots, m. \tag{7.17}$$

Замечание 7.1. В случае, когда $g^0 = \underline{g}$, матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ постоянна: $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$.

Ниже нам понадобятся следующие оценки периодического решения Λ задачи (7.9), которые несложно проверить:

$$\|hb(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}, \tag{7.18}$$

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}}\alpha_0^{-\frac{1}{2}}(2r_0)^{-p}\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} =: |\Omega|^{\frac{1}{2}}C_\Lambda, \tag{7.19}$$

$$\|\Lambda\|_{H^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{\frac{1}{2}}\alpha_0^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{|\beta|\leqslant p}(2r_0)^{-2(p-|\beta|)}\Big)^{\frac{1}{2}} =: |\Omega|^{\frac{1}{2}}\widetilde{C}_\Lambda. \tag{7.20}$$

7.3. Эффективный оператор. В силу (7.12) и однородности символа $b(\mathbf{k})$ имеем

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{7.21}$$

Выражение (7.21) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \quad \operatorname{Dom}\widehat{\mathcal{A}}^0 = H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{7.22}$$

который называется *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, отвечающее оператору $\widehat{\mathcal{A}}^0$. Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на области определения $\widetilde{H}^{2p}(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Аналогично (7.8) с учетом (7.15) выполнено неравенство

$$\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) \geqslant \widehat{c}_*|\mathbf{k}|^{2p}I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{7.23}$$

В силу (7.4) и (7.21) справедливо тождество

$$t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{7.24}$$

7.4. Оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$. Для операторного семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ оператор G, в абстрактных терминах определенный в (2.22), зависит от параметра $\boldsymbol{\theta}$ и принимает вид

$$\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = (\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P})^*\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) + (\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}))^*\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}.$$

Обозначим через $B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})$ ДО порядка $p-1$ такой, что $\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) = hB_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})$ (см. (6.10) при $f = \mathbf{1}_n$). Тогда

$$B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D}) = \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma\leqslant\beta:|\gamma|=p-1} C_\beta^\gamma \boldsymbol{\theta}^{\beta-\gamma}\mathbf{D}^\gamma.$$

Используя (7.10) и (7.11), получаем

$$\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{7.25}$$

где $g^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ — эрмитова матрица размера $m\times m$, заданная выражением

$$g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \big(\widetilde{g}(\mathbf{x})^* B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + (B_1(\boldsymbol{\theta};\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^*\widetilde{g}(\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x}. \tag{7.26}$$

Выделим некоторые случаи, когда оператор (7.25) обращается в нуль (см. [27, предложение 3.3]).

Предложение 7.3.

1°. *Пусть выполнены соотношения* (7.16). *Тогда* $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$, *откуда* $g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *и* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

2°. *Пусть справедливы представления* (7.17). *Тогда* $g^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *и* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

3°. *Пусть* $n = 1$ *и элементы матриц* $g(\mathbf{x})$, b_β, $|\beta| = p$, *вещественны. Тогда* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 7.2. В общем случае оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ может быть ненулевым. В частности, несложно привести примеры оператора $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ в случае $n = 1$, где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами, в которых соответствующий оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля.

8. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}$

8.1. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}$. Старший член. Мы применим теоремы 3.1, 3.2, 3.3 к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})=\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В силу (7.24) справедливо тождество

$$e^{-t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\tau}\widehat{P}=e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}. \tag{8.1}$$

Остается реализовать постоянные в оценках. Константы $\widehat{\delta}$, C_0, $\widehat{t}^0$ и $\widehat{c}_*$ определены в (7.5), (6.18), (7.6), (7.7) и не зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Они зависят лишь от следующего набора параметров:

$$d,\ p,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \text{параметры решетки } \Gamma, \tag{8.2}$$

который мы для краткости будем называть *данными задачи*. Далее, согласно замечанию 3.1 постоянные $\widehat{C}_8$, $\widehat{C}_9$, $\widehat{C}_{10}$ из теорем 3.1, 3.2, 3.3 (в применении к $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$) мажорируются многочленами от переменных C_0, $\|\widehat{X}_p\|$, $\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2p}}$, $\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p. Сейчас оператор $\widehat{X}_p$ зависит от $\boldsymbol{\theta}$, но его норма оценивается величиной $\alpha_1^{\frac12}\|g\|_{L_\infty}^{\frac12}$, не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$; см. (6.12) при $f=\mathbf{1}_n$. Таким образом, после возможного завышения постоянные $\widehat{C}_8$, $\widehat{C}_9$, $\widehat{C}_{10}$ (для операторного семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$) зависят только от параметров (8.2).

Применяя теорему 3.1 к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})=\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и учитывая тождество (8.1), получаем неравенство

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\frac{\widehat{C}_8}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad \tau\geqslant 0,\quad |\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}^0. \tag{8.3}$$

Покажем, что в пределах допустимой погрешности можно избавиться от проектора $\widehat{P}$ в (8.3) (заменить его тождественным оператором). Из (6.24) (при $f=\mathbf{1}_n$), (7.12) и однородности символа $b(\boldsymbol{\xi})$ вытекает оценка

$$b(\boldsymbol{\xi})^*g^0b(\boldsymbol{\xi})\geqslant\widehat{c}_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}\mathbf{1}_n,\quad \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d. \tag{8.4}$$

Отсюда, используя дискретное преобразование Фурье, с помощью (5.14) и элементарной оценки $(x^{\frac{1}{2p}}+1)e^{-x}\leqslant 2$ при $x\geqslant 0$, получаем

$$\begin{aligned}\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P})\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}&\leqslant\sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}e^{-\widehat{c}_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau}\leqslant e^{-\widehat{c}_*r_0^{2p}\tau}\leqslant\\ &\leqslant\frac{2}{(\widehat{c}_*r_0^{2p}\tau)^{\frac{1}{2p}}+1}\leqslant\frac{2\max\{1,\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}r_0^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad\tau\geqslant 0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{8.5}$$

Теперь из (8.3) и (8.5) следует оценка

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\frac{\widehat{C}_8'}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad \tau\geqslant 0,\quad |\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}^0, \tag{8.6}$$

где $\widehat{C}_8'=\widehat{C}_8+2\max\left\{1,\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}r_0^{-1}\right\}$.

Оценка при $|\mathbf{k}|>\widehat{t}^0$ тривиальна. В силу (7.8) и (7.23)

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant 2e^{-\widehat{c}_*|\mathbf{k}|^{2p}\tau}\leqslant 2e^{-\widehat{c}_*(\widehat{t}^0)^{2p}\tau},\quad\tau\geqslant 0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0).$$

Используя элементарную оценку $(x^{\frac{1}{2p}}+1)e^{-x}\leqslant 2$ при $x\geqslant 0$, отсюда получаем

$$\begin{gathered}\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\frac{4}{(\widehat{c}_*(\widehat{t}^0)^{2p}\tau)^{\frac{1}{2p}}+1}\leqslant\frac{4\max\{1,\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}}(\widehat{t}^0)^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\\ \tau\geqslant 0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(\widehat{t}^0).\end{gathered} \tag{8.7}$$

В итоге из оценок (8.6) и (8.7) вытекает следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ — операторное семейство вида* (7.2) *и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — эффективное операторное семейство, определенное в пункте* 7.3. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.8}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит лишь от данных задачи (8.2).

При дополнительном предположении, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ можно применить теорему 3.2. Это дает оценку

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{C}_9}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^{\,0}. \tag{8.9}$$

По аналогии с (8.5)

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2\max\{1, \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{p}} r_0^{-2}\}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.10}$$

Далее, по аналогии с (8.7) имеем

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{4\max\{1, \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{p}} (\widehat{t}^{\,0})^{-2}\}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^{\,0}). \tag{8.11}$$

Комбинируя оценки (8.9)–(8.11), приходим к следующему результату.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.12}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит лишь от данных задачи (8.2).

8.2. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}$ в «энергетической» норме. Применим теперь теорему 3.3 к операторному семейству $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В силу (7.4), (7.10) и (7.24) справедливо тождество

$$\left(I + t^p \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\right) e^{-t^{2p}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\tau}\widehat{P} = \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{k})\widehat{P}\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} = \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}.$$

Учитывая это тождество и применяя теорему 3.3, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_{10}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^{\,0}. \tag{8.13}$$

Покажем теперь, что в пределах допустимой погрешности оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}$ в (8.13) можно заменить на $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}$. Аналогично (8.5), используя (5.5), (5.14), (8.4) и элементарную оценку $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}} e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}(I-\widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \sup_{0\neq \mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^p e^{-\widehat{c}_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Вместе с (8.13) это влечет

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3' \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^{\,0}, \tag{8.15}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_3' = \widehat{C}_{10} + \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}$.

Оценки при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}^0$ тривиальны: каждое слагаемое под знаком нормы в (8.15) оценивается по-отдельности. В силу спектральной теоремы и неравенства (7.8)

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \sup_{\lambda \geqslant \widehat{c}_* (\widehat{t}^0)^{2p}} \sqrt{\lambda} e^{-\lambda\tau} \leqslant \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} (\widehat{t}^0)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0). \tag{8.16}$$

Аналогично, используя (7.23), получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} (\widehat{t}^0)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0).$$

Отсюда с учетом (7.15) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \left\| (g^0)^{1/2} b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\| = \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \left\| \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} (\widehat{t}^0)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{aligned} \tag{8.17}$$

Остается оценить оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \widehat{P} = \left(\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} [\Lambda] \widehat{P}_m \right) \left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \widehat{P} \right). \tag{8.18}$$

Здесь $\widehat{P}_m$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$ на подпространство констант. Из (5.5), (7.18) и (7.19) вытекает оценка

$$\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} [\Lambda] \widehat{P}_m \|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \Lambda \|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^p C_\Lambda \right), \tag{8.19}$$

где $2r_1 = \operatorname{diam} \widetilde{\Omega}$. Аналогично (8.17) имеем

$$\begin{aligned} &\left\| b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \left\| (g^0)^{1/2} b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\| \leqslant \\ &\leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} (\widehat{t}^0)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{aligned} \tag{8.20}$$

Комбинируя (8.18)–(8.20), получаем

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \widehat{P} \right\| \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \left(1 + \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^p C_\Lambda \right) \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} (\widehat{t}^0)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \\ \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(\widehat{t}^0). \end{aligned} \tag{8.21}$$

В итоге из (8.15)–(8.17) и (8.21) вытекает неравенство

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P} \right) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3'' \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \tag{8.22}$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}_3'' = \max \left\{ \widehat{\mathcal{C}}_3', \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2p}} (\widehat{t}^0)^{-1} \left(1 + \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \left(2 + \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^p C_\Lambda \right) \right) \right\}.$$

Неравенство (8.22) представляет интерес при $\tau \geqslant 1$. При $0 < \tau < 1$ тривиальные оценки дадут лучший порядок: каждый член под знаком нормы в (8.22) оценивается по-отдельности. В силу спектральной теоремы,

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \sup_{\lambda \geqslant 0} \lambda^{1/2} e^{-\lambda\tau} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \tag{8.23}$$

Аналогично с учетом (7.15) имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \left\| \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{8.24}$$

Для оценки оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}$ воспользуемся (8.18), (8.19) и неравенством

$$\left\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left\|\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.25}$$

Получаем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left(1+\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^pC_\Lambda\right)\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.26}$$

Вместе с (8.23) и (8.24) это влечет

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-\left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3'''\tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{8.27}$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}_3''' = 1+\|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\left(2+\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^pC_\Lambda\right).$$

Применяя (8.22) при $\tau\geqslant 1$ и (8.27) при $0<\tau<1$, приходим к неравенству

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-\left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2\max\{\widehat{\mathcal{C}}_3'',\widehat{\mathcal{C}}_3'''\}}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.28}$$

Подытожим результаты.

Теорема 8.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а* $\widehat{P}$ — *проектор* (7.4). *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедливы оценки*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-\left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \tag{8.29}$$

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-\left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}. \tag{8.30}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_3$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Неравенство (8.28) доказывает (8.29) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_3=2\max\{\widehat{\mathcal{C}}_3'',\widehat{\mathcal{C}}_3'''\}$.

Неравенство (8.30) устанавливается по аналогии с доказательством оценки (8.28): оно следует из (8.13), (8.16), (8.17), (8.21), (8.23), (8.24), (8.26). □

Нам понадобится также оценка оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-\left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}$ по операторной норме в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

Предложение 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.3.

1°. *При* $\tau>0$ *и* $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-\left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}. \tag{8.31}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$. *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-\left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right)e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_5}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}. \tag{8.32}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_5$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Аналогично (8.18) справедливо представление

$$[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} = \left([\Lambda]\widehat{P}_m\right)\left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\right). \tag{8.33}$$

С учетом (7.19) имеем

$$\|[\Lambda]\widehat{P}_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda. \tag{8.34}$$

Отсюда и из (8.25), (8.33) вытекает неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau\geqslant 1,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.35}$$

При $0<\tau<1$ с учетом равенства $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P} = b(\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}$ и (5.5) получаем

$$\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p \leqslant \frac{2\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad 0<\tau<1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.36}$$

Из (8.33), (8.34), (8.36) следует неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad 0<\tau<1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.37}$$

В итоге из (8.8), (8.35) и (8.37) вытекает искомая оценка (8.31) с константой

$$\widehat{\mathcal{C}}_4 = \widehat{\mathcal{C}}_1 + 2C_\Lambda\max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}, \alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\right\}.$$

Для проверки утверждения 2° следует иначе оценить оператор (8.33). Вместо (8.35) используем неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}\tau^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau\geqslant 1,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.38}$$

Вместо (8.37) нам понадобится оценка

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p \leqslant \frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad 0<\tau<1, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{8.39}$$

В итоге из неравенства (8.12) (справедливого при условии $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$) и из (8.38), (8.39) вытекает оценка (8.32) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_5 = \widehat{\mathcal{C}}_2 + 2C_\Lambda\max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty}, \alpha_1^{\frac{1}{2}}r_1^p\right\}$. ☐

9. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^*$

9.1. Включение операторного семейства $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в схему раздела 4. Вернемся к рассмотрению операторного семейства (6.5) в общем случае $f\neq \mathbf{1}_n$. Сейчас выполнены предположения раздела 4 при $\mathfrak{H}=\widehat{\mathfrak{H}}=L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и $\mathfrak{H}_*=L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$. Роль оператора $\widehat{A}(t)$ играет $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})=\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, а роль оператора $A(t)$ играет $A(t,\boldsymbol{\theta})=\mathcal{A}(\mathbf{k})$ (подразумевается $\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}$). В качестве изоморфизма M выступает оператор умножения на матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$. Оператор Q (см. (4.2)) является оператором умножения на матрицу-функцию

$$Q(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}.$$

В силу (5.3) матрица-функция $Q(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена. Блок $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (7.3)) есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$\overline{Q} = (\underline{ff^*})^{-1} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}\,d\mathbf{x}.$$

Далее, M_0 (см. (4.13)) есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \tag{9.1}$$

Отметим очевидные неравенства

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{9.2}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор для $\widehat{\mathcal{A}}$; см. (7.22). Положим

$$\mathcal{A}^0 := f_0\widehat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \tag{9.3}$$

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — соответствующее операторное семейство в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Тогда

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0 = f_0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 \tag{9.4}$$

(при периодических граничных условиях). В силу (7.23) и (9.2) с учетом равенства $c_* = \widehat{c}_* \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}$ выполнена оценка

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^{2p} I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.5}$$

9.2. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau}f^*$. Старший член. Мы применим теоремы 4.1, 4.2, 4.3 к операторному семейству $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$. В силу (7.24) выполнено тождество

$$t^{2p} f_0 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) f_0 \widehat{P} = f_0 \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0 \widehat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \widehat{P},$$

а потому

$$f_0 e^{-t^{2p} f_0 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) f_0 \tau} f_0 \widehat{P} = f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}. \tag{9.6}$$

Остается реализовать постоянные в оценках. Константы δ, C_0, t^0 и c_* определены в (6.17), (6.18), (6.19), (6.21) и не зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Они зависят лишь от следующего набора параметров:

$$d,\ p,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|f\|_{L_\infty},\ \|f^{-1}\|_{L_\infty},\ \text{параметры решетки } \Gamma, \tag{9.7}$$

который мы для краткости будем называть *данными задачи*. Далее, согласно замечаниям 3.1, 4.2 постоянные из теорем 4.1, 4.2, 4.3 (в применении к $A(t,\boldsymbol{\theta})$) мажорируются многочленами от переменных C_0, $\|\widehat{X}_p\|$, $\|X_p\|$, $\widehat{\delta}^{-\frac{1}{2}}$, $\delta^{-\frac{1}{2p}}$, $c_*^{-\frac{1}{2p}}$ с положительными коэффициентами, зависящими только от p. Сейчас операторы $\widehat{X}_p$, X_p зависят от $\boldsymbol{\theta}$, но их нормы оцениваются величинами $\alpha_1^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}$ и $\alpha_1^{\frac{1}{2}}\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L_\infty}$ соответственно, не зависящими от $\boldsymbol{\theta}$; см. (6.12). Таким образом, после возможного завышения постоянные из теорем 4.1, 4.2, 4.3 (для операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$) зависят только от параметров (9.7).

Применяя теорему 4.1 к операторному семейству $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ и учитывая тождество (9.6), получаем неравенство

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{C_8 \|f\|_{L_\infty}^2}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{9.8}$$

Покажем, что в пределах допустимой погрешности можно заменить проектор $\widehat{P}$ в (9.8) тождественным оператором. Из (8.4) и (9.2) вытекает оценка

$$f_0 b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) f_0 \geqslant c_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{9.9}$$

Отсюда, используя дискретное преобразование Фурье, по аналогии с (8.5) получаем

$$\begin{gathered} \left\| f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_\infty}^2 \sup_{0\neq \mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} e^{-c_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant \|f\|_{L_\infty}^2 e^{-c_* r_0^{2p}\tau} \leqslant \\ \leqslant \frac{2\|f\|_{L_\infty}^2}{(c_* r_0^{2p}\tau)^{\frac{1}{2p}}+1} \leqslant \frac{2\|f\|_{L_\infty}^2 \max\{1, c_*^{-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \end{gathered} \tag{9.10}$$

Теперь из (9.8) и (9.10) следует оценка

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{C_8' \|f\|_{L_\infty}^2}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{9.11}$$

где $C_8' = C_8 + 2\max\{1, c_*^{-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}\}$.

Оценка при $|\mathbf{k}| > t^0$ тривиальна. В силу (6.20), (9.2) и (9.5) по аналогии с (8.7) получаем

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} e^{-c_*|\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} e^{-c_*(t^0)^{2p}\tau} \leqslant \leqslant \frac{4\|f\|^2_{L_\infty} \max\{1, c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0). \tag{9.12}$$

В итоге из оценок (9.11) и (9.12) вытекает следующий результат.

Теорема 9.1. *Пусть $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ — операторное семейство вида* (6.5). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1) *и операторное семейство $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ определено в* (9.4). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.13}$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

Аналогичным образом из теоремы 4.2 выводится следующий результат.

Теорема 9.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.14}$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

9.3. Аппроксимация оператора $fe^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}f^*$ в «энергетической» норме. Применим теперь теорему 4.3 к операторному семейству $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$. В силу (7.4), (7.10) и (9.6) справедливо тождество

$$\left(I + t^p \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\right) f_0 e^{-t^{2p} f_0 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) f_0 \tau} f_0 \widehat{P} = \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{k}) \widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} = = \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}.$$

Учитывая это тождество и применяя теорему 4.3, получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{11} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant t^0. \tag{9.15}$$

Покажем теперь, что в пределах допустимой погрешности оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}$ в (9.15) можно заменить на $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0$. Аналогично (8.14), используя (5.5), (9.2), (9.9), получаем

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 (I - \widehat{P}) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} \sup_{0\neq \mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^p e^{-c_*|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^{2p}\tau} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$$

при $\tau > 0$ и $\mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Вместе с (9.15) это влечет

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3' \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ |\mathbf{k}| \leqslant t^0, \tag{9.16}$$

где $\mathcal{C}_3' = C_{11} + \alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} r_0^{-1}$.

Оценки при $|\mathbf{k}| > t^0$ тривиальны: каждое слагаемое под знаком нормы в (9.16) оценивается по-отдельности. В силу спектральной теоремы и оценки (6.20)

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\| h b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* \right\| = \left\| \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* \right\| \leqslant \leqslant \|f\|_{L_\infty} \sup_{\lambda \geqslant c_*(t^0)^{2p}} \sqrt{\lambda} e^{-\lambda\tau} \leqslant \|f\|_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2p}} (t^0)^{-1} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau > 0, \ \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}(t^0). \tag{9.17}$$

По аналогии с (8.17) при учете (9.5) имеем

$$\begin{gathered}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\|hb(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\| \leqslant \\ \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac12}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\| \leqslant \\ \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac12}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\|f\|_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\tau^{-\frac12-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{gathered} \tag{9.18}$$

Остается оценить оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} = \left(\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]\widehat{P}_m\right)\left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}\right). \tag{9.19}$$

Аналогично (9.18) имеем

$$\begin{gathered}\left\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\| \leqslant \\ \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\|f\|_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\tau^{-\frac12-\frac{1}{2p}}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{gathered} \tag{9.20}$$

Комбинируя (8.19), (9.19) и (9.20), получаем

$$\begin{gathered}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}\right\| \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac12}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\|f\|_{L_\infty}\left(1+\alpha_1^{\frac12} r_1^p C_\Lambda\right) c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\tau^{-\frac12-\frac{1}{2p}}, \\ \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{gathered} \tag{9.21}$$

В итоге из (9.16)–(9.18) и (9.21) вытекает неравенство

$$\begin{gathered}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3''\tau^{-\frac12-\frac{1}{2p}}, \\ \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\end{gathered} \tag{9.22}$$

где

$$\mathcal{C}_3'' = \max\left\{\mathcal{C}_3', \|f\|_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2p}}(t^0)^{-1}\left(1+\|g\|_{L_\infty}^{\frac12}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\left(2+\alpha_1^{\frac12} r_1^p C_\Lambda\right)\right)\right\}.$$

Неравенство (9.22) представляет интерес при $\tau \geqslant 1$. При $0<\tau<1$ тривиальные оценки дадут лучший порядок. В силу спектральной теоремы по аналогии с (9.17) получаем

$$\begin{gathered}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^*\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \left\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^*\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \|f\|_{L_\infty}\sup_{\lambda\geqslant 0}\lambda^{1/2} e^{-\lambda\tau} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac12}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{9.23}$$

Аналогично с учетом (7.15) и (9.2) имеем

$$\begin{gathered}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac12}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac12}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac12}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{9.24}$$

Для оценки оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\widehat{P}$ воспользуемся (9.19), (8.19) и неравенством

$$\begin{gathered}\left\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\left\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2} e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac12}, \quad \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{9.25}$$

Получаем

$$\begin{gathered}\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{\frac12}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{\frac12}\|f\|_{L_\infty}\left(1+\alpha_1^{\frac12} r_1^p C_\Lambda\right)\tau^{-\frac12}, \\ \tau>0,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered} \tag{9.26}$$

Вместе с (9.23) и (9.24) это влечет

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P} \right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3''' \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \tag{9.27}$$

где

$$\mathcal{C}_3''' = \|f\|_{L_\infty} + \|g\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \left(2 + \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^p C_\Lambda \right).$$

Объединяя (9.22) при $\tau \geqslant 1$ и (9.27) при $0 < \tau < 1$, приходим к неравенству

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P} \right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{2 \max\{\mathcal{C}_3'', \mathcal{C}_3'''\}}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + 1)}, \quad \tau > 0,\ \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \tag{9.28}$$

Подытожим результаты.

Теорема 9.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а* $\widehat{P}$ — *проектор* (7.4). *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}$ *справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P} \right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + 1)}, \tag{9.29}$$

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2} \left(f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} \right) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + 1)}. \tag{9.30}$$

Постоянная $\mathcal{C}_3$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

Доказательство. Неравенство (9.28) влечет (9.29) с постоянной $\mathcal{C}_3 = 2 \max\{\mathcal{C}_3'', \mathcal{C}_3'''\}$.

Неравенство (9.30) проверяется по аналогии с доказательством оценки (9.28): оно следует из (9.15), (9.17), (9.18), (9.21), (9.23), (9.24), (9.26). □

Нам понадобится также оценка оператора $f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P} \right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0$ по операторной норме в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

Предложение 9.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.3.

1°. *При* $\tau > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P} \right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}. \tag{9.31}$$

Постоянная $\mathcal{C}_4$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что* $G(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}(\mathbf{k})\tau} f^* - \left(I + [\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \widehat{P} \right) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_5}{\tau^{\frac{1}{p}} + 1}. \tag{9.32}$$

Постоянная $\mathcal{C}_5$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

Доказательство. Аналогично (9.19) справедливо представление

$$[\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} = \left([\Lambda] \widehat{P}_m \right) \left(b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P} \right). \tag{9.33}$$

Отсюда и из (8.34), (9.25) вытекает неравенство

$$\|[\Lambda] b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau} f_0 \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \tau^{-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2 C_\Lambda \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}} + 1}, \quad \tau \geqslant 1, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}. \tag{9.34}$$

При $0<\tau<1$ с учетом равенства $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}=b(\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}$,(5.5) и (9.2) получаем

$$\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \alpha_1^{\frac12}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\leqslant \frac{2\alpha_1^{\frac12}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad 0<\tau<1,\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.35}$$

Из (8.34), (9.33), (9.35) следует неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac12}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad 0<\tau<1,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.36}$$

В итоге из (9.13), (9.34) и (9.36) вытекает искомая оценка (9.31) с константой

$$\mathcal{C}_4=\mathcal{C}_1+2C_\Lambda\max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty},\alpha_1^{\frac12}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\right\}.$$

Для проверки утверждения 2° надо иначе оценить оператор (9.33). Вместо (9.34) используем неравенство

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\tau^{-\frac12}\leqslant\frac{2C_\Lambda\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}}{\tau^{\frac1p}+1},\quad \tau\geqslant 1,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.37}$$

Вместо (9.36) применяем оценку

$$\|[\Lambda]b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0e^{-\mathcal{A}^0(\mathbf{k})\tau}f_0\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_\Lambda\alpha_1^{\frac12}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\leqslant\frac{2C_\Lambda\alpha_1^{\frac12}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}}{\tau^{\frac1p}+1},\quad 0<\tau<1,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{9.38}$$

В итоге из оценки (9.14) (справедливой при условии $G(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$) и (9.37), (9.38) вытекает неравенство (9.32) с постоянной $\mathcal{C}_5=\mathcal{C}_2+2C_\Lambda\max\left\{\|g^{-1}\|^{\frac12}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty},\alpha_1^{\frac12}r_1^p\|f\|^2_{L_\infty}\right\}$. □

10. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$

10.1. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ вида (7.1), действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу разложения (6.8) (в случае $f=\mathbf{1}_n$) выполнено

$$e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}=\mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}\,d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}. \tag{10.1}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (7.22). Разложение аналогичное (10.1) имеет место и для оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}$. Следовательно,

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}=\operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\tau}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из теорем 8.1, 8.2 вытекают следующие результаты.

Теорема 10.1. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}$ — оператор* (7.1) *и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор* (7.22). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1},\quad \tau\geqslant 0.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит лишь от данных задачи (8.2).

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит лишь от данных задачи (8.2).

10.2. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ по энергетической норме. Теперь мы получим аппроксимацию экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau}$ по «энергетической» норме, опираясь на теорему 8.3 и разложение (10.1). Напомним, что под действием преобразования Гельфанда оператор $b(\mathbf{D})$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$, а оператор умножения на периодическую матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ (см. (5.15)). Нам потребуется также оператор $\Pi := \mathcal{U}^{-1}[\widehat{P}]\mathcal{U}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $[\widehat{P}]$ — оператор в $\mathcal{K}$, действующий послойно как оператор $\widehat{P}$. Легко видеть (см. [4, (6.8)]), что Π есть ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde{\Omega}}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$, т. е.

$$(\Pi\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{10.2}$$

Из сказанного следует, что оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам, стоящим под знаком нормы в (8.29), а оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right)$ раскладывается по операторам из (8.30). Отсюда и из теоремы 8.3 выводим следующий результат.

Теорема 10.3. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}$ — оператор* (7.1) *и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор* (7.22). *Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Пусть Π — оператор* (10.2). *Тогда справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0, \tag{10.3}$$

$$\left\| gb(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - \widetilde{g}b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0. \tag{10.4}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_3$ и $\widehat{\mathcal{C}}_6$ зависят лишь от данных задачи (8.2).

Доказательство. Неравенство (10.3) вытекает из (8.29) и разложения в прямой интеграл.

Проверим теперь справедливость неравенства (10.4). Из (8.30) с помощью разложения в прямой интеграл следует оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0.$$

Эту оценку можно переписать в виде

$$\left\| g^{1/2}b(\mathbf{D})\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right)\right\|_{L_2((\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0,$$

откуда вытекает неравенство

$$\left\| gb(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - gb(\mathbf{D})\,(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_3\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}}}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0. \tag{10.5}$$

С учетом (5.4) и (7.13) имеем

$$gb(\mathbf{D})\,(I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi = \widetilde{g}b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi + g\sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma\leqslant\beta:|\gamma|\geqslant 1} C_\beta^\gamma(\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda)\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi. \tag{10.6}$$

Второе слагаемое справа обозначим через $\mathcal{G}(\tau)$. Очевидно, $\mathcal{G}(\tau)$ можно записать в виде

$$\mathcal{G}(\tau) = g \sum_{|\beta|=p} b_\beta \sum_{\gamma\leqslant\beta:|\gamma|\geqslant 1} C_\beta^\gamma [\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\Pi_m \mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi, \tag{10.7}$$

где Π_m — ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Оператор $[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\Pi_m$ унитарно эквивалентен прямому интегралу от операторов $[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\widehat{P}_m$, а потому

$$\left\|[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\Pi_m\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\|[\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda]\widehat{P}_m\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = |\Omega|^{-\frac{1}{2}}\|\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_\Lambda. \tag{10.8}$$

Мы учли оценку (7.20). Далее с помощью преобразования Фурье, используя (5.5), (8.4), (10.2) и элементарное неравенство $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, получаем

$$\left\|\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}} |\boldsymbol{\xi}|^{p+|\gamma|} e^{-\widehat{c}_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}\tau} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^{|\gamma|-1} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad |\gamma| \geqslant 1,\ \tau > 0. \tag{10.9}$$

Аналогично, если использовать оценку $x^{\frac{1}{2}}e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, приходим к неравенству

$$\left\|\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} r_1^{|\gamma|} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}}, \quad \tau > 0. \tag{10.10}$$

Применяя (10.9) при $\tau \geqslant 1$ и (10.10) при $0 < \tau < 1$, находим

$$\left\|\mathbf{D}^\gamma b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}^{(\gamma)}}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0, \tag{10.11}$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}^{(\gamma)} = 2\alpha_1^{\frac{1}{2}} \max\left\{ r_1^{|\gamma|-1} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, r_1^{|\gamma|} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \right\}.$$

Теперь из (10.7), (10.8) и (10.11) с учетом (5.6) вытекает оценка

$$\|\mathcal{G}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6'}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0,$$

где

$$\widehat{\mathcal{C}}_6' = c(p,d)\alpha_1^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L_\infty} \widetilde{C}_\Lambda \max_{1\leqslant|\gamma|\leqslant p} \widehat{\mathcal{C}}^{(\gamma)}.$$

Вместе с (10.5) и (10.6) это влечет искомую оценку (10.4) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_6 = \widehat{\mathcal{C}}_3 \|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} + \widehat{\mathcal{C}}_6'$. ☐

Из предложения 8.1 с помощью разложения в прямой интеграл вытекает следующее утверждение.

Предложение 10.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.3.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I + [\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\, e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{10.12}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I + [\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\, e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_5}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{10.13}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_5$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

10.3. Устранение оператора Π в корректоре при $\tau \geqslant 1$. Покажем теперь, что при $\tau \geqslant 1$ можно устранить оператор Π в оценках (10.3), (10.4), (10.12), (10.13) (т. е. в пределах допустимой погрешности можно заменить оператор Π тождественным).

Предложение 10.2. *При всяком $s \geqslant 0$ и $\tau > 0$ оператор $b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем выполнена оценка*

$$\left\| b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0. \tag{10.14}$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}$ зависит лишь от s, p, α_0, α_1, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0.

Доказательство. Нам понадобится элементарное неравенство

$$x^{\frac{1}{2}+\frac{s}{2p}}e^{-x} \leqslant c(s,p), \quad x \geqslant 0, \quad c(s,p) = q^q e^{-q},\ q = \frac{1}{2}+\frac{s}{2p}. \tag{10.15}$$

С помощью преобразования Фурье, учитывая (5.5), (8.4), (10.2) и (10.15), получаем

$$\begin{aligned}\left\| b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))|\boldsymbol{\xi}|^p e^{-\widehat{c}_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}\tau} \leqslant \\ &\leqslant c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \sup_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{-2})^{\frac{s}{2}} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0,\end{aligned}$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}^{(s)} = c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}(1+r_0^{-2})^{\frac{s}{2}}$. $\square$

Предложение 10.3.

1°. *Пусть $s > p + d/2$ и $\tau > 0$. Тогда оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]$ непрерывен из $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1^{(s)}, \quad \tau > 0. \tag{10.16}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_1^{(s)}$ зависит лишь от s и данных (8.2).

2°. *Пусть $s > d/2$ и $\tau > 0$. Тогда операторы $[\Lambda]$ и $[\widetilde{g}]$ непрерывны из $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем*

$$\|[\Lambda]\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2^{(s)}, \quad \tau > 0, \tag{10.17}$$

$$\|[\widetilde{g}]\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_3^{(s)}, \quad \tau > 0. \tag{10.18}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_2^{(s)}$, $\mathfrak{C}_3^{(s)}$ зависят лишь от s и данных (8.2).

Доказательство. Начнем с доказательства утверждения 1°. С учетом (5.4) и (5.6) имеем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \|hb(\mathbf{D})[\Lambda]\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sqrt{\alpha_1}\|g\|_{L_\infty}^{\frac{1}{2}} \sum_{|\beta|=p}\left\|\mathbf{D}^\beta[\Lambda]\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{10.19}$$

Далее, пусть $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ при некотором $s > p + d/2$. Тогда

$$\mathbf{D}^\beta(\Lambda(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})) = \sum_{\gamma\leqslant\beta} C_\beta^\gamma(\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x}))\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{10.20}$$

Оценим L_2-норму каждого слагаемого в (10.20) по-отдельности:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} &= \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma}\int_{\Omega+\mathbf{a}} |\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \\ &\leqslant \int_\Omega |\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma}\|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}\|^2_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})}.\end{aligned} \tag{10.21}$$

Мы учли периодичность матрицы-функции Λ. Воспользуемся теперь непрерывным вложением $H^{s-p}(\Omega;\mathbb{C}^m) \subset L_\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$; пусть $c_{s-p}(\Omega)$ — норма соответствующего оператора вложения. Тогда

$$\|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}\|_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})} \leqslant c_{s-p}(\Omega)\,\|\mathbf{D}^\gamma\mathbf{u}\|_{H^{s-p}(\Omega+\mathbf{a})} \leqslant c_{s-p}(\Omega)\,\|\mathbf{u}\|_{H^s(\Omega+\mathbf{a})}, \quad \mathbf{a}\in\Gamma,\ |\gamma|\leqslant p. \tag{10.22}$$

Из (10.21) и (10.22) с учетом (7.20) вытекает оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\beta-\gamma}\Lambda(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}^{\gamma}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant c^2_{s-p}(\Omega)\,\|\Lambda\|^2_{H^p(\Omega)}\,\|\mathbf{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant c^2_{s-p}(\Omega)|\Omega|\widetilde{C}^2_\Lambda\,\|\mathbf{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}\,,$$

$$\gamma \leqslant \beta,\ |\beta| = p.$$

Сопоставляя это с (10.19) и (10.20), приходим к искомому неравенству (10.16).

Аналогично (и даже проще) проверяется утверждение 2°. Пусть $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ при некотором $s > d/2$. По аналогии с (10.21) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\Lambda(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \|\mathbf{u}\|^2_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{g}(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |\widetilde{g}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \|\mathbf{u}\|^2_{L_\infty(\Omega+\mathbf{a})}.$$

Отсюда, используя вложение $H^s(\Omega;\mathbb{C}^m) \subset L_\infty(\Omega;\mathbb{C}^m)$ и оценки (7.18), (7.19), получаем искомые неравенства (10.17) и (10.18). $\square$

Теперь из теоремы 10.3 и предложений 10.2, 10.3 выводим следующий результат.

Теорема 10.4. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}$ — *оператор* (7.1) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — *эффективный оператор* (7.22). *Пусть* Λ — Γ-*периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Тогда справедливы оценки*

$$\Big\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\right)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}^\circ_3\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1, \tag{10.23}$$

$$\Big\|gb(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - \widetilde{g}b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}^\circ_6\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1. \tag{10.24}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}^\circ_3$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}^\circ_6$ *зависят лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Начнем с проверки оценки (10.23). Из (10.14) и (10.16) вытекает неравенство

$$\Big\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}\mathfrak{C}^{(s)}_1\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{10.25}$$

при всяком $s > p + d/2$. Фиксируя $s = p + d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (10.3) и (10.25) получаем (10.23).

Аналогично из (10.14) и (10.18) следует, что

$$\Big\|[\widetilde{g}]b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}(I-\Pi)\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^{(s)}\mathfrak{C}^{(s)}_3\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{10.26}$$

при всяком $s > d/2$. Фиксируя $s = d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (10.4) и (10.26) получаем искомую оценку (10.24). $\square$

Аналогичным образом из предложений 10.1, 10.2 и 10.3 выводится следующее утверждение.

Предложение 10.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.4.

1°. *Справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}^\circ_4\tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}^\circ_4$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\tau} - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}^\circ_5\tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}^\circ_5$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

11. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{A}\tau}f^*$

11.1. Аппроксимация окаймленной экспоненты $fe^{-\mathcal{A}\tau}f^*$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим теперь оператор $\mathcal{A}$ вида (5.1), действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. По аналогии с пунктом 10.1, используя разложение (6.8) в прямой интеграл из теорем 9.1 и 9.2, выводим следующие результаты.

Теорема 11.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор* (5.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_1}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

Теорема 11.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - f_0e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_2}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau \geqslant 0.$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

11.2. Аппроксимация оператора $fe^{-\mathcal{A}\tau}f^*$ в энергетической норме.

Теорема 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.1. *Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Пусть Π — оператор* (10.2). *Тогда справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\,f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0, \tag{11.1}$$

$$\left\| gb(\mathbf{D})fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - \widetilde{g}b(\mathbf{D})f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_6}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0. \tag{11.2}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_6$ зависят лишь от данных задачи (9.7).

Доказательство. Неравенство (11.1) вытекает из (9.29) с помощью разложения в прямой интеграл.

Из (9.30) с помощью разложения в прямой интеграл следует оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\,f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0\Pi \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_3}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+1)}, \quad \tau > 0.$$

Отсюда выводится оценка (11.2) полностью аналогично выводу оценки (10.4); см. доказательство теоремы 10.3. $\square$

Из предложения 9.1 с помощью разложения в прямой интеграл вытекает следующее утверждение.

Предложение 11.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.3.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\,f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_4}{\tau^{\frac{1}{2p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{11.3}$$

Постоянная $\mathcal{C}_4$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| fe^{-\mathcal{A}\tau}f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D})\Pi)\,f_0e^{-\mathcal{A}^0\tau}f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_5}{\tau^{\frac{1}{p}}+1}, \quad \tau > 0. \tag{11.4}$$

Постоянная $\mathcal{C}_5$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

11.3. Устранение оператора Π в корректоре при $\tau \geqslant 1$. Покажем теперь, что при $\tau \geqslant 1$ можно устранить оператор Π в оценках (11.1)–(11.4).

Предложение 11.2. *При всяком $s \geqslant 0$ и $\tau > 0$ оператор $b(\mathbf{D})f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0(I-\Pi)$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем выполнена оценка*

$$\left\| b(\mathbf{D})f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0. \tag{11.5}$$

Постоянная $\mathfrak{C}^{(s)}$ зависит лишь от s, p, α_0, α_1, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0.

Доказательство. С помощью преобразования Фурье, учитывая (5.5), (9.2), (9.9), (10.2) и (10.15), получаем

$$\left\| b(\mathbf{D})f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{\frac{1}{2}}\|f\|^2_{L_\infty} \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{\frac{s}{2}}(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))|\boldsymbol{\xi}|^p e^{-c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}\tau} \leqslant$$
$$\leqslant c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \sup_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{-2})^{\frac{s}{2}} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau>0,$$

где $\mathfrak{C}^{(s)} = c(s,p)\alpha_1^{\frac{1}{2}}\|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}(1+r_0^{-2})^{\frac{s}{2}}$. □

Теперь из теоремы 11.3 и предложений 10.3, 11.2 выводим следующий результат.

Теорема 11.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — оператор* (5.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Тогда справедливы оценки*

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(f e^{-\mathcal{A}\tau} f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\, f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_3^\circ \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1, \tag{11.6}$$

$$\left\| g b(\mathbf{D}) f e^{-\mathcal{A}\tau} f^* - \widetilde{g} b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_6^\circ \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1. \tag{11.7}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3^\circ$ и $\mathcal{C}_6^\circ$ зависят лишь от данных задачи (9.7).

Доказательство. Начнем с проверки оценки (11.6). Из (10.16) и (11.5) вытекает неравенство

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda] b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\mathfrak{C}_1^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{11.8}$$

при всяком $s > p + d/2$. Фиксируя $s = p + d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (11.1) и (11.8) получаем (11.6).

Аналогично из (10.18) и (11.5) вытекает оценка

$$\left\| [\widetilde{g}] b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0(I-\Pi)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(s)}\mathfrak{C}_3^{(s)}\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}}, \quad \tau > 0, \tag{11.9}$$

при всяком $s > d/2$. Фиксируя $s = d/2 + 1$ и замечая, что $\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2p}} \leqslant \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$ при $\tau \geqslant 1$, из (11.2) и (11.9) получаем искомую оценку (11.7). □

Аналогичным образом из предложений 10.3, 11.1 и 11.2 выводим следующий результат.

Предложение 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.4.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}\tau} f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\, f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4^\circ \tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\mathcal{C}_4^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f e^{-\mathcal{A}\tau} f^* - (I+[\Lambda]b(\mathbf{D}))\, f_0 e^{-\mathcal{A}^0\tau} f_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_5^\circ \tau^{-\frac{1}{p}}, \quad \tau \geqslant 1.$$

Постоянная $\mathcal{C}_5^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

Глава 3

УСРЕДНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

12. Оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$. Масштабное преобразование

12.1. Операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Мы переходим к задачам усреднения в пределе малого периода для периодических ДО в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Для всякой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, формально заданный выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0. \tag{12.1}$$

Как обычно, строгое определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через соответствующую замкнутую квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}, \quad f^\varepsilon\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Эта форма подчинена оценкам, аналогичным (5.9), (5.8):

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi},\ \mathbf{v} = f^\varepsilon \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{12.2}$$

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = f^\varepsilon \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{12.3}$$

В случае $f = \mathbf{1}_n$ оператор (12.1) обозначается через $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$:

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{12.4}$$

При малом ε коэффициенты операторов (12.1) и (12.4) быстро осциллируют. Наша цель в главе 3 — получить приближения операторов $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ и $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ при малом ε и применить результаты к вопросу о поведении решений задачи Коши для параболических уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами.

12.2. Масштабное преобразование. Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования, заданный равенством

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x}).$$

Легко проверить следующие тождества:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2p} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon, \quad \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \varepsilon^{-2p} T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{A}} T_\varepsilon, \tag{12.5}$$

где $\mathcal{A}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ — операторы (5.1) и (7.1) соответственно. В силу (12.5) имеем

$$e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon, \quad e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon. \tag{12.6}$$

Аналогичные тождества имеют место и для операторов (9.3) и (7.22):

$$e^{-\mathcal{A}^0 \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}^0\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon, \quad e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} = T_\varepsilon^* e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau} T_\varepsilon. \tag{12.7}$$

Эти соотношения позволяют нам вывести результаты об усреднении операторной экспоненты из результатов разделов 10 и 11.

13. Усреднение операторной экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$

13.1. Аппроксимация оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Используя (12.6), (12.7) и унитарность оператора T_ε, получаем

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{13.1}$$

Применяя теоремы 10.1, 10.2 (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и используя тождество (13.1), получаем следующие результаты.

Теорема 13.1. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор* (12.4) *и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор* (7.22). *Тогда при $\tau \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_1 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}. \tag{13.2}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит лишь от данных задачи (8.2).

Теорема 13.2. *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор* (12.4) *и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор* (7.22). *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_2 \varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}. \tag{13.3}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит лишь от данных задачи (8.2).

Из теоремы 13.2 и предложения 7.3 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 13.1. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1°. *Справедливы соотношения* (7.16), *т. е. $g^0 = \overline{g}$.*
2°. *Справедливы представления* (7.17), *т. е. $g^0 = \underline{g}$.*
3°. *Пусть $n = 1$ и элементы матриц $g(\mathbf{x})$, b_β, $|\beta| = p$, вещественны.*

Тогда справедлива оценка (13.3).

Замечание 13.1. Следствие 13.1 демонстрирует новый эффект, характерный для операторов высокого порядка: для скалярного оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ с вещественными коэффициентами экспонента приближается экспонентой эффективного оператора по операторной норме в L_2 с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ без учета каких-либо корректоров. Для операторов второго порядка такого эффекта нет.

13.2. Аппроксимация оператора $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ по энергетической норме. Теперь с помощью теорем 10.3, 10.4 и предложений 10.1, 10.4 мы получим аппроксимацию экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau}$ (отвечающего «потоку») по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$.

Помимо (12.5)–(12.7), нам понадобятся тождества

$$b(\mathbf{D}) = \varepsilon^{-p} T_\varepsilon^* b(\mathbf{D}) T_\varepsilon, \quad [\Lambda^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\Lambda] T_\varepsilon, \quad [\widetilde{g}^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\widetilde{g}] T_\varepsilon. \tag{13.4}$$

Пусть Π_ε — ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, т. е.

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}\rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}. \tag{13.5}$$

Операторы (10.2) и (13.5) связаны соотношением

$$\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon. \tag{13.6}$$

Положим

$$\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \Pi_\varepsilon. \tag{13.7}$$

Оператор (13.7) называют *корректором*; он непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Теорема 13.3. *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — *оператор* (12.4) *и* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — *эффективный оператор* (7.22). *Пусть* Π_ε — *оператор* (13.5), $\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)$ — *оператор* (13.7), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\left\|\mathbf{D}^p\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}-\varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)},\tag{13.8}$$

$$\left\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi_\varepsilon\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_6\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}.\tag{13.9}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_6$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_7$ *зависят лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Начнем с проверки неравенства (13.8). В силу (12.7), (13.4) и (13.6) справедливо тождество

$$\varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)=T_\varepsilon^*[\Lambda]b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau}\Pi T_\varepsilon.\tag{13.10}$$

Отсюда и из (12.5)–(12.7) вытекает равенство

$$\begin{aligned}&\left\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}-\varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}=\\&=\varepsilon^{-p}\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau}-[\Lambda]b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau}\Pi\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{13.11}$$

Теперь из (10.3) (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и (13.11) следует неравенство

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}-\varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_3\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}.\tag{13.12}$$

Из (13.12) и из нижней оценки (12.3) (при $f=\mathbf{1}_n$) вытекает искомое неравенство (13.8) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_7=c_0^{-\frac12}\widehat{\mathcal{C}}_3$.

Перейдем к проверке оценки (13.9). Аналогично (13.11) имеем

$$\begin{aligned}&\left\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}\Pi_\varepsilon\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}=\\&=\varepsilon^{-p}\left\|gb(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau}-\widetilde{g}b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (10.4) (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) следует оценка (13.9). □

Установим теперь аппроксимацию экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}$ по $(L_2\to H^p)$-норме.

Теорема 13.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.3.

1°. *При* $\tau>0$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}-\varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac12})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}.\tag{13.13}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_8$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv0$. *Тогда при* $\tau>0$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}-\varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac1p}+\varepsilon^2}\right).\tag{13.14}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_9$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Из (12.6), (12.7) и (13.10) вытекает равенство

$$\begin{aligned}&\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\tau}-\varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}=\\&=\left\|e^{-\widehat{\mathcal{A}}\varepsilon^{-2p}\tau}-e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau}-[\Lambda]b(\mathbf{D})e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0\varepsilon^{-2p}\tau}\Pi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{13.15}$$

Теперь из (10.12) (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и (13.15) следует неравенство

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_4 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}. \tag{13.16}$$

Поскольку $(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^p \leqslant 2^{p-1}(1+|\boldsymbol{\xi}|^{2p})$, то из нижней оценки (12.2) (при $f = \mathbf{1}_n$) для любой функции $\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^p |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant 2^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1+|\boldsymbol{\xi}|^{2p}) |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \\ \leqslant 2^{p-1}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right). \end{aligned} \tag{13.17}$$

Отсюда и из (13.12), (13.16) следует, что

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^{\frac{p-1}{2}} \left(\widehat{\mathcal{C}}_4 + \widehat{\mathcal{C}}_3 \alpha_0^{-\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \tau^{-\frac{1}{2}} \right) \frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}.$$

Это доказывает искомую оценку (13.13) с постоянной

$$\widehat{\mathcal{C}}_8 = 2^{\frac{p-1}{2}} \max\left\{ \widehat{\mathcal{C}}_4, \widehat{\mathcal{C}}_3 \alpha_0^{-\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \right\}.$$

Перейдем к доказательству утверждения 2°. Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда выполнена оценка (10.13), которая в комбинации с (13.15) дает

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_5 \varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}.$$

Вместе с (13.12) и (13.17) это приводит к оценке (13.14) с постоянной

$$\widehat{\mathcal{C}}_9 = 2^{\frac{p-1}{2}} \max\left\{ \widehat{\mathcal{C}}_5, \widehat{\mathcal{C}}_3 \alpha_0^{-\frac{1}{2}} \|g^{-1}\|^{\frac{1}{2}}_{L_\infty} \right\}.$$

$\square$

По аналогии с доказательством теоремы 13.3 из теоремы 10.4 вытекает следующий результат.

Теорема 13.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.3. *Положим*

$$\widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau}.$$

Тогда справедливы оценки

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p},$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_6^\circ$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_7^\circ$ *зависят лишь от данных задачи* (8.2).

По аналогии с доказательством теоремы 13.4 из теоремы 10.4 и предложения 10.4 выводим следующее утверждение.

Теорема 13.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 13.5.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_8^\circ$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} - \varepsilon^p \widehat{\mathcal{K}}^0(\varepsilon;\tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9^\circ \left(\varepsilon \tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2 \tau^{-\frac{1}{p}} \right), \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_9^\circ$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

13.3. Специальные случаи. Остановимся на специальных случаях.

Пусть имеют место соотношения (7.16), т. е. $g^0 = \overline{g}$. В этом случае $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$, а потому корректор (13.7) обращается в нуль. Кроме того, в этом случае $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда из теорем 13.3 и 13.4 (2°) вытекает следующий результат.

Следствие 13.2. *Пусть выполнены соотношения* (7.16)*, т. е.* $g^0 = \overline{g}$*. Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_7 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)},$$

$$\left\| e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9 \left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2} \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда выполнены соотношения (7.17), т. е. $g^0 = \underline{g}$. В этом случае $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$. Из теоремы 10.3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 13.3. *Пусть выполнены соотношения* (7.17)*, т. е.* $g^0 = \underline{g}$*. Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}'_6 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}. \tag{13.18}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}'_6$ *зависит лишь от данных задачи* (8.2).

Доказательство. Поскольку $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$, то неравенство (10.4) сейчас принимает вид

$$\left\| g b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}} \tau} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \Pi \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + 1)}, \quad \tau > 0. \tag{13.19}$$

По аналогии с доказательством предложения 10.2, используя (5.5), (8.4), (10.2) и оценку $x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}} e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, имеем

$$\left\| g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \sup_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant r_0} |\boldsymbol{\xi}|^p e^{-\widehat{c}_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \widetilde{\tau}} \leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} r_0^{-1} \widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}.$$

Если же использовать оценку $x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \leqslant 1$ при $x \geqslant 0$, то получим

$$\left\| g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \widetilde{\tau}^{-\frac{1}{2}}.$$

Применяя первое неравенство при $\widetilde{\tau} \geqslant 1$, а второе — при $0 < \widetilde{\tau} < 1$, приходим к оценке

$$\left\| g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} (I - \Pi) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}''_6}{\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2}} (\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2p}} + 1)},$$

где $\widehat{\mathcal{C}}''_6 = 2 \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{\frac{1}{2}} \max \left\{ \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} r_0^{-1}, \widehat{c}_*^{\,-\frac{1}{2}} \right\}$. Вместе с (13.19) это влечет

$$\left\| g b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}} \widetilde{\tau}} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \widetilde{\tau}} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}'_6}{\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2}} (\widetilde{\tau}^{\frac{1}{2p}} + 1)}, \quad \widetilde{\tau} > 0,$$

где $\widehat{\mathcal{C}}'_6 = \widehat{\mathcal{C}}_6 + \widehat{\mathcal{C}}''_6$. Полагая $\widetilde{\tau} = \varepsilon^{-2p} \tau$ и применяя масштабное преобразование, приходим к искомой оценке (13.18). $\square$

14. Усреднение оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$

14.1. Аппроксимация оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Используя (12.6), (12.7) и унитарность оператора T_ε, получаем

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \left\| f e^{-\mathcal{A}\varepsilon^{-2p}\tau} f^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \varepsilon^{-2p}\tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{14.1}$$

Применяя теоремы 11.1, 11.2 (с заменой τ на $\varepsilon^{-2p}\tau$) и используя тождество (14.1), приходим к следующим результатам.

Теорема 14.1. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор* (12.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Тогда при $\tau \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_1 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

Теорема 14.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau \geqslant 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_2 \varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2}. \tag{14.2}$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

Из теоремы 14.2 и предложения 7.3 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 14.1. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1°. *Справедливы соотношения* (7.16), *т. е.* $g^0 = \overline{g}$.

2°. *Справедливы представления* (7.17), *т. е.* $g^0 = \underline{g}$.

3°. *Пусть $n = 1$ и элементы матриц $g(\mathbf{x})$, b_β, $|\beta| = p$, вещественны.*

Тогда справедлива оценка (14.2).

14.2. Аппроксимация оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по энергетической норме. Теперь с помощью теорем 11.3, 11.4 и предложений 11.1, 11.3 мы получим аппроксимацию оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^*$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$.

Введем корректор

$$\mathcal{K}(\varepsilon;\tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \Pi_\varepsilon. \tag{14.3}$$

Из теоремы 11.3 с помощью масштабного преобразования вытекает следующий результат; его доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 13.3.

Теорема 14.3. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор* (12.1) *и $\mathcal{A}^0$ — оператор* (9.3). *Пусть матрица f_0 определена в* (9.1). *Пусть Π_ε — оператор* (13.5), *$\mathcal{K}(\varepsilon;\tau)$ — оператор* (14.3), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Тогда при $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon;\tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_7 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)},$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \Pi_\varepsilon \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_6 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}.$$

Постоянные $\mathcal{C}_6$ и $\mathcal{C}_7$ зависят лишь от данных задачи (9.7).

Аналогично, из теоремы 11.3 и предложения 11.1 вытекает следующий результат; его доказательство аналогично доказательству теоремы 13.4.

Теорема 14.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.3.

1°. *При $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon; \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_8 (1 + \tau^{-\frac{1}{2}}) \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_8$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда при $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}(\varepsilon; \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2} \right).$$

Постоянная $\mathcal{C}_9$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

В свою очередь, теорема 11.4 за счет масштабного преобразования влечет следующий результат.

Теорема 14.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.3. *Положим*

$$\mathcal{K}^0(\varepsilon; \tau) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0.$$

Тогда справедливы оценки

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}^0(\varepsilon; \tau) \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_7^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p},$$

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_6^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянные $\mathcal{C}_6^\circ$ и $\mathcal{C}_7^\circ$ зависят лишь от данных задачи (9.7).

Из теоремы 11.4 и предложения 11.3 выводим следующее утверждение.

Теорема 14.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 14.5.

1°. *Справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}^0(\varepsilon; \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_8^\circ \varepsilon \tau^{-\frac{1}{2p}}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_8^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 - \varepsilon^p \mathcal{K}^0(\varepsilon; \tau) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_9^\circ \left(\varepsilon \tau^{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} + \varepsilon^2 \tau^{-\frac{1}{p}} \right), \quad \varepsilon > 0,\ \tau \geqslant \varepsilon^{2p}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_9^\circ$ зависит лишь от данных задачи (9.7).

14.3. Специальные случаи. Остановимся на специальных случаях.

Пусть имеют место соотношения (7.16), т. е. $g^0 = \overline{g}$. В этом случае $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$, а потому корректор (14.3) обращается в нуль и $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Тогда из теорем 14.3 и 14.4 вытекает следующий результат.

Следствие 14.2. *Пусть выполнены соотношения* (7.16), *т. е. $g^0 = \overline{g}$. Тогда при $\tau > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\left\| \mathbf{D}^p \left(f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_7 \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)},$$

$$\left\| f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}} + \varepsilon^2} \right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда выполнены соотношения (7.17), т. е. $g^0 = \underline{g}$. В этом случае $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$. Из теоремы 11.3 вытекает следующее утверждение; его доказательство полностью аналогично доказательству следствия 13.3.

Следствие 14.3. *Пусть выполнены соотношения* (7.17), *т. е.* $g^0 = \underline{g}$. *Тогда при* $\tau > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\mathcal{C}_6' \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}} (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_6'$ *зависит лишь от данных задачи* (9.7).

15. Усреднение параболической задачи Коши

15.1. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Аппроксимация решений в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Результаты разделов 13 и 14 можно применить к усреднению решений параболических уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, $0 < T \leqslant \infty$. Изучаем поведение решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ \tau \in (0,T), \\ &\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{15.1}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ с некоторым $1 < q \leqslant \infty$. Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \tau} \boldsymbol{\phi} + \int_0^\tau e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon (\tau - \widetilde{\tau})} \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{15.2}$$

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор и $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение «усредненной» задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ \tau \in (0,T), \\ &\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{15.3}$$

Аналогично (15.2) имеем:

$$\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 \tau} \boldsymbol{\phi} + \int_0^\tau e^{-\widehat{\mathcal{A}}^0 (\tau - \widetilde{\tau})} \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{15.4}$$

Из теоремы 13.1 и представлений (15.2), (15.4) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1 \varepsilon (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)^{-1} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \widehat{\mathcal{C}}_1 \varepsilon \int_0^\tau ((\tau - \widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)^{-1} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\, d\widetilde{\tau} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1 \varepsilon (\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)^{-1} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ &+ \widehat{\mathcal{C}}_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \left(\int_0^\tau ((\tau - \widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)^{-q'}\, d\widetilde{\tau} \right)^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned}$$

где $1 < q \leqslant \infty$ и $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$. Оценивая интеграл в правой части, приходим к следующему результату.

Теорема 15.1. *Пусть* $0 < T \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *с некоторым* $1 < q \leqslant \infty$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение усредненной задачи* (15.3). *Тогда для любого* $\tau \in (0,T)$ *при* $\varepsilon \to 0$ *имеет место сходимость* $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ *к* $\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)$ *в* L_2-*норме. При* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1 \varepsilon \left((\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)^{-1} \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \theta(q,\varepsilon,\tau) \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \right), \tag{15.5}$$

где

$$\theta(q,\varepsilon,\tau)=\begin{cases} c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}}, & \dfrac{2p}{2p-1}<q\leqslant\infty,\\ (\ln|\tau+1|+2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{2p}}, & q=\dfrac{2p}{2p-1},\\ c(p,q)\varepsilon^{2p-1-\frac{2p}{q}}, & 1<q<\dfrac{2p}{2p-1}. \end{cases}\tag{15.6}$$

Здесь $c(p,q)$ — постоянная, зависящая только от p и q.

При фиксированном $\tau\in(0,T)$ коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в (15.5) имеет порядок $O(\varepsilon)$. Коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $\dfrac{2p}{2p-1}<q\leqslant\infty$; $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2p}})$ при $q=\dfrac{2p}{2p-1}$; при $1<q<\dfrac{2p}{2p-1}$ его порядок $O(\varepsilon^{2p-\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

Аналогично при дополнительном условии, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$, из теоремы 13.2 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.1. *Пусть оператор $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau\in(0,T)$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_2\varepsilon^2\left((\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2)^{-1}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right),\tag{15.7}$$

где

$$\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)=\begin{cases} c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}, & \dfrac{p}{p-1}<q\leqslant\infty,\\ (\ln|\tau+1|+2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{p}}, & q=\dfrac{p}{p-1},\\ c(p,q)\varepsilon^{2p-2-\frac{2p}{q}}, & 1<q<\dfrac{p}{p-1}. \end{cases}\tag{15.8}$$

В условиях теоремы 15.2 при фиксированном $\tau\in(0,T)$ коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ в (15.7) имеет порядок $O(\varepsilon^2)$. Коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ имеет порядок $O(\varepsilon^2)$ при $\dfrac{p}{p-1}<q\leqslant\infty$; $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{p}})$ при $q=\dfrac{p}{p-1}$; при $1<q<\dfrac{p}{p-1}$ его порядок $O(\varepsilon^{2p-\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

15.2. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Предположим теперь, что $0<T<\infty$ и $1\leqslant q<\infty$. Применяя теорему 13.1, можно оценить норму разности $\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0$ в классе $L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$.

Теорема 15.3. *Пусть $0<T<\infty$ и $\mathbf{F}\in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $1\leqslant q<\infty$. Пусть $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (15.1) *и $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи* (15.3). *Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\left(\rho(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+c(p,q)T^{1-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right),\tag{15.9}$$

где

$$\rho(q,\varepsilon,T)=\theta(q',\varepsilon,T)=\begin{cases} c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}}, & 1\leqslant q<2p,\\ (\ln(T+1)+2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{2p}}, & q=2p,\\ c(p,q)\varepsilon^{\frac{2p}{q}-1}, & 2p<q<\infty. \end{cases}\tag{15.10}$$

Доказательство. В силу (13.2), (15.2) и (15.4)

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}}+\widehat{\mathcal{C}}_1\varepsilon\Big(\int\limits_0^T\mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau\Big)^{\frac{1}{q}},\tag{15.11}$$

где
$$\mathcal{I}_q(\varepsilon;T) := \int\limits_0^T \frac{d\tau}{(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^q}, \quad \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) := \int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\, d\widetilde{\tau}.$$
Оценивая интеграл $\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)$, получаем
$$\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} \leqslant \rho(q,\varepsilon,T). \tag{15.12}$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (15.11). В случае $q=1$, меняя порядок интегрирования, имеем
$$\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})\,d\tau = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau} =$$
$$= \int\limits_0^T d\widetilde{\tau}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\,d\tau.$$
Оценивая внутренний интеграл через $\left(1-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1} T^{1-\frac{1}{2p}}$, получаем
$$\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})\,d\tau \leqslant c(p)T^{1-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$
В случае, когда $1<q<\infty$, применим неравенство Гельдера:
$$\mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) \leqslant \Big(\int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\,d\widetilde{\tau}\Big)^{\frac{1}{q'}} \Big(\int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{15.13}$$
Интеграл в первой скобке не превосходит $\left(1-\dfrac{1}{2p}\right)^{-1} T^{1-\frac{1}{2p}}$. Используя (15.13) и меняя порядок интегрирования, приходим к неравенству
$$\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau \leqslant c(p,q)T^{(1-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)}\,d\widetilde{\tau} =$$
$$= c(p,q)T^{(1-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\widetilde{\tau}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T ((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\,d\tau \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{c}(p,q)T^{(1-\frac{1}{2p})(\frac{q}{q'}+1)}\|\mathbf{F}\|^q_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$
В итоге при всех $1\leqslant q<\infty$ установлено неравенство
$$\Big(\int\limits_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q\,d\tau\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant c(p,q)T^{1-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.14}$$
Теперь из (15.11), (15.12) и (15.14) вытекает искомая оценка (15.9). □

В оценке (15.9) коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon)$, а коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $1\leqslant q<2p$; $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2p}})$ при $q=2p$; а при $2p<q<\infty$ его порядок $O(\varepsilon^{\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

Аналогично, при дополнительном условии, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$, из теоремы 13.2 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.3. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2\varepsilon^2 \left(\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c(p,q)T^{1-\frac{1}{p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right), \tag{15.15}$$

где

$$\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T) = \widetilde{\theta}(q',\varepsilon,T) = \begin{cases} c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 1 \leqslant q < p, \\ (\ln(T+1) + 2p|\ln\varepsilon|)^{\frac{1}{p}}, & q = p, \\ c(p,q)\varepsilon^{\frac{2p}{q}-2}, & p < q < \infty. \end{cases} \tag{15.16}$$

В оценке (15.15) коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon^2)$, а коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon^2)$ при $1 \leqslant q < p$; $O(\varepsilon^2|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{p}})$ при $q = p$; а при $p < q < \infty$ его порядок $O(\varepsilon^{\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

15.3. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Аппроксимация решений в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Получим теперь аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (15.1) по норме в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию «потока» $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. В случае, когда $\mathbf{F} = 0$, из теоремы 13.5 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 15.5. *Пусть* $\mathbf{F} = 0$ *и* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение усредненной задачи* (15.3). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

В свою очередь, теорема 13.6 приводит к следующему утверждению.

Теорема 15.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.5.

1°. *При* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \tau^{\frac{1}{2p}}$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9^\circ\left(\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2\tau^{-\frac{1}{p}}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\mathbf{F} \neq 0$, то нам нужны аппроксимации экспоненты $e^{-\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon\tau}$ при всех значениях $0 < \tau < T$ (а не только при $\tau \geqslant \varepsilon^{2p}$), а потому мы опираемся на теорему 13.3.

Теорема 15.7. *Пусть* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *для некоторого* $2 < q \leqslant \infty$ *и* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (15.1) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение усредненной задачи* (15.3). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Пусть оператор* Π_ε *определен в* (13.5). *Тогда при* $\tau \in (0,T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathcal{C}}_7\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}, \end{aligned} \tag{15.17}$$

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\widehat{\mathcal{C}}_6\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widehat{\mathcal{C}}_6\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned} \tag{15.18}$$

Здесь

$$\Theta(q,\varepsilon,\tau)=\begin{cases} c(p,q)\tau^{\frac12-\frac1q-\frac{1}{2p}}, & \dfrac{2p}{p-1}<q\leqslant\infty,\\ c(p)\left(\ln|\tau+1|+|\ln\varepsilon|\right)^{\frac12+\frac{1}{2p}}, & q=\dfrac{2p}{p-1},\\ c(p,q)\varepsilon^{p-1-\frac{2p}{q}}, & 2<q<\dfrac{2p}{p-1}. \end{cases} \tag{15.19}$$

Доказательство. Из теоремы 13.3 и представлений (15.2), (15.4) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\int\limits_0^\tau\frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac12}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\,d\widetilde{\tau}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{q'}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}, \end{aligned}$$

где $\dfrac1q+\dfrac{1}{q'}=1$. Интеграл в правой части сходится при условии $q'<2$, т. е. $q>2$. Оценивая интеграл в правой части, приходим к неравенству (15.17).

Аналогично из (13.9) и представлений (15.2), (15.4) выводится оценка (15.18). □

Теперь из теоремы 13.4 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.7.

1°. *При* $0<\tau<T$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac12})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\left(c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac1q}+\Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T),L_2(\mathbb{R}^d))}, \end{aligned} \tag{15.20}$$

где $\Theta(q,\varepsilon,\tau)$ *определено в* (15.19).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv0$. *Тогда при* $\tau\in(0,T)$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac12}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac1p}+\varepsilon^2}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\varepsilon\Theta(q,\varepsilon,\tau)+c(p,q)\varepsilon^2\tau^{1-\frac1p-\frac1q}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \end{aligned} \tag{15.21}$$

Доказательство. Чтобы проверить неравенство (15.20), применим (13.13), (15.2) и (15.4):

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac12})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\int\limits_0^\tau\frac{(1+(\tau-\widetilde{\tau})^{-\frac12})\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\,d\widetilde{\tau}\leqslant\\ &\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac12})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}+\\ &+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{q'}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

Оценивая интегралы в правой части, приходим к неравенству

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\widehat{\mathcal{C}}_8(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_8\varepsilon\left(\theta(q,\varepsilon,\tau)+\Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

Поскольку при $q>2$ выполнено $\theta(q,\varepsilon,\tau)=c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}}$, отсюда следует (15.20).

Аналогичным образом, применяя неравенство (13.14) (справедливое при условии $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$), получаем

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant$$
$$\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_9\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}+$$
$$+\widehat{\mathcal{C}}_9\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\left(\int\limits_0^\tau\frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{q'}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{q'}}\right)^{\frac{1}{q'}}\leqslant$$
$$\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widehat{\mathcal{C}}_9\left(\varepsilon^2\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)+\varepsilon\Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

Поскольку при $q>2$ выполнено $\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)=c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, отсюда следует (15.21). $\square$

В условиях теорем 15.7 и 15.8 в оценках (15.17), (15.18), (15.20), (15.21) при фиксированном $\tau\in(0,T)$ коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$. Коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $\dfrac{2p}{p-1}<q\leqslant\infty$; $O(\varepsilon|\ln\varepsilon|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}})$ при $q=\dfrac{2p}{p-1}$; при $2<q<\dfrac{2p}{p-1}$ его порядок $O(\varepsilon^{p-\frac{2p}{q}})$ зависит от q.

15.4. Задача с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Применение теоремы 13.3 дает возможность получить аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в классе $L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ в случае, когда $0<T<\infty$ и $1\leqslant q<2$.

Теорема 15.9. *Пусть $0<T<\infty$ и $\mathbf{F}\in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при некотором $1\leqslant q<2$. Пусть $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (15.1) *и $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи* (15.3). *Пусть $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Пусть оператор Π_ε определен в* (13.5). *Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0\right)\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+ \\ +\widehat{\mathcal{C}}_7\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}, \tag{15.22}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_6\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+ \\ +\widehat{\mathcal{C}}_6\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}, \tag{15.23}$$

где

$$\sigma(q,\varepsilon,T)=\Theta(q',\varepsilon,T)=\begin{cases}c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}, & 1\leqslant q<\dfrac{2p}{p+1},\\ c(p)\left(\ln(T+1)+|\ln\varepsilon|\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}, & q=\dfrac{2p}{p+1},\\ c(p,q)\varepsilon^{\frac{2p}{q}-p-1}, & \dfrac{2p}{p+1}<q<2.\end{cases} \tag{15.24}$$

Доказательство. В силу (13.8), (15.2) и (15.4)

$$\|\mathbf{D}^p(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0)\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7 \varepsilon \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \mathcal{J}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} + \widehat{\mathcal{C}}_7 \varepsilon \Big(\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}}, \tag{15.25}$$

где

$$\mathcal{J}_q(\varepsilon;T) := \int\limits_0^T \frac{d\tau}{\tau^{\frac{q}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)^q}, \quad \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) := \int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \, d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}.$$

Оценивая интеграл $\mathcal{J}_q(\varepsilon;T)$, получаем

$$\mathcal{J}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} \leqslant \sigma(q,\varepsilon,T). \tag{15.26}$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (15.25). В случае $q = 1$, меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) \, d\tau = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \, d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} =$$
$$= \int\limits_0^T d\widetilde{\tau} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T \frac{d\tau}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)}.$$

Оценивая внутренний интеграл через $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)^{-1} T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$, получаем

$$\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) \, d\tau \leqslant c(p) T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

В случае, когда $1 < q < \infty$, применим неравенство Гельдера:

$$\mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F}) \leqslant \left(\int\limits_0^\tau \frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)} \, d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{15.27}$$

Интеграл в первой скобке не превосходит $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right)^{-1} T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}$. Используя (15.27) и меняя порядок интегрирования, приходим к неравенству

$$\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q \, d\tau \leqslant c(p,q) T^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)} \, d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} =$$
$$= c(p,q) T^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})\frac{q}{q'}} \int\limits_0^T d\widetilde{\tau} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\|^q_{L_2(\mathbb{R}^d)} \int\limits_{\widetilde{\tau}}^T \frac{d\widetilde{\tau}}{(\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2}}((\tau-\widetilde{\tau})^{\frac{1}{2p}} + \varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant \tilde{c}(p,q) T^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})(\frac{q}{q'}+1)} \|\mathbf{F}\|^q_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

В итоге при всех $1 \leqslant q < \infty$ установлено неравенство

$$\Big(\int\limits_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant c(p,q) T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.28}$$

Теперь из (15.25), (15.26) и (15.28) вытекает искомая оценка (15.22).

Аналогичным образом проверяется неравенство (15.23) с помощью (13.9). $\square$

Аналогичным образом, из теоремы 13.4 выводим следующее утверждение.

Теорема 15.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.9.

1°. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \left(c(p,q) T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}} + \sigma(q,\varepsilon,T) \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \left(T^{1-\frac{1}{2p}} + T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.29}$$

Здесь $\sigma(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.24).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9 \left(c(p,q) \varepsilon^2 T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + \varepsilon \sigma(q,\varepsilon,T) \right) \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \\ + \widehat{\mathcal{C}}_9 c(p,q) \left(\varepsilon T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2 T^{1-\frac{1}{p}} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}. \tag{15.30}$$

Доказательство. В силу (13.13), (15.2) и (15.4)

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\mathcal{I}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} + \mathcal{J}_q(\varepsilon;T)^{\frac{1}{q}} \right) + \\ + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \Big(\int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \Big(\int_0^T \mathcal{M}(\varepsilon,\tau;\mathbf{F})^q \, d\tau \Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant \\ \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\rho(q,\varepsilon,T) + \sigma(q,\varepsilon,T) \right) + \widehat{\mathcal{C}}_8 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} c(p,q) \left(T^{1-\frac{1}{2p}} + T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} \right).$$

В последнем переходе мы использовали (15.12), (15.14), (15.26), (15.28). Учитывая, что при $1 \leqslant q < 2$ выполнено $\rho(q,\varepsilon,T) = c(p,q) T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}}$, приходим к неравенству (15.29).

Аналогичным образом при условии $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ проверяется оценка (15.30) с помощью (13.14). $\square$

В оценках (15.22), (15.23), (15.29), (15.30) коэффициент при $\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}$ есть $O(\varepsilon)$, а коэффициент при $\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ имеет порядок $O(\varepsilon)$ при $1 \leqslant q < \dfrac{2p}{p+1}$; $O(\varepsilon |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}})$ при $q = \dfrac{2p}{p+1}$; а при $\dfrac{2p}{p+1} < q < 2$ его порядок $O(\varepsilon^{\frac{2p}{q}-p})$ зависит от q.

15.5. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим теперь более общую задачу Коши. Пусть $Q(\mathbf{x})$ — измеримая Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$ размера $n \times n$. Предполагается, что $Q(\mathbf{x})$ равномерно положительно определена и ограничена:

$$\mathfrak{c}' \mathbf{1}_n \leqslant Q(\mathbf{x}) \leqslant \mathfrak{c}'' \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \mathfrak{c}' \leqslant \mathfrak{c}'' < \infty.$$

Пусть $0 < T \leqslant \infty$. Изучаем поведение решения $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ следующей задачи:

$$\begin{aligned} &Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau \in (0,T), \\ &Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \tag{15.31}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ с некоторым $1 < q \leqslant \infty$.

Представим матрицу-функцию $Q(\mathbf{x})^{-1}$ в факторизованной форме $Q(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x}) f^*(\mathbf{x})$, где $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция размера $n \times n$, причем $f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. (Например, можно положить $f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})^{-1/2}$.)

Сделаем подстановку $\mathbf{w}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{v}_\varepsilon$. Тогда $\mathbf{w}_\varepsilon$ является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = -(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ \tau \in (0,T), \\ &\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})$. Тогда справедливо представление

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau} (f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int_0^\tau e^{-\mathcal{A}_\varepsilon (\tau - \widetilde{\tau})} (f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau}) \, d\widetilde{\tau}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) = f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}(f^\varepsilon)^* \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon(\tau-\widetilde{\tau})}(f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{15.32}$$

Пусть f_0 определено в (9.1) и пусть $\mathcal{A}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0$. Пусть $\mathbf{v}_0$ — решение «усредненной» задачи

$$\begin{aligned} \overline{Q}\frac{\partial \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} &= -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in(0,T), \\ \overline{Q}\mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{15.33}$$

Аналогично (15.32) имеем:

$$\mathbf{v}_0(\cdot,\tau) = f_0 e^{-\mathcal{A}^0 \tau} f_0 \boldsymbol{\phi} + \int\limits_0^\tau f_0 e^{-\mathcal{A}^0(\tau-\widetilde{\tau})} f_0 \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\, d\widetilde{\tau}. \tag{15.34}$$

Применяя теоремы 14.1, 14.2 и используя представления (15.32), (15.34), приходим к следующим результатам.

Теорема 15.11. *Пусть* $0 < T \leqslant \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *с некоторым* $1 < q \leqslant \infty$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.33). *Тогда для любого* $\tau\in(0,T)$ *при* $\varepsilon\to 0$ *имеет место сходимость* $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)$ *к* $\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)$ *в* L_2*-норме. При* $\tau\in(0,T)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1\varepsilon\left((\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)^{-1}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right),$$

где $\theta(q,\varepsilon,\tau)$ *определено в* (15.6).

Теорема 15.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.11. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $\tau\in(0,T)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^2\left((\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2)^{-1}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right),$$

где $\widetilde{\theta}(q,\varepsilon,\tau)$ *определено в* (15.8).

15.6. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Следующее утверждение выводится из теоремы 14.1 по аналогии с доказательством теоремы 15.3.

Теорема 15.13. *Пусть* $0 < T < \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некотором* $1 \leqslant q < \infty$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.33). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \mathcal{C}_1\varepsilon\left(\rho(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c(p,q)T^{1-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right),$$

где $\rho(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.10).

Аналогично, применение теоремы 14.2 приводит к следующему результату.

Теорема 15.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.13. *Пусть оператор* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})$ *определен согласно* (7.25), (7.26). *Предположим, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^2\left(\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c(p,q)T^{1-\frac{1}{p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}\right),$$

где $\widetilde{\rho}(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.16).

15.7. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Получим теперь аппроксимацию решения $\mathbf{v}_\varepsilon$ задачи (15.31) по норме в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию «потока» $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. В случае, когда $\mathbf{F}=0$, из теоремы 14.5 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 15.15. *Пусть $\mathbf{F}=0$ и $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon$ — решение задачи* (15.31) *и $\mathbf{v}_0$ — решение усредненной задачи* (15.33). *Пусть $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$. Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Тогда при $\tau\in(0,T)$ и $0<\varepsilon\leqslant\tau^{\frac{1}{2p}}$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathcal{C}_7^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathcal{C}_6^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Применение теоремы 14.6 дает следующее утверждение.

Теорема 15.16. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.15.

1°. *При $\tau\in(0,T)$ и $0<\varepsilon\leqslant\tau^{\frac{1}{2p}}$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathcal{C}_8^\circ\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2p}}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$. Тогда при $\tau\in(0,T)$ и $0<\varepsilon\leqslant\tau^{\frac{1}{2p}}$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathcal{C}_9^\circ\left(\varepsilon\tau^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}+\varepsilon^2\tau^{-\frac{1}{p}}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\mathbf{F}\neq 0$, то нам нужны аппроксимации окаймленной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\mathcal{A}_\varepsilon\tau}(f^\varepsilon)^*$ при всех значениях $0<\tau<T$ (а не только при $\tau\geqslant\varepsilon^{2p}$), а потому мы опираемся на теорему 14.3.

Теорема 15.17. *Пусть $\mathbf{F}\in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ для некоторого $2<q\leqslant\infty$ и $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon$ — решение задачи* (15.31) *и $\mathbf{v}_0$ — решение усредненной задачи* (15.33). *Пусть $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$. Пусть Λ — Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция $\widetilde{g}$ определена в* (7.13). *Пусть оператор Π_ε определен в* (13.5). *Тогда при $\tau\in(0,T)$ и $\varepsilon>0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0)(\cdot,\tau)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\&\leqslant\frac{\mathcal{C}_7\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\mathcal{C}_7\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\\&\|\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\&\leqslant\frac{\mathcal{C}_6\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\mathcal{C}_6\,\varepsilon\,\Theta(q,\varepsilon,\tau)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

Здесь $\Theta(q,\varepsilon,\tau)$ определено в (15.19).

Наконец, применение теоремы 14.4 дает следующий результат.

Теорема 15.18. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.17.

1°. *При $\tau\in(0,T)$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\&\leqslant\frac{\mathcal{C}_8(1+\tau^{-\frac{1}{2}})\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon}\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\mathcal{C}_8\varepsilon\left(c(p,q)\tau^{1-\frac{1}{2p}-\frac{1}{q}}+\Theta(q,\varepsilon,\tau)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\end{aligned}$$

2°. *Предположим дополнительно, что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$. Тогда при $\tau\in(0,T)$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)-\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\\&\leqslant\mathcal{C}_9\left(\frac{\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2p}}+\varepsilon)}+\frac{\varepsilon^2}{\tau^{\frac{1}{p}}+\varepsilon^2}\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\mathcal{C}_9\left(\varepsilon\Theta(q,\varepsilon,\tau)+c(p,q)\varepsilon^2\tau^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

15.8. Более общая задача Коши. Аппроксимация решений в $L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Применяя теорему 14.3, выводим следующий результат по аналогии с доказательством теоремы 15.9.

Теорема 15.19. *Пусть* $0 < T < \infty$ *и* $\mathbf{F} \in L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ *при некотором* $1 \leqslant q < 2$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— решение задачи* (15.31) *и* $\mathbf{v}_0$ *— решение усредненной задачи* (15.33). *Пусть* $\mathbf{q}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon$. *Пусть* Λ *— Γ-периодическое решение задачи* (7.9), *а матрица-функция* $\widetilde{g}$ *определена в* (7.13). *Пусть оператор* Π_ε *определен в* (13.5). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}^p\left(\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\right)\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathcal{C}_7\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\\ &+\mathcal{C}_7\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\\ \|\mathbf{q}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathcal{C}_6\varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\\ &+\mathcal{C}_6\varepsilon c(p,q)T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))},\end{aligned}$$

где $\sigma(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.24).

Аналогичным образом из теоремы 14.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 15.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 15.19.

1°. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \mathcal{C}_8\varepsilon\left(c(p,q)T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2p}} + \sigma(q,\varepsilon,T)\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\\ &+\mathcal{C}_8\varepsilon\left(T^{1-\frac{1}{2p}} + T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

Здесь $\sigma(q,\varepsilon,T)$ *определено в* (15.24).

2°. *Предположим дополнительно, что* $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{v}_0\|_{L_q((0,T);H^p(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \mathcal{C}_9\left(c(p,q)\varepsilon^2T^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} + \varepsilon\sigma(q,\varepsilon,T)\right)\|\boldsymbol{\phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\\ &+\mathcal{C}_9 c(p,q)\left(\varepsilon T^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}} + \varepsilon^2T^{1-\frac{1}{p}}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_q((0,T);L_2(\mathbb{R}^d))}.\end{aligned}$$

16. Приложение. Другой способ получения результатов об усреднении операторной экспоненты

Результаты об аппроксимации операторной экспоненты можно выводить методом интегрирования резольвенты по подходящему контуру в комплексной плоскости. Такой способ был применен Ю. М. Мешковой в работе [23], где рассматривались операторы A_ε второго порядка. Для осуществления такого подхода нужно иметь «готовые» результаты об аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной регулярной точке $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ с двухпараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ). Для операторов второго порядка такие оценки были «подготовлены» в [21].

Для операторов высокого порядка вида $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ нужные аппроксимации резольвенты с двухпараметрическими оценками погрешностей получены в [12]. На их основе можно дать другое доказательство теорем 13.1 и 13.3.

Пусть $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Положим $c(\varphi) := \dfrac{1}{\sin\varphi}$ при $\varphi \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$ и $c(\varphi) := 1$ при $\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$. В [12, § 8] установлены оценки

$$\left\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C'c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{\frac{1}{2p}-1}, \tag{16.1}$$

$$\left\|\mathbf{D}^p\left((\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\Pi_\varepsilon\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C''c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2}}. \tag{16.2}$$

Воспользуемся представлением операторной экспоненты $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, $\tau > 0$, через интеграл от резольвенты по контуру, охватывающему спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ (см. [11]):

$$e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\tau} e^{-\zeta\tau}(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}\,d\zeta. \tag{16.3}$$

Контур γ_τ, зависящий от параметра τ, выберем так же, как в [23]: $\gamma_\tau = \widetilde{\gamma}_\tau \cup \widehat{\gamma}_\tau$, где

$$\widetilde{\gamma}_\tau := \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \rho e^{i\frac{\pi}{4}} : \rho \in [\tau,\infty)\right\} \cup \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \rho e^{i\frac{7\pi}{4}} : \rho \in [\tau,\infty)\right\},$$

$$\widehat{\gamma}_\tau := \left\{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta = \tau e^{i\varphi} : \frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{7\pi}{4}\right\}.$$

Используя представление (16.3) для $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и аналогичное представление для $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}$, получаем

$$\begin{aligned} e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} &= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\tau} e^{-\zeta\tau}\left((\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 - \zeta I)^{-1}\right)d\zeta = \\ &= -\frac{1}{2\pi i\tau}\int\limits_{\gamma_1} e^{-\eta}\left(\left(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon - \frac{\eta}{\tau}I\right)^{-1} - \left(\widehat{\mathcal{A}}^0 - \frac{\eta}{\tau}I\right)^{-1}\right)d\eta. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Второе равенство получено заменой переменной $\eta = \zeta\tau$.

Применяя представление (16.4) и оценку (16.1), приходим к неравенству

$$\left\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{C'\varepsilon}{\pi\tau}\int\limits_{\gamma_1} e^{-\operatorname{Re}\eta}\left(\tau^{-1}|\eta|\right)^{\frac{1}{2p}-1}|d\eta|.$$

Мы учли, что $c(\varphi) \leqslant \sqrt{2}$ для точек контура γ_τ. Интеграл здесь понимается как интеграл по длине дуги. Оценивая этот интеграл, приходим к неравенству

$$\left\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widetilde{C}'\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2p}}}. \tag{16.5}$$

Применяя (16.5) при $\tau \geqslant 1$ и оценивая левую часть через 2 при $0 < \tau < 1$, получаем неравенство вида (13.2). Тем самым, мы доказали теорему 13.1 другим способом.

Аналогично, используя (16.2) и представление (16.3), легко получить оценку

$$\left\|\mathbf{D}^p\left(e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} - \varepsilon^p\widehat{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\widetilde{C}''\varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2p}}}.$$

Отсюда несложно перейти к неравенству (13.8).

Таким образом, общие результаты о поведении экспоненты $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ можно вывести из результатов работы [12] об аппроксимациях резольвенты. Однако мы не могли использовать тот же путь для получения остальных результатов работы, поскольку не располагаем «готовыми» результатами о поведении резольвенты ни в случае улучшения результатов при дополнительном условии (что $\widehat{G}(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$), ни в случае более общего оператора вида $\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon$.

Поэтому мы предпочли провести независимые рассмотрения для операторной экспоненты в духе теоретико-операторного подхода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 5. — С. 1–108.
3. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 5. — С. 69–90.
4. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 6. — С. 1–104.
5. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$// Алгебра и анализ. — 2006. — *18*, № 6. — С. 1–130.

6. *Василевская Е. С.* Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора// Алгебра и анализ. — 2009. — *21*, № 1. — С. 3–60.
7. *Вениаминов Н. А.* Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка// Алгебра и анализ. — 2010. — *22*, № 5. — С. 69–103.
8. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 3. — С. 305–308.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 27–122.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
12. *Кукушкин А. А., Суслина Т. А.* Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 1. — С. 89–149.
13. *Пастухова С. Е.* Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка// Алгебра и анализ. — 2016. — *28*, № 2. — С. 204–226.
14. *Пастухова С. Е.* L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении эллиптических операторов высокого порядка// Пробл. мат. анализа. — 2020. — *107*. — С. 113–132.
15. *Пастухова С. Е.* L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении эллиптических операторов четвертого порядка// Мат. сб. — 2021. — *212*, № 1. — С. 119–142.
16. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
17. *Слоущ В. А., Суслина Т. А.* Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами при учете корректоров// Функц. анализ и его прилож. — 2020. — *54*, № 3. — С. 94–99.
18. *Слоущ В. А., Суслина Т. А.* Усреднение эллиптического оператора четвертого порядка с периодическими коэффициентами// В сб.: «Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020». — Симферополь: «Полипринт», 2020. — С. 186–188.
19. *Слоущ В. А., Суслина Т. А.* Пороговые аппроксимации резольвенты полиномиального неотрицательного операторного пучка// Алгебра и анализ. — 2021. — *33*, № 2. — С. 233–274.
20. *Суслина Т. А.* Об усреднении периодических параболических систем// Функц. анализ и его прилож. — 2004. — *38*, № 4. — С. 86–90.
21. *Суслина Т. А.* Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра// Алгебра и анализ. — 2015. — *27*, № 4. — С. 87–166.
22. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam—New York: North Holland Publishing Co., 1978.
23. *Meshkova Yu. M.* Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$// J. Evol. Equ. — 2020. — DOI 10.1007/s00028-020-00600-2.
24. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators// Appl. Anal. — 2016. — *95*, № 7. — С. 1449–1466.
25. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem// В сб.: «Nonlinear Equations and Spectral Theory». — Providence: Amer. Math. Soc., 2007. — С. 201–233.
26. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$// Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — *5*, № 4. — С. 390–447.
27. *Suslina T. A.* Homogenization of the higher-order Schrödinger-type equations with periodic coefficients// В сб.: «Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume». — EMS Publishing House, 2021 (to appear). — arXiv: 2011.13382.
28. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 515–524.
29. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *13*, № 2. — С. 224–237.

А. А. Милослова
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `st010144@student.spbu.ru`

Т. А. Суслина
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `t.suslina@spbu.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-130-191 UDC 517.955

Averaging of Higher-Order Parabolic Equations with Periodic Coefficients

© 2021 **A. A. Miloslova, T. A. Suslina**

Abstract. In $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, we consider a wide class of matrix elliptic operators $\mathcal{A}_\varepsilon$ of order $2p$ (where $p \geqslant 2$) with periodic rapidly oscillating coefficients (depending on $\mathbf{x}/\varepsilon$). Here $\varepsilon > 0$ is a small parameter. We study the behavior of the operator exponent $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ for $\tau > 0$ and small ε. We show that the operator $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ converges as $\varepsilon \to 0$ in the operator norm in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ to the exponent $e^{-\mathcal{A}^0 \tau}$ of the effective operator $\mathcal{A}^0$. Also we obtain an approximation of the operator exponent $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon \tau}$ in the norm of operators acting from $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ to the Sobolev space $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. We derive estimates of errors of these approximations depending on two parameters: ε и τ. For a fixed $\tau > 0$ the errors have the exact order $O(\varepsilon)$. We use the results to study the behavior of a solution of the Cauchy problem for the parabolic equation $\partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -(\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau)$ in $\mathbb{R}^d$.

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Periodicheskie differentsial’nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva i usredneniya” [Second-order periodic differential operators. Threshold properties and averaging], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 5, 1–108 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Porogovye approksimatsii rezol’venty faktorizovannogo samosopryazhennogo operatornogo semeystva s uchetom korrektora” [Threshold approximations of the resolvent of a factorized self-adjoint operator family with allowance for a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 5, 69–90 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Usrednenie periodicheskikh ellipticheskikh differentsial’nykh operatorov s uchetom korrektora” [Averaging of periodic elliptic differential operators with a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 6, 1–104 (in Russian).
5. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, “Usrednenie periodicheskikh differentsial’nykh operatorov s uchetom korrektora. Priblizhenie resheniy v klasse Soboleva $H^1(\mathbb{R}^d)$” [Averaging of periodic differential operators taking into account the corrector. Approximation of solutions in the Sobolev class $H^1(\mathbb{R}^d)$], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2006, **18**, No. 6, 1–130 (in Russian).
6. E. S. Vasilevskaya, “Usrednenie parabolicheskoy zadachi Koshi s periodicheskimi koeffitsientami pri uchete korrektora” [Averaging of the parabolic Cauchy problem with periodic coefficients taking into account the corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2009, **21**, No. 1, 3–60 (in Russian).
7. N. A. Veniaminov, “Usrednenie periodicheskikh differentsial’nykh operatorov vysokogo poryadka” [Averaging of higher-order periodic differential operators], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2010, **22**, No. 5, 69–103 (in Russian).
8. V. V. Zhikov, “Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya” [Operator estimates in homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305–308 (in Russian).
9. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial’nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
10. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya” [On operator estimates in homogenization theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 27–122 (in Russian).
11. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).

12. A. A. Kukushkin, T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskikh operatorov vysokogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami” [Averaging of higher-order elliptic operators with periodic coefficients], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2016, **28**, No. 1, 89–149 (in Russian).
13. S. E. Pastukhova, “Operatornye otsenki usredneniya dlya ellipticheskikh uravneniy chetvertogo poryadka” [Operator estimates of averaging for fourth-order elliptic equations], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2016, **28**, No. 2, 204–226 (in Russian).
14. S. E. Pastukhova, “L^2-approksimatsii rezol’venty v usrednenii ellipticheskikh operatorov vysokogo poryadka” [L^2-approximations of the resolvent in the averaging of elliptic higher-order operators], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2020, **107**, 113–132 (in Russian).
15. S. E. Pastukhova, “L^2-approksimatsii rezol’venty v usrednenii ellipticheskikh operatorov chetvertogo poryadka” [L^2-approximations of the resolvent in the averaging of fourth-order elliptic operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 1, 119–142 (in Russian).
16. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
17. V. A. Sloushch and T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskogo operatora chetvertogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami pri uchete korrektorov” [Averaging of a fourth-order elliptic operator with periodic coefficients taking into account correctors], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2020, **54**, No. 3, 94–99 (in Russian).
18. V. A. Sloushch and T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskogo operatora chetvertogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami” [Averaging of a fourth-order elliptic operator with periodic coefficients], In: *Sbornik materialov mezhdunarodnoy konferentsii KROMSh-2020* [Collection of Materials of the International Conference KROMSH-2020], Poliprint, Simferopol’, 2020, pp. 186–188 (in Russian).
19. V. A. Sloushch and T. A. Suslina, “Porogovye approksimatsii rezol’venty polinomial’nogo neotritsatel’nogo operatornogo puchka” [Threshold approximations of the resolvent of a polynomial nonnegative operator pencil], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2021, **33**, No. 2, 233–274 (in Russian).
20. T. A. Suslina, “Ob usrednenii periodicheskikh parabolicheskikh sistem” [On averaging of periodic parabolic systems], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2004, **38**, No. 4, 86–90 (in Russian).
21. T. A. Suslina, “Usrednenie ellipticheskikh operatorov s periodicheskimi koeffitsientami v zavisimosti ot spektral’nogo parametra” [Averaging of elliptic operators with periodic coefficients depending on the spectral parameter], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2015, **27**, No. 4, 87–166 (in Russian).
22. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland Publishing Co., Amsterdam—New York, 1978.
23. Yu. M. Meshkova, “Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$,” *J. Evol. Equ.*, 2020, DOI 10.1007/s00028-020-00600-2.
24. S. E. Pastukhova, “Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators,” *Appl. Anal.*, 2016, **95**, No. 7, 1449–1466.
25. T. A. Suslina, “Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem,” In: *Nonlinear Equations and Spectral Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, 2007, pp. 201–233.
26. T. A. Suslina, “Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, **5**, No. 4, 390–447.
27. T. A. Suslina, “Homogenization of the higher-order Schrödinger-type equations with periodic coefficients,” In: *Partial Differential Equations, Spectral Theory, and Mathematical Physics. The Ari Laptev Anniversary Volume*, EMS Publishing House, 2021 (to appear), arXiv: 2011.13382.
28. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.
29. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **13**, No. 2, 224–237.

A. A. Miloslova
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: `st010144@student.spbu.ru`

T. A. Suslina
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: `t.suslina@spbu.ru`