

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА С ЧАСТОЙ СМЕНОЙ ТИПА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2021 г. Д. И. БОРИСОВ

Аннотация. Настоящая работа, которую уместно рассматривать как небольшую монографию, посвящена исследованию двух- и трехмерных краевых задач на собственные значения для оператора Лапласа с частым чередованием типа граничных условий. Основной целью является построение асимптотических разложений собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач. Асимптотические разложения строятся на основе оригинальных комбинаций методов асимптотического анализа: метода согласования асимптотических разложений, метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Проводится анализ коэффициентов формально построенных асимптотических рядов. Для строго периодического и локально периодического чередования краевых условий описанный подход позволяет строить полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций. В случае непериодического чередования и усредненного третьего краевого условия получены достаточно слабые условия на структуру чередования, при которых удается построить первые поправки в асимптотиках для собственных значений и собственных функций; указанные условия включают в рассмотрение широкий класс различных случаев непериодического чередования. При дальнейшем, весьма серьезном ослаблении условий на структуру чередования удается получить двусторонние оценки скорости сходимости собственных значений возмущенной задачи; показано, что эти оценки неулучшаемы по порядку. Для соответствующих собственных функций также получены неулучшаемые по порядку оценки скорости сходимости.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Введение	15
Глава 2. Двумерная задача с локально периодическим чередованием граничных условий: усредненное условие Дирихле	20
1. Постановка задачи и основные результаты главы	20
2. Формальное построение асимптотических разложений для произвольной области	23
3. Модельная задача для пограничного слоя	27
4. Непрерывность и оценки коэффициентов формальных асимптотик	31
5. Обоснование асимптотик в случае простого предельного собственного значения	34
6. Случай кратного предельного собственного значения	36
Глава 3. Задача в круге с периодическим чередованием граничных условий: усредненное третье краевое условие	39
7. Постановка задачи и основные результаты главы	39
8. Формальное построение асимптотик в случае $n = 0$	41
9. Формальное построение асимптотик в случае $n > 0$	49
10. Обоснование	53
11. Приложение	59
Глава 4. Двумерная краевая задача с непериодическим чередованием граничных условий: усредненное третье краевое условие	60
12. Постановка задачи и основные результаты главы	60
13. Формальное построение асимптотических разложений	62
14. Формальное асимптотическое решение	67



15. Обоснование	75
Глава 5. Двумерная задача с непериодическим чередованием граничных условий: неумлучшаемые оценки	78
16. Постановка задачи и основные результаты главы	78
17. Вспомогательное утверждение в случае усредненного краевого условия Дирихле	80
18. Оценки собственных значений возмущенной задачи	87
Глава 6. Трехмерная задача с периодическим чередованием граничных условий	89
19. Постановка задачи и основные результаты главы	89
20. Сходимость	92
21. Формальное построение асимптотик в случае усредненного условия Дирихле	97
22. Формальное построение асимптотик в случае усредненного третьего краевого условия	102
23. Обоснование	109
Глава 7. Трехмерная задача с непериодическим чередованием граничных условий: неумлучшаемые оценки	111
24. Вспомогательные утверждения	113
25. Доказательство оценок	116
Список литературы	120

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи с различного рода сингулярными возмущениями — объект исследований многих ученых. Подобный интерес объясняется тем, что, с одной стороны, сингулярно возмущенные краевые задачи часто возникают как математические модели в различных приложениях, а с другой стороны — наличием у этих задач большого числа разнообразных свойств, интересных с математической точки зрения. Примерами такого рода задач могут служить краевые задачи для уравнений с малым параметром при старшей производной, с быстро осциллирующими коэффициентами, задачи в области с вырезанным множеством малой меры, задачи со сменой граничного условия на малом участке границе, задачи с частой сменой граничных условий, с концентрированными массами, задачи в областях с быстро осциллирующей границей, в перфорированных областях, в областях с тонкими отростками и многие другие, см., например, монографии [1, 2, 18, 38, 42, 45, 47, 49, 53, 55, 62, 63, 73], статьи [25, 33–35, 39–41, 44, 48, 50, 52, 58, 59, 94, 97, 105] и списки литературы в цитированных работах.

Один из классов задач в теории граничного усреднения, который достаточно активно исследовался — это задачи с частой сменой типа граничных условий. Постановки задач с такого рода краевыми условиями в общих чертах выглядят следующим образом. Выбирается область с достаточно гладкой границей, в которой рассматривается эллиптическое уравнение. На границе области выделяется подмножество, состоящее из большого числа непересекающихся частей малой меры. Как правило, это подмножество зависит от одного или нескольких характерных малых параметров, при стремлении которых к нулю расстояние между отдельными компонентами этого подмножества и мера каждой отдельной компоненты стремятся к нулю. На этом подмножестве задается граничное условие одного типа (например, условие Дирихле), в то время как на оставшейся части границы задается граничное условие другого типа (например, условие Неймана). Пример двумерной области с описанным разбиением границы приведен на рис. 1. Цель исследований — описать поведение решений, когда характерные малые параметры стремятся к нулю. Интересны также задачи, в которых описанная смена краевых условий задается не на всей границе, а лишь на фиксированной ее части, в то время как на остальной части границы ставится одно из классических краевых условий.

Одной из самых простых физических моделей, описываемой краевой задачей с частой сменой граничных условий, является задача о мембране, часто закрепленной на малых участках границы.

Вопросы усреднения эллиптических краевых задач с частой сменой граничных условий исследовались достаточно широко (см., например, [3, 4, 65, 66, 72, 82, 84–87, 91, 100, 101]). Основной целью этих работ было определение вида предельных (усредненных) задач при минимальном наборе требований к структуре чередования граничных условий, т. е. к поведению множеств с разными краевыми условиями. В [85, 86] рассматривалось уравнение Лапласа в ограниченной области с частой сменой граничных условий Дирихле и Неймана. Рассматривалось чередование граничных условий, имеющее непериодическую структуру, но дополнительно предполагалось, что части границы с разными граничными условиями имеют одинаковый порядок малости. В работах [3, 65, 66, 82, 84, 91, 100, 101] для линейных эллиптических задач с чередованием первого краевого условия со вторым либо третьим краевым условием были получены усредненные задачи и приведены достаточно простые условия, определяющие зависимость типа усредненной задачи от структуры чередования. Случай, когда подмножество границы с граничным условием Дирихле имеет периодическую структуру, исследовался в [66, 82, 84, 100, 101]. Сходимость в непериодическом случае изучалась в [4, 65, 91]. Отметим, что ограничения на структуру чередования граничных условий, гарантирующие вывод усредненных задач, в работах [3, 65, 82, 84, 91, 100, 101] были сформулированы в терминах расстояний между отдельными частями границы с условием Дирихле, а также в терминах мер этих частей. В [66] ограничения на структуру чередования давались в терминах минимального собственного значения некоторой модельной краевой задачи на подходящей ячейке периодичности. При некоторых дополнительных предположениях это условие было переписано в терминах расстояний и мер. В [3] была рассмотрена краевая задача для уравнения Лапласа с частым чередованием граничных условий Дирихле и Неймана весьма общей непериодической структуры. Также было исследовано чередование, описываемое на основе вероятностного подхода. Были получены достаточно общие условия, гарантирующие сходимость решения рассматриваемой задачи. Краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений с частой сменой типа граничных условий рассматривались в [72, 87]. В [72] численно решалась задача, являющаяся моделью химической задачи о тепловом взрыве газа в результате экзотермической реакции в длинном цилиндрическом сосуде. Смена граничных условий возникала вследствие того, что теплоизолированные части стенок сосуда часто и периодически чередовались с идеально проводящими участками. Результаты, полученные численно в [72], в целом хорошо согласуются с результатами цитированных выше работ [3, 65, 82, 84, 91, 100, 101]. Численные результаты [72] позднее были теоретически подтверждены в [87], где рассматривалось усреднение некоторого класса нелинейных уравнений, в который уравнение из [72] входило как частный случай. В [87] вопрос о сходимости решений нелинейной задачи фактически был сведен к аналогичному вопросу для некоторой линейной задачи. Сходимость же последней может быть установлена на основе результатов [3, 65, 82, 84, 91, 100, 101].

Основные результаты, полученные при изучении сходимости задач с частой сменой типа граничного условия (как периодической, так и непериодической), кратко можно сформулировать следующим образом. Краевые эллиптические задачи с частой сменой типа граничного условия при достаточно общих предположениях сходятся к задачам с классическими граничными условиями. Тип граничного условия в усредненной задаче зависит от соотношения мер частей границы с разными типами краевых условий и распределения их вдоль границы в исходной возмущенной задаче.

Помимо определения вида усредненных задач для задач с частой сменой граничных условий, важен и актуален также вопрос об оценках скорости сходимости решений возмущенных задач к решениям усредненных. Для эллиптических задач с периодической сменой краевых условий такого рода оценки были получены в работах [3, 29, 66]. Оценки для непериодического чередования были установлены в [31, 56, 57, 83, 104].

Сравнительно недавно появились работы, в которых строились асимптотические разложения решений эллиптических краевых задач с периодической структурой чередования граничных условий [16, 22–24, 26, 67, 68, 92]. Отметим, что факт периодичности при получении асимптотик использовался по существу. В [67, 68] была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона в многомерном слое, ограниченном двумя гиперплоскостями. Периодическое чередование граничных условий Дирихле и Неймана задавалось на одной из гиперплоскостей, причем части границы с краевым условием Дирихле стягивались к точкам. Также дополнительно предполагалось, что меры частей границы с разными типами граничных условий имеют одинаковый порядок малости.

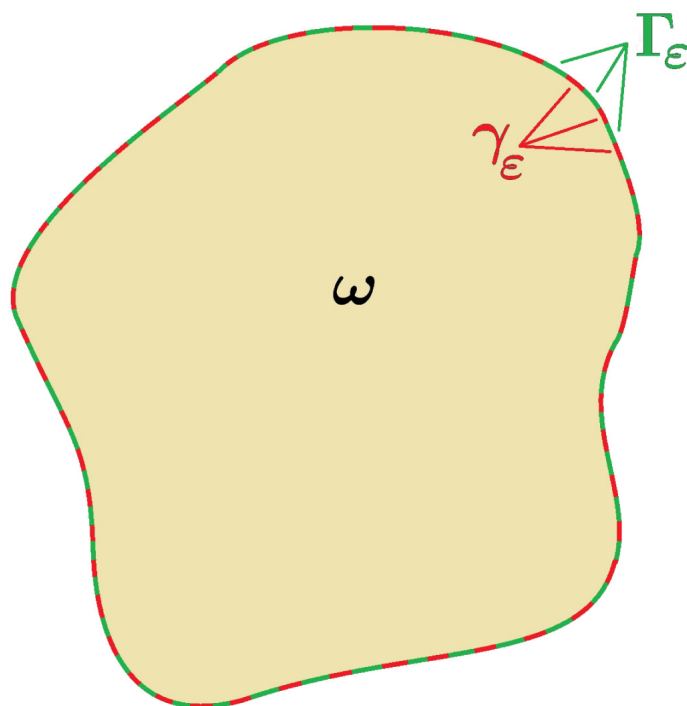


Рис. 1. Двумерная область с разбиением границы на малые части с быстрым чередованием краевых условий. На множестве Γ_ϵ задается краевое условие Неймана, на множестве γ_ϵ — краевое условие Дирихле.

Для решения рассматриваемой задачи было получено полное асимптотическое разложение. В работах [16, 22–24, 26, 92] изучалась краевая задача на собственные значения оператора Лапласа в ограниченной двумерной области с периодическим и локально периодическим чередованием граничных условий. В [92] для единичного круга со строго периодической сменой граничных условий были формально построены первые члены асимптотических разложений минимального собственного значения в случае усредненных первой, второй и третьей краевых задач. В [22] для случая круга со строго периодическим чередованием и усредненной задачи Дирихле были получены полные асимптотические разложения собственных значений в дополнительном предположении, что части границы с разными граничными условиями имеют одинаковый порядок малости. В отсутствии этого предположения в [22] для произвольной области и чередования, сводимого к строго периодическому конформной заменой переменных, были получены первые члены асимптотических разложений собственных значений, сходящихся к простым собственным значениям задачи Дирихле. В работе [24] вновь были рассмотрены случай круга со строго периодической сменой краевых условий и случай произвольной области с чередованием, сводимым к строго периодическому конформной заменой переменных, но уже в предположении усредненной задачи Неймана. Отношение длин частей границы с условием Дирихле и Неймана задавалось явной модельной функцией. Для круга были построены полные асимптотические разложения собственных значений, для произвольной области — первые члены асимптотик собственных значений, сходящихся к простым предельным собственным значениям. Также было доказано, что в случае круга собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к предельным двукратным собственным значениям, сами имеют кратность два. В работах [16, 23, 26] для произвольной области с чередованием граничных условий, сводимого к периодическому некоторой гладкой заменой переменных, были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений, сходящихся к простым предельным собственным значениям. Были рассмотрены случаи усредненных первой [23], второй [23] и третьей краевых задач [16, 26].

В работах [88–90] были рассмотрены краевые задачи для параболического уравнения с частым чередованием первого и третьего краевых условий. Чередование задавалось по пространственным переменным. Дополнительно предполагалось, что меры частей границы с разными граничными

условиями имеют одинаковый порядок малости, что при усреднении приводило к граничному условию Дирихле. В [88, 89] — для периодической, а в [90] — для почти периодической смены граничных условий в различных нормах были оценены скорости сходимости и построены первые члены асимптотических разложений решений рассматриваемых задач.

К задачам с частой сменой типа граничных условий близки задачи в областях с мелкозернистой границей. Постановка таких задач в общих чертах выглядит следующим образом. Уравнение рассматривается в неограниченной области. Краевое условие ставится на границе множества, состоящего из большого количества непересекающихся малых областей, расположенных близко друг к другу. Изучается поведение решения, когда число областей неограниченно возрастает, а расстояния между ними и их размеры стремятся к нулю. Вопросы усреднения таких задач изучались достаточно подробно (см., например, [49, 63, 64]). Асимптотические разложения решений таких задач с периодической структурой граничных условий были построены в [27, 28, 93].

Достаточно близки к задачам с частой сменой граничных условий и задачи с большим количеством концентрированных масс. Здесь обычно рассматриваются уравнения на собственные значения, где при спектральном параметре стоит весовая функция. Граничные условия задаются часто чередующимися. Упомянутая весовая функция зависит от характерного малого параметра (малых параметров) и равномерно по нему (по ним) ограничена всюду в области за исключением малых окрестностей, расположенных вдоль границы близко друг к другу. В этих окрестностях весовая функция имеет порядок обратной степени малого параметра — линейного размера окрестности. Усреднению такого рода задач посвящено достаточно много работ (см., например, [32, 60, 102, 103, 106]). Работам по усреднению задач со многими массами предшествовали исследования задач с одной концентрированной массой (см. [55] и содержащийся в монографии обзор литературы).

Настоящая работа, которую уместно рассматривать как небольшую монографию, посвящена исследованию двух- и трехмерных краевых задач на собственные значения оператора Лапласа с частым чередованием типа граничных условий. Основу монографии составляют статьи автора [8–16, 74, 75], вышедшие в 1998–2006 гг. Изучается чередование, имеющее как периодическую, так и непериодическую структуру. Основной целью является получение асимптотических разложений собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач. Асимптотические разложения выводятся по следующей схеме. Вначале строятся формальные асимптотические решения. При этом используются оригинальные комбинации методов асимптотического анализа: метод согласования асимптотических разложений [42], метод пограничного слоя [20] и метод многих масштабов [7]. Этот этап также включает в себя анализ коэффициентов формально построенных асимптотических рядов. Формальное построение завершается доказательством того, что построенные асимптотические ряды являются формальным асимптотическим решением. Это означает, что частичные суммы данных рядов удовлетворяют исходной возмущенной задаче с точностью до невязок малого порядка, причем порядок малости должен увеличиваться при увеличении числа членов в частичных суммах. На следующем этапе формально построенные асимптотики строго обосновываются, т. е. выводятся оценки для разности между истинными собственными значениями и собственными функциями и формально построенными асимптотическими рядами.

Для строго периодического и локально периодического чередования краевых условий описанный подход позволяет строить полные асимптотические разложения собственных значений и собственных функций. Естественно возникает вопрос о том, как устроены аналогичные асимптотики в случае непериодического чередования. Понятно, что в самой общей постановке задачи с непериодическим чередованием можно надеяться лишь на получение результатов о сходимости, как это было сделано в цитированных выше работах. Поэтому задачу об определении асимптотических разложений в непериодическом случае уместно ставить следующим образом: при каких максимально слабых условиях на структуру чередования возможно построить первые поправки в асимптотиках для собственных значений и собственных функций рассматриваемых задач? Как оказалось, при такой постановке вопроса важным оказывается тип усредненного краевого условия. В случае, когда усреднение приводит к предельному условию Дирихле, расширить эти результаты на непериодический случай не удастся. Зато в случае усредненного условия Неймана или третьего краевого условия первые поправки в асимптотиках удастся построить при весьма слабых условиях

на структуру чередования, которые включают в рассмотрение широкий класс различных случаев непериодического чередования.

Дальнейшее изучение случаев непериодического чередования проводится в рамках поиска ответа на следующий вопрос: насколько можно ослабить условия на структуру чередования, чтобы гарантировать вместе с тем наличие неулучшаемых по порядку оценок скорости сходимости? Результаты здесь оказываются весьма изящными: чередование может иметь произвольную структуру, лишь бы участки с граничным условием Дирихле можно было оценить с двух сторон в смысле вложения множеств парой периодических или локально периодических чередований. В этом случае на основании комбинации принципа минимакса и известных результатов об асимптотиках для периодического чередования удастся получить двусторонние оценки скорости сходимости собственных значений возмущенной задачи к предельным собственным значениям. При этом данные оценки скорости сходимости неулучшаемые по порядку. Более того, на основе применения подходящего принципа максимума удастся оценить и скорость сходимости собственных проекторов; здесь полученные оценки вновь оказываются неулучшаемыми по порядку.

Описанные результаты соответствуют состоянию дел на 2006 г. С тех пор в теории усреднения возникло новое направление исследований — изучение равномерной резольвентной сходимости для сингулярно возмущенных операторов и доказательство оценок скорости сходимости. Речь идет об усилении классических результатов о сходимости решений задач в теории усреднении и привлечения аппарата спектральной теории неограниченных операторов. Это направление было инициировано пионерскими работами для операторов с быстро осциллирующими коэффициентами, см. [5, 6, 36, 37, 95, 96, 99, 107], а также последующие работы этих авторов. Указанные работы мотивировали аналогичные исследования в теории граничного усреднения. Для задач с частой сменой краевых условий, а также для задач с быстро осциллирующей границей и перфорацией вдоль заданной линии была доказана серия результатов о равномерной резольвентной сходимости к усредненным операторам и об оценках скорости сходимости [17, 70, 71, 76–81], что дало новый свежий взгляд на задачи граничного усреднения. Несмотря на это, результаты, представленные в данной монографии, не потеряли своей важности и актуальности. Это связано с тем, что аппарат асимптотического анализа, используемый при построении асимптотик, не связан с методами теории усреднения и спектральной теории неограниченных операторов и ориентирован именно на построение асимптотических разложений. Поэтому методы и подходы, представленные в настоящей работе, могут эффективно использоваться для построения асимптотических разложений в других задачах граничного усреднения, включая случаи возмущений непериодической структуры. В частности, это было успешно продемонстрировано в работах [17, 70, 71] для многомерных задач с частой сменой краевых условий.

Прежде чем перейти к основному содержанию, сделаем несколько замечаний об используемых обозначениях. В каждой из глав используются свои обозначения, которые, как правило, не связаны с обозначениями в других главах. Если используется одинаковое обозначение, то это оговаривается отдельно. В формальных построениях асимптотик будут использоваться различные пограничные слои и внутренние разложения. Они будут строиться в терминах характерных растянутых переменных, которые мы обычно будем обозначать через ξ (для пограничных слоев) и ς (для внутренних разложений). Определение этих переменных зависит от постановки задачи, но эту зависимость в обозначениях мы не будем подчеркивать. Сами пограничные слои, внутренние разложения, а также внешние разложения мы также будем всюду обозначать одними и теми же символами вида ψ_ε^{bl} (пограничный слой), ψ_ε^{in} (внутреннее разложение) и ψ_ε^{ex} (внешнее разложение), несмотря на то, что эти ряды будут своими для каждой из рассматриваемых задач. Коэффициенты пограничных слоев и внутренних разложений также будем обозначать соответственно буквами v и w , каждый раз подразумевая, что эти величины свои для каждой из задач. Кроме того, будут встречаться одинаковые обозначения различных вспомогательных величин, которые определяются каждый раз в зависимости от задачи, но вместе с тем несут одну и ту же идейную нагрузку. Всяду, где могут возникнуть двусмысленности, мы будем оговаривать, о каких именно величинах идет речь.

ГЛАВА 2

**ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНО ПЕРИОДИЧЕСКИМ
ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ:
УСРЕДНЕННОЕ УСЛОВИЕ ДИРИХЛЕ**

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ГЛАВЫ

Первая глава посвящена изучению двумерной краевой задачи с периодическим и локально периодическим чередованием граничных условий. Постановка задачи следующая. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты, ω — произвольная ограниченная односвязная область в \mathbb{R}^2 с гладкой границей, s — натуральный параметр кривой $\partial\omega$, а S — длина этой кривой, $s \in [0, S)$. Точки границы $\partial\omega$ будем описывать с помощью натурального параметра, фиксируя направление обхода (против часовой стрелки) и произвольно выбрав точку на $\partial\omega$, которой соответствует значение $s = 0$. Точкам границы, которым соответствуют s , близкие к S или к нулю, для удобства изложения сопоставим дополнительно значения $(s - S)$ и $(S + s)$.

Обозначим: $N \gg 1$ — натуральное число, $\varepsilon = 2N^{-1}$ — малый положительный параметр. Для каждого значения N на границе $\partial\omega$ зададим подмножество γ_ε , состоящее из N открытых непересекающихся связных частей границы (см. рис. 1). Множество γ_ε вводится следующим образом. Для каждого значения N задаются точки $x_j^\varepsilon \in \partial\omega$, $j = 0, \dots, N-1$, соответствующие значениям натурального параметра $s_j^\varepsilon \in [0, S)$, причем расстояние между любыми двумя соседними точками, измеренное вдоль границы $\partial\omega$, есть величина порядка ε . Далее, пусть заданы два набора из N функций каждый: $a_j(\varepsilon)$ и $b_j(\varepsilon)$, $j = 0, \dots, N-1$, где функции a_j и b_j — неотрицательны и ограничены. Множество γ_ε определяется следующим образом:

$$\gamma_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{N-1} \gamma_{\varepsilon,j}, \quad \gamma_{\varepsilon,j} = \{x : -\varepsilon a_j(\varepsilon) < s - s_j^\varepsilon < \varepsilon b_j(\varepsilon)\}.$$

Без ограничения общности будем считать, что $\gamma_{\varepsilon,j}$ не пересекаются.

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in \omega, \quad (1.1)$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (1.2)$$

где ν — внешняя нормаль к границе $\partial\omega$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\omega \setminus \gamma_\varepsilon$. Целью является построение асимптотических разложений собственных элементов этой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$, или, эквивалентно, $N \rightarrow \infty$.

Положим $a_N(\varepsilon) = a_0(\varepsilon)$, $b_N(\varepsilon) = b_0(\varepsilon)$, $s_N^\varepsilon = s_0^\varepsilon$. На множество γ_ε наложим следующее условие.

(C1). *Существует функция $\theta = \theta(s)$, заданная на границе множества ω , принимающая значения на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющая условиям*

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(S) = 2\pi, \quad \theta' \in C^\infty(\partial\omega), \quad 0 < c_1 \leq \theta'(s) \leq c_2, \quad (1.3)$$

где c_1, c_2 — некоторые константы, не зависящие от s , и

$$\begin{aligned} \theta(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon)) &= \theta(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j - \varepsilon a(\varepsilon), \\ \theta(s_j^\varepsilon + \varepsilon a_j(\varepsilon)) &= \theta(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j + \varepsilon b(\varepsilon), \end{aligned} \quad (1.4)$$

для всех $j = 0, \dots, N-1$, где $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ — ограниченные неотрицательные функции.

Условие (C1) имеет простую геометрическую интерпретацию. Оно означает, что границу $\partial\omega$ можно гладко отобразить на окружность единичного радиуса так, что при этом отображении множество γ_ε перейдет в строго периодическое множество, см. (1.4). Чередование граничных условий, имеющее подобную структуру, будем называть локально периодическим.

В данной главе мы рассматриваем локально периодическое чередование граничных условий в случае, когда усреднение в задаче (1.1), (1.2) приводит к краевому условию Дирихле. Согласно [65,

66, 91], такая ситуация имеет место при выполнении равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = 0, \quad (1.5)$$

где

$$\eta(\varepsilon) = \frac{a(\varepsilon) + b(\varepsilon)}{2}.$$

Отметим еще, что согласно [65, 66] собственные значения задачи (1.1), (1.2) сходятся к собственным значениям задачи Дирихле с сохранением совокупной кратности.

Первым основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть выполнены условие (C1) и равенство (1.5). Тогда для каждого простого собственного значения задачи

$$-\Delta \psi_0 = \lambda_0 \psi_0, \quad x \in \omega, \quad \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\omega \quad (1.6)$$

существует единственное собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2), сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Собственное значение λ_ε простое и имеет двупараметрическую асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \lambda_j(\eta), \quad (1.7)$$

где $\lambda_j(\eta)$ непрерывны по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lambda_j\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $j \geq 1$,

$$\lambda_1(\eta) = K_1 \ln \sin \eta, \quad K_1 = \int_{\partial\omega} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}\right)^2 \frac{ds}{\theta'}, \quad (1.8)$$

$$\lambda_2(\eta) = K_2 \ln^2 \sin \eta, \quad K_2 = \int_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \nu} \frac{ds}{\theta'}, \quad (1.9)$$

$$\lambda_j(\eta) = K_j \ln^j \eta + O(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}}), \quad \eta \rightarrow 0, \quad (1.10)$$

ψ_0 нормирована в $L_2(\omega)$, ψ_{11} — ортогональное ψ_0 в $L_2(\omega)$ решение краевой задачи

$$-\Delta \psi_{11} = \lambda_0 \psi_{11} + K_1 \psi_0, \quad x \in \omega, \quad \psi_{11} = \frac{1}{\theta'} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\omega, \quad (1.11)$$

K_j , $j \geq 3$ — некоторые константы. Асимптотика соответствующей собственной функции ψ_ε в норме $W_2^1(\omega)$ имеет вид (5.11).

Условие (1.5), непрерывность $\lambda_j(\eta)$ и формулы (1.10) обеспечивают асимптотичность ряда (1.7), несмотря на наличие сингулярностей у $\lambda_j(\eta)$ при $\eta \rightarrow 0$. Отметим также, что существует достаточно широкий класс функций $\eta(\varepsilon)$, стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ и удовлетворяющих одновременно условию (1.5), например, $\eta = \varepsilon^\alpha$, $\alpha > 0$, $\eta = e^{-1/\varepsilon^\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ и др.

Условие непересечения множеств $\gamma_{\varepsilon, j}$ и неотрицательность функций $a(\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)$ влекут неравенство: $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. При $\eta = \frac{\pi}{2}$ множество γ_ε совпадает со всей границей $\partial\omega$, и в силу теоремы 1.1 все члены асимптотики (1.7) обращаются в нуль.

Подчеркнем, что для коэффициентов асимптотики (1.7) при $j \geq 3$ не удается получить явных формул типа (1.8), (1.9). Как было показано в [8], даже в случае единичного круга и $\theta(s) \equiv s$ уже коэффициент λ_3 имеет нетривиальный вид, а именно:

$$\lambda_3(a) = K_3 \ln^3 \sin a + \Phi_1(a) \ln \sin a + \Phi_2(a), \quad K_3 = -\frac{2}{3} \lambda_0^2 + \frac{4}{3} \lambda_0,$$

где

$$\Phi_1, \Phi_2 \in C^\infty\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = 0, \quad \Phi_1''(0) \neq 0.$$

При отсутствии кратных собственных значений у задачи (1.6) теоремой 1.1 исчерпываются все собственные значения задачи (1.1), (1.2). Более того, наличие кратных собственных значений у задачи (1.6) для произвольной области — ситуация не слишком частая. Поэтому случай кратного предельного собственного значения будет изучен на примере единичного круга с центром в нуле со строго периодическим чередованием граничных условий. Хорошо известно, что на единичном

круге задача (1.6) имеет двукратные собственные значения, которыми являются квадраты нулей функций Бесселя J_n целого порядка $n > 0$; соответствующие собственные функции имеют вид

$$\psi_0^\pm(x) = J_n\left(\sqrt{\lambda_0}r\right) \Upsilon^\pm(n\theta), \quad \Upsilon^+(t) = \cos(t), \quad \Upsilon^-(t) = \sin(t), \quad J_n\left(\sqrt{\lambda_0}\right) = 1.$$

Здесь (r, θ) — полярные координаты, соответствующие x .

Основной результат, полученный в описанных условиях, выглядит следующим образом.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условие (С1) и равенство (1.5), ω — единичный круг с центром в нуле, $\theta(s) \equiv s$. Тогда для каждого двукратного собственного значения λ_0 задачи (1.6) существует единственное собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2), сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Собственное значение λ_ε двукратное и имеет асимптотику (1.7), где $\lambda_j(\eta) \in C\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lambda_j\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $j \geq 1$,

$$\lambda_1(\eta) = 2\lambda_0 \ln \sin \eta, \quad \lambda_2(\eta) = 2\lambda_0 \ln^2 \sin \eta, \quad (1.12)$$

$$\lambda_j(\eta) = \tilde{K}_j \ln^j \eta + O(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}}), \quad \eta \rightarrow 0, \quad (1.13)$$

\tilde{K}_j — некоторые константы. Асимптотики соответствующих собственных функций в норме $W_2^1(\omega)$ имеют вид (6.7).

Отметим, что асимптотики из теорем 1.1, 1.2 для случая единичного круга и $\eta = \text{const}$ были получены в работе [22]. В случае переменного η и произвольной области в [23] был формально получен первый член (1.8). Обоснование этого первого члена было проведено в [22] для частного случая, когда чередование граничных условий может быть сведено к строго периодическому конформной заменой переменных. Вопрос о полных асимптотиках в случае переменного η остался открытым. Решение этого вопроса существенно более сложное, чем при $\eta = \text{const}$, так как необходимо выяснить характер зависимости коэффициентов от параметра η , что представляет собой совершенно самостоятельную и нетривиальную задачу. Решение этой задачи и, в частности, доказательство формул (1.10), (1.13) составляет самую сложную и ключевую часть данной главы.

Коэффициенты рядов (1.7), (1.12) имеют логарифмические особенности при $\eta \rightarrow 0$. Вместе с тем, эти ряды обладают свойством асимптотичности благодаря условию (1.5) и формулам (1.8), (1.9), (1.10), (1.13). Отметим еще, что формула (1.8) была формально получена в работе [23] при некоторых дополнительных ограничениях. Соотношения (1.12) были выведены в [22] для постоянного η ; там же была обоснована формула (1.8) для η , стремящегося к нулю не более чем степенным образом, и множества γ_ε , являющегося образом периодического подмножества единичной окружности при конформном отображении.

Сформулированные теоремы 1.1, 1.2 составляют основные результаты главы. Доказательство этих теорем состоит из нескольких этапов; опишем их подробнее. В разделе 2 формально строятся асимптотические разложения для собственного значения λ_ε и соответствующей собственной функции ψ_ε в условиях теоремы 1.1. Данное построение проводится на основе комбинации метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Эти методы применяются для формального построения асимптотики собственной функции. Пограничный слой, который строится на основе метода составных разложений, позволяет учесть микроструктуру граничных условий (1.2). В результате формального построения для функций пограничного слоя выводится рекуррентная система краевых задач, зависящих от параметра η . Эта зависимость носит сингулярный характер при $\eta \rightarrow 0$, что требует дополнительного нетривиального исследования этих задач. Такое исследование проводится в разделе 3, где изучается зависимость от параметра η решения модельной задачи. Упомянутые краевые задачи для функций пограничного слоя являются частными случаями данной модельной задачи. В разделе 4 на основе результатов раздела 3 выясняется зависимость функций пограничного слоя от параметра η и устанавливается характер сингулярностей этих функций при $\eta \rightarrow 0$. На основе полученных результатов доказывается, что формальные асимптотики, построенные в разделе 2, являются формальным асимптотическим решением исходной задачи. Под формальным асимптотическим решением понимаются формально построенные асимптотические ряды, если при подстановке частичных сумм этих рядов вместо λ_ε и ψ_ε в задачу (1.1), (1.2) получаем равенства в уравнении и граничных условиях с точностью до достаточно малой невязки. Более того,

порядок малости этой невязки должен неограниченно расти при увеличении числа членов в частичных суммах. Вместе с тем, наличие формальных асимптотических решений еще не означает, что они дают асимптотики истинных собственных элементов задачи (1.1), (1.2). Поэтому необходимо провести обоснование формальных асимптотических решений и получить оценки остатков в построенных асимптотических рядах. Такое обоснование формально построенных асимптотик проводится в разделе 5, что завершает доказательство теоремы 1.1. Раздел 6 посвящен доказательству теоремы 1.2. Оно проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.1: формальное построение асимптотик, исследование характера зависимости пограничного слоя от параметра η , обоснование асимптотик.

Результаты данной главы были опубликованы в [8, 9].

2. ФОРМАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В этом разделе будут формально построены асимптотики собственных элементов задачи (1.1), (1.2) в условиях теоремы 1.1. Ключевым моментом данного построения является использование пограничного слоя в окрестности границы $\partial\omega$ с целью удовлетворения граничных условий (1.2). Пограничный слой строится с использованием метода многих масштабов. Всюду в разделе считаем выполненными условия теоремы 1.1.

Так как собственное значение λ_0 простое, то из [65, 66, 91] следует, что к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2), и это собственное значение — простое.

Асимптотику собственного значения λ_ε будем строить в виде ряда (1.7). Асимптотику соответствующей собственной функции ψ_ε , сходящейся к ψ_0 , строим как сумму двух разложений: внешнего разложения и пограничного слоя. Внешнее разложение будем строить в виде:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x, \eta) = \psi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(x, \eta). \quad (2.1)$$

Пограничный слой строится следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi, s, \eta). \quad (2.2)$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — растянутые переменные,

$$\xi_1 = \frac{\theta(s) - \theta(s_0^\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{b(\varepsilon) - a(\varepsilon)}{2}, \quad \xi_2 = \frac{\theta'(s)\tau}{\varepsilon}, \quad (2.3)$$

где τ — расстояние от точки до границы, измеренное в направлении внутренней нормали. Выбор переменных ξ будет пояснен ниже, в замечании 2.1.

Целью формального построения является определение коэффициентов λ_j и функций ψ_j и v_j . Функции v_j согласно методу пограничного слоя будем искать экспоненциально убывающими при $\xi_2 \rightarrow +\infty$.

Построение начнем с пограничного слоя. Следуя методу пограничного слоя, потребуем, чтобы сумма внешнего разложения (2.1) и пограничного слоя (2.2) асимптотически удовлетворяла граничным условиям из (1.2). Такое требование с учетом определения переменных ξ и условия (C1) приводит к граничным условиям для функций v_j :

$$v_j = A_j, \quad \xi \in \gamma(\eta), \quad \frac{\partial v_j}{\partial \xi_2} = B_j, \quad \xi \in \Gamma(\eta), \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(\eta) &= \{ \xi : |\xi_1 - \pi j| < \eta, \xi_2 = 0, j \in \mathbb{Z} \}, \\ \Gamma(\eta) &= \left\{ \xi : \left| \xi_1 - \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \frac{\pi}{2} - \eta, \xi_2 = 0, j \in \mathbb{Z} \right\}, \\ A_j &= A_j(s, \eta) = -\psi_j(x, \eta), \quad B_j = B_j(s, \eta) = \frac{1}{\theta'(s)} \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_{j-1}(x, \eta), \quad x \in \partial\omega. \end{aligned}$$

Выведем уравнения для функций v_j . В переменных (s, τ) оператор Лапласа выглядит следующим образом:

$$\Delta_x = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \tau} H \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s}, \quad H = H(s, \tau) = 1 - \tau k(s), \quad (2.5)$$

где $k(s) = -(r''(s), \nu(s))_{\mathbb{R}^2}$, $r(s)$ — вектор-функция, задающая кривую $\partial\omega$, а $\nu = \nu(s)$ — внешняя нормаль к $\partial\omega$. Подставляя теперь (1.7), (2.2), (2.5) в (1.1), умножая обе части полученного равенства на H^2 , переходя к переменным ξ и собирая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_j &= F_j, \quad \xi_2 > 0, \\ F_j &= \frac{1}{\theta'} \left(\left(1 + 2\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \left(k \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''}{\theta'} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial s} \right) v_{j-1} - \\ &\quad - \frac{1}{(\theta')^2} \left(\xi_2^2 \left(\left(\frac{\theta''}{\theta'} \right)^2 + k^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left(\frac{\theta'''}{\theta'} + 2 \frac{\theta''}{\theta'} \frac{\partial}{\partial s} \right) \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + k' \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) v_{j-2} + \\ &\quad + \sum_{i=0}^2 \frac{a_i}{(\theta')^2} \left(\frac{\xi_2 k}{\theta'} \right)^{i j - i - 3} \sum_{p=0}^{j-4} \lambda_p v_{j-i-p-2} - \sum_{i=0}^{j-4} \frac{\xi_2^{m+1} k^m k'}{(\theta')^{i+3}} \left(\frac{\theta''}{\theta'} \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + k \xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \frac{\partial}{\partial s} \right) v_{j-i-3}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где обозначено

$$a_1 = a_3 = -1, \quad a_2 = 2, \quad v_{-1} = v_0 = 0, \quad k = k(s).$$

При получении уравнений (2.6) умножение на H^2 оправдано, так как пограничный слой определяется лишь в некоторой малой окрестности $\partial\omega$, а функция H^2 не имеет нулей при достаточно малых τ . Если при выводе уравнений для v_j не умножать на H^2 , то правые части уравнений для v_j будут записываться по-другому; вместе с тем, можно доказать, что они совпадают с правыми частями уравнений (2.6). Выбор в пользу уравнений (2.6) связан в первую очередь с тем, что они более удобны для дальнейших исследований.

Замечание 2.1. Благодаря условию (C1) и описанному выше выбору переменной ξ_1 краевые задачи для v_j периодичны по ξ_1 . Периодичность по существу будет использована при исследовании этих задач, что и объясняет определение ξ_1 . Переменная ξ_2 выбиралась так, чтобы получить уравнения Пуассона для v_j . Это привело к наличию множителя θ' в определении ξ_2 .

Отметим, что s входит в задачи (2.4), (2.6) как параметр. Исследуем разрешимость этих задач. Для этого определим следующие функциональные пространства. Пусть $\mathcal{V}(\eta)$ — пространство π -периодических по ξ_1 функций из $C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geq 0, \xi \neq (\pm\eta + \pi j, 0), j \in \mathbb{Z}\})$, имеющих при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ дифференцируемую асимптотику

$$v(\xi) = \sum_{p=1}^{\infty} e^{-2p\xi_2} (P_p(\xi_2) \cos(2p\xi_1) + Q_p(\xi_2) \sin(2p\xi_1)), \quad (2.7)$$

где P_p, Q_p — полиномы. Обозначим через $\mathcal{V}^+(\eta)$ ($\mathcal{V}^-(\eta)$) подпространство $\mathcal{V}(\eta)$, состоящее из четных (нечетных) по ξ_1 функций,

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{V} \cap H^p(\Pi), \quad \mathcal{V}_p^\pm = \mathcal{V}^\pm \cap H^p(\Pi), \quad \Pi = \left\{ \xi : |\xi_1| < \frac{\pi}{2}, \xi_2 > 0 \right\}.$$

Здесь и всюду далее все функциональные пространства предполагаются состоящими из вещественных функций.

Введем в рассмотрение функцию:

$$X(\xi, \eta) = \operatorname{Re} \ln \left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 \eta} \right) - \xi_2, \quad (2.8)$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$ — комплексная переменная. Легко видеть, что $X \in \mathcal{V}_1^+(\eta)$ — гармоническая функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$X = \ln \sin \eta, \quad \xi \in \gamma(\eta), \quad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma(\eta). \quad (2.9)$$

Функция v_1 строится явно:

$$v_1 = -B_1 X. \quad (2.10)$$

Решить краевые задачи (2.4), (2.6) для $j \geq 2$ явно не удастся, однако можно доказать разрешимость этих задач. Для этого понадобится следующая вспомогательная

Лемма 2.1. Пусть $F \in \mathcal{V}_0(\eta)$, $A, B = \text{const}$. Тогда задача

$$\Delta_\xi v = F, \quad \xi_2 > 0, \quad v = A, \quad \xi \in \gamma(\eta), \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = B, \quad \xi \in \Gamma(\eta), \quad (2.11)$$

однозначно разрешима в пространстве $\mathcal{V}_1(\eta)$, если и только если

$$\int_{\Pi} \tilde{X} F d\xi = \pi(A + B \ln \sin \eta), \quad (2.12)$$

где $\tilde{X} = X + \xi_2 - \ln \sin \eta$.

Доказательство. Функцию F представим в виде суммы $F = F^+ + F^-$, где $F^\pm \in \mathcal{V}_0^\pm(\eta)$, и рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v = F, \quad \xi \in \Pi, \quad v = A, \quad \xi \in \gamma(\eta) \cap \partial\Pi, \\ \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = B, \quad \xi \in \Gamma(\eta) \cap \partial\Pi, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_1} = 0, \quad \xi_1 = \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Сделаем комплексную замену переменной в этой задаче: $\tilde{z} = e^{iz}$. Тогда получим краевую задачу в полукруге с квадратично интегрируемой правой частью. Однозначная разрешимость такой задачи следует из общей теории обобщенных решений эллиптических уравнений. Также стандартными методами выясняется асимптотика решения в нуле, который является образом бесконечности при замене переменных. Возвращаясь теперь к переменным ξ и продолжая v^+ периодически по ξ_1 с периодом π , видим, что $v^+ = \tilde{v}^+ + C$, $C = \text{const}$, $\tilde{v}^+ \in \mathcal{V}^+(\eta)$. Аналогичные факты устанавливаются для решения v^- задачи (2.13) с правой частью F^- и с заменой граничных условий при $\xi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ на однородное граничное условие Дирихле. Сумма функций v^\pm и дает решение задачи (2.11), имеющее вид $v = \tilde{v} + C$, $C = \text{const}$, $\tilde{v} \in \mathcal{V}(\eta)$. Критерием обращения константы C в нуль (т. е. критерием принадлежности $v \in \mathcal{V}(\eta)$), как было установлено в [22, лемма 3.1], является равенство (2.12). Лемма доказана. \square

Ниже мы покажем, что $F_j \in \mathcal{V}_0(\eta)$. Условия разрешимости (2.12) дают краевые условия для функций ψ_j :

$$\psi_j = \frac{1}{\theta'} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} \tilde{X} F_j d\xi, \quad x \in \partial\omega, \quad (2.14)$$

Уравнения для ψ_j легко получаются стандартной подстановкой (1.7), (2.1) в (1.1) и вычислением коэффициентов при одинаковых степенях ε :

$$-\Delta \psi_j = \lambda_0 \psi_j + \sum_{p=1}^j \lambda_p \psi_{j-p}, \quad x \in \omega. \quad (2.15)$$

Умножая обе части этих уравнений на ψ_0 и интегрируя по частям по ω , с учетом нормировки ψ_0 получаем условия разрешимости задач (2.14), (2.15):

$$\lambda_j + \sum_{p=1}^{j-1} \lambda_p (\psi_{j-p}, \psi_0)_{L_2(\omega)} = \ln \sin \eta \int_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \frac{ds}{\theta'} - \frac{1}{\pi} \int_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \int_{\Pi} \tilde{X} F_j d\xi ds.$$

Решения задач (2.14), (2.15) определены с точностью до слагаемого $C\psi_0$, $C = \text{const}$. Для определенности предполагается, что все функции ψ_j , $j \geq 1$, ортогональны ψ_0 в $L_2(\omega)$. Такой выбор функций ψ_j в силу только что полученных условий разрешимости задач (2.14), (2.15) дает формулы для коэффициентов ряда (1.7):

$$\lambda_j = \ln \sin \eta \int_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \frac{ds}{\theta'} - \frac{1}{\pi} \int_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \int_{\Pi} \tilde{X} F_j d\xi ds. \quad (2.16)$$

Из (2.15) для $j = 1$ следует:

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta'} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \ln \sin \eta, \quad x \in \partial\omega, \quad (2.17)$$

а из (2.16) с учетом равенства $F_1 = 0$ вытекает (1.8).

Докажем (1.9). Прямыми вычислениями проверяем, что

$$F_2 = \frac{1}{2} \Delta_\xi \left(\xi_2^2 \left(\frac{k}{\theta'} \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''}{(\theta')^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) v_1 \right) + \frac{2}{\theta'} \frac{\partial B_1}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial \xi_1}.$$

Второе слагаемое в данном равенстве нечетно по ξ_1 , а потому, интегрируя по частям, получаем:

$$\int_{\Pi} \tilde{X} F_2 d\xi = \frac{1}{2} \int_{\Pi} \tilde{X} \Delta_\xi \left(\xi_2^2 \left(\frac{k}{\theta'} \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''}{(\theta')^2} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) v_1 \right) d\xi = 0. \quad (2.18)$$

Из граничного условия (2.17) следует, что $\psi_1(x, \eta) = \psi_{11}(x) \ln \sin \eta$, где ψ_{11} — решение задачи (1.11). Отсюда и из (2.16), (2.18) выводим (1.9).

Лемма 2.2. *Задачи (2.4), (2.6), (2.14), (2.15), (2.16) разрешимы, функции v_j , ψ_j и F_j представимы в виде сумм*

$$v_j(\xi, s, \eta) = \sum_{i=1}^{M_{1j}} \varphi_{ij}(s) v_{ij}(\xi, \eta), \quad F_j(\xi, s, \eta) = \sum_{i=1}^{M_{1j}} \varphi_{ij}(s) F_{ij}(\xi, \eta), \quad \psi_j(x, \eta) = \sum_{i=1}^{M_{2j}} b_{ij}(\eta) \psi_{ij}(x),$$

где M_{ij} — некоторые числа, $\varphi_{ij} \in C^\infty(\partial\omega)$, $\psi_{ij} \in C^\infty(\bar{\omega})$, $v_{ij} \in \mathcal{V}_1(\eta)$, $F_{ij} \in \mathcal{V}_0(\eta)$.

Доказательство. Для $j = 1$ утверждение леммы следует из определения функций v_1 , ψ_1 и F_1 :

$$M_{11} = M_{21} = 1, \quad b_{11}(\eta) = \ln \sin \eta, \quad v_{11} = X, \quad F_{11} = 0, \quad \varphi_{11} = -B_1.$$

Из явного вида функции X следует, что

$$\xi_2^p X \in \mathcal{V}_{p+1}(\eta), \quad \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \in \mathcal{V}_q(\eta), \quad p, q \geq 0. \quad (2.19)$$

Тогда для F_2 выполнено утверждение леммы, откуда в силу задач для v_2 и ψ_2 и леммы 2.1 следует утверждение леммы для v_2 , а также вытекает, что все интегралы в правой части (2.16) определены. Поэтому утверждение леммы для ψ_2 выполнено. Дальнейшее доказательство проводится по индукции; при этом несложно доказать, что

$$\xi_2^p v_{ij} \in \mathcal{V}_{p+1}(\eta), \quad \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_{ij}}{\partial \xi_2^p} \in \mathcal{V}_q(\eta), \quad p, q \geq 0.$$

Для доказательства последних принадлежностей достаточно применить оператор Лапласа к функциям $\xi_2^p v_{ij}$, $p \geq 1$. Результат будет функцией из $\mathcal{V}_{p-1}(\eta)$. Этот факт и равенства $\xi_2^p v_{ij}|_{\xi_2=0} = 0$ в силу теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений дают первую из требуемых принадлежностей. Вторая из требуемых принадлежностей доказывается путем дифференцирования первой. Лемма доказана. \square

Лемма 2.2 обеспечивает существование всех интегралов в (2.14), (2.16).

Основной сложностью исследования зависимости λ_j от η является выяснение характера зависимости интегралов в правой части (2.16) от η , что нельзя сделать без более детального изучения зависимости решений задач (2.4), (2.6) от параметра η . Эту задачу решим в два этапа. Вначале исследуем зависимость от η решения модельной задачи (2.11), а затем полученные результаты применим к конкретным решениям задач (2.4), (2.6). Первое будет сделано в следующем разделе, второму посвящен раздел 4.

3. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Исследование задачи (2.11) начнем с получения оценок для решения. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. Пусть $v, \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \in \mathcal{V}_0(\Pi)$ и выполнено

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v(\xi) d\xi_1 = 0 \quad \text{для всех } \xi_2 > 0. \quad (3.1)$$

Тогда верна оценка:

$$\|v\|_{L_2(\Pi)} \leq 2\pi \left\| \frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(\Pi)}.$$

Доказательство. Для $\xi_2 > 0$ в силу (3.1) и неравенства Пуанкаре имеем:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v^2 d\xi_1 \leq 2\pi^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi_1} \right)^2 d\xi_1.$$

Интегрируя теперь полученное неравенство по $\xi_2 \in (0, +\infty)$, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. \square

Лемма 3.2. Функция X обладает следующими свойствами:

а) $\|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)} = \sqrt{\pi |\ln \sin \eta|}$;

б) для $p \geq 0, q \geq 0, p+q \geq 1$ выполняется

$$\left\| \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} = \sqrt{(p+q)(2(p+q)-1)} \left\| \xi_2^{p+q-1} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)};$$

в) $\xi_2^p X$ непрерывна по $\eta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ в норме $L_2(\Pi)$, $p \geq 0$;

г) $\xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p}$ непрерывна по $\eta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ в норме $L_2(\Pi)$, $p, q \geq 0$.

Доказательство. Существование всех интегралов в утверждении леммы обеспечивают соотношения (2.19). Интегрируя по частям в равенствах

$$\int_{\Pi} \Delta_\xi X d\xi = 0, \quad \int_{\Pi} \xi_2 \Delta_\xi X d\xi = 0, \quad \int_{\Pi} X \Delta_\xi X d\xi = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma(\eta) \cap \partial \Pi} \frac{\partial X}{\partial \xi_2} d\xi_1 &= \pi - 2\eta, & \int_{\Gamma(\eta) \cap \partial \Pi} X d\xi_1 &= -2\eta \ln \sin \eta, \\ \int_{\Pi} |\nabla_\xi X|^2 d\xi &= -\ln \sin \eta & \int_{\gamma(\eta) \cap \partial \Pi} \frac{\partial X}{\partial \xi_2} d\xi_1 &+ \int_{\Gamma(\eta) \cap \partial \Pi} X d\xi_1, \end{aligned}$$

откуда следует пункт а). Пункт б) вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Pi} \xi_2^{2(p+q)} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \Delta_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} d\xi - \\ &= - \int_{\Pi} \xi_2^{2(p+q)} \left| \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \right|^2 d\xi - 2(p+q) \int_{\Pi} \xi_2^{2(p+q)-1} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \frac{\partial^{p+1} X}{\partial \xi_2^{p+1}} d\xi - \\ &= - \left\| \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)}^2 + (p+q)(2(p+q)-1) \left\| \xi_2^{p+q-1} \frac{\partial^p X}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)}^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из принадлежности $X \in \mathcal{V}_1(\eta)$ и явного вида этой функции вытекает, что $\xi_2^p X$ непрерывна по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ в норме $W_2^1(\Pi)$ и непрерывна по $\eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ в норме $L_2(\Pi \cap \{\xi : \xi_2 > 1\})$, $p \geq 0$. Применяя принцип максимума для гармонических функций, нетрудно доказать, что при $\xi \in \overline{\Pi} \cap \{\xi : \xi_2 \geq 1\}$ выполнена оценка

$$|X| \leq C_1 |\operatorname{Re} \ln \sin z| + C_2,$$

где $C_1, C_2 > 0$ — некоторые константы, не зависящие от η и ξ . Так как в правой части данной оценки стоит интегрируемая функция, то в силу теоремы Лебега о предельном переходе функция $\xi_2^p X$ непрерывна по $\eta \in [0, \pi/2]$ в $L_2(\Pi \cap \{\xi : \xi_2 < 1\})$, $p \geq 0$. Пункт в), а также пункт г) для $p = 0$ доказаны. Аналогично тому, как были получены равенства (3.2), легко доказать их и для функции $(X(\xi, \eta + \Delta\eta) - X(\xi, \eta))$, $\eta, \eta + \Delta\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, откуда, учитывая пункт в) и пункт г) для $p = 0$, получаем утверждение пункта г) для $p > 0$. Лемма доказана. \square

Всюду до конца раздела будем предполагать, что решение задачи (2.11) в точках

$$\xi_k^\pm = (\pm\eta + \pi k, 0), \quad k \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяет следующей дифференцируемой асимптотике:

$$v(\xi) = A + O(|\xi - \xi_k^\pm|^{\frac{1}{2}}), \quad \xi \rightarrow \xi_k^\pm. \quad (3.3)$$

Отметим, что функция X удовлетворяет данной асимптотике с $A = \ln \sin \eta$.

Лемма 3.3. Пусть для $F \in \mathcal{V}_0(\eta)$ выполнено (3.1) и условие разрешимости (2.12), а решение задачи (2.11) удовлетворяет асимптотике (3.3). Тогда для этого решения справедливо равенство (3.1) и имеет место равномерная оценка:

$$\|v\|_{W_2^1(\Pi)} \leq C \left(\|F\|_{L_2(\Pi)} + |B| (|\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}} + 1) \right),$$

где C не зависит от F , B и η .

Доказательство. Интегрируя по частям в равенствах

$$0 = \int_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} F d\xi = \int_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} \Delta_\xi v d\xi, \quad 0 = \int_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} \xi_2 F d\xi = \int_{\Pi \cap \{\xi_2 > t\}} \xi_2 \Delta_\xi v d\xi,$$

получаем

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=t} d\xi_1 = 0, \quad t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=t} d\xi_1 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} v \Big|_{\xi_2=t} d\xi_1 = 0,$$

откуда и следует (3.1) для v . Асимптотика (3.3) позволяет использовать эти равенства и при $t = 0$, что в силу граничных условий для v дает:

$$\int_{\gamma(\eta) \cap \partial \Pi} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} d\xi_1 = (2\eta - \pi)B, \quad \int_{\Gamma(\eta) \cap \partial \Pi} v d\xi_1 = -2\eta A.$$

Используя эти равенства, умножим уравнение в (2.11) на v и проинтегрируем по частям, учитывая (3.3). В результате имеем:

$$\pi AB - \|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi)}^2 = (F, v)_{L_2(\Pi)}.$$

Из этого равенства в силу леммы 3.1 выводим:

$$\|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi)}^2 \leq \pi AB + 2\pi \|F\|_{L_2(\Pi)} \|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi)}. \quad (3.4)$$

В силу равенств (3.1) для функции F левая часть условия разрешимости (2.12) может переписана к виду:

$$\int_{\Pi} \tilde{X} F d\xi = \int_{\Pi} X F d\xi.$$

С учетом последнего равенства выразим A из условия разрешимости (2.12) и затем оценим:

$$A = -B \ln \sin \eta + \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} \tilde{X} F d\xi = -B \ln \sin \eta + \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} X F d\xi,$$

$$|A| \leq |B \ln \sin \eta| + \pi^{-1} \|F\|_{L_2(\Pi)} \|X\|_{L_2(\Pi)}.$$

В силу пункта в) леммы 3.2 величина $\|X\|_{L_2(\Pi)}$ ограничена равномерно по η . Учитывая этот факт и подставляя полученную оценку для A в (3.4), получим квадратное неравенство относительно $\|\nabla_{\xi} v\|_{L_2(\Omega)}$. Решая данное квадратное неравенство, приходим к оценке:

$$\|\nabla_{\xi} v\|_{L_2(\Pi)}^2 \leq C (B^2 |\ln \sin \eta| + |B| \|F\|_{L_2(\Pi)}) + \frac{1}{2} \|\nabla_{\xi} v\|_{L_2(\Pi)}^2,$$

$$\|\nabla_{\xi} v\|_{L_2(\Pi)} \leq C \left(\|F\|_{L_2(\Pi)} + |B| \left(|\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}} + 1 \right) \right),$$

где C — константа, не зависящая от F , B и η . Соединяя последнее неравенство с оценкой для $\|v\|_{L_2(\Pi)}$ из леммы 3.1, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. \square

Лемма 3.4. Пусть выполнены условия леммы 3.3, и, кроме того, справедливы принадлежности

$$\xi_2^p F \in \mathcal{V}_p(\eta), \quad \xi_2^{p+q+1} \nabla_{\xi} \frac{\partial^p F}{\partial \xi_2^p} \in \mathcal{V}_q(\eta), \quad p, q \geq 0.$$

Тогда для решения задачи (2.11) справедливы соотношения

$$\xi_2^p v \in \mathcal{V}_{p+1}(\eta), \quad \xi_2^{p+q} \nabla_{\xi} \frac{\partial^p v}{\partial \xi_2^p} \in \mathcal{V}_q(\eta), \quad (3.5)$$

и для $u = v + BX$, $p \geq 0$, $p + q \geq 1$ верны оценки:

$$\|\xi_2^p u\|_{L_2(\Pi)} \leq C \sum_{k=0}^p \|\xi_2^k F\|_{L_2(\Pi)}, \quad (3.6)$$

$$\left\| \xi_2^{p+q} \nabla_{\xi} \frac{\partial^p u}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq C \left(\sum_{k=1}^p \left\| \xi_2^{q+k+1} \frac{\partial^k F}{\partial \xi_2^k} \right\|_{L_2(\Pi)} + \sum_{k=0}^q \|\xi_2^k F\|_{L_2(\Pi)} \right), \quad (3.7)$$

где константы C не зависят от η , F и B , $u = v + BX$.

Доказательство. Так как $v \in \mathcal{V}(\eta)$, то для доказательства (3.5) достаточно проверить интегрируемость соответствующих функций в точках $(\pm\eta + \pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Это легко сделать на основе асимптотик (3.3).

Ясно, что u — решение задачи (2.11) с правой частью F и $B = 0$. Поэтому в силу леммы 3.3 функция u удовлетворяет равенствам (3.1) и оценкам (3.6) с $p = 0$. Кроме того, в силу (2.19) и (3.5), для функции u верны принадлежности (3.5) и асимптотики (3.3) с заменой A на $A + B \ln \sin \eta$. Этот факт гарантирует существование всех интегралов в (3.6), (3.7), а также всех интегралов, приводимых ниже. Всюду в доказательстве через C будем обозначать различные константы, не зависящие от η , B , F и u . Интегрируя по частям аналогично (3.2), с учетом асимптотик (3.3) и соотношения $l \equiv p + q \geq 1$ получаем:

$$\int_{\Pi} \xi_2^{2l} \frac{\partial^p u}{\partial \xi_2^p} \frac{\partial^p F}{\partial \xi_2^p} d\xi = - \left\| \xi_2^l \nabla_{\xi} \frac{\partial^p u}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)}^2 + l(2l-1) \left\| \xi_2^{l-1} \frac{\partial^p u}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)}^2,$$

откуда выводим неравенства

$$\left\| \xi_2^{p+q} \nabla_{\xi} \frac{\partial^p u}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq C \left(\left\| \xi_2^{p+q-1} \nabla_{\xi} \frac{\partial^{p-1} u}{\partial \xi_2^{p-1}} \right\|_{L_2(\Pi)} + \left\| \xi_2^{p+q+1} \frac{\partial^p F}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \right) \quad (3.8)$$

— при $p \geq 1$,

$$\|\xi_2^q \nabla_{\xi} u\|_{L_2(\Pi)} \leq C \left(\|\xi_2^{q-1} u\|_{L_2(\Pi)} + \|\xi_2^q u\|_{L_2(\Pi)} + \|\xi_2^q F\|_{L_2(\Pi)} \right) \quad (3.9)$$

— при $p = 0$. Для $p \geq 1$ функции $\xi_2^p u$ обращаются в нуль при $\xi_2 = 0$. Это позволяет рассмотреть их как решения задачи (2.11) с однородным граничным условием Дирихле на всей оси $O\xi_1$ и правой частью

$$\xi_2^p F + 2p\xi_2^{p-1} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} + p(p-1)\xi_2^{p-2} u.$$

Тогда в силу леммы 3.3 имеем оценки:

$$\begin{aligned} \|\xi_2^p u\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(\|\xi_2^p F\|_{L_2(\Pi)} + \|\xi_2^{p-2} u\|_{L_2(\Pi)} + \|\xi_2^{p-1} \nabla_{\xi} u\|_{L_2(\Pi)}), \quad p \geq 2, \\ \|\xi_2 u\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(\|\xi_2 F\|_{L_2(\Pi)} + \|\nabla_{\xi} u\|_{L_2(\Pi)}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

С помощью (3.9), (3.10) по индукции доказываются неравенства (3.6), а также неравенства (3.7) для $p = 0$. Также по индукции из (3.6), (3.7) для $p = 0$ и (3.8) вытекают оценки (3.7) и для $p > 0$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.5. Пусть выполнены условия леммы 3.3, u , кроме того, $A = A(\eta)$, $B = B(\eta)$, $F = F(\xi, \eta)$ непрерывны по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (последняя в норме $L_2(\Pi)$). Тогда решение задачи (2.11) непрерывно $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ в норме $W_2^1(\Pi)$.

Доказательство. Рассмотрим случай $F \in \mathcal{V}_0^+(\eta)$. Пусть $v = v(\xi, \eta) \in \mathcal{V}_1^+(\eta)$ — решение задачи (2.11), $\eta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $t_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ — произвольная последовательность,

$$u(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) - \chi(\xi_2)(A(\eta) + B(\eta)\xi_2),$$

где χ , напомним, срезающая функция. В силу леммы 3.1 функции $v(\xi, \eta_0 + t_k)$, а значит, и функции $u(\xi, \eta_0 + t_k)$, ограничены равномерно по k в норме $W_2^1(\Pi)$. Выделяя при необходимости из t_k подпоследовательность, заключаем, что $u(\xi, \eta_0 + t_k)$ сходятся к некоторой функции u_* слабо в $W_2^1(\Pi)$. Более того, применяя стандартный диагональный процесс, нетрудно убедиться в существовании подпоследовательности t_k (обозначим ее вновь за t_k), на которой функции $u(\xi, \eta_0 + t_k)$ сходятся к u_* слабо в $W_2^1(\Pi \cap \{\xi_2 < p\})$ и сильно в $L_2(\Pi \cap \{\xi_2 < p\})$ для всех $p \in \mathbb{N}$. Используя данные сходимости, аналогично, например, [21], [61, § 3], нетрудно доказать, что u_* — решение задачи (2.13) с правой частью $(F(\xi, \eta_0) - \Delta_{\xi} \chi(\xi_2)(A(\eta_0) + B(\eta_0)\xi_2))$ и однородными граничными условиями. Ясно, что функция u_* , периодически продолженная по ξ_1 с периодом π , принадлежит $C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geq 0, \xi \neq (\pm\eta + \pi j, 0), j \in \mathbb{Z}\})$. Более того, из краевой задачи для u_* и принадлежности ее к $W_2^1(\Pi)$ вытекает, что на бесконечности эта функция имеет асимптотику (2.7), т. е. является элементом пространства $\mathcal{V}_1(\eta_0)$. Следовательно, в силу леммы 2.1,

$$u_*(\xi) = v(\xi, \eta_0) - \Delta_{\xi} \chi(\xi_2)(A(\eta_0) + B(\eta_0)\xi_2).$$

В случае нечетной функции F данный факт устанавливается еще проще, так как благодаря нечетности граничные условия здесь однородные и нет необходимости вводить функцию u .

Утверждение леммы теперь элементарно доказывается от противного с помощью представления $F = F^+ + F^-$, $F^\pm \in \mathcal{V}_0^\pm(\eta)$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.6. Пусть выполнены условия леммы 3.5, а функции $\xi_2^p F$ и $\xi_2^{p+q+1} \frac{\partial^p F}{\partial \xi_2^p}$, $p, q \geq 0$, непрерывны по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ в норме $L_2(\Pi)$. Тогда функции $\xi_2^p v$, $\xi_2^{p+q} \nabla_{\xi} \frac{\partial^p v}{\partial \xi_2^p}$, где v — решение задачи (2.11), непрерывны по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ в норме $L_2(\Pi)$.

Доказательство. Утверждение леммы для $p = q = 0$ следует из леммы 3.5. Совершенно аналогично доказательству леммы 3.4, оценки (3.6), (3.7) нетрудно доказать и для функций $(u(\xi, \eta + t) + u(\xi, \eta))$, где σ — малое число, $\eta, \eta + t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, $u = v + BX$. В правых частях этих оценок вместо функции F будут стоять функции $(F(\xi, \eta + t) - F(\xi, \eta))$. Эти оценки и пункты в), г) леммы 3.2 доказывают утверждение леммы. Лемма доказана. \square

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ОЦЕНКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФОРМАЛЬНЫХ АСИМПТОТИК

В настоящем разделе будет показана непрерывность по η функций λ_j и v_j , получен ряд оценок, характеризующих поведение этих функций при $\eta \rightarrow 0$, а также будут доказаны равенства $\lambda_j\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $j \geq 1$. Кроме того, будет доказано, что формально построенные в разделе 2 асимптотические разложения собственных элементов являются формальным асимптотическим решением задачи (1.1), (1.2).

Так как $F_1 = 0$, то в силу леммы 3.3 имеем равенство (3.1) для v_{11} . Отсюда и из вида функции F_2 следуют аналогичные равенства и для F_{i2} , что в силу леммы 3.3 влечет выполнение тех же равенств и для v_{i2} . Продолжая рассуждения, по индукции легко доказать, что все функции v_{ij} и F_{ij} удовлетворяют (3.1).

Асимптотики (3.3) для функций v_i легко устанавливаются по индукции достаточно стандартным способом (см., например, [54]). При этом функция v_1 удовлетворяет (3.3) по определению.

Положим $u_j = v_j + B_j X$. Сумму слагаемых, кроме первого, входящих в определение функции F_j , обозначим через \tilde{F}_j . Прямыми вычислениями проверяется, что

$$\begin{aligned} F_j &= \Delta_\xi \left(\frac{\xi_2^2}{2\theta'} \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''}{\theta'} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) v_{j-1} \right) - \frac{2}{\theta'} \frac{\partial B_{j-1}}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} + \tilde{F}_j, \\ \tilde{F}_j &= \hat{F}_j - \frac{\xi_2^2}{2\theta'} \left(\kappa \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''}{\theta'} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) F_{j-1} - \frac{2}{\theta'} \frac{\partial^2 u_{j-1}}{\partial \xi_1 \partial s}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из (3.1) для F_{ij} следует

$$\int_{\Pi} \tilde{X} F_j d\xi = \int_{\Pi} X F_j d\xi.$$

Подставим теперь (4.1) в правую часть этого равенства, проинтегрируем по частям и учтем, что производная $\frac{\partial X}{\partial \xi_1}$ нечетна по ξ_1 , а X — четно:

$$\int_{\Pi} \tilde{X} F_j d\xi = \int_{\Pi} X \tilde{F}_j d\xi,$$

что позволяет переписать равенства (2.14) и (2.16):

$$\psi_j = \frac{1}{\theta'} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} X \tilde{F}_j d\xi, \quad x \in \partial\omega, \quad (4.2)$$

$$\lambda_j = \ln \sin \eta \int_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_{j-1}}{\partial \nu} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \frac{ds}{\theta'} - \frac{1}{\pi} \int_{\partial\omega} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \int_{\Pi} X \tilde{F}_j d\xi ds. \quad (4.3)$$

Используя леммы 2.2, 3.5, 3.6, пункты в), г) леммы 3.2 и (4.2), (4.3), по индукции несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Функции $b_{ij}(\eta)$, $\xi_2^p v_{ij}$, $\xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_{ij}}{\partial \xi_2^p}$, $p, q \geq 0$, непрерывны по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (последние в норме $L_2(\Pi)$).*

Лемма 4.2. *При $\eta \rightarrow 0$ справедливы равенства (1.10),*

$$b_{ij}(\eta) = \hat{b}_{ij} \ln^j \eta + O\left(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}}\right), \quad (4.4)$$

где \hat{b}_{ij} — некоторые константы. Имеют место равномерные по s и $\eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ оценки

$$\begin{aligned} \|\psi_j\|_{C^p(\bar{\omega})} &\leq C(|\ln \eta|^j + 1), & \left\| \xi_2^{p+q+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-1} + 1), \\ \|\xi_2^p v_j\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-1} + 1), & \left\| \xi_2^p \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1), \\ \|F_j\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{3}{2}} + 1), & \|\tilde{F}_j\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}} + 1), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $p, q \geq 0$, $j \geq 1$.

Доказательство. Наряду с (1.10), (4.4), (4.5) будут доказаны равномерные по s и η оценки

$$\|\xi_2^p u_j\|_{L_2(\Pi)} \leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{3}{2}} + 1), \quad \left\| \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p u_j}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{3}{2}} + 1). \quad (4.6)$$

Доказательство проведем индукцией по j . При $j = 1$ утверждение леммы и (4.6) следует из (1.8), определения функций v_1 и ψ_1 и пунктов а)–в) леммы 3.2. Пусть лемма выполнена при $j < N$. Докажем ее для $j = N$. В силу определения функций F_j и \tilde{F}_j и (4.5), (4.6) получаем оценки (4.5) функций F_j , \tilde{F}_j , ψ_j для $j = N$. В свою очередь, последнее неравенство из (4.5) и пункт в) леммы 3.2 позволяют оценить интегралы по Π в (4.2), (4.3):

$$\left| \int_{\Pi} X \tilde{F}_N d\xi \right| \leq C(|\ln \eta|^{N-\frac{5}{2}} + 1),$$

где C не зависит от s , η и ε . Из этой оценки, краевых задач (2.15), (2.17), формул (4.2), (4.3), равенств (1.10), (4.4) для $j < N$ получаем (1.10), (4.4) и для $j = N$. Непосредственно из определения функций F_j , (4.5) для $j < N$ и неравенств (3.6), (3.7) выводим равномерные по η и s оценки

$$\left\| \xi_2^p \frac{\partial^p F_N}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq C(|\ln \eta|^{N-\frac{3}{2}} + 1), \quad \left\| \xi_2^{p+q+1} \frac{\partial^p F_N}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq C(|\ln \eta|^{N-2} + 1).$$

Из этих оценок и леммы 3.4 следует (4.6) для $j = N$. Чтобы доказать теперь оставшиеся неравенства из (4.5) для $j = N$, осталось оценить функцию B_N из граничных условий для v_j на $\Gamma(\eta)$ и применить затем лемму 3.3 и пункты а) и б) леммы 3.2. Необходимая оценка для B_N легко вытекает из (4.5) для $j = N - 1$ и леммы 2.2:

$$|B_j| \leq C(|\ln \eta|^{j-1} + 1),$$

откуда уже и следует (4.5) для $j = N$. Лемма доказана. \square

Докажем, что

$$\lambda_j \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad j \geq 1.$$

Очевидно, что

$$X \left(\xi, \frac{\pi}{2} \right) \equiv 0,$$

а потому

$$v_1 \equiv 0, \quad \psi_1 \equiv 0, \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда в силу задач для v_2 и ψ_2 вытекает:

$$F_2 \equiv 0, \quad A_2 = B_2 = 0, \quad v_2 \equiv 0, \quad \psi_2 \equiv 0, \quad \lambda_2 = 0 \quad \text{при} \quad \eta = \frac{\pi}{2},$$

и т. д.

Формальное построение завершим доказательством того, что построенные формальные асимптотики для λ_ε и ψ_ε являются формальным асимптотическим решением задачи (1.1), (1.2). Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.3. Для любых $p \geq 2$, $R > 1$ справедливы равномерные по R , s и η оценки:

$$\|v_j\|_{L_2(\Pi \cap \{\xi_2 > R\})} \leq CR^{-p+1}(|\ln \eta|^{j-1} + 1), \quad \|\nabla_\xi v_j\|_{L_2(\Pi \cap \{\xi_2 > R\})} \leq CR^{-p+1}(|\ln \eta|^{j-1} + 1).$$

Доказательство. Для всякой функции $v \in \mathcal{V}(\eta)$ при $\xi_2 \geq R$ в силу неравенства Коши–Буняковского выполняется

$$|v(\xi)| = \left| \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} v(\xi_1, t) dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2p-1}} \xi_2^{-p+\frac{1}{2}} \left\| \xi_2^p \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\{\xi_2 > 0\})}.$$

Последовательно полагая в полученном неравенстве

$$v = v_j, \quad v = \frac{\partial v_j}{\partial \xi_2}, \quad v = \frac{\partial v_j}{\partial \xi_1}$$

и интегрируя затем по $L_2(\Pi \cap \{\xi_2 > R\})$, выводим:

$$\begin{aligned} \|v_j\|_{L_2(\Pi \cap \{\xi_2 > R\})} &\leq \frac{R^{-p+1}}{\sqrt{(2p-1)(2p-2)}} \|\xi_2^p \nabla_\xi v_j\|_{L_2(\Pi \cap \{\xi_2 > R\})}, \\ \|\nabla_\xi v_j\|_{L_2(\Pi \cap \{\xi_2 > R\})} &\leq \frac{R^{-p+1}}{\sqrt{(2p-1)(2p-2)}} \|\xi_2^p \nabla_\xi \frac{\partial v_j}{\partial \xi_2}\|_{L_2(\Pi \cap \{\xi_2 > R\})}. \end{aligned}$$

Правые части в этих неравенствах оцениваются с помощью (4.5), что и доказывает лемму. \square

Обозначим

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon, N} &= \lambda_0 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \lambda_j(\eta), \quad \psi_{\varepsilon, N}(x) = \psi_{\varepsilon, N}^{ex}(x, \eta) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) \psi_{\varepsilon, N}^{bl}(\xi, s, \eta), \\ \psi_{\varepsilon, N}^{ex}(x, \eta) &= \psi_0(x) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j \psi_j(x, \eta), \quad \psi_{\varepsilon, N}^{bl}(\xi, s, \eta) = \sum_{j=1}^N \varepsilon^j v_j(\xi, s, \eta). \end{aligned}$$

Здесь c_0 — малое фиксированное число, такое что на множестве $\{x : |\tau| < c_0\}$ координаты (s, τ) определены корректно, и

$$N = 1 - \tau k(s) \neq 0, \quad x \in \{x : |\tau| < c_0\}. \quad (4.7)$$

Обозначим: $\widehat{\omega} = \omega \cup \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon$.

Лемма 4.4. *Функции $\lambda_{\varepsilon, N}$ и $\psi_{\varepsilon, N} \in W_2^1(\omega) \cap C^\infty(\widehat{\omega})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к λ_0 и ψ_0 (последняя — в $W_2^1(\omega)$) и являются решениями задачи*

$$-\Delta \psi_{\varepsilon, N} = \lambda_{\varepsilon, N} \psi_{\varepsilon, N} + f_{\varepsilon, N}, \quad x \in \omega, \quad \psi_{\varepsilon, N} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_{\varepsilon, N} = B_{\varepsilon, N}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где

$$B_{\varepsilon, N} = \varepsilon^N \frac{\partial \psi_N}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\omega,$$

причем верны оценки

$$\|f_{\varepsilon, N}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)), \quad \|B_{\varepsilon, N}\|_{C^2(\partial\omega)} = O(\varepsilon^N(|\ln \eta|^N + 1)).$$

Доказательство. Гладкость функции $\psi_{\varepsilon, N}$ очевидна. Сходимости для $\lambda_{\varepsilon, N}$ и $\psi_{\varepsilon, N}$ проверяются непосредственными вычислениями с использованием леммы 4.2. Выполнение граничных условий на γ_ε и Γ_ε следует непосредственно из (2.4). Оценка для $B_{\varepsilon, N}$ является прямым следствием леммы 4.2. Прямыми вычислениями легко проверить, что

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon, N} &= -\sum_{j=1}^3 f_{\varepsilon, N}^{(j)}, & f_{\varepsilon, N}^{(1)} &= (\Delta + \lambda_{\varepsilon, N}) \psi_{\varepsilon, N}^{ex}, \\ f_{\varepsilon, N}^{(2)} &= \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) (\Delta + \lambda_{\varepsilon, N}) \psi_{\varepsilon, N}^{bl}, & f_{\varepsilon, N}^{(3)} &= 2 \left(\nabla \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right), \nabla \psi_{\varepsilon, N}^{bl} \right) + \psi_{\varepsilon, N}^{bl} \Delta \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right). \end{aligned}$$

Из лемм 2.2, 4.2 и уравнений (2.15) вытекает:

$$\|f_{\varepsilon, N}^{(1)}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^{N+1}(|\ln \eta|^{N+1} + 1)).$$

В силу уравнений (2.6) и леммы 4.2 функция $f_{\varepsilon, N}^{(2)}$ имеет вид конечной суммы

$$f_{\varepsilon, N}^{(2)} = \varepsilon^{N-1} \sum_k f_{\varepsilon, N, k}^{(2)}(\xi, s),$$

где

$$\|f_{\varepsilon, N, k}^{(2)}(\xi, s)\|_{L_2(\Pi)} = O(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1),$$

причем последнее равенство равномерно по s . Поэтому для $f_{\varepsilon, N}^{(2)}$ верна оценка:

$$\|f_{\varepsilon, N}^{(2)}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)),$$

Используя лемму 4.3 с $R = \varepsilon^{-1}$, $p = N + 2$, приходим к соотношению

$$\|f_{\varepsilon, N}^{(3)}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^N).$$

Полученные оценки для $f_{\varepsilon, N}^{(j)}$ дают требуемую оценку для $f_{\varepsilon, N}$. Лемма доказана. \square

5. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИК В СЛУЧАЕ ПРОСТОГО ПРЕДЕЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

В настоящем разделе мы завершим доказательство теоремы 1.1, обосновав формально построенные в предыдущих разделах асимптотики.

Всюду в разделе, не оговаривая особо, будем считать выполненными условия теоремы 1.1. Также всюду в разделе задачу (1.6) будем называть предельной. Для обоснования асимптотик нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть Q — произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел предельной задачи. Тогда при $\lambda \in Q$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f, \quad x \in \omega, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (5.1)$$

однозначно разрешима, и для ее решения при малых ε справедлива равномерная оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\omega)}, \quad (5.2)$$

где C не зависит от ε , η , λ и f .

Доказательство. Разрешимость задачи (5.1) для каждого фиксированного ε следует из теории обобщенных решений эллиптических краевых задач. Ясно, что однозначная разрешимость является следствием оценки (5.2). Последнюю докажем от противного. Пусть найдутся последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $f_k \in L_2(\omega)$, $\lambda_k \in Q$, на которых выполнено:

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\omega)} \geq k \|f_k\|_{L_2(\omega)}, \quad (5.3)$$

Без ограничения общности нормируем функцию u_ε : $\|u_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = 1$. Умножая обе части уравнения в (5.1) на u_ε и интегрируя по частям, легко проверить, что

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\omega)} \leq C (\|f_k\|_{L_2(\omega)} + 1),$$

откуда и из (5.3) следует:

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_{W_2^1(\omega)} \leq C, \quad \|f_k\|_{L_2(\omega)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Здесь C — константа, не зависящая от k . Выделяя при необходимости из $\{k\}$ подпоследовательность, можно считать, что

$$\lambda_k \rightarrow \lambda_* \in Q, \quad u_{\varepsilon_k} \rightarrow u_* \quad \text{слабо в } W_2^1(\omega) \text{ и сильно в } L_2(\omega). \quad (5.5)$$

Из [65, 66, 91] следует, что $u_* = 0$ на $\partial\omega$. Так как $\|u_{\varepsilon_k}\|_{L_2(\omega)} = 1$, то $u_* \not\equiv 0$. Умножим теперь уравнение из (5.1) на произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(\bar{\omega})$, равную нулю на границе ω , и проинтегрируем по частям:

$$(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla \varphi)_{L_2(\omega)} = (\lambda_k u_{\varepsilon_k} + f_k, \varphi)_{L_2(\omega)}. \quad (5.6)$$

Переходя в данном равенстве к пределу при $k \rightarrow \infty$ с учетом (5.4), (5.5) получаем, что u_* — нетривиальное решение краевой задачи:

$$-\Delta u_* = \lambda_* u_*, \quad x \in \omega, \quad u_* = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad (5.7)$$

т. е. $\lambda_* \in Q$ — собственное значение предельной задачи, что дает противоречие. Лемма доказана. \square

Лемма 5.2. *Пусть λ_0 — p -кратное собственное значение предельной задачи, $\lambda_\varepsilon^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$ — собственные значения задачи (1.1), (1.2), сходящиеся к λ_0 , взятые с учетом кратности, $\psi_\varepsilon^{(j)}$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\omega)$. Тогда при λ , близких к λ_0 , для решения задачи (5.1) имеет место представление*

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^p \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \int_\omega \psi_\varepsilon^{(j)} f \, dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (5.8)$$

где функция \tilde{u}_ε голоморфна по λ в норме $W_2^1(\omega)$, ортогональна всем $\psi_\varepsilon^{(j)}$ в $L_2(\Omega)$ и удовлетворяет равномерной оценке

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\omega)}, \quad (5.9)$$

где C не зависит от ε , η , λ и f .

Доказательство. Для доказательства представления (5.8) достаточно стандартным образом переписать краевую задачу (5.1) к операторному уравнению и применить затем результаты [43, гл. 5, §3.5]. Легко проверить, что \tilde{u}_ε — решение задачи (5.1) с правой частью $f - \sum_{j=1}^p \psi_\varepsilon^{(j)}(f, \psi_\varepsilon^{(j)})_{L_2(\omega)}$.

Пусть $\mathcal{B}_t(\lambda_0)$ — открытый круг в комплексной плоскости фиксированного радиуса t с центром в точке λ_0 . Радиус t выберем так, чтобы $\mathcal{B}_t(\lambda_0)$ не содержал собственных значений предельной задачи, кроме λ_0 . Применяя теперь лемму 5.1 к \tilde{u}_ε с $Q = \partial\mathcal{B}_t(\lambda_0)$, получаем оценку (5.9) для $\lambda \in \partial\mathcal{B}_t(\lambda_0)$. Следовательно, в силу принципа максимума модуля для голоморфных функций, неравенство (5.9) справедливо и для $\lambda \in \mathcal{B}_t(\lambda_0)$. Лемма доказана. \square

Из леммы 4.4 следует, что функция

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon, \mathbf{N}}(x) = \psi_{\varepsilon, \mathbf{N}}(x) + \tau \chi \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right) \mathbf{B}_{\varepsilon, \mathbf{N}} \in W_2^1(\omega)$$

сходится к ψ_0 в $W_2^1(\omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и является решением задачи (5.1) с правой частью $\tilde{f}_{\varepsilon, \mathbf{N}}$, удовлетворяющей оценке:

$$\|\tilde{f}_{\varepsilon, \mathbf{N}}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)).$$

Применяя лемму 5.2 к функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon, \mathbf{N}}$, в силу последней оценки получаем:

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon, \mathbf{N}} = \frac{\psi_\varepsilon(f_{\varepsilon, \mathbf{N}}, \psi_\varepsilon)_{L_2(\omega)}}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon, \mathbf{N}}} + \tilde{u}_\varepsilon, \quad \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)). \quad (5.10)$$

Так как

$$\|\tilde{\psi}_{\varepsilon, \mathbf{N}} - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = 1 + o(1), \quad \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = 1,$$

то из (5.10) выводим:

$$1 + o(1) \leq \frac{C \varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)}{|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon, \mathbf{N}}|},$$

где константа C не зависит от ε и η . Следовательно,

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon, \mathbf{N}}| = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)).$$

Таким образом, асимптотика λ_ε действительно имеет вид (1.7). Коэффициенты этой асимптотики были определены в разделе 2 (см. (2.16)) и удовлетворяют всем утверждениям теоремы 1.1. Из (5.10), сходимости $\tilde{\psi}_{\varepsilon, \mathbf{N}} \rightarrow \psi_0$, определения $\tilde{\psi}_{\varepsilon, \mathbf{N}}$ и оценки для $\mathbf{B}_{\varepsilon, \mathbf{N}}$ из леммы 4.4 следует, что собственная функция задачи (1.1), (1.2)

$$\hat{\psi}_\varepsilon = \frac{(f, \psi_\varepsilon)_{L_2(\omega)}}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon, \mathbf{N}}} \psi_\varepsilon,$$

соответствующая λ_ε , сходится в $W_2^1(\omega)$ к ψ_0 и удовлетворяет оценке

$$\|\hat{\psi}_\varepsilon - \psi_{\varepsilon, \mathbf{N}}\|_{W_2^1(\omega)} = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)).$$

Следовательно, собственная функция, соответствующая λ_ε , может быть выбрана так, что в норме $W_2^1(\omega)$ будет иметь асимптотическое разложение:

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_0(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(x, \eta) + \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j(\xi, s, \eta), \quad (5.11)$$

где, напомним, ψ_j — решения краевых задач (2.14), (2.15), ξ — из (2.3), v_1 — из (2.10), X — из (2.8), v_j — решения (2.4), (2.6). Теорема 1.1 полностью доказана.

6. СЛУЧАЙ КРАТНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

В настоящем разделе мы доказываем теорему 1.2. Как уже было отмечено в начале главы, собственные значения задачи (1.1), (1.2) сходятся к предельным собственным значениям с сохранением кратности. Согласно результатам [65, 66, 91], отсюда и из двукратности λ_0 следует, что к λ_0 сходятся либо два простых, либо одно двукратное собственное значение задачи (1.1), (1.2). Следующая лемма уточняет данный факт.

Лемма 6.1. *В условиях теоремы 1.2 к двукратному собственному значению λ_0 сходится двукратное собственное значение λ_ε .*

Доказательство. Пусть $\psi_\varepsilon^{(1)}$ — нормированная в $L_2(\omega)$ собственная функция, соответствующая λ_ε . Выделяя при необходимости из $\{\varepsilon\}$ подпоследовательность, рассуждениями, аналогичными доказательству леммы 5.1 (см. (5.4), (5.5), (5.6), (5.7)), несложно доказать сходимость $L_2(\omega)$:

$$\psi_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{a}_4 \psi_0^+ + \mathbf{a}_5 \psi_0^-, \quad \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5 = \text{const}. \quad (6.1)$$

В силу строгой периодичности множества γ_ε заключаем, что

$$\psi_\varepsilon^{(2)}(r, \theta) = \psi_\varepsilon^{(1)}\left(r, \theta + \left[\frac{N}{4n}\right]\right),$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа, $\psi_\varepsilon^{(2)}$ — собственная функция, соответствующая λ_ε . Из (6.1) и определения функций ψ_0^\pm следует сходимость

$$\psi_\varepsilon^{(2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\mathbf{a}_4 \psi_0^- + \mathbf{a}_5 \psi_0^+. \quad (6.2)$$

Правые части (6.1), (6.2) ортогональны в $L_2(\Omega)$, а потому $\psi_\varepsilon^{(j)}$ линейно независимы. Следовательно, λ_ε — двукратное собственное значение. Лемма доказана. \square

Идея доказательства леммы 6.1 была заимствована из [24].

Теорема 1.2 для $\eta = \text{const}$ была доказана в [22]. Случай произвольной функции η будем доказывать также, как и теорему 1.1: вначале построим формальные асимптотики, а затем строго их обоснуем. Следует отметить, что формальное построение асимптотик одинаково как для случая $\eta = \text{const}$, так и для $\eta = \eta(\varepsilon)$. Поэтому здесь мы пользуемся формальным построением из [22]. Кратко его опишем. Асимптотика собственного значения λ_ε строилась в виде (1.7), а асимптотики соответствующих собственных функций — в виде суммы внешних разложений

$$\psi_\varepsilon^{ex, \pm}(\mathbf{x}, \eta) = J_n(\sqrt{\lambda_\varepsilon} r) \Upsilon^\pm(n\theta) \quad (6.3)$$

и пограничных слоев

$$\psi_\varepsilon^{bl, \pm}(\xi, \theta, \eta) = \Upsilon^\pm(n\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^+(\xi, \eta) \pm \Upsilon^\mp(n\theta) \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^-(\xi, \eta),$$

где растянутые переменные ξ определяются согласно (2.3) и имеют следующий вид:

$$\xi_1 = (1 - r)\varepsilon^{-1}, \quad \xi_2 = \theta\varepsilon^{-1}. \quad (6.4)$$

Функции $\psi_\varepsilon^{ex, \pm}$ удовлетворяют уравнению (1.1) при любом λ_ε , но не удовлетворяют требуемым краевым условиям (1.2). Чтобы добиться последних, как и ранее, вводится пограничный слой. Краевые задачи для коэффициентов пограничного слоя выводятся аналогично (2.4), (2.6). При выводе уравнений для v_i^\pm уравнение (1.1) следует умножать на r^2 , а при выводе граничных условий необходимо подставить ряд (1.7) в (6.3) и разложить затем $\psi_\varepsilon^{ex, \pm}$ в ряд Тейлора по степеням ε . В результате краевые задачи для v_i^\pm принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_j^\pm &= F_j^\pm, & \xi_2 > 0, \\ v_j^+ &= -\frac{J'_n(\sqrt{\lambda_0})}{2\sqrt{\lambda_0}} \lambda_j + \mathcal{P}_j(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}), & v_j^- = 0, & \xi \in \Gamma(\eta), \\ \frac{\partial v_j^+}{\partial \xi_2} &= \mathcal{G}_j(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}), & \frac{\partial v_j^-}{\partial \xi_2} = 0, & \xi \in \gamma(\eta), \end{aligned} \quad (6.5)$$

где обозначено

$$F_j^\pm = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) v_{j-1}^\pm - \left(\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} + \xi_2^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) v_{j-2}^\pm + \sum_{p=0}^2 a_p \xi_2^p \sum_{q=0}^{j-p-3} \lambda_q v_{j-p-q-2}^\pm \pm 2n \frac{\partial}{\partial \xi_1} v_{j-1}^\mp.$$

Здесь $v_{-1}^\pm = v_0^\pm = 0$, \mathcal{P}_j и \mathcal{G}_j — многочлены по $\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}$, причем для всякого входящего в них одночлена $\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_{j-1}^{k_{j-1}}$ выполняется $k_1 + \dots + k_{j-1} = j$ (для \mathcal{P}_j) и $k_1 + \dots + k_{j-1} = j-1$ (для \mathcal{G}_j). В частности,

$$\mathcal{P}_1 = 0, \quad \mathcal{G}_1 = \sqrt{\lambda_0} J'_n(\sqrt{\lambda_0}).$$

На основе леммы 2.1 совершенно аналогично доказательству леммы 2.2 устанавливается, что задачи (6.5) однозначно разрешимы, $v_j^\pm \in \mathcal{V}_1^\pm(\eta)$, а условия разрешимости дают формулы для λ_j :

$$\lambda_j = \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{J'_n(\sqrt{\lambda_0})} \left(\mathcal{P}_j + \mathcal{G}_j \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} \tilde{X} \tilde{F}_j^+ d\xi \right).$$

Справедливо равенство

$$v_1^+ = -\sqrt{\lambda_0} J'_n(\sqrt{\lambda_0}) X.$$

Выясним характер зависимости функций v_j^\pm и λ_j от η . Используя леммы 3.1, по индукции легко установить, что равенства (3.1) выполнены для функций v_j^\pm , $j \geq 1$. Пусть

$$\hat{F}_j^+ = F_j^+ - \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right) v_{j-1}^+.$$

Прямыми вычислениями проверяется, что

$$F_j^+ = \Delta_\xi \left(\frac{1}{2} \xi_2^2 \frac{\partial v_{j-1}^+}{\partial \xi_2} \right) + \tilde{F}_j^+, \quad \tilde{F}_j^+ = \hat{F}_j^+ - \frac{1}{2} \xi_2^2 F_{j-1}^+.$$

Отсюда и из равенств (3.1) для v_j^\pm следует:

$$\lambda_j = \frac{2\sqrt{\lambda_0}}{J'_n(\sqrt{\lambda_0})} \left(\mathcal{P}_j + \mathcal{G}_j \ln \sin \eta - \frac{1}{\pi} \int_{\Pi} X \tilde{F}_j^+ d\xi \right).$$

Аналогично леммам 4.1, 4.2 и 4.4 доказываются следующие утверждения.

Лемма 6.2. *Функции $\lambda_j(\eta)$, $\xi_2^p v_j^\pm$, $\xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j^\pm}{\partial \xi_2^p}$, $p, q \geq 0$ непрерывны по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ (последние в норме $L_2(\Pi)$).*

Лемма 6.3. *При $\eta \rightarrow 0$ справедливы равенства (1.13). Выполнены равномерные по η оценки ($p, q \geq 0$):*

$$\begin{aligned} \|F_j^+\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{3}{2}} + 1), & \left\| \xi_2^{p+q+1} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j^+}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-1} + 1), \\ \|\tilde{F}_j^+\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{5}{2}} + 1), & \left\| \xi_2^p \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j^+}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1), \\ \|F_j^-\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1), & \|\xi_2^p v_j^+\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-1} + 1), \\ \|\xi_2^p v_j^-\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1), & \left\| \xi_2^{p+q} \nabla_\xi \frac{\partial^p v_j^-}{\partial \xi_2^p} \right\|_{L_2(\Pi)} &\leq C(|\ln \eta|^{j-\frac{1}{2}} + 1). \end{aligned}$$

Формулы $\lambda_j\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ устанавливаются так же, как и в доказательстве теоремы 1.1.

Обозначим через $\lambda_{\varepsilon, N}$ частичную сумму ряда (1.7), построенного в настоящем разделе:

$$\psi_{\varepsilon, N}^\pm(x) = J_n(\sqrt{\lambda_{\varepsilon, N} r}) Y^\pm(n\theta) + \chi(1-r) \psi_{\varepsilon, N}^{in, \pm}(\xi, \theta, \eta),$$

$$\psi_{\varepsilon, N}^{in, \pm}(\xi, \theta, \eta) = \Upsilon^{\pm}(n\theta) \sum_{j=1}^N \varepsilon^j v_j^{\pm}(\xi, \eta) \pm \Upsilon^{\mp}(n\theta) \varepsilon \sum_{j=1}^{N-1} \varepsilon^j v_j^{\mp}(\xi, \eta).$$

Следующая лемма утверждает, что формально построенные асимптотики — формальное асимптотическое решение.

Лемма 6.4. *Функции $\lambda_{\varepsilon, N}$ и $\psi_{\varepsilon, N}^{\pm} \in W_2^1(\omega) \cap C^\infty(\widehat{\omega})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к λ_0 и ψ_0^{\pm} (последние — в $W_2^1(\omega)$) и являются решениями задачи*

$$\begin{aligned} -\Delta \psi_{\varepsilon, N}^{\pm} &= \lambda_{\varepsilon, N} \psi_{\varepsilon, N}^{\pm} + f_{\varepsilon, N}^{\pm}, \quad x \in \omega, \\ \psi_{\varepsilon, N}^{\pm} &= A_{\varepsilon, N} \Upsilon^{\pm}(n\theta) \quad x \in \gamma_{\varepsilon}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \psi_{\varepsilon, N}^{\pm} = B_{\varepsilon, N} \Upsilon^{\pm}(n\theta), \quad x \in \Gamma_{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где $A_{\varepsilon, N}$, $B_{\varepsilon, N}$ не зависят от θ . Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \|f_{\varepsilon, N}^{\pm}\|_{L_2(\omega)} &= O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)), \\ |A_{\varepsilon, N}| &= O(\varepsilon^{N+1}(|\ln \eta|^{N+1} + 1)), \quad |B_{\varepsilon, N}| = O(\varepsilon^N(|\ln \eta|^N + 1)). \end{aligned}$$

Переходим к обоснованию асимптотик. Функции

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon, N}^{\pm}(x) = \psi_{\varepsilon, N}^{\pm}(x) - \chi(1-r)(A_{\varepsilon, N} + B_{\varepsilon, N}(1-r))\Upsilon^{\pm}(n\theta)$$

являются решениями задач (5.1) с правыми частями $f = \tilde{f}_{\varepsilon, N}^{\pm}$, для которых выполнены оценки

$$\|\tilde{f}_{\varepsilon, N}^{\pm}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)),$$

а потому к ним применимо представление (5.8):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{\varepsilon, N}^{\pm} &= \frac{1}{\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon, N}} \sum_{j=1}^2 \psi_{\varepsilon}^{(j)} \int_{\Omega} \tilde{f}_{\varepsilon, N}^{\pm} \psi_{\varepsilon}^{(j)} dx + \tilde{u}_{\varepsilon}^{\pm}, \\ \|\tilde{u}_{\varepsilon}^{\pm}\|_{L_2(\omega)} &\leq C \|\tilde{f}_{\varepsilon, N}^{\pm}\|_{L_2(\omega)} \leq C \varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1), \end{aligned} \tag{6.6}$$

где C не зависит от ε и η . Напомним, $\psi_{\varepsilon}^{(j)}$ — ортонормированные в $L_2(\omega)$ собственные функции, соответствующие λ_{ε} . Так как

$$\|\tilde{\psi}_{\varepsilon, N}^{\pm} - \tilde{u}_{\varepsilon}^{\pm}\|_{L_2(\omega)} \rightarrow \|\psi_0^{\pm}\|_{L_2(\omega)}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

то из (6.6) следует оценка

$$|\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon, N}| = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)),$$

откуда делаем вывод, что асимптотика λ_{ε} совпадает с построенным в этом разделе рядом (1.7). Обозначим

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon}^{\pm} = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon} - \lambda_{\varepsilon, N}} \sum_{j=1}^2 \psi_{\varepsilon}^{(j)} \int_{\Omega} \tilde{f}_{\varepsilon, N}^{\pm} \psi_{\varepsilon}^{(j)} dx.$$

Ясно, что $\tilde{\psi}_{\varepsilon}^{\pm}$ — собственные функции, соответствующие λ_{ε} и сходящиеся к собственным функциям задачи (1.6): $\tilde{\psi}_{\varepsilon}^{\pm} \rightarrow \psi_0^{\pm}$. Из (6.6) в силу определения функций $\tilde{\psi}_{\varepsilon, N}^{\pm}$ и утверждения леммы 6.4 для величин $A_{\varepsilon, N}$ и $B_{\varepsilon, N}$ вытекают равенства

$$\|\tilde{\psi}_{\varepsilon}^{\pm} - \psi_{\varepsilon, N}^{\pm}\|_{W_2^1(\omega)} = O(\varepsilon^{N-\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{N-\frac{1}{2}} + 1)).$$

Следовательно, собственные функции, соответствующие λ_{ε} , можно выбрать таким образом, что в норме $W_2^1(\omega)$ они будут удовлетворять асимптотическим разложениям

$$\psi_{\varepsilon}^{\pm}(x) = J_n(\sqrt{\lambda_{\varepsilon} r}) \Upsilon^{\pm}(n\theta) + \chi(1-r) \left(\Upsilon^{\pm}(n\theta) \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\pm}(\xi, \eta) \pm \Upsilon^{\mp}(n\theta) \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j v_j^{\mp}(\xi, \eta) \right), \tag{6.7}$$

где под λ_{ε} понимается асимптотический ряд (1.7), построенный в данном разделе, и, Напомним, ξ — из (6.4), v_j^{\pm} — решения краевых задач (6.5). Теорема 1.2 полностью доказана.

ГЛАВА 3

**ЗАДАЧА В КРУГЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ
ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ:
УСРЕДНЕННОЕ ТРЕТЬЕ КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ**

7. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ГЛАВЫ

Вторая глава посвящена изучению краевой задачи в единичном круге с периодическим чередованием граничных условий. Опишем постановку задачи. Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты на плоскости, (r, θ) — соответствующие полярные координаты, D — единичный круг с центром в нуле. На границе круга D выберем периодическое множество γ_ε , состоящее из N одинаковых непересекающихся дуг длиной $2\varepsilon\eta$ каждая, где N — большой натуральный параметр, $\varepsilon = 2N^{-1}$, а $\eta = \eta(\varepsilon)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству $0 < \eta < \frac{\pi}{2}$. Каждая из этих дуг получена из соседней поворотом вокруг нуля на угол $\varepsilon\pi$. Считаем, что множество γ_ε симметрично относительно оси Ox_1 , т. е. одна из дуг, входящее в это множество, имеет вид $\{x : r = 1, |\theta| < \varepsilon\eta(\varepsilon)\}$. Обозначим через Γ_ε дополнение множества $\overline{\gamma_\varepsilon}$ до границы круга D , см. рис. 2.

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in D, \quad (7.1)$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon. \quad (7.2)$$

Исследуется случай, когда при усреднении возникает третье краевое условие на границе. Согласно [66, 91], для этого нужно предположить выполнение следующего равенства для функции η :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} = -A, \quad (7.3)$$

где A — некоторая константа. В этом случае собственные значения и собственные функции задачи (7.1), (7.2) сходятся к собственным значениям и собственным функциям задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in D, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + A \right) \psi_0 = 0, \quad x \in \partial D. \quad (7.4)$$

Собственные значения сходятся с сохранением совокупной кратности. При этом сходимости соответствующих спектральных проекторов выполнена в смысле сильной сходимости в $L_2(D)$ и слабой в $W_2^1(D)$. Коэффициент A в усредненном краевом условии в (7.4) неотрицателен. В случае $A > 0$ мы имеем дело с третьим краевым условием, в частном случае $A = 0$ — с краевым условием Неймана.

Собственные значения и соответствующие собственные функции усредненной задачи (7.4) легко находятся с помощью разделения переменных:

$$\sqrt{\lambda_0} J_n'(\sqrt{\lambda_0}) + A J_n(\sqrt{\lambda_0}) = 0, \quad (7.5)$$

где J_n — функции Бесселя неотрицательного целого порядка $n \geq 0$, а соответствующие собственные функции определяются равенствами

$$\psi_0(x) = J_0(\sqrt{\lambda_0}r) \quad (7.6)$$

при $n = 0$ и

$$\psi_0^\pm(x) = J_n(\sqrt{\lambda_0}r) \phi^\pm(n\theta), \quad \phi^+(t) = \cos t, \quad \phi^-(t) = \sin(t), \quad (7.7)$$

для $n > 0$.

Следует подчеркнуть, что задача (7.4) может иметь собственные значения различной кратности, а не только простые или двукратные собственные значения, как может показаться из формул (7.6), (7.7). Кратность больше двух может возникать по причине того, что для некоторых значений A корни уравнений (7.5) могут совпадать для различных n . Доказательство этого факта приводится в Приложении в конце главы.

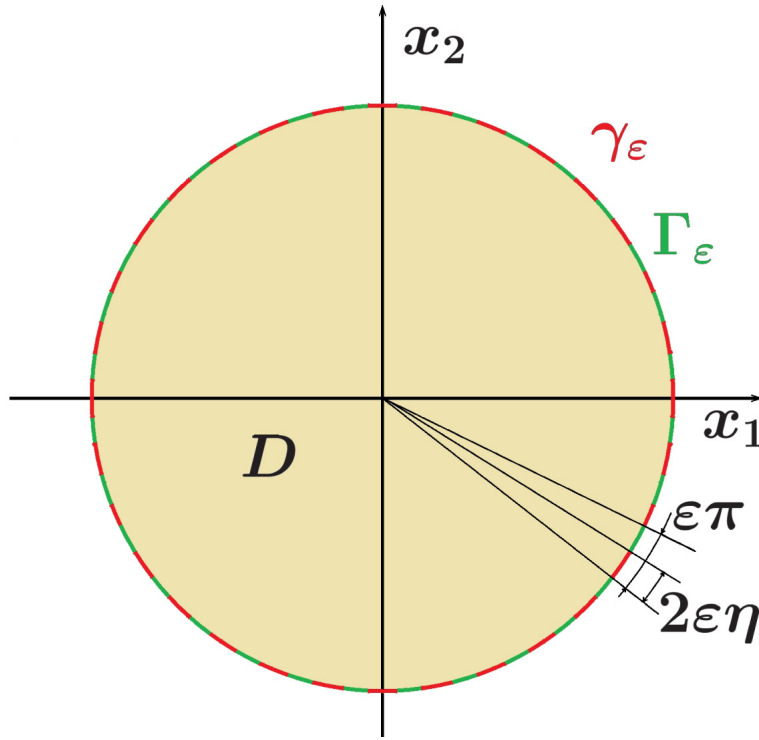


Рис. 2. Единичный круг с частым периодическим чередованием краевых условий

Обозначим:

$$\mu(\varepsilon) = (\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} + A. \quad (7.8)$$

Согласно (7.3), функция $\mu = \mu(\varepsilon)$ является бесконечно малой при $\varepsilon \rightarrow +0$. Эту функцию μ будем рассматривать как новый малый параметр вместо μ ; он оказывается более удобным для формулировки результатов и вычислений в рамках главы. Функция η выражается через μ следующим образом:

$$\eta(\varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon(A+\mu(\varepsilon))}}. \quad (7.9)$$

На бесконечно малую функцию μ мы накладываем следующее условие, которое упрощает некоторые вычисления в дальнейших исследованиях. А именно, мы предполагаем, что если

$$A \neq 0 \quad \text{и} \quad c\varepsilon^3 \leq |\mu(\varepsilon)| \leq c^{-1}\varepsilon^3 \quad (7.10)$$

с некоторой фиксированной константой $c > 0$ при достаточно малых ε , то

$$\mu(\varepsilon) = c\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5), \quad c = \text{const}. \quad (7.11)$$

Основной результат главы выглядит следующим образом.

Теорема 7.1. Пусть λ_0 — корень уравнения (7.5) для $n \geq 0$, и если он одновременно является корнем этого же уравнения для некоторого другого $m \geq 0$, то пусть выполнено условие (7.10), (7.11). Тогда существует единственное собственное значение λ_ε задачи (7.1), (7.2), сходящееся к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow +0$. Это собственное значение имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon^i \Lambda_i(\mu), \quad (7.12)$$

где $\Lambda_0(\mu)$ — корень уравнения

$$\sqrt{\Lambda_0} J'_n(\sqrt{\Lambda_0}) + (A + \mu) J_n(\sqrt{\Lambda_0}) = 0, \quad \Lambda_0(0) = \lambda_0, \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_3(\mu) &= -\frac{\zeta(3)}{4} \frac{(A + \mu)^2 (\Lambda_0(\mu) + 2n^2) \Lambda_0(\mu)}{\Lambda_0(\mu) - n^2 + (A + \mu)^2}, \\ \Lambda_4(\mu) &= \frac{\pi^4}{5760} \frac{(A + \mu)^2 (8\Lambda_0(\mu) + 1) \Lambda_0(\mu)}{\Lambda_0(\mu) - n^2 + (A + \mu)^2},\end{aligned}\tag{7.14}$$

а $\zeta(t)$ — дзета-функция Римана. Функции $\Lambda_i(\mu)$, $i \geq 0$, голоморфны по μ ; при $A = 0$ и $i \geq 3$ верны представления $\Lambda_i(\mu) = \mu^2 \tilde{\Lambda}_i(\mu)$, где $\tilde{\Lambda}_i(\mu)$ — некоторые голоморфные по μ функции. Собственное значение λ_ε простое при $n = 0$ и двукратное при $n > 0$. Асимптотики соответствующих собственных функций имеют вид (8.33) для $n = 0$ и (9.1) для $n > 0$.

Известно [98], что для $n \geq 0$ функции $J_n(t)$ и $J'_n(t)$ положительны при $t \in (0, n]$. Ввиду этого минимальный корень (7.5) превосходит n^2 . В силу (7.12) отсюда вытекает аналогичное утверждение и для $\Lambda_0(\mu)$. Это гарантирует, что знаменатели в (7.14) не равны нулю. Если $A = n = \lambda_0 = 0$, то $\Lambda_0 > 0$ и $\mu > 0$, и знаменатели в (7.14) вновь не обращаются в нуль.

Подчеркнем, что теорема 7.1 применима к каждому собственному значению возмущенной задачи (7.1), (7.2). Если λ_0 — корень уравнения (7.5) только для одного значения n , то из теоремы 7.1 немедленно следует, что только одно собственное значение возмущенной задачи сходится к λ_0 , и это собственное значение простое или двукратное в зависимости от n . Если λ_0 является корнем уравнения (7.5) одновременно для нескольких $n = n_i$, $i = 1, \dots, m$, $m \geq 2$, то в этом случае предельное собственное значение расщепляется на m собственных значений возмущенной задачи, каждое из которых оказывается простым или двукратным в зависимости от соответствующего n_i . В основе такого расщепления лежит структура асимптотик собственных значений возмущенной задачи. А именно, ниже в лемме 10.4 будет показано, что асимптотические ряды (7.12), (7.13), (7.14) не могут совпадать для различных n .

Глава имеет следующую структуру. В последующих двух разделах проводится формальное построение асимптотических разложений для собственных значений, сходящихся к корням уравнения (7.5). Одновременно формально строятся асимптотические разложения для соответствующих собственных функций. Случаи $n = 0$ и $n > 0$ исследуются отдельно: первый случай в разделе 8, второй — в разделе 9. Формальное построение еще не гарантирует, что построенные формальные ряды являются асимптотическими для собственных значений и собственных функций возмущенной задачи. Поэтому в разделе 10 проводится обоснование построенных формальных разложений. И как уже было сказано выше, в конце главы, в приложении доказывается существование положительных значений A , для которых уравнения (7.5) с различными n имеют совместный корень λ_0 .

Результаты данной главы были опубликованы в [75].

8. ФОРМАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК В СЛУЧАЕ $n = 0$

В настоящем разделе мы строим формальные асимптотические разложения для собственных значений λ_ε , сходящихся к корню λ_0 уравнения (7.5) при $n = 0$. Одновременно строится асимптотика для соответствующей собственной функции ψ_ε . Формальное построение основано на комбинации метода пограничного слоя и метода согласования асимптотических разложений.

Начнем с краткого описания схемы построения. Асимптотика для собственного значения ищется в виде ряда (7.12). Легко видеть, что функция

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x) = J_0\left(\sqrt{\lambda_\varepsilon} r\right)$$

является решением уравнения (7.1) для любого λ_ε . Вместе с тем эта функция не удовлетворяет требуемым краевым условиям (7.2). Чтобы удовлетворить однородному условию Неймана на Γ_ε , мы строим подходящий пограничный слой в окрестности границы круга D . Этот слой строится в виде асимптотического ряда

$$\psi_\varepsilon^{mid}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi, \mu),\tag{8.1}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (\theta\varepsilon^{-1}, (1-r)\varepsilon^{-1})$ — растянутые переменные. Однако введение пограничного слоя не позволяет одновременно удовлетворить однородное условие Дирихле на Γ_ε . Чтобы добиться

последнего, мы применяем метод согласования асимптотических разложений, и в окрестности точек $x_m = (\cos \varepsilon \pi m, \sin \varepsilon \pi m)$, $m = 0, \dots, N-1$, строятся внутренние разложения в виде

$$\psi_\varepsilon^{in}(\zeta^m) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i (w_{i,0}(\zeta^m, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}(\zeta^m, \mu)), \quad (8.2)$$

где $\zeta^m = (\zeta_1^m, \zeta_2^m) = ((\xi_1 - m\pi)\eta^{-1}, \xi_2\eta^{-1})$. При этом функции $w_{i,1}$ в (8.2) не нужны для формального построения степенной по ε асимптотики. Они играют вспомогательную роль и вводятся для того, чтобы построенные ряды давали невязку нужного порядка малости при подстановки в возмущенную задачу.

Основная цель формального построения — определить коэффициенты рядов (7.12), (8.1) и (8.2). Для них будут получены достаточно явные формулы.

Перейдем непосредственно к построению формальных асимптотик. В соответствии с методом пограничного слоя мы требуем, что сумма разложений ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{mid} удовлетворяла однородному краевому условию Неймана всюду на границе ∂D за исключением точек x_k , а именно,

$$\sqrt{\lambda_\varepsilon} J'_0(\sqrt{\lambda_\varepsilon}) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \psi_\varepsilon^{mid} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0,$$

где Γ^0 — это ось $O\xi_1$, из которой исключены точки $(\pi k, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Заменим в полученном равенстве λ_ε , ψ_ε^{mid} на ряды (7.12), (8.1), разложим первый член в ряд Тейлора по ε и приравняем нулю коэффициенты при степенях ε . В результате получим краевые условия для функций v_i :

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_2} = \alpha_i, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad \alpha_i = \alpha_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-1}), \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sqrt{\Lambda_0} J'_0(\sqrt{\Lambda_0}), \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \\ \alpha_i &= -\frac{1}{2} J_0(\sqrt{\Lambda_0}) \Lambda_{i-1} + f_i, \quad i \geq 4. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Здесь $f_i = f_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-4})$ — некоторые полиномы по переменным $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-4}$ с коэффициентами, голоморфными по Λ_0 , причем

$$f_4 = f_5 = 0, \quad f_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Выведем теперь уравнения для функций v_i . Для этого подставим ψ_ε^{mid} и λ_ε в уравнение (7.1) и перейдем к полярным координатам. В результате получим уравнение:

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r^2 \lambda_\varepsilon \right) \psi_\varepsilon^{mid} = 0.$$

Заменим в этом уравнении λ_ε и ψ_ε^{mid} на ряды (7.12) и (8.1), перейдем к переменным ξ и приравняем к нулю коэффициенты при степенях ε . Тогда получим:

$$\Delta_\xi v_i = F_i \equiv \mathcal{L}_i(v_1, \dots, v_{i-1}), \quad \xi_2 > 0, \quad (8.5)$$

$$\mathcal{L}_i(v_1, \dots, v_{i-1}) = \sum_{k=0}^1 \sum_{j=1}^2 a_{kj} \xi_2^{k+j-1} \frac{\partial^j}{\partial \xi_2^j} v_{i-k} + \sum_{k=0}^2 a_k \xi_2^k \sum_{j=1}^{i-k-2} \Lambda_{i-j-k-2} v_j,$$

где обозначено

$$a_{11} = a_{12} = a_0 = a_2 = -1, \quad a_{01} = 1, \quad a_1 = a_{02} = 2, \quad v_{-1} = v_0 = 0, \quad \Lambda_1 = \Lambda_2 = 0.$$

Соотношения (8.3), (8.5) представляют собой рекуррентную систему краевых задач для функций v_i . Согласно методу пограничного слоя решения этих задач ищутся экспоненциально убывающими при $\xi_2 \rightarrow +\infty$. Для функций v_i будут получены достаточно явные формулы; это будет сделано на основе ряда вспомогательных утверждений.

Обозначим через \mathcal{V} пространство π -периодических по ξ_1 функций из $C^\infty(\{\xi : \xi_2 > 0\} \cup \Gamma^0)$, равномерно экспоненциально убывающих при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ вместе со всеми своими производными. Через \mathcal{V}^+ (\mathcal{V}^-) обозначаем подмножества в \mathcal{V} , состоящие из четных (нечетных) по ξ_1 функций.

На пространстве \mathcal{V} определим семейство операторов \mathcal{A}_k , $k \in \mathbb{Z}_+$, действующих следующим образом:

$$\mathcal{A}_0[u](\xi) = u(\xi), \quad \mathcal{A}_k[u](\xi) = \int_{\xi_2}^{+\infty} t \mathcal{A}_{k-1}[u](\xi_1, t) dt.$$

С учетом определений пространств \mathcal{V} , \mathcal{V}^+ и \mathcal{V}^- и определения операторов \mathcal{A}_k несложно убедиться, что эти операторы переводят пространство \mathcal{V} в себя, а пространства \mathcal{V}^\pm являются для них инвариантными.

Лемма 8.1. *Для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливы равенства*

$$\Delta_\xi \mathcal{A}_k[u] = -2k \mathcal{A}_{k-1}[u] + \mathcal{A}_k[\Delta_\xi u].$$

Доказательство. Прямыми вычислениями для произвольной функции $u \in \mathcal{V}$ проверяем, что

$$\frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial \xi_1^{m_1} \partial \xi_2^{m_2}} \int_{\xi_2}^{+\infty} u(\xi_1, t) dt = \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial^{m_1+m_2}}{\partial \xi_1^{m_1} \partial t^{m_2}} u(\xi_1, t) dt, \quad \xi_2 > 0,$$

где $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда следует, что

$$\Delta_\xi \mathcal{A}_0[u] = \Delta_\xi u, \quad \Delta_\xi \mathcal{A}_k[u] = \int_{\xi_2}^{+\infty} t \Delta \mathcal{A}_{k-1}[u](\xi_1, t) dt - 2 \mathcal{A}_{k-1}[u].$$

Используя полученные равенства, по индукции уже легко доказать утверждение леммы. \square

Обозначим

$$\Pi = \left\{ \xi : -\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \frac{\pi}{2}, \xi_2 > 0 \right\},$$

и пусть (ρ, ϑ) — полярные координаты, соответствующие переменным ξ .

Лемма 8.2. *Пусть функция $F(\xi) \in \mathcal{V}^+$ имеет бесконечно дифференцируемую асимптотику*

$$F(\xi) = \alpha \rho^{-1} \sin 3\vartheta + O(\ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

и существует натуральное число k такое, что $\Delta_\xi^k F \equiv 0$ при $\xi_2 > 0$. Тогда функция

$$v = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j j!} \mathcal{A}_j \left[\Delta_\xi^{j-1} F \right] \quad (8.6)$$

есть решение краевой задачи

$$\Delta_\xi v = F, \quad \xi_2 > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad (8.7)$$

принадлежащее $W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$ и имеющее бесконечно дифференцируемую асимптотику

$$v(\xi) = v(0) + \frac{1}{2} \alpha \xi_2^3 \rho^{-2} + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (8.8)$$

Доказательство. Так $F \in \mathcal{V}^+$, то очевидно $\Delta_\xi^j F \in \mathcal{V}^+$, и потому каждый член в правой части (8.6) принадлежит \mathcal{V}^+ . Отсюда следует, что $v \in \mathcal{V}^+$.

Проверим теперь, что функция v , определенная формулой (8.6), действительно является решением краевой задачи (8.7). На самом деле, для каждой точки $\xi \in \Gamma^0$ имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi \in \Gamma^0} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j j!} \left(\xi_2 \mathcal{A}_{j-1} \left[\Delta_\xi^{j-1} F \right] \right) \Big|_{\xi \in \Gamma^0} = 0.$$

При $\xi \in \Pi$ применим оператор Лапласа к функции v и воспользуемся затем леммой 8.1 и равенством $\Delta_\xi^k F \equiv 0$. Тогда получим:

$$\Delta_\xi v = - \sum_{j=1}^k \frac{1}{2^j j!} \mathcal{A}_j \left[\Delta_\xi^j F \right] + \sum_{j=1}^k \frac{2j}{2^j j!} \mathcal{A}_{j-1} \left[\Delta_\xi^{j-1} F \right] = F.$$

Докажем теперь асимптотику (8.8). Пусть функция $U \in \mathcal{V}^+$ имеет дифференцируемую асимптотику

$$U(\xi) = O(\rho^{-p} \ln^q \rho), \quad \rho \rightarrow 0, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad p, q \geq 0. \quad (8.9)$$

Положим $u(\xi) = \mathcal{A}_1[U](\xi)$. Так как $U \in \mathcal{V}^+$, то справедливо представление

$$u(\xi) = \int_{\xi_2}^a t U(\xi_1, t) dt + u_1(\xi), \quad (8.10)$$

где $u_1 \in \mathcal{V}^+ \cap C^\infty(\{\xi : \xi_2 \geq 0\})$ и a — некоторое фиксированное малое число. Очевидно, что

$$u_1(\xi) = u_1(0) + O(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (8.11)$$

Заменим функцию U на ее асимптотику (8.9) в (8.10). После этого интеграл в (8.10) может быть вычислен явно. С учетом (8.11) тогда получаем:

$$u(\xi) = O(\ln^{q+1} \rho), \quad p = 2, \quad u(\xi) = O(\rho^{-p+2} \ln^q \rho), \quad p > 2, \quad (8.12)$$

при $\rho \rightarrow 0$. Для $p = 0, 1$ аналогичные соотношения выглядят так:

$$\begin{aligned} u(\xi) - u(0) &= \int_{\xi_2}^a t (U(\xi_1, t) - U(0, t)) dt - \int_0^{\xi_2} t U(0, t) dt + O(\rho^2) = \\ &= \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^a t_2 \frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_2) dt_2 dt_1 + O(\rho^{-p+2} \ln^q \rho) = O(\rho^{-p+2} \ln^q \rho) \end{aligned} \quad (8.13)$$

при $\rho \rightarrow 0$. Функция F удовлетворяет следующим соотношениям при $\rho \rightarrow 0$:

$$\Delta_\xi F = -8\alpha\rho^{-3} \sin 3\vartheta + O(\rho^{-2} \ln \rho), \quad \Delta_\xi^j F = O(\rho^{-2j} \ln \rho), \quad j \geq 2,$$

из которых, а также из (8.6), (8.9), (8.12), (8.13) и определения операторов \mathcal{A}_j , уже вытекают асимптотики (8.8). Ввиду последних и принадлежности $v \in \mathcal{V}$ выполнено $v \in W_2^1(\Pi)$. Лемма доказана. \square

Обозначим

$$X(\xi) = \operatorname{Re} \ln \sin z + \ln 2 - \xi_2, \quad (8.14)$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$ — комплексная переменная. Прямыми вычислениями несложно проверить, что $X \in \mathcal{V}^+$ является гармонической функцией $\xi_2 > 0$, удовлетворяющей краевому условию

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma^0,$$

и обладающей дифференцируемой асимптотикой

$$X(\xi) = \ln |\xi| + \ln 2 - \xi_2 + O(|\xi|^2), \quad \xi \rightarrow 0. \quad (8.15)$$

Лемма 8.2 позволяет решить систему задач (8.3), (8.5).

Лемма 8.3. *Для любой последовательности $\{\Lambda_i(\mu)\}_{i=0}^\infty$, $\Lambda_1(\mu) = \Lambda_2(\mu) = 0$ существуют решения краевых задач (8.3), (8.5), определенных формулой (8.6) с $F = F_i$, $k = k_i$, где k_i — некоторые натуральные числа. Для функций v_i справедливы представления*

$$\begin{aligned} v_i(\xi, \mu) &= \tilde{v}_i(\xi, \mu) - \alpha_i X(\xi), \\ \tilde{v}_i(\xi, \mu) &= \sum_{j=1}^{M_i} a_{ij}(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-2}) v_{ij}(\xi), \end{aligned} \quad (8.16)$$

где $v_{ij} \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$ и a_{ij} — некоторые полиномы по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-2}$ с голоморфными по Λ_0 и α_1 коэффициентами, причем $a_{ij}(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Верны равенства:

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, & M_2 &= 1, & M_3 &= 2, & M_4 &= 3, \\ a_{21} &= a_{31} = a_{41} = -\alpha_1, & a_{32} &= -\alpha_1 \Lambda_0, & a_{42} &= \frac{\alpha_1(6\Lambda_0 + 1)}{24}, \\ a_{43} &= \frac{\alpha_1(8\Lambda_0 + 1)}{32}, & v_{21} &= \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, & v_{31} &= \frac{1}{8}\xi_2^4 \frac{\partial^4 X}{\partial \xi_2^4} + \frac{1}{6}\xi_2^3 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, \\ v_{32} &= \frac{1}{2}\mathcal{A}_1[X], & v_{41} &= \frac{1}{48}\xi_2^6 \frac{\partial^3 X}{\partial \xi_2^3} + \frac{2}{15}\xi_2^5 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_2^2} + \frac{1}{16}\xi_2^4 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, \\ v_{42} &= \xi_2^3 X, & v_{43} &= \mathcal{A}_1[\xi_2 X] + \xi_2^2 \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Выполнены асимптотики

$$v_i(\xi, \mu) = -\alpha_i(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) + \tilde{v}_i(0, \mu) - \frac{1}{2}\alpha_{i-1}\xi_2^3 \rho^{-2} + O(\rho^2 \ln \rho) \quad (8.18)$$

при $\rho \rightarrow 0$, где $\alpha_0 = 0$.

Доказательство. Утверждение леммы для $i = 1, \dots, 4$ и равенства (8.17) проверяются непосредственно. Для $i \geq 5$ доказательство проведем по индукции. Предположим, что лемма верна для $i < K$. Тогда в силу (8.5) имеет место соотношение

$$F_K = \sum_{j=1}^K a_{Kj} F_{Kj},$$

где F_{Kj} удовлетворяют условиям леммы 8.2, а функции $a_{Kj} = a_{Kj}(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{K-2})$ обладают всеми свойствами, описанными в утверждении доказываемой леммы. Пусть v_{Kj} — решения задач (8.7) с $F = F_{Kj}$, определенными в (8.6). Тогда $\tilde{v}_K \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$ является решением уравнения (8.5) для $i = K$, удовлетворяющим однородному граничному условию Неймана на Γ^0 . Отсюда следует, что функция v_K определенная равенством (8.16), является решением краевой задачи (8.3), (8.5) для $i = K$. Ясно, что функция v_K удовлетворяет условиям леммы 8.2 и имеет асимптотику

$$F_K = -\alpha_{K-1}\rho^{-1} \sin 3\vartheta + O(\ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

откуда и из (8.8) следует, что

$$\tilde{v}_i(\xi, \mu) = \tilde{v}_i(0, \mu) - \frac{1}{2}\alpha_{i-1}\xi_2^3 \rho^{-2} + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Последнее равенство и (8.15), (8.16) дают асимптотику (8.18). Лемма доказана. \square

Как следует из определения функций v_j , сумма разложений ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{mid} не удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на γ_ε . Более того, функции v_j имеют логарифмические особенности в точках x_k . Поэтому мы применяем метод согласования асимптотических разложений для построения формальных асимптотик собственной функции в окрестности этих точек. Асимптотика строится в виде ряда (8.2). Так как функции v_j периодичны по ξ_1 , то достаточно провести согласование в окрестности точки $x_0 = (1, 0)$ и затем перенести результат на остальные точки x_k .

Обозначим $\varsigma = \varsigma^0 = \xi\eta^{-1}$. Подставим ряды (7.12) и (8.2) в (7.1), (7.2) и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате получаем следующим задачи для $w_{i,j}$:

$$\Delta_\varsigma w_{i,0} = 0, \quad \varsigma_2 > 0, \quad w_{i,0} = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,0} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\varsigma w_{i,1} &= \left(\frac{\partial}{\partial \varsigma_2} + 2\varsigma_2 \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_2^2} \right) w_{i,0}, \quad \varsigma_2 > 0, \\ w_{i,1} &= 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,1} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \end{aligned} \quad (8.20)$$

где γ^1 — интервал $(-1, 1)$ на оси $\varsigma_2 = 0$, а Γ^1 — дополнение $\bar{\gamma}^1$ до оси $O\varsigma_1$. Далее, следуя методу согласования асимптотических разложений, вычислим асимптотику функций $w_{i,j}$ при $|\varsigma| \rightarrow \infty$. Обозначим:

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,K} &= \Lambda_0(\mu) + \sum_{i=3}^K \varepsilon^i \Lambda_i(\mu), & \psi_{\varepsilon,K}^{ex}(x) &= J_0\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}r}\right), \\ \psi_{\varepsilon,K}^{mid}(\xi) &= \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^i v_i(\xi, \mu), & \Psi_{\varepsilon,K}(x) &= \psi_{\varepsilon,K}^{ex}(x) + \chi(1-r)\psi_{\varepsilon,K}^{mid}(\xi), \end{aligned}$$

где $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < \frac{1}{3}$ и нулю при $t > \frac{1}{2}$. Разлагая в ряд Тейлора, получаем:

$$\begin{aligned} J_0\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}r}\right) &= \sum_{i=0}^K \varepsilon^i G_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_i) + \varepsilon^{K+1} G_\varepsilon^{(K)}(\Lambda_0, \dots, \Lambda_K) - \\ &\quad - \varepsilon \xi_2 \sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} J_0'\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right) + O(\varepsilon^2 \xi_2^2), \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\begin{aligned} G_0 &= J_0\left(\sqrt{\Lambda_0}\right), & G_1 &= G_2 = 0, \\ G_i &= \frac{J_0'\left(\sqrt{\Lambda_0}\right)}{2\sqrt{\Lambda_0}} \Lambda_i + g_i, & i \geq 3, & \quad g_3 = g_4 = 0, \end{aligned} \quad (8.22)$$

где функции $g_i = g_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-3})$ — полиномы по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-3}$ с голоморфными по Λ_0 коэффициентами, $g_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$, а $G_\varepsilon^{(K)}$ — голоморфная по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_K$ функция, причем $G_\varepsilon^{(K)}(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Из (8.18) и равенства $\ln \eta = -\frac{1}{\varepsilon(A+\mu)}$ следует, что

$$v_i(\xi, \mu) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\alpha_i}{A+\mu} - \alpha_i (\ln |\varsigma| + \ln 2) + \alpha_i \xi_2 + \tilde{v}_i(0, \mu) - \frac{1}{2} \eta \alpha_{i-1} \varsigma_2^3 |\varsigma|^{-2} + O(\eta^2 |\varsigma|^2 \ln |\varsigma|) \quad (8.23)$$

при $\eta^{\frac{1}{2}} < \rho < 2\eta^{\frac{1}{2}}$, т. е. при $\eta^{-\frac{1}{2}} < |\varsigma| < 2\eta^{-\frac{1}{2}}$. Подставим (8.21) и (8.23) в формулу для $\Psi_{\varepsilon,K}$. Тогда при $\eta^{-\frac{1}{2}} < |\varsigma| < 2\eta^{-\frac{1}{2}}$ получим:

$$\begin{aligned} \Psi_{\varepsilon,M}(x) &= \sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,0}(\varsigma, \mu) + \varepsilon \eta \sum_{i=1}^K \varepsilon^i W_{i,1}(\varsigma, \mu) + W_\varepsilon^{(K)}(x) + O(\varepsilon \eta^2 |\varsigma|^2 \ln |\varsigma|), \\ W_{i,0}(\varsigma, \mu) &= -\alpha_i (\ln |\varsigma| + \ln 2) + \frac{\alpha_{i+1}}{A+\mu} + \tilde{v}_i(0, \mu) + G_i, & \tilde{v}_0 &= 0, \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$W_{i,1}(\varsigma, \mu) = -\frac{1}{2} \alpha_i \varsigma_2^3 |\varsigma|^{-2}, \quad (8.25)$$

$$W_\varepsilon^{(K)}(x) = \varepsilon^{K+1} \left(-\alpha_{K+1} (\ln |\varsigma| + \ln 2 - \xi_2) + G_\varepsilon^{(K)} + \tilde{v}_{K+1}^{(0, \mu)} \right) + \varepsilon \mathbf{b}_K(\varepsilon) \xi_2,$$

$$\mathbf{b}_K(\varepsilon) = \sum_{i=1}^K \varepsilon^{i-1} \alpha_i - \sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} J_0'\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}\right).$$

Отметим еще, что в силу определения функций α_i величина $\mathbf{b}_K(\varepsilon)$ мала, а именно, $\mathbf{b}_K(\varepsilon) = O(\varepsilon^K)$. В соответствии с методом согласования асимптотических разложений, необходимо найти решения задач (8.19), (8.20), удовлетворяющие асимптотикам

$$w_{i,j}(\varsigma, \mu) = W_{i,j}(\varsigma, \mu) + o(|\varsigma|^j), \quad |\varsigma| \rightarrow \infty. \quad (8.26)$$

Определим функцию

$$Y(\varsigma) = \operatorname{Re} \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right),$$

где $y = \varsigma_1 + i\varsigma_2$ — комплексная переменная. По определению, $Y(\varsigma)$ — решение задачи (8.19) с асимптотикой

$$Y(\varsigma) = \ln |\varsigma| + \ln 2 + O(|\varsigma|^{-2}), \quad |\varsigma| \rightarrow \infty. \quad (8.27)$$

Из свойств функции Y , асимптотик (8.24), (8.26), (8.27) и вида задачи (8.19) выводим, что

$$w_{i,0} = -\alpha_i Y. \quad (8.28)$$

Сравнивая асимптотику для функции $w_{i,0}$, вытекающую из равенств (8.27), (8.28), с равенствами (8.24), (8.26), заключаем, что

$$\tilde{v}_i(0, \mu) + \frac{\alpha_{i+1}}{A + \mu} + G_i = 0. \quad (8.29)$$

Из полученного равенства для $i = 0$ и (8.4), (8.22) вытекает уравнение (7.13) для Λ_0 . Условие $\Lambda_0(0) = \lambda_0$ очевидно выполнено в силу $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то голоморфность Λ_0 по μ вытекает из теоремы о неявной функции. Если $\lambda_0 = 0$, то $A = 0$ и в этом случае уравнение (7.13) имеет решение вида $\Lambda_0(\mu) = \mu \tilde{\Lambda}_0(\mu)$, где $\tilde{\Lambda}_0$ — голоморфная по μ функция и $\tilde{\Lambda}_0(0) = 1$. В силу леммы 8.3 (см. (8.16), (8.17)) имеем: $\tilde{v}_1(0, \mu) = \tilde{v}_2(0, \mu) \equiv 0$. Используя эти соотношения и равенства $\alpha_2 = \alpha_3 = G_1 = G_2 = 0$ (см. (8.4), (8.22)), легко проверить, что равенство (8.29) выполнено для $i = 1, 2$. Рассмотрим случай $i \geq 3$. Подставляя формулы (8.4), (8.29) для α_{i+1} и G_i в (8.22) и выражая затем оттуда Λ_i , получаем:

$$\Lambda_i(\mu) = \frac{2\Lambda_0(\mu) \left(\tilde{f}_{i+1}(\mu) + (A + \mu) (\tilde{g}_i(\mu) + \tilde{v}_i(0, \mu)) \right)}{J_0(\sqrt{\Lambda_0(\mu)}) (\Lambda_0(\mu) + (A + \mu)^2)}, \quad (8.30)$$

$$\tilde{f}_{i+1}(\mu) = f_{i+1}(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-3}(\mu)), \quad \tilde{g}_i(\mu) = g_i(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-3}(\mu)).$$

При выводе последнего равенства, мы заменили $J_0'(\sqrt{\Lambda_0})$ на функцию $-(A + \mu)J_0(\sqrt{\Lambda_0})/\sqrt{\Lambda_0}$, что возможно в силу уравнения (7.13). Полагая $i = 3, 4$ в (8.30) и используя (8.4), (8.16), (8.17), (8.22) и равенства [30],

$$A_1[X](0) = -\frac{1}{4}\zeta(3), \quad A_1[\xi_2 X](0) = -\frac{\pi^4}{360}, \quad (8.31)$$

приходим к (7.14) для $n = 0$.

Докажем теперь, что функции Λ_i голоморфны по μ . Так как $J_0(\sqrt{\lambda_0}) \neq 0$, то функция $J_0(\sqrt{\Lambda_0(\mu)})$ голоморфна по μ и не обращается в нуль при малых $\mu \geq 0$. Если $\lambda_0 \neq 0$, то функция $(\Lambda_0(\mu) + (A + \mu)^2)$ также не обращается в нуль при $\mu \geq 0$. В случае $\lambda_0 = 0$ (здесь $A = 0$), функции $\Lambda_0(\mu)$ и $(\Lambda_0(\mu) + \mu^2)$ имеют простой нуль в точке $\mu = 0$. Таким образом, для всех возможных значений λ_0 и A , отношение

$$\frac{2\Lambda_0(\mu)}{J_0(\sqrt{\Lambda_0(\mu)}) (\Lambda_0(\mu) + (A + \mu)^2)}$$

является голоморфной функцией по $\mu \geq 0$. В силу утверждения леммы 8.3 о функциях a_{ij} и формулы (8.16) для функций \tilde{v}_i , функция $\tilde{v}_i(0, \mu)$ оказывается голоморфной по μ при условии, что $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-1}$ голоморфны по μ . Используя этот факт, а также то, что функции f_{i+1} и g_i голоморфны по $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-3}$, по индукции несложно доказать, что функции Λ_i голоморфны по μ .

Переходим к случаю $A = 0$. При $i = 3, 4$, из (7.14) следует, что $\Lambda_i(\mu) = \mu^2 \tilde{\Lambda}_i(\mu)$, где $\tilde{\Lambda}_i(\mu)$ — голоморфные по μ функции. Докажем тоже самое для $i \geq 5$. Предположим, что утверждение верно при $i < M$. Так как функции f_{M+1} , g_M , $\tilde{v}_M(0, \mu)$ голоморфны по $\Lambda_0, \dots, \Lambda_{M-1}$, функция α_1 голоморфна по Λ_0 ,

$$f_{M+1}(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = g_M(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = \alpha_{Mj}(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0,$$

то

$$\tilde{f}_{M+1}(\mu) = \mu^2 \tilde{f}^{(M+1)}(\mu), \quad \tilde{g}_M(\mu) = \mu^2 \tilde{g}^{(M)}(\mu), \quad \tilde{v}_M(0, \mu) = \mu \tilde{v}^{(M)}(\mu),$$

где $\tilde{f}^{(M+1)}(\mu)$, $\tilde{g}^{(M)}(\mu)$, $\tilde{v}^{(M)}(\mu)$ — голоморфные по μ функции. На основе этого факта и (8.30) получаем требуемые представления.

Определим теперь функции $w_{i,1}$. Прямыми вычислениями проверяем, что решения задач (8.20), обладающие асимптотиками (8.25), (8.26), даются равенствами

$$w_{i,1} = \frac{1}{2} \varsigma_2^2 \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,0}. \quad (8.32)$$

Таким образом, формально построенная асимптотика для собственной функции имеет вид:

$$\begin{aligned}\psi_\varepsilon(x) &= \left(\psi_\varepsilon^{ex}(x) + \chi(1-r)\psi_\varepsilon^{mid}(\xi) \right) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1} \chi\left(|\varsigma^m| \eta^{\frac{1}{2}}\right) \psi_\varepsilon^{in}(\varsigma^m), \\ \chi_\varepsilon(x) &= 1 - \sum_{m=0}^{N-1} \chi\left(|\varsigma^m| \eta^{\frac{1}{2}}\right).\end{aligned}\quad (8.33)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\psi_{\varepsilon,K}(x) &= \Psi_{\varepsilon,K}(x) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1} \chi\left(|\varsigma^m| \eta^{\frac{1}{2}}\right) \psi_{\varepsilon,K}^{in}(\varsigma^m), \\ \psi_{\varepsilon,K}^{in}(\varsigma) &= \sum_{i=1}^K \varepsilon^i (w_{i,0}(\varsigma, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}(\varsigma, \mu)), \\ \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x) &= \psi_{\varepsilon,K}(x) - R_{\varepsilon,K}(x), \quad R_{\varepsilon,K}(x) = \tilde{R}_{\varepsilon,K}(x), \\ \tilde{R}_{\varepsilon,K}(x) &= \chi(1-r) (\mathbf{b}_k(\varepsilon)(1-r) - \varepsilon^{K+1} \alpha_{K+1} X(\xi)) + \\ &\quad + \varepsilon^{K+1} G_\varepsilon^{(K)} + \varepsilon^{K+1} \tilde{v}_{K+1}(0, \mu) - \varepsilon^K \frac{\alpha_{K+1}}{A + \mu}.\end{aligned}$$

Положим: $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(D)}$.

Теорема 8.1. *Функции $\psi_{\varepsilon,K}, \tilde{\psi}_{\varepsilon,K} \in W_2^1(D) \cap C^\infty(D)$ сходятся к ψ_0 в $L_2(D)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda_{\varepsilon,K}$ сходится к λ_0 , и $\|R_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^K(A + \mu))$. Функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ и $\lambda_{\varepsilon,K}$ являются решениями задачи*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f, \quad x \in D, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial r} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (8.34)$$

с $u_\varepsilon = \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,K}$, $f = f_{\varepsilon,K}$, где $\|f_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^K(A + \mu))$.

Замечание 8.1. Выражения вида $O(\varepsilon^p(A + \mu))$ в утверждении этой теоремы понимаются следующим образом. Для $A > 0$ они означают $O(\varepsilon^p)$, а для $A = 0$ означают $O(\varepsilon^p \mu)$.

Доказательство. Утверждаемая гладкость $\psi_{\varepsilon,K}$ и $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ вытекает непосредственно из определения этих функций и гладкости функций ψ_ε^{ex} , v_i и $w_{i,j}$. Очевидно, что $\lambda_{\varepsilon,K} \rightarrow \lambda_0$, $\psi_{\varepsilon,K}, \tilde{\psi}_{\varepsilon,K} \rightarrow \psi_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из определения и свойств величин α_i выводим, что $\mathbf{b}_k(\varepsilon) = O(\varepsilon^K(A + \mu)^2)$. Отсюда и из определения функций $G_\varepsilon^{(K)}$ и α_{K+1} , а также из гладкости функции χ следует, что $\|R_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^{K+1}(A + \mu)^2)$.

Функция $\chi_\varepsilon(x)$ равна нулю в малой окрестности множества γ_ε , а функции w_{ij} обращаются в нуль на γ^1 , а потому функция $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}$ удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на γ_ε . Прямыми вычислениями проверяем, что при $x \in \Gamma_\varepsilon$ выполнено

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x) &= \chi_\varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial r} \Psi_{\varepsilon,K}(x) - \frac{\partial}{\partial r} R_{\varepsilon,K}(x) = \\ &= \chi_\varepsilon(x) \left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}} J_0'(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}}) - \sum_{i=1}^K \varepsilon^{i-1} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi \in \Gamma^0} + \varepsilon^K \alpha_{K+1} + \mathbf{b}_K(\varepsilon) \right) = 0.\end{aligned}$$

Применяя оператор $-(\Delta + \lambda_{\varepsilon,K})$ к функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}(x)$, получаем:

$$\begin{aligned}f_{\varepsilon,K} &= - \sum_{i=1}^5 f_{\varepsilon,K}^{(i)}, \\ f_{\varepsilon,K}^{(1)}(x) &= -\chi_\varepsilon(x) (\Delta + \lambda_{\varepsilon,K}) \tilde{R}_{\varepsilon,K}(x), \\ f_{\varepsilon,K}^{(2)}(x) &= \chi(1-r) \chi_\varepsilon(x) (\Delta + \lambda_{\varepsilon,K}) \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{mid}(\xi), \\ f_{\varepsilon,K}^{(3)}(x) &= \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{mid} \Delta \chi(1-r) + 2 \left(\nabla_x \chi(1-r), \nabla_x \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{mid}(\xi) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\varepsilon,K}^{(4)}(x) &= \sum_{m=0}^{N-1} \chi \left(|\varsigma^m| \eta^{\frac{1}{2}} \right) (\Delta + \lambda_{\varepsilon,K}) \psi_{\varepsilon,K}^{in}(\varsigma^m), \\
 f_{\varepsilon,K}^{(5)}(x) &= \sum_{m=0}^{N-1} \Delta \chi \left(|\varsigma^m| \eta^{\frac{1}{2}} \right) \psi_{\varepsilon,K}^{mat}(x) + 2 \left(\nabla_x \chi \left(|\varsigma^m| \eta^{\frac{1}{2}} \right), \nabla_x \psi_{\varepsilon,K}^{mat}(x) \right), \\
 \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{mid} &= \psi_{\varepsilon,K}^{mid} + \varepsilon^{K+1} \alpha_{K+1} X, \\
 \psi_{\varepsilon,K}^{mat} &= \psi_{\varepsilon,K}^{in} - \psi_{\varepsilon,K}^{ex} - \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{mid} + \left(\varepsilon \mathbf{b}_k(\varepsilon) \xi_2 + \varepsilon^{K+1} G_{\varepsilon}^{(K)} + \varepsilon^{K+1} \tilde{v}_{K+1}(0, \mu) - \varepsilon^K \frac{\alpha_{K+1}}{A + \mu} \right).
 \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями проверяем, что

$$\|f_{\varepsilon,K}^{(1)}\| = O(\varepsilon^K (A + \mu)).$$

В силу уравнений (8.5) верно представление

$$(\Delta + \lambda_{\varepsilon,K}) \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^{mid}(\xi) = \frac{\varepsilon^K}{r^2} \sum_{j=0}^{K-1} F_K^{(j)}(\xi, \mu),$$

где $F_K^{(j)}$ — явно вычисляемые функции, причем

$$F_K^{(j)} \in \mathcal{V} \cap L_2(\Pi), \quad \|F_K^{(j)}\| = O((A + \mu)) \quad \text{при } \mu \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что

$$\|f_{\varepsilon,K}^{(2)}\| = O\left(\varepsilon^{K+\frac{1}{2}}(A + \mu)\right).$$

Благодаря экспоненциальному убыванию функций v_i при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ легко проверяется, что

$$\|f_{\varepsilon,K}^{(3)}\| = O\left(e^{-\varepsilon^{-q}}(A + \mu)\right),$$

где q — некоторое фиксированное число. С учетом задач для $w_{i,j}$ видим, что

$$\Delta \psi_{\varepsilon,K}^{in} = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^K \varepsilon^i \left(\sum_{k=0}^1 \sum_{j=1}^2 a_{kj} \varsigma_2^{k+j-1} \frac{\partial^j}{\partial \varsigma_2^j} w_{k,j} + \varepsilon \eta \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} \varsigma_2 \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,1} \right).$$

Используя явные формулы для функций $w_{i,j}$ и асимптотики (8.26), получаем равенство

$$\|f_{\varepsilon,K}^{(4)}\| = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{1}{2}} (A + \mu)\right).$$

Ввиду проведенного согласования в области $\eta < (\xi_1 - \pi m)^2 + \xi_2^2 < 4\eta$ верно

$$\psi_{\varepsilon,K}^{mat}(x) = O(\varepsilon(A + \mu)\rho^2 \ln \rho), \quad (8.35)$$

откуда вытекает:

$$\|f_{\varepsilon,K}^{(5)}\| = O\left(\eta^{\frac{1}{5}}\right).$$

Отметим, что равенство (8.35) невозможно получить без введения функций $w_{i,1}$, т. е. невозможно получить быстрое убывание нормы $\|f_{\varepsilon,K}^{(5)}\|$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это единственная причина, по которой были введены функции $w_{i,1}$. Собирая вместе полученные оценки для функций $f_{\varepsilon,K}^{(i)}$, приходим к требуемой оценке для $\|f_{\varepsilon,K}\|$. Лемма доказана. \square

9. ФОРМАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК В СЛУЧАЕ $n > 0$

В данном разделе мы формально строим асимптотики собственного значения λ_{ε} , сходящегося к корню λ_0 уравнения (7.5) с $n > 0$, а также формальные асимптотики для соответствующих собственных функций ψ_{ε}^{\pm} .

В целом схема построения аналогична случаю $n = 0$. Единственным отличием является применение метода многих масштабов.

Асимптотика собственного значения строится в виде (7.12), а асимптотики собственных функций ψ_ε^\pm — в виде рядов

$$\psi_\varepsilon^\pm(x) = \left(\psi_\varepsilon^{ex,\pm}(x) + \chi(1-r)\psi_\varepsilon^{mid,\pm}(\xi, \theta) \right) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1} \chi\left(|\varsigma^m| \eta^{\frac{1}{2}}\right) \psi_\varepsilon^{in,\pm}(\varsigma^m, \mu), \quad (9.1)$$

$$\psi_\varepsilon^{ex,\pm}(x) = J_n\left(\sqrt{\lambda_\varepsilon r}\right) \phi^\pm(n\theta),$$

$$\psi_\varepsilon^{mid,\pm}(\xi, \theta) = \phi^\pm(n\theta) \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\xi, \mu) \pm \phi^\mp(n\theta) \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i^{ad}(\xi, \mu), \quad (9.2)$$

$$\psi_\varepsilon^{in,\pm}(\varsigma, \theta) = \phi^\pm(n\theta) \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i (w_{i,0}(\varsigma, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}(\varsigma, \mu)) \pm \phi^\mp(n\theta) \varepsilon \eta \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i w_{i,1}^{ad}(\varsigma, \mu). \quad (9.3)$$

Как и в предыдущем разделе, функции $\psi_\varepsilon^{mid,\pm}$ являются пограничным слоем и вводятся для того, чтобы удовлетворить краевому условию Неймана на Γ_ε . В окрестности точек x_m асимптотики собственных функций ψ_ε^\pm строятся в виде рядов (9.3) на основе метода согласования асимптотических разложений. Это позволяет добиться краевого условия Дирихле на γ_ε . Отличием от случая $n = 0$ здесь является появление дополнительных функций v_i^{ad} и $w_{i,1}^{ad}$ и использование метода многих масштабов. Данный метод обуславливает присутствие функций $\phi^\pm(n\theta)$ в (9.2), (9.3); переменная θ играет роль медленного времени.

Целью данного раздела является определение функций Λ_i , v_i , v_i^{ad} , $w_{i,j}$, $w_{i,j}^{ad}$, для которых мы получим достаточно явные формулы.

Перейдем к построению. Мы постулируем, что сумма $\psi_\varepsilon^{ex,\pm}$ и $\psi_\varepsilon^{mid,\pm}$ должна удовлетворять однородному условию Неймана всюду на ∂D за исключением точек x_k , т. е.

$$\sqrt{\lambda_\varepsilon} J_n'(\sqrt{\lambda_\varepsilon}) \phi^\pm(n\theta) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \psi_\varepsilon^{mid,\pm}(\xi, \theta) = 0, \quad \xi \in \Gamma^0.$$

Заменим λ_ε и $\psi_\varepsilon^{mid,\pm}$ на ряды (7.12) и (9.2), разложим в асимптотические степенные ряды по ε и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(n\theta)$ и $\phi^-(n\theta)$. Это дает краевые условия для функций v_i^\pm :

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_2} = \alpha_i, \quad \frac{\partial v_i^{ad}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad \alpha_i = \alpha_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-1}), \quad (9.4)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\Lambda_0} J_n'(\sqrt{\Lambda_0}), \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad (9.5)$$

$$\alpha_i = -\frac{J_n(\sqrt{\lambda_0})(\Lambda_0 - n^2)}{2\Lambda_0} \Lambda_{i-1} + f_i, \quad i \geq 4, \quad f_4 = f_5 = 0,$$

где $f_i = f_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-4})$ — полиномы по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-4}$ с коэффициентами, голоморфными по Λ_0 , причем $f_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Аналогично тому, как были получены уравнения (8.5), подставим (7.12) и (9.2) в (7.1), разложим в степенные ряды по ε и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(n\theta)$ и $\phi^-(n\theta)$. В результате получаем уравнения для v_i^\pm :

$$\Delta_\xi v_i = F_i \equiv \mathcal{L}_i(v_1, \dots, v_{i-1}) - n^2 v_{i-2} + 2n \frac{\partial v_{i-2}^{ad}}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \quad (9.6)$$

$$\Delta_\xi v_i^{ad} = F_i^{ad} \equiv \mathcal{L}_i(v_1^{ad}, \dots, v_{i-1}^{ad}) - n^2 v_{i-2}^{ad} - 2n \frac{\partial v_i}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0,$$

где $\Lambda_1 = \Lambda_2 = 0$, $v_{-1}^\pm = v_0^\pm = 0$. Мы ищем экспоненциально убывающие при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ решения рекуррентной системы краевых задач (9.4), (9.6).

Аналогично лемме 8.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 9.1. Пусть функция $F(\xi) \in \mathcal{V}^-$ имеет бесконечно дифференцируемую асимптотику

$$F(\xi) = \alpha \rho^{-1} \cos \vartheta + O(\ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

и существует натуральное число k такое, что $\Delta_\xi^k F \equiv 0$ при $\xi_2 > 0$. Тогда функция v , определенная формулой (8.6), является решением краевой задачи (8.7), принадлежащим $W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^-$ и имеющим бесконечно дифференцируемую асимптотику

$$v(\xi) = \frac{1}{2}\xi_1 \ln \rho + \tilde{\alpha}\xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \rho \rightarrow 0,$$

где $\tilde{\alpha}$ — некоторое число.

Используя леммы 8.2 и 9.1, аналогично лемме 8.3 несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 9.2. Для любой последовательности $\{\Lambda_i(\mu)\}_{i=0}^\infty$, $\Lambda_1(\mu) = \Lambda_2(\mu) = 0$, существуют решения краевых задач (9.4), (9.6), определенные по формуле (8.6) с $F = F_i$, $k = k_i$ и $F = F^{ad}$, $k = k_i^{ad}$, где k_i, k_i^{ad} — некоторые натуральные числа. Для функций v_i и v_i^{ad} верны представления (8.16), где α_i из (9.5), и

$$v_i^{ad}(\xi, \mu) = \sum_{j=1}^{M_i^{ad}} a_{ij}^{ad}(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-2}) v_{ij}^{ad}(\xi).$$

Здесь $v_{ij} \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^+$, $v_{ij}^{ad} \in W_2^1(\Pi) \cap \mathcal{V}^-$ — некоторые функции, a_{ij}, a_{ij}^{ad} — полиномы по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-2}$ с голоморфными по Λ_0 и α_1 коэффициентами, причем

$$a_{ij}(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = a_{ij}^{ad}(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Верны равенства

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, & M_2 &= M_1^{ad} = M_2^{ad} = 1, & M_3 &= 2, & M_4 &= 3, \\ a_{21} &= a_{31} = a_{41} = a_{11}^{ad} = a_{21}^{ad} = -\alpha_1, & a_{32} &= -\alpha_1(\Lambda_0 + 2n^2), \\ a_{42} &= \frac{\alpha_1(6\Lambda_0 + 1)}{24}, & a_{43} &= \frac{\alpha_1(8\Lambda_0 + 1)}{32}, & v_{21} &= \frac{1}{2}\xi_2^2 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, \\ v_{11}^{ad} &= -n\mathcal{A}_1 \left[\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right], & v_{31} &= \frac{1}{8}\xi_2^4 \frac{\partial^4 X}{\partial \xi_2^4} + \frac{1}{6}\xi_2^3 \frac{\partial X}{\partial \xi_2} + \frac{n^2}{2}\xi_2^2 X, \\ v_{32} &= \frac{1}{2}\mathcal{A}_1[X], & v_{41} &= \frac{1}{48}\xi_2^6 \frac{\partial^3 X}{\partial \xi_2^3} + \frac{2}{15}\xi_2^5 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_2^2} + \frac{4n^2 + 1}{16}\xi_2^4 \frac{\partial X}{\partial \xi_2}, \\ v_{42} &= \xi_2^3 X, & v_{43} &= \mathcal{A}_1[\xi_2 X] + \xi_2^2 \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt, & v_{22}^{ad} &= \frac{n}{2}\xi_2^3 \frac{\partial X}{\partial \xi_1}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Имеют место асимптотики (8.18) с числами α_i из (9.5) и

$$v_i^{ad}(\xi, \mu) = -n\alpha_i \xi_1 \ln \rho + \tilde{\alpha}_i \xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho) \quad (9.8)$$

при $\rho \rightarrow 0$. Здесь $\alpha_0 = 0$ и $\tilde{\alpha}_i = \tilde{\alpha}_i(\alpha_1, \Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-2})$ — полиномы по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-2}$ с голоморфными по Λ_0 и α_1 коэффициентами, причем $\tilde{\alpha}_i(0, \Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$.

Аналогично предыдущему разделу, для построения асимптотик собственных функций ψ_ε^\pm в окрестности точек x_m применяется метод согласования асимптотических разложений. Асимптотики этих функций в данной окрестности строятся в виде рядов (9.3). При этом функции $w_{i,j}$ согласовываются с v_i , в то время как функции $w_{i,1}^{ad}$ согласовываются с v_i^{ad} .

Подставим ряды (7.12) и (9.3) в задачу (7.1), (7.2), перейдем к переменным ς и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\phi^+(n\theta)$ и $\phi^-(n\theta)$. В результате получаем краевые условия (8.19) и (8.20) для функций $w_{i,j}$ и следующие задачи для функций $w_{i,1}^{ad}$:

$$\Delta_\varsigma w_{i,1}^{ad} = 2n \frac{\partial}{\partial \varsigma_1} w_{i,0}, \quad \varsigma_2 > 0, \quad w_{i,1}^{ad} = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,1}^{ad} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \quad (9.9)$$

где полагаем $w_{0,0} = 0$. Найдем теперь асимптотики для функций $w_{i,j}$ и $w_{i,1}^{ad}$ при $|\varsigma| \rightarrow \infty$. Обозначим через $\lambda_{\varepsilon,K}$ частичную сумму (7.12) и пусть

$$\Psi_{\varepsilon,K}^\pm(x) = \psi_{\varepsilon,K}^{ex,\pm}(x) + \chi(1-r)\psi_{\varepsilon,K}^{mid,\pm}(\xi), \quad \psi_{\varepsilon,K}^{ex,\pm}(x) = J_n\left(\sqrt{\lambda_{\varepsilon,K}r}\right)\phi^\pm(n\theta),$$

$$\psi_{\varepsilon, K}^{mid, \pm}(\xi) = \phi^{\pm}(n\theta) \sum_{i=1}^{K+1} \varepsilon^i v_i(\xi, \mu) \pm \phi^{\mp}(n\theta) \varepsilon \sum_{i=1}^K \varepsilon^i v_i^{ad}(\xi, \mu).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} J_n(\sqrt{\lambda_{\varepsilon, K}}) &= \sum_{i=0}^K \varepsilon^i G_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_i) + \varepsilon^{K+1} G_{\varepsilon}^{(K)}(\Lambda_0, \dots, \Lambda_K) - \varepsilon \xi_2 \sqrt{\lambda_{\varepsilon, K}} J_n'(\sqrt{\lambda_{\varepsilon, K}}) + O(\varepsilon^2 \xi_2^2), \\ G_0 &= J_n(\sqrt{\Lambda_0}), \quad G_1 = G_2 = 0, \\ G_i &= \frac{J_n'(\sqrt{\Lambda_0})}{2\sqrt{\Lambda_0}} \Lambda_i + g_i, \quad i \geq 3, \quad g_3 = g_4 = 0, \end{aligned} \tag{9.10}$$

где функции $g_i = g_i(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{i-3})$ являются полиномами по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_{i-3}$ с голоморфными по Λ_0 коэффициентами, причем $g_i(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$, а функция $G_{\varepsilon}^{(K)}$ голоморфна по $\Lambda_1, \dots, \Lambda_K$ и $G_{\varepsilon}^{(K)}(\Lambda_0, 0, \dots, 0) = 0$. Из полученных соотношений, асимптотик (8.18) и (9.8) и равенства $\ln \eta = -\frac{1}{\varepsilon(A + \mu)}$ следует, что

$$\begin{aligned} \Psi_{\varepsilon, M}^{\pm}(x) &= \phi^{\pm}(n\theta) \left(\sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,0}(\varsigma, \mu) + \varepsilon \eta \sum_{i=1}^K \varepsilon^i W_{i,1}(\varsigma, \mu) + W_{\varepsilon}^{(K)}(x) \right) \pm \\ &\quad \pm \phi^{\mp}(n\theta) \varepsilon \eta \left(\sum_{i=0}^K \varepsilon^i W_{i,1}^{ad}(\varsigma, \mu) + \varepsilon^{K+1} W_K^{ad}(\varsigma, \mu) \right) + O(\varepsilon \eta^2 |\varsigma|^2 \ln |\varsigma|) \end{aligned}$$

при $\eta^{\frac{1}{2}} < \rho < 2\eta^{\frac{1}{2}}$, где $W_{i,j}$, $W_{\varepsilon}^{(K)}(x)$ из (8.24), (8.25) с α_i из (9.5), и

$$\begin{aligned} W_{i,1}^{ad}(\varsigma, \mu) &= -n\alpha_i \varsigma_1 \ln |\varsigma| + \left(\tilde{\alpha}_i + \frac{n\alpha_{i+1}}{A + \mu} \right) \varsigma_1, \quad \tilde{\alpha}_0 = 0, \\ W_K^{ad}(\varsigma, \mu) &= -\frac{n\alpha_{K+1}}{A + \mu} \varsigma_1, \\ W_{\varepsilon}^{(K)}(x) &= \varepsilon^{K+1} \left(-\alpha_{K+1} (\ln |\varsigma| + \ln 2 - \xi_2) + G_{\varepsilon}^{(K)} + \tilde{v}_{K+1}(0, \mu) \right) + \varepsilon \mathbf{b}_K(\varepsilon) \xi_2, \\ \mathbf{b}_K(\varepsilon) &= \sum_{i=1}^K \varepsilon^{i-1} \alpha_i - \sqrt{\lambda_{\varepsilon, K}} J_n'(\sqrt{\lambda_{\varepsilon, K}}). \end{aligned} \tag{9.11}$$

Согласно методу согласования асимптотических разложений, необходимо найти решения задач (8.19), (8.20) и (9.9) с асимптотиками (8.26) и

$$w_{i,1}^{ad}(\varsigma, \mu) = W_{i,1}^{ad}(\varsigma, \mu) + o(|\varsigma|), \quad |\varsigma| \rightarrow \infty. \tag{9.12}$$

Определим функции $w_{i,j}$ формулами (8.28) и (8.32), где α_i из (9.5). Тогда ввиду определения функции $w_{i,0}$ и асимптотик (8.24), (8.26) приходим к равенству (8.29), где α_i из (9.5), $\tilde{v}_i(0, \mu)$ из леммы 9.2, G_i из (9.10). При $i = 0$ это равенство превращается в уравнение (7.13) для Λ_0 . Так как для $n > 0$ собственное значение λ_0 не равно нулю, голоморфность Λ_0 легко вытекает из теоремы о неявной функции. Равенства (8.29) выполнены при $i = 1, 2$, так как в силу (9.5), (9.7) и (9.10) имеем

$$\alpha_2 = \alpha_3 = G_1 = G_2 = 0, \quad \tilde{v}_1(0, \mu) = \tilde{v}_2(0, \mu) = 0.$$

При $i \geq 3$, аналогично тому как (8.30) было получено из (7.13), (8.29), (9.5) и (9.10), несложно получить формулы для Λ_i :

$$\begin{aligned} \Lambda_i(\mu) &= \frac{2\Lambda_0(\mu) \left(\tilde{f}_{i+1}(\mu) + (A + \mu) (\tilde{g}_i(\mu) + \tilde{v}_i(0, \mu)) \right)}{J_n(\sqrt{\Lambda_0(\mu)}) (\Lambda_0(\mu) - n^2 + (A + \mu)^2)}, \\ \tilde{f}_{i+1}(\mu) &= f_{i+1}(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-3}(\mu)), \quad \tilde{g}_i(\mu) = g_i(\Lambda_0(\mu), \dots, \Lambda_{i-3}(\mu)). \end{aligned}$$

Полагая $i = 3, 4$ в полученных формулах и используя равенства (8.16), (8.31) и (9.7), получаем соотношения (7.14) и для $n > 0$. Повторяя рассуждения из предыдущего раздела, доказываем, что

функции $\Lambda_i(\mu)$ голоморфны по $\mu \geq 0$ и удовлетворяют представлениям $\Lambda_i(\mu) = \mu^2 \tilde{\Lambda}_i(\mu)$ при $A = 0$, где $\tilde{\Lambda}_i(\mu)$ — некоторые голоморфные функции.

Построим функции $w_{i,1}^{ad}$. Легко видеть, что функции

$$Y_1(\varsigma) = \operatorname{Re} \sqrt{y^2 - 1}, \quad Y_2(\varsigma) = \frac{1}{2}(\varsigma_1 Y(\varsigma) - \ln 2 Y_1(\varsigma))$$

являются решениями краевых задач

$$\Delta_\varsigma Y_1 = 0, \quad \Delta_\varsigma Y_2 = \frac{\partial Y}{\partial \varsigma_1}, \quad \varsigma_2 > 0, \quad Y_j = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \quad \frac{\partial Y_j}{\partial \varsigma_2} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \quad j = 1, 2,$$

и имеют асимптотики

$$Y_1(\varsigma) = \varsigma_1 + O(|\varsigma|^{-1}), \quad Y_2(\varsigma) = \frac{1}{2}\varsigma_1 \ln |\varsigma| + O(|\varsigma|^{-1}), \quad |\varsigma| \rightarrow \infty.$$

В силу свойств функций Y_j , определения функции $w_{i,0}$, задачи (9.9) и асимптотик (9.11), (9.12) получаем, что

$$w_{i,1}^{ad} = -2n\alpha_i Y_2 + \left(\tilde{\alpha}_i + \frac{\alpha_{i+1}}{A + \mu} \right) Y_1.$$

Положим:

$$\psi_{\varepsilon,K}^\pm(x) = \Psi_{\varepsilon,K}^\pm(x) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{m=0}^{N-1} \chi(|s^m| \eta^{\frac{1}{2}}) \psi_{\varepsilon,K}^{in,\pm}(s^m),$$

$$\psi_{\varepsilon,K}^{in,\pm}(s) = \phi^\pm(n\theta) \sum_{i=1}^K \varepsilon^i (w_{i,0}(s, \mu) + \varepsilon \eta w_{i,1}(s, \mu)) \pm \phi^\mp(n\theta) \varepsilon \eta \sum_{i=0}^K \varepsilon^i w_{i,1}^{ad}(s, \mu),$$

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^\pm(x) = \psi_{\varepsilon,K}^\pm(x) - R_{\varepsilon,K}^\pm(x),$$

$$R_{\varepsilon,K}^\pm(x) = \chi_\varepsilon(x) \phi^\pm(n\theta) \tilde{R}_{\varepsilon,K}(x) \pm \chi_\varepsilon(x) \phi^\mp(n\theta) \frac{n\alpha_{K+1}}{A + \mu} \sum_{m=0}^{N-1} \chi(|s^m| \eta^{\frac{1}{2}}) Y_1(s^m),$$

$$\tilde{R}_{\varepsilon,K}(x) = \chi(1-r) (\mathbf{b}_k(\varepsilon)(1-r) - \varepsilon^{K+1} \alpha_{K+1} X(\xi)) + \varepsilon^{K+1} G_\varepsilon^{(K)} + \varepsilon^{K+1} \tilde{v}_{K+1}(0, \mu) - \varepsilon^K \frac{\alpha_{K+1}}{A + \mu}.$$

Аналогично теореме 8.1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 9.1. *Функции $\psi_{\varepsilon,K}^\pm, \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^\pm \in W_2^1(D) \cap C^\infty(D)$ сходятся к ψ_0^\pm в $L_2(D)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\lambda_{\varepsilon,K}$ сходится к λ_0 и*

$$\|R_{\varepsilon,K}\| = O(\varepsilon^K (A + \mu)).$$

Функции $\tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^\pm$ и $\lambda_{\varepsilon,k}$ являются решениями задачи (8.34) с $u_\varepsilon = \tilde{\psi}_{\varepsilon,K}^\pm$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,K}$, $f = f_{\varepsilon,K}^\pm$, где

$$\|f_{\varepsilon,K}^\pm\| = O(\varepsilon^K (A + \mu)).$$

10. ОБОСНОВАНИЕ

В настоящем разделе мы доказываем, что асимптотические разложения, формальное построенные в предыдущих разделах, действительно являются асимптотиками для собственных значений и собственных функций задачи (7.1), (7.2). Для этого используются следующие утверждения.

Лемма 10.1. *Пусть Q — произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных значений предельной задачи. Тогда для всех $\lambda \in Q$, $f \in L_2(D)$ и достаточно малых ε задача (8.34) однозначно разрешима и для решения верны равномерные ε , μ , λ и f оценки*

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C \|f\|, \tag{10.1}$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве $W_2^1(D)$. Функция u_ε сходится к решению задачи

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 + f, \quad x \in D, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + A \right) u_0 = 0, \quad x \in \partial D, \tag{10.2}$$

сильно в $L_2(D)$ равномерно по λ .

Доказательство. Однозначная разрешимость задачи (8.34) вытекает из уже известной сходимости спектра. Оценку докажем (10.1) от противного. Предположим, что существуют последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, f_k и λ_k такие, что для $\varepsilon = \varepsilon_k$, $f = f_k$, $\lambda = \lambda_k \in Q$ выполнены неравенства

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_1 \geq k \|f_k\|. \quad (10.3)$$

Без ограничения общности будем считать, что $\|u_\varepsilon\| = 1$. Умножим уравнение в (8.34) на $\overline{u_\varepsilon}$ и проинтегрируем по частям по кругу D . Это дает следующую априорную равномерную оценку:

$$\|u_\varepsilon\|_1 \leq C (\|f\| + \|u_\varepsilon\|).$$

Из этой оценки, равенства $\|u_\varepsilon\| = 1$ и (10.3) получаем:

$$\|u_{\varepsilon_k}\|_1 \leq C, \quad \|f_k\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (10.4)$$

Из полученных соотношений и компактности вложения $W_2^1(D)$ в $L_2(D)$ вытекает существование подпоследовательности индексов k , которую мы обозначаем через k' , такой что $\lambda_{k'} \rightarrow \lambda_* \in Q$ и

$$u_{\varepsilon_{k'}} \rightarrow u_* \neq 0$$

слабо в $W_2^1(D)$ и сильно в $L_2(D)$. В [66] было показано, что для любой функции $V \in C^\infty(\overline{D})$ существует последовательность функций $V_\varepsilon \in W_2^1(D)$, обращающихся в нуль на γ_ε , таких что

$$\begin{aligned} V_\varepsilon \rightarrow V \quad \text{слабо в } W_2^1(D) \text{ и сильно в } L_2(D), \\ \int_D (\nabla V_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon) dx \rightarrow \int_D (\nabla V, \nabla v) dx + A \int_{\partial D} V v d\theta, \end{aligned} \quad (10.5)$$

где v_ε — произвольная последовательность функций из $W_2^1(D)$, обращающихся в нуль на γ_ε и сходящихся к $v \in W_2^1(D)$ сильно в $L_2(D)$ и слабо $W_2^1(D)$. Ввиду (8.34) выполнено равенство

$$\int_D (\nabla V_{\varepsilon_{k'}}, \nabla u_{\varepsilon_{k'}}) dx = \lambda_{k'} \int_D V_{\varepsilon_{k'}} u_{\varepsilon_{k'}} dx + \int_D f_{k'} u_{\varepsilon_{k'}} dx.$$

Переходя в нем к пределу при $k' \rightarrow \infty$ и учитывая (10.4), (10.5), заключаем, что u_* есть решение задачи

$$-\Delta u_* = \lambda u_*, \quad x \in D, \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + A \right) u_* = 0, \quad x \in \partial D,$$

т. е. $\lambda_* \in Q$ оказывается собственным значением предельной задачи, в то время как по предположению множество Q не содержит собственных значений предельной задачи. Данное противоречие доказывает оценку (10.1).

Аналогичными рассуждениями, используя (10.1) вместо (10.4), легко доказать сходимость решения задачи (8.34) с $\lambda = \lambda(k) \rightarrow \lambda_*$ при $k \rightarrow \infty$ к решению задачи (10.2) с $\lambda = \lambda_*$. Из этого факта и непрерывности u_0 по λ вытекает равномерная по λ сходимость функции u_ε к u_0 . Теорема доказана. \square

Лемма 10.2. Пусть λ_0 является p -кратным собственным значением предельной задачи, $\lambda_\varepsilon^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$ — собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к λ_0 и взятые с учетом кратности, $\psi_\varepsilon^{(j)}$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(D)$. Тогда для λ , достаточно близких к λ_0 , решение задачи (8.34) удовлетворяет представлению

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^p \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} f dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (10.6)$$

где \tilde{u}_ε голоморфна по λ в норме пространства $L_2(D)$ и ортогональна в $L_2(D)$ всем функциям $\psi_\varepsilon^{(j)}$. Для u_ε верна равномерная по ε , μ , λ и f оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 \leq C \|f\|. \quad (10.7)$$

Доказательство. Известно, что решение u_ε задачи (8.34) является мероморфной по λ функцией, имеющей полюса в собственных значениях возмущенной задачи, и все эти полюса простые. Вычеты в этих полюсах (собственных значениях) являются проекторами на соответствующие собственные функции возмущенной задачи. Так как $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ сходится к λ_0 , то λ , близкие λ_0 , также близки и к $\lambda_\varepsilon^{(j)}$. Поэтому для функции u_ε справедливо представление

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^p \frac{b_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \psi_\varepsilon^{(j)} + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (10.8)$$

где $b_\varepsilon^{(j)}$ — некоторые скалярные коэффициенты, \tilde{u}_ε — голоморфная по λ функция. Из уравнения для u_ε следует, что

$$(\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda) \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} u_\varepsilon dx = \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} f dx.$$

Подставляя формулу (10.8) в это равенство, получаем, что

$$b_\varepsilon^{(j)} + (\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda) \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} \tilde{u}_\varepsilon dx = \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} f dx.$$

Отсюда в силу голоморфности по \tilde{u}_ε получаем:

$$b_\varepsilon^{(j)} = \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} f dx, \quad \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} \tilde{u}_\varepsilon dx = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Эти соотношения и (10.8) приводят к представлению (10.6).

Докажем оценку (10.7). Через $S(z, a)$ обозначим открытый круг радиуса a в комплексной плоскости с центром в точке z . Выберем число δ так, что круг $S(\lambda_0, \delta)$ не содержит никаких собственных значений предельной задачи, за исключением λ_0 . Тогда для всех достаточно малых ε каждое собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ лежит в круге $S(\lambda_0, \frac{\delta}{2})$. Следовательно, в силу представления (10.8) и леммы 10.1 для $\lambda \in \partial S(\lambda_0, \delta)$ верна равномерная оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_1 = \left\| u_\varepsilon - \sum_{j=1}^p \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \int_D \psi_\varepsilon^{(j)} f dx \right\|_1 \leq C \|f\| + \frac{2}{\delta} \sum_{j=1}^p \|\psi_\varepsilon^{(j)}\|_1 \|f\| \leq C \|f\|.$$

Так как \tilde{u}_ε голоморфна по λ , в силу принципа максимума модуля последнее неравенство верно и для $\lambda \in S(\lambda_0, \delta)$. Лемма доказана. \square

Лемма 10.3. *Собственные значения возмущенной задачи имеют асимптотики (7.12)–(7.14).*

Доказательство. Пусть λ_0 — собственное значение задачи (7.4) и корень уравнения (7.5) для $n = n_i$, $i = 1, \dots, m$, где n_i различны. Предположим, что $n_1 = 0$, $n_i > 0$, $i = 2, \dots, m$. Случаи $n_i > 0$, $i = 1, \dots, m$ и $m = 1$, $n_1 = 0$ разбираются аналогично. Собственные функции, соответствующие λ_0 , имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_0^{(1)}(x) &= J_0(\sqrt{\lambda_0} r), \\ \psi_0^{(2i-2)}(x) &= J_{n_i}(\sqrt{\lambda_0} r) \phi^+(n_i \theta), \quad i = 2, \dots, m, \\ \psi_0^{(2i-1)}(x) &= J_{n_i}(\sqrt{\lambda_0} r) \phi^-(n_i \theta), \quad i = 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Аналогично, через $\psi_{\varepsilon, K}^{(j)}$, $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(j)}$, $f_{\varepsilon, K}^{(j)}$ обозначим функции $\psi_{\varepsilon, K}$, $\psi_{\varepsilon, K}^\pm$, $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}$, $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^\pm$, $f_{\varepsilon, K}$, $f_{\varepsilon, K}^\pm$, построенные в двух предыдущих разделах и соответствующие индексам n_i . Положим $\lambda_{\varepsilon, K}^{(1)} = \lambda_{\varepsilon, K}$, где $\lambda_{\varepsilon, K}$ было определено в разделе 8, $\lambda_{\varepsilon, K}^{(2i-2)} = \lambda_{\varepsilon, K}^{(2i-1)} = \lambda_{\varepsilon, K}$, где $\lambda_{\varepsilon, K}$ было введено в разделе 9,

и соответствующие индексам n_i , $i = 2, \dots, m$. Ясно, что кратность λ_0 равна $(2m - 1)$. Согласно теоремам 8.1 и 9.1 и лемме 10.2, для функций $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(j)}$ верны представления

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(j)} &= \sum_{k=1}^{2m-1} \mathbf{b}_{\varepsilon}^{jk} \psi_{\varepsilon}^{(k)} + \tilde{u}_{\varepsilon}^{(j)}, \\ \mathbf{b}_{\varepsilon}^{jk} &= \int_D \psi_{\varepsilon}^{(k)} \tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(j)} dx = \frac{1}{\lambda_{\varepsilon}^{(k)} - \lambda_{\varepsilon, K}^{(j)}} \int_D \psi_{\varepsilon}^{(k)} f_{\varepsilon, K}^{(j)} dx, \\ \|\tilde{u}_{\varepsilon}^{(j)}\|_1 &\leq C \|f_{\varepsilon, K}^{(j)}\| = O(\varepsilon^K (A + \mu)).\end{aligned}\tag{10.9}$$

Предположим, что некоторые из собственных значений $\lambda_{\varepsilon}^{(j)}$ не удовлетворяют асимптотикам (7.12), (7.13), (7.14), а именно, выполнены равномерные по ε и μ оценки

$$\left| \lambda_{\varepsilon}^{(k)} - \lambda_{\varepsilon, K}^{(j)} \right| \geq C \varepsilon^p (A + \mu), \quad j = 1, \dots, 2m - 1, \quad k \in I,\tag{10.10}$$

где p — некоторое число, не зависящее от K , а I — подмножество индексов $I \subseteq \{1, 2, \dots, 2m - 1\}$. В силу (10.10) и теорем 8.1, 9.1 для функций $f_{\varepsilon, K}^{(j)}$ заключаем, что при $K \geq p + 1$ верны сходимости

$$\mathbf{b}_{\varepsilon}^{jk} \rightarrow 0, \quad k \in I, \quad j = 1, \dots, 2m - 1.$$

Из определения функций $\mathbf{b}_{\varepsilon}^{jk}$, ортогональности $\psi_{\varepsilon}^{(j)}$ и сходимости $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(j)} \rightarrow \psi_0^{(j)}$ следует, что числа $\mathbf{b}_{\varepsilon}^{jk}$ равномерно ограничены, следовательно, существует подпоследовательность $\varepsilon' \rightarrow 0$ такая, что $\mathbf{b}_{\varepsilon'}^{jk} \rightarrow \mathbf{b}_0^{jk}$, и более того, $\mathbf{b}_0^{jk} = 0$, если $k \in I$, $j = 1, \dots, 2m - 1$. Ввиду (10.9) и леммы 10.2 верны равенства

$$\int_D \tilde{\psi}_{\varepsilon', K}^{(j)} \tilde{\psi}_{\varepsilon', K}^{(l)} dx = \sum_{k=1}^{2m-1} \mathbf{b}_{\varepsilon'}^{jk} \mathbf{b}_{\varepsilon'}^{lk} + \int_D \tilde{u}_{\varepsilon', K}^{(j)} \tilde{u}_{\varepsilon', K}^{(l)} dx.$$

Переходя в них к пределу при $\varepsilon' \rightarrow 0$ и принимая во внимание сходимости $\tilde{\psi}_{\varepsilon', K}^{(i)} \rightarrow \psi_0^{(i)}$ и оценки для функций $\tilde{u}_{\varepsilon', K}^{(i)}$, получим

$$\mathbf{c}_{jl} \delta_{jl} = \sum_{k=1}^{2m-1} \mathbf{b}_0^{jk} \mathbf{b}_0^{lk}, \quad \mathbf{c}_{jj} \neq 0,\tag{10.11}$$

где δ_{jl} — символ Кронекера—Капелли.

Через $\mathbf{b}_0^{(j)}$ обозначим вектор с компонентами \mathbf{b}_0^{jk} , $k = 1, \dots, 2m - 1$, $j \notin I$, $j = 1, \dots, 2m - 1$. Ввиду (10.11) имеется $(2m - 1)$ ненулевых попарно ортогональных q -мерных векторов $\mathbf{b}_0^{(i)}$, где $q < 2m - 1$. Это противоречие доказывает лемму. \square

Лемма 10.4. Пусть $\lambda_{\varepsilon}^{(1)}$ и $\lambda_{\varepsilon}^{(2)}$ — собственные значения задачи (7.1), (7.2) с асимптотиками (7.12), (7.13), (7.14), соответствующие индексам n и m , $n \neq m$, и пусть выполнены условия (7.10), (7.10). Тогда верна равномерная по ε и μ оценка

$$\left| \lambda_{\varepsilon}^{(1)} - \lambda_{\varepsilon}^{(2)} \right| \geq C \varepsilon^4 (A + \mu).\tag{10.12}$$

Доказательство. Если $\lambda_{\varepsilon}^{(i)}$, $i = 1, 2$, сходятся к различным предельным собственным значениям, то оценка (10.12) очевидна. Поэтому далее предполагаем, что $\lambda_{\varepsilon}^{(i)}$ сходятся к одному и тому же собственному значению λ_0 . Вначале рассмотрим случай $A = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\lambda_{\varepsilon}^{(1)} &= \lambda_0 + \mu \frac{2\lambda_0}{\lambda_0 - n^2} + O(\mu(\mu + \varepsilon^3)), & \lambda_{\varepsilon}^{(2)} &= \lambda_0 + \mu \frac{2\lambda_0}{\lambda_0 - m^2} + O(\mu(\mu + \varepsilon^3)), \\ \lambda_{\varepsilon}^{(1)} - \lambda_{\varepsilon}^{(2)} &= \mu \frac{2\lambda_0(n^2 - m^2)}{(\lambda_0 - n^2)(\lambda_0 - m^2)} + O(\mu(\mu + \varepsilon^3)),\end{aligned}$$

откуда следует (10.12) для $A = 0$. Пусть теперь $A > 0$. Если $\varepsilon = o(\mu^{\frac{1}{3}})$, то из (7.13) следует, что

$$\lambda_{\varepsilon}^{(1)} - \lambda_{\varepsilon}^{(2)} = \mu \frac{2\lambda_0(n^2 - m^2)}{(\lambda_0 - n^2 + A^2)(\lambda_0 - m^2 + A^2)} + O(\varepsilon^3),$$

откуда уже вытекает (10.12) при $A > 0$, $\varepsilon = o(\mu^{\frac{1}{3}})$. Если же $\mu = o(\varepsilon^3)$, то

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon^{(1)} - \lambda_\varepsilon^{(2)} &= -\varepsilon^3 \frac{A^2 \lambda_0 \zeta(3)}{4} \left(\frac{\lambda_0 + 2n^2}{\lambda_0 - n^2 + A^2} - \frac{\lambda_0 + 2m^2}{\lambda_0 - m^2 + A^2} \right) + O(\varepsilon^4 + \mu) = \\ &= -\varepsilon^3 \frac{A^2 \lambda_0 \zeta(3) (2A^2 + 3\lambda_0) (n^2 - m^2)}{(\lambda_0 - n^2 + A^2)(\lambda_0 - m^2 + A^2)} + O(\varepsilon^4 + \mu),\end{aligned}$$

и оценка (10.12) верна и в этом случае. Если же $\mu = O(\varepsilon^3)$, то с учетом условий (7.10), (7.11) несложно видеть, что

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon^{(1)} - \lambda_\varepsilon^{(2)} &= \frac{\lambda_0 (n^2 - m^2) (8\mu - \varepsilon^3 A^2 \zeta(3) (2A^2 + 3\lambda_0))}{4(\lambda_0 - n^2 + A^2)(\lambda_0 - m^2 + A^2)} + \\ &+ \varepsilon^4 \frac{\pi^4 \lambda_0 (8\lambda_0 + 1) (n^2 - m^2)}{5760(\lambda_0 - n^2 + A^2)(\lambda_0 - m^2 + A^2)} + O(\varepsilon^5) = \\ &= \varepsilon^3 \frac{\lambda_0 (n^2 - m^2) (8c - A^2 \zeta(3) (2A^2 + 3\lambda_0))}{4(\lambda_0 - n^2 + A^2)(\lambda_0 - m^2 + A^2)} + \\ &+ \varepsilon^4 \frac{\pi^4 \lambda_0 (8\lambda_0 + 1) (n^2 - m^2)}{5760(\lambda_0 - n^2 + A^2)(\lambda_0 - m^2 + A^2)} + O(\varepsilon^5),\end{aligned}$$

Если первый член в этой формуле не равен нулю, то с учетом условия (7.11) сразу получаем неравенство (10.12). Если же первый член обращается в нуль, то второй член уже не обращается в нуль, и мы вновь приходим к (10.12). Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 7.1. В доказательстве мы придерживаемся обозначений, введенных в доказательстве леммы 10.3, и рассматриваем только случай, разобранный в доказательстве этой леммы; остальные случаи исследуются аналогично. Покажем, что собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(j)}$ простое, если соответствующий индекс n_i равен нулю, и двукратное, если этот индекс положителен. Рассмотрим собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$, соответствующие одному и тому же номеру $n_p > 0$. В силу леммы 10.3 эти собственные значения имеют одинаковое асимптотическое разложение. Покажем, что они совпадают. В силу леммы 10.4 остальные собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к λ_0 имеют асимптотики, отличные от асимптотики для $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)}$ и $\lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$. Поэтому условие $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)} = \lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$ эквивалентно двукратности собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$. Выпишем представления (10.9) для функций $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(2p-2)}$ и $\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(2p-1)}$:

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(i)} = \sum_{j=2p-2}^{2p-1} \mathbf{b}_\varepsilon^{ij} \psi_\varepsilon^{(j)} + \hat{u}_\varepsilon^{(i)}, \quad \hat{u}_\varepsilon^{(i)} = \tilde{u}_\varepsilon^{(i)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2p-2 \\ k \neq 2p-1}}^{2m-1} \mathbf{b}_\varepsilon^{ik} \psi_\varepsilon^{(k)}, \quad i = 2p-2, 2p-1. \quad (10.13)$$

В силу леммы 10.4 и определения величин $\mathbf{b}_\varepsilon^{ik}$ получаем:

$$\mathbf{b}_\varepsilon^{ik} = O(\varepsilon^{K-4}), \quad i = 2p-2, 2p-1, \quad k = 1, \dots, 2m-1, \quad k \neq 2p-2, 2p-1.$$

Так как

$$\|\tilde{u}_\varepsilon^{(i)}\| = O(\varepsilon^K (A + \mu)),$$

то

$$\|\hat{u}_\varepsilon^{(i)}\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

если $K \geq 5$. В силу теоремы 9.1 верны сходимости

$$\tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(2p-2)} \rightarrow J_{n_p}(\sqrt{\lambda_0 r}) \phi^+(n_p \theta), \quad \tilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(2p-1)} \rightarrow J_{n_p}(\sqrt{\lambda_0 r}) \phi^-(n_p \theta) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, существуют две линейные комбинации собственных функций $\psi_\varepsilon^{(2p-2)}$ и $\psi_\varepsilon^{(2p-1)}$, сходящиеся к $J_{n_p}(\sqrt{\lambda_0 r}) \phi^\pm(n_p \theta)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_\varepsilon^{(1)} \psi_\varepsilon^{(2p-2)} + \mathbf{c}_\varepsilon^{(2)} \psi_\varepsilon^{(2p-1)} &\rightarrow J_{n_p}(\sqrt{\lambda_0 r}) \phi^+(n_p \theta), \\ \mathbf{c}_\varepsilon^{(3)} \psi_\varepsilon^{(2p-2)} + \mathbf{c}_\varepsilon^{(4)} \psi_\varepsilon^{(2p-1)} &\rightarrow J_{n_p}(\sqrt{\lambda_0 r}) \phi^-(n_p \theta),\end{aligned} \quad (10.14)$$

$$c_\varepsilon^{(1)} = b_\varepsilon^{2p-2, 2p-2}, \quad c_\varepsilon^{(2)} = b_\varepsilon^{2p-2, 2p-1}, \quad (10.15)$$

$$c_\varepsilon^{(3)} = b_\varepsilon^{2p-1, 2p-2}, \quad c_\varepsilon^{(4)} = b_\varepsilon^{2p-1, 2p-1}. \quad (10.16)$$

Введем функции

$$\widehat{\psi}_\varepsilon^{(i)}(r, \theta) = \psi_\varepsilon^{(i)}(r, \theta) \left(r, \theta + \left[\frac{N}{4n_p} \right] \varepsilon \pi \right), \quad i = 2p-2, 2p-1,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа. Легко видеть, что $\widehat{\psi}_\varepsilon^{(i)}$ — собственные функции возмущенной задачи, соответствующие $\lambda_\varepsilon^{(i)}$. Предположим, что собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(i)}$, $i = 2p-2, 2p-1$, различные. Тогда собственные функции, соответствующие собственным значениям, ортонормированы в $L_2(D)$. В этом случае

$$\widehat{\psi}_\varepsilon^{(2p-2)} = c_\varepsilon^{(5)} \psi_\varepsilon^{(2p-2)}, \quad \widehat{\psi}_\varepsilon^{(2p-1)} = c_\varepsilon^{(6)} \psi_\varepsilon^{(2p-1)}, \quad |c_\varepsilon^{(5)}| = |c_\varepsilon^{(6)}| = 1.$$

Из этих равенств и (10.14) получаем:

$$\begin{aligned} c_\varepsilon^{(5)} c_\varepsilon^{(1)} \psi_\varepsilon^{(2p-2)} + c_\varepsilon^{(6)} c_\varepsilon^{(2)} \psi_\varepsilon^{(2p-2)} &\rightarrow -J_{n_p} \left(\sqrt{\lambda_0 r} \right) \phi^-(n_p \theta), \\ c_\varepsilon^{(5)} c_\varepsilon^{(3)} \psi_\varepsilon^{(2p-2)} + c_\varepsilon^{(6)} c_\varepsilon^{(4)} \psi_\varepsilon^{(2p-2)} &\rightarrow J_{n_p} \left(\sqrt{\lambda_0 r} \right) \phi^+(n_p \theta). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Вычисляя скалярные произведения в $L_2(D)$ функций из левых частей сходимостей в (10.14) и (10.17), получаем:

$$\begin{aligned} c_\varepsilon^{(1)} c_\varepsilon^{(3)} c_\varepsilon^{(5)} + c_\varepsilon^{(2)} c_\varepsilon^{(4)} c_\varepsilon^{(6)} &\rightarrow -c, \quad c_\varepsilon^{(1)} c_\varepsilon^{(3)} c_\varepsilon^{(5)} + c_\varepsilon^{(2)} c_\varepsilon^{(4)} c_\varepsilon^{(6)} \rightarrow c, \\ c &= \left\| J_{n_p} \left(\sqrt{\lambda_0 r} \right) \phi^+(n_p \theta) \right\|^2 = \left\| J_{n_p} \left(\sqrt{\lambda_0 r} \right) \phi^-(n_p \theta) \right\|^2. \end{aligned}$$

Эти сходимости не могут быть выполнены одновременно, и потому $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)} = \lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$. Следовательно, если $n_p > 0$, то соответствующее собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)} = \lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$ двукратное. Собственное значение возмущенной задачи, соответствующее индексу $n_p = 0$, имеет асимптотику, отличную от асимптотик, соответствующих другим индексам, что означает простоту данного собственного значения.

Переходим к обоснованию асимптотик собственных функций возмущенной задачи. Пусть $n_p > 0$. Положим

$$\Psi_\varepsilon^{(i)} = \sum_{j=2p-2}^{2p-1} b_\varepsilon^{ij} \psi_\varepsilon^{(j)}, \quad i = 2p-2, 2p-1.$$

Ясно, что $\Psi_\varepsilon^{(i)}$ являются собственными функциями, соответствующими двукратному собственному значению $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)}$. В силу (10.13), приведенных выше оценок для $\widehat{u}_\varepsilon^{(i)}$ и сходимости $\widehat{\psi}_{\varepsilon, K}^{(i)}$ к $\psi_0^{(i)}$ выводим, что $\Psi_\varepsilon^{(i)}$ сходится к $\psi_0^{(i)}$. Соотношения (10.13), оценки для $\widehat{u}_\varepsilon^{(i)}$ и другие утверждения теорем 8.1 и 9.1 о функциях $R_{\varepsilon, K}$ дают неравенства

$$\|\psi_{\varepsilon, K}^{(i)} - \Psi_\varepsilon^{(i)}\| \leq \|\widetilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(i)} - \Psi_\varepsilon^{(i)}\| + \|\widetilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(i)} - \psi_\varepsilon^{(i)}\| \leq \|\widehat{u}_\varepsilon^{(i)}\| + \|\widetilde{\psi}_{\varepsilon, K}^{(i)} - \psi_\varepsilon^{(i)}\| = O(\varepsilon^{K-4}),$$

которые означают, что асимптотики для собственных функций, соответствующих двукратным собственным значениям $\lambda_\varepsilon^{(2p-2)} = \lambda_\varepsilon^{(2p-1)}$, имеют вид (9.1).

Для простого собственного значения $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ мы рассматриваем соответствующую собственную функцию

$$\Psi_\varepsilon^{(1)} = b_\varepsilon^{11} \psi_\varepsilon^{(1)},$$

сходящуюся к $J_0(\sqrt{\lambda_0 r})$. По аналогии со случаем двукратного собственного значения легко доказывается оценка

$$\left\| \psi_{\varepsilon, K}^{(1)} - \Psi_\varepsilon^{(1)} \right\| = O(\varepsilon^{K-4}),$$

что означает, что асимптотика собственной функции, соответствующей $\lambda_\varepsilon^{(1)}$ имеет вид (8.33). Теорема 7.1 доказана. \square

11. ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы доказываем, что для некоторых положительных A существуют λ_0 , являющиеся корнями уравнения (7.5) одновременно для различных n . Обозначим:

$$f_{n,A}(t) = tJ'_n(t) + AJ_n(t), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad A \geq 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Нули функции $f_{n,A}(t)$ для неотрицательных A суть корни уравнения (7.5). Докажем, что существуют $A > 0$, $n, m, n \neq m$, для которых функции $f_{n,A}$ и $f_{m,A}$ имеют общий положительный корень. Положим

$$F_{n,m}(t) = t(J'_n(t)J_m(t) - J'_m(t)J_n(t)).$$

Пусть $t = t_0$ — нуль функции $F_{n,m}$ и не является нулем функций J_n и J_m . Тогда из равенства

$$t_0(J'_n(t_0)J_m(t_0) - J'_m(t_0)J_n(t_0)) = 0$$

следует, что

$$t_0 \frac{J'_n(t_0)}{J_n(t_0)} = t_0 \frac{J'_m(t_0)}{J_m(t_0)}.$$

Пусть

$$B = \frac{t_0 J'_n(t_0)}{J_n(t_0)}.$$

Если $B \leq 0$, то точка t_0 — общий нуль функций $f_{n,A}$ и $f_{m,A}$ с $A = -B$. Таким образом, достаточно отыскать нуль функции $F_{n,m}$ для некоторых n и m и проверить неравенство

$$\frac{t_0 J'_n(t_0)}{J_n(t_0)} < 0.$$

Возьмем $n = 6$, $m = 3$. Тогда

$$F_{6,3}(8) \approx -0,1673037488 < 0, \quad F_{6,3}(9) \approx 0,0658220035 > 0.$$

Так функция $F_{6,3}$ — гладкая, то существует нуль функции $F_{6,3}$ на интервале $(8, 9)$, который мы обозначим через t_0 . Пусть $j_{p,q}, j'_{p,q}$ — положительные нули функций J_p и J'_p , взятые в порядке возрастания:

$$j_{p,1} < j_{p,2} < \dots, \quad j'_{p,1} < j'_{p,2} < \dots$$

Имеем:

$$\begin{aligned} j_{3,1} &\approx 6,380161896 < 8, & j_{3,2} &\approx 9,761023130 > 9, \\ j_{6,1} &\approx 9,936109524 > 9, & j'_{6,1} &\approx 7,501266145 < 8. \end{aligned}$$

Эти равенства означают, функции J_3 и J_6 не имеют нулей на интервале $(8, 9)$. Функция $J_6(t)$ положительна для $t \in (0, j_{6,1})$ и $j'_{6,1} < 8 < 9 < j_{6,1}$. Поэтому выполнены неравенства

$$J_6(t) > 0, \quad J'_6(t) < 0 \quad \text{при } t \in (8, 9),$$

откуда уже следует, что

$$t \frac{J'_6(t)}{J_6(t)} < 0 \quad \text{при } t \in (8, 9).$$

Таким образом, существует нуль t_0 функции $F_{6,3}$ на интервале $(8, 9)$, не являющийся нулем функций J_3 и J_6 , и более того, $t_0 J'_6(t_0)/J_6(t_0) < 0$. Следовательно, t_0 является корнем уравнения (7.5) одновременно для $n = 6$ и $n = 3$ с

$$A = -t_0 \frac{J'_6(t_0)}{J_6(t_0)} > 0.$$

ГЛАВА 4

ДВУМЕРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: УСРЕДНЕННОЕ ТРЕТЬЕ КРАЕВОЕ УСЛОВИЕ

12. Постановка задачи и основные результаты главы

В настоящей главе мы вновь возвращаемся к задаче (1.1), (1.2) и, как и в предыдущей главе, рассматриваем случай усредненного третьего краевого условия. Однако здесь изучается более сложная задача о построении асимптотических разложений в случае принципиально непериодического чередования. Основной целью является выяснение максимально слабых ограничений на множество γ_ε , оставляющих возможность построить первые члены асимптотических разложений собственных элементов задачи (1.1), (1.2). Сформулируем эти ограничения в виде следующих условий.

(C2). Существует функция $\theta = \theta(s)$, заданная на границе множества ω , принимающая значения на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющая условиям (1.3), и положительная ограниченная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, такие что

$$\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j, \quad c_3\eta(\varepsilon) \leq a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon) \leq 2c_2^{-1}\eta(\varepsilon), \quad (12.1)$$

где c_3 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε , η и j , а для функции η выполнено равенство (7.3) с $A = \text{const} \geq 0$. Если $A > 0$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\theta_\varepsilon(s)$ сходится в $C^1[0, S]$ к некоторой функции $\theta_0(s)$, $\theta'_0 \in C^\infty(\partial\omega)$. Норма $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε .

Соотношения (12.1) более слабые по сравнению с равенствами (1.4). Геометрически равенства из (12.1) означают, что с помощью функции θ_ε точки $\{x_j^\varepsilon\}$ можно отобразить в периодическое множество точек, лежащее на единичной окружности. Более того, точку x_j^ε можно выбрать произвольно на множестве $\gamma_{\varepsilon,j}$, переопределив соответственно функции a_j и b_j . Поэтому равенства из (12.1) являются (достаточно слабым) ограничением на распределение множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ на границе $\partial\omega$. Неравенства из (12.1) означают, что длины множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ должны иметь одинаковый порядок малости при $\varepsilon \rightarrow 0$. Этот порядок малости описывается функцией η , в то время как в теоремах 1.1, 1.2 ввиду локальной периодичности чередования функция η описывала точные длины множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$. Таким образом, условию (C2) подчиняется достаточно широкий класс множеств γ_ε , описывающих принципиально непериодическое чередование. Как и в предыдущей главе, равенство (7.3) и сходимость функции θ_ε при $A > 0$ призваны обеспечить усредненное второе либо третье краевое условие. А именно, согласно [65, 66, 91], при выполнении условия (C2) собственные значения задачи (1.1), (1.2) сходятся с сохранением совокупной кратности к собственным значениям задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A\theta'_0 \right) \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad (12.2)$$

где при $A = 0$ полагаем $\theta_0(s) \equiv s$.

Для того, чтобы сформулировать основные результаты второй главы диссертации, нам понадобятся следующие вспомогательные обозначения.

Функцию θ_ε продолжим на значения $s \in [-S, 2S]$ по правилу

$$\theta_\varepsilon(s) = \theta_\varepsilon(s - kS) + 2\pi k, \quad s \in [kS, (k+1)S], \quad k = -1, 0, 1.$$

Обозначим:

$$d_j(\varepsilon) = \frac{a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, \quad d^j(\varepsilon) = \frac{\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon)) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon))}{2\varepsilon\eta(\varepsilon)},$$

$$\delta_j(\varepsilon) = d_{j+1}(\varepsilon) - d_j(\varepsilon), \quad \delta^j(\varepsilon) = d^{j+1}(\varepsilon) - d^j(\varepsilon).$$

Пусть $\chi(t)$ — бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < \frac{1}{4}$ и нулю при $t > \frac{3}{4}$ и принимающая значения из отрезка $[0, 1]$. Введем еще одну функцию $f_\varepsilon(\theta)$

следующим образом:

$$f_\varepsilon(\theta) = d^{j+1}(\varepsilon) - \chi\left(\frac{\theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)}{\varepsilon\pi}\right) \delta^j(\varepsilon) \quad \text{при } 0 \leq \theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) \leq \varepsilon\pi, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Следующее утверждение носит вспомогательный характер и необходимо для формулировки основных результатов главы. Его доказательство проводится в разделе 13.

Лемма 12.1. Пусть $A \geq 0$, функция $\theta'_\varepsilon(s) \in C^\infty(\partial\omega)$ равномерно по ε ограничена в норме $C(\partial\omega)$ и для $A > 0$ имеет место сходимость $\|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\omega)} \rightarrow 0$. Тогда для каждого простого собственного значения λ_0 задачи (12.2) существует единственное и простое собственное значение задачи

$$-\Delta\Psi_0 = \Lambda_0\Psi_0, \quad x \in \omega, \quad (12.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A + \mu)\theta'_\varepsilon\right)\Psi_0 = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad (12.4)$$

сходящееся к λ_0 при $(\varepsilon, \mu) \rightarrow 0$, где μ — малый положительный параметр. Для соответствующим нормированных в $L_2(\omega)$ собственных функций имеет место сильная в $W_2^1(\omega)$ сходимость $\Psi_0 \rightarrow \psi_0$. Собственное значение $\Lambda_0(\mu, \varepsilon)$ и соответствующая собственная функция $\Psi_0(x, \mu, \varepsilon)$ голоморфны по μ ; последняя — в норме $W_2^1(\omega)$.

Основными результатами второй главы диссертации являются следующие утверждения.

Теорема 12.1. Пусть выполнены условия (С2) и равенство

$$\delta_*(\varepsilon) \equiv \max_j |\delta_j(\varepsilon)| = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A + \mu)^{-1}), \quad (12.5)$$

где $\mu = \mu(\varepsilon)$ определено формулой (7.8). Тогда для каждого собственного значения λ_0 задачи (12.2) существует единственное сходящееся к нему собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2). Это собственное значение простое и имеет следующую двупараметрическую асимптотику:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(\mu, \varepsilon) + o(\varepsilon(A + \mu)), \quad (12.6)$$

$$\Lambda_1(\mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \int_{\partial\omega} (\Psi_0(x, \mu, \varepsilon))^2 \ln f_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)) \theta'_\varepsilon(s) ds, \quad (12.7)$$

где Λ_0 и Ψ_0 удовлетворяют утверждению леммы 12.1. Функция Λ_1 неположительна и голоморфна по μ . Асимптотика соответствующей собственной функции ψ_ε в норме $W_2^1(\omega)$ имеет вид (15.2).

Обратим внимание на равенство (12.5). Величины δ_j характеризуют разность длин двух соседних множеств $\gamma_{\varepsilon, j+1}$ и $\gamma_{\varepsilon, j}$, поэтому равенство (12.5) фактически означает, что длины двух соседних составляющих γ_ε не очень сильно отличаются друг от друга.

Отметим, что произвол в выборе срезающей функции χ не оказывает существенного влияния на вид члена $\varepsilon\Lambda_1$ в асимптотике (12.6). Выбор функции χ влияет на значения функции $f_\varepsilon(\theta)$ только при $\frac{\pi}{4}\varepsilon < \theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \frac{3\pi}{4}\varepsilon$, где в силу (12.5) выполнено $f_\varepsilon(\theta) = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A + \mu)^{-1})$. Поэтому произвол в выборе χ способен изменить слагаемое $\varepsilon\Lambda_1$ лишь на величину $o(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu))$, что не превышает остатка в асимптотике.

В следующей теореме приведены асимптотики собственных значений возмущенной задачи в случае нарушения равенства (12.5) и сохранения остальных условий теоремы 12.1.

Теорема 12.2. Пусть выполнено условие (С2). Тогда для каждого собственного значения λ_0 задачи (12.2) существует единственное сходящееся к нему собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2). Собственное значение λ_ε простое и имеет следующую двупараметрическую асимптотику:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \mu \int_{\partial\omega} (\psi_0(x))^2 \theta'_\varepsilon(s) ds + O\left(\mu^2 + \mu\varepsilon^{\frac{3}{2}} + A(\sigma_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}})\right), \quad (12.8)$$

где $\sigma_\varepsilon = \|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\omega)}$. Асимптотика соответствующей собственной функции ψ_ε в норме $W_2^1(\omega)$ имеет вид (15.3).

Асимптотика (12.8) конструктивна при $A = 0$, а в случае $A > 0$ — при $\sigma_\varepsilon + \varepsilon^{\frac{1}{2}} = o(\mu)$. Случай кратного предельного собственного значения в условиях теорем 12.1, 12.2 рассматривается аналогично.

Теоремы 12.1, 12.2 являются обобщениями аналогичных результатов работ [23, 26].

Доказательство теорем 12.1, 12.2 проводится следующим образом. В разделе 13 демонстрируются основные идеи формального построения асимптотических разложений в условиях теорем 12.1, 12.2, позволяющие учесть неперIODическую структуру чередования. В построении, помимо метода пограничного слоя и метода многих масштабов, используется и метод согласования асимптотических разложений. На основе последнего строится внутреннее разложение, которое вместе с пограничным слоем позволяет удовлетворить требуемым граничным условиям. Используемая здесь схема построения является нетривиальным обобщением схемы из [23, 26], использованной для изучения локально периодической смены граничных условий в предыдущих главах.

Первые члены асимптотик, формально построенные в разделе 13, после подстановки в исходную задачу не дают невязок нужного порядка малости. Чтобы добиться невязок нужного порядка малости, приходится строить дополнительные вспомогательные члены асимптотических разложений. Это построение проводится в разделе 14, результатом которого является построение формального асимптотического решения и оценка невязок в терминах ε , μ и δ_* . В разделе 15 проводится обоснование асимптотических разложений, что завершает доказательство теорем 12.1, 12.2.

Результаты данной главы были опубликованы в [10, 13, 16].

13. ФОРМАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В настоящем разделе будет продемонстрирована схема построения формальных асимптотических разложений собственных элементов задачи (1.1), (1.2) в условиях теорем 12.1, 12.2. Данная схема позволяет учесть принципиально неперIODическое чередование граничных условий. Как и в предыдущей главе, в формальном построении применяются метод многих масштабов, метод пограничного слоя и метод согласования асимптотических разложений. Всюду в главе будем считать выполненным условие (С2).

Так как собственное значение λ_0 задачи (12.2) простое, то из [65, 66, 91] следует, что к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (1.1), (1.2), и это собственное значение — простое.

Асимптотику собственного значения λ_ε будем строить в виде:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(\mu, \varepsilon) + \dots \quad (13.1)$$

Асимптотика ψ_ε строится на основе комбинации метода согласования асимптотических разложений, метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Как и в предыдущей главе, эта асимптотика будет получена как сумма трех разложений: внешнего разложения, пограничного слоя и внутреннего разложения. Внешнее разложение будем строить следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x, \mu) = \Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon\Psi_1(x, \mu, \varepsilon) + \dots \quad (13.2)$$

Пограничный слой строится в виде:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \mu) = \varepsilon v_1(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 v_2(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \dots, \quad (13.3)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — растянутые переменные,

$$\xi_1 = (\theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_0^{\varepsilon}))\varepsilon^{-1}, \quad \xi_2 = \tau\theta'_\varepsilon(s)\varepsilon^{-1}. \quad (13.4)$$

Напомним, что координаты (s, τ) были определены в разделе 13. Выбор переменных ξ будет пояснен в замечании 13.1.

Внутреннее разложение будем строить на основе метода согласования асимптотических разложений в малых окрестностях точек x_j^ε в виде:

$$\psi_\varepsilon^{in,j}(\varsigma^j, s, \mu) = w_{0,0}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon w_{1,0}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \dots, \quad (13.5)$$

где $\varsigma^j = (\varsigma_1^j, \varsigma_2^j)$,

$$\varsigma_1^j = (\xi_1 - \pi j)\eta^{-1}, \quad \varsigma_2^j = \xi_2\eta^{-1}. \quad (13.6)$$

Целью данного раздела является определение вида функций Λ_i , Ψ_i , v_i и $w_{i,0}$.

Уравнения для функций Ψ_0 и Ψ_1 получаются стандартной подстановкой (13.1) и (13.2) в уравнение (1.1) с последующим выписыванием коэффициентов при одинаковых степенях ε . Такая процедура приводит к уравнению (12.3) для функции Ψ_0 и следующему уравнению для Ψ_1 :

$$(\Delta + \Lambda_0)\Psi_1 = -\Lambda_1\Psi_0, \quad x \in \omega. \quad (13.7)$$

Граничные условия для функций Ψ_0 и Ψ_1 будут определены ниже при построении пограничного слоя и внутреннего разложения.

Определим пограничный слой. Вначале получим задачи для функций v_i , для чего подставим (2.5), (13.1), (13.2) в (1.1), перейдем к переменным ξ и выпишем коэффициенты при старших степенях ε . Тогда для функций v_1 и v_2 получим следующие уравнения:

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad (13.8)$$

$$\Delta_\xi v_2 = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\left(1 + 2\xi_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \right) \left(k \frac{\partial}{\partial \xi_2} - \frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial s} \right) v_1, \quad \xi_2 > 0. \quad (13.9)$$

Следуя методу пограничного слоя, потребуем, чтобы сумма функций ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{bl} удовлетворяла однородному граничному условию Неймана всюду на $\partial\omega$ за исключением точек x_j^ε :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \psi_\varepsilon^{ex} - \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_\varepsilon^{bl} = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad x \neq x_j^\varepsilon.$$

Переписываем теперь второе слагаемое в последнем равенстве к переменным ξ и заменяем функции ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{bl} на правые части равенств (13.2) и (13.3), после чего вычисляем коэффициенты при старших степенях ε , которые приравняем к нулю. В результате получаем граничные условия для функций v_i :

$$\frac{\partial v_i}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \Psi_{i-1}^\nu, \quad \xi \in \Gamma(0), \quad (13.10)$$

$$\Psi_i^\nu = \Psi_i^\nu(s, \mu, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Psi_i(x, \mu, \varepsilon), \quad x \in \partial\omega.$$

Замечание 13.1. Как и в первой главе, переменная ξ_1 выбирается так, чтобы задачи для функций v_i были периодичны по ξ_1 . Здесь эту периодичность обеспечивают равенства из (12.1). Указанный выбор ξ_2 позволяет получить уравнения Пуассона для функций v_1 и v_2 .

Согласно методу пограничного слоя, будем искать экспоненциально убывающие при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ решения задач (13.8), (13.9), (13.10). Как и в предыдущей главе, пограничный слой контролирует только граничное условие Неймана, так как мы перешли к формальному пределу при $\eta \rightarrow 0$ при выводе граничного условия (13.10).

Задача (13.8), (13.10) решается явно:

$$v_1(\xi, s, \mu, \varepsilon) = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0^\nu(s, \mu, \varepsilon) X(\xi) \in \mathcal{V}_0^+(0), \quad (13.11)$$

где функция X — из (8.14). Заметим, что в силу (8.15) в точках $\xi^{(j)} = (\pi j, 0)$, $j \in \mathbb{Z}$, функция X имеет логарифмические особенности:

$$X(\xi) = \ln \rho_j + \ln 2 - \xi_2 + O(\rho_j^2), \quad \xi \rightarrow \xi^{(j)}, \quad (13.12)$$

где $\rho_j = |\xi - \xi^{(j)}|$, $j \in \mathbb{Z}$. Аналогично лемме 8.3 решение задачи (13.9), (13.10) также можно построить в явном виде. Прямыми вычислениями проверяем, что функция

$$\tilde{v}_2 = \frac{\Psi_0^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} - k \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt$$

является решением уравнения (13.9), удовлетворяющим однородному граничному условию Неймана на $\Gamma(0)$. Выясним асимптотику функции \tilde{v}_2 при $\xi \rightarrow \xi^{(j)}$. В силу π -периодичности по ξ_1

достаточно вычислить эту асимптотику при $\xi \rightarrow 0$ и распространить ее затем на остальные точки $\xi^{(j)}$. Асимптотика первого слагаемого в определении \tilde{v}_2 вычисляется непосредственно из (13.12). Определим асимптотику интеграла в определении \tilde{v}_2 . Имеем:

$$\int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt = \left(\int_0^{+\infty} - \int_0^{\xi_2} \right) t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt.$$

В силу гармоничности X , а также нечетности и π -периодичности $\frac{\partial X}{\partial \xi_1}$ по ξ_1 , выводим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_0^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt &= - \int_0^{+\infty} t \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(\xi_1, t) dt = -X(\xi_1, 0), \\ \int_0^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt &= \int_{\xi_1}^{\frac{\pi}{2}} X(t, 0) dt + \int_0^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt \Big|_{\xi_1 = \frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\xi_1} \right) X(t, 0) dt = - \int_0^{\xi_1} X(t, 0) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt = - \int_0^{\xi_2} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt - \int_0^{\xi_1} \ln(2 \sin t) dt.$$

Отсюда и из (13.12) с учетом периодичности \tilde{v}_2 по ξ_1 уже нетрудно вывести, что

$$\int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt = -\xi_1 \ln |\rho_j| + \xi_1 (\ln 2 - 1) + O(|\rho_j|^3), \quad \xi \rightarrow \xi^{(j)}. \quad (13.13)$$

Таким образом, для функции \tilde{v}_2 верна дифференцируемая асимптотика:

$$\tilde{v}_2 = O(\rho_j \ln \rho_j), \quad \xi \rightarrow \xi^{(j)}, \quad (13.14)$$

а потому $\tilde{v}_2 \in \mathcal{V}_1(0)$. Учитывая все перечисленные свойства функции \tilde{v}_2 и свойства функции X , приходим к выражению для функции v_2 :

$$v_2(\xi, s, \mu, \varepsilon) = \tilde{v}_2(\xi, s, \mu, \varepsilon) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_1''(s, \mu, \varepsilon) X(\xi). \quad (13.15)$$

Как следует из (13.11), (13.12), (13.14), (13.15), функции v_i имеют логарифмические особенности в окрестностях точек $\xi^{(j)}$, или, что тоже самое, в окрестности точек x_j^ε . Кроме того, сумма внешнего разложения и пограничного слоя не удовлетворяет даже асимптотически граничному условию Дирихле на γ_ε . Поэтому в окрестности точек x_j^ε вводятся новые растянутые переменные ζ^j , а асимптотика собственной функции строится в виде внутреннего разложения $\psi_\varepsilon^{in, j}$ методом согласования асимптотических разложений.

Вначале проведем процедуру согласования в окрестности точки x_j^ε . Для краткости обозначим $\varsigma = \zeta^j$. Ниже будет показано, что $\Psi_i \in C^\infty(\overline{\omega})$. Поэтому при $\tau \rightarrow 0$ верны асимптотики:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x) = \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i (\Psi_i^D(s, \mu, \varepsilon) - \tau \Psi_i''(s, \mu, \varepsilon)) + O(\tau^2), \quad (13.16)$$

где Ψ_i^D — значения функций Ψ_i при $x \in \partial\omega$. Учитывая асимптотики (13.12), (13.14) и определения функций v_i , получаем, что при $\xi \rightarrow \xi^{(j)}$

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \mu) = -\varepsilon (\ln \rho_j + \ln 2 - \xi_2) \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i \frac{\Psi_i''(s, \mu, \varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)} + O(\rho_j \ln \rho_j). \quad (13.17)$$

Перепишем теперь асимптотики (13.16), (13.17) в переменных ζ и учтем, что в силу (7.9) выполнено равенство $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = -(A + \mu)^{-1}$. Тогда получим, что при $\eta^{\frac{1}{4}} < 4\rho_j < 3\eta^{\frac{1}{4}}$ или, что тоже самое, при $\eta^{-\frac{3}{4}} < 4|\zeta| < 3\eta^{-\frac{3}{4}}$

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x) + \psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \mu) = W_{0,0}(s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon W_{1,0}(\zeta, s, \mu, \varepsilon) + O(\varepsilon^3 \eta |\zeta| \ln |\zeta|), \quad (13.18)$$

$$W_{0,0} = \Psi_0^D + \frac{\Psi_0^\nu}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon}, \quad (13.19)$$

$$W_{1,0} = -\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln |\zeta| + \ln 2) + \Psi_1^D + \frac{\Psi_1^\nu}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon}. \quad (13.20)$$

Согласно методу согласования асимптотических разложений, из (13.18) вытекает, что функции $w_{i,0}^{(j)}$ должны иметь следующие асимптотики на бесконечности:

$$w_{i,0}^{(j)} = W_{i,0} + o(1), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (13.21)$$

Задачи для функций $w_{i,0}$ получаем стандартной подстановкой (13.1) и (13.5) в краевую задачу (1.1), (1.2) и выписыванием коэффициентов при старших степенях ε и η :

$$\Delta_\zeta w_{i,0}^{(j)} = 0, \quad \zeta_2 > 0, \quad w_{i,0}^{(j)} = 0, \quad \zeta \in \gamma_j^1, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta_2} w_{i,0}^{(j)} = 0, \quad \zeta \in \Gamma_j^1. \quad (13.22)$$

Здесь γ_j^1 — интервал $(-2\alpha^j, 2\beta^j)$ на оси $O\zeta_1$, $\Gamma_j^1 = O\zeta_1 \setminus \overline{\gamma_j^1}$,

$$\begin{aligned} \alpha^j(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} (\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon))), & \alpha_j &= \alpha^j(\varepsilon) = \frac{1}{2} \alpha^j(\varepsilon) \eta^{-1}(\varepsilon), \\ b^j(\varepsilon) &= \varepsilon^{-1} (\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon)) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)), & \beta_j &= \beta^j(\varepsilon) = \frac{1}{2} b^j(\varepsilon) \eta^{-1}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Исследуем разрешимость задачи для $w_{0,0}^{(j)}$ с заданной асимптотикой (13.19), (13.21). Вначале докажем вспомогательную лемму. Обозначим $\delta^*(\varepsilon) = \max_j |\delta^j(\varepsilon)|$.

Лемма 13.1. Пусть выполнено условие (C2). Тогда справедливы оценки

$$\frac{c_1 c_3}{2} \leq \alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon) \leq 1, \quad \delta^*(\varepsilon) \leq C(\delta_*(\varepsilon) + \varepsilon),$$

где константа C не зависит от ε и η .

Доказательство. В силу теоремы Лагранжа и определения функций a^j и b^j имеем:

$$\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon) = \theta'_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(1)})(a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)), \quad (13.23)$$

где $S_{j,\varepsilon}^{(1)}$ — некоторая точка из интервала $(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon), s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon))$. Используя теперь неравенства (12.1) и оценку производной θ'_ε из условия (C2), приходим к первому неравенству из утверждения леммы.

Положим:

$$\alpha_j(\varepsilon) = \frac{a_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, \quad \beta_j(\varepsilon) = \frac{b_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}.$$

Отметим, что $d_j = \alpha_j + \beta_j$. Из (13.23), определения $\delta^j(\varepsilon)$ и теоремы Лагранжа выводим:

$$\begin{aligned} \delta^j &= \theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)})d_{j+1} - \theta'_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(1)})d_j = d_j(\theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)}) - \theta'_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(1)})) + \theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)})\delta_j = \\ &= d_j \theta''_\varepsilon(S_{j,\varepsilon}^{(2)})(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)} - S_{j,\varepsilon}^{(1)}) + \theta'_\varepsilon(S_{j+1,\varepsilon}^{(1)})\delta_j, \end{aligned}$$

где по определению $S_{j,\varepsilon}^{(2)}$ точка $S_{j,\varepsilon}^{(2)}$ лежит в интервале $(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon), s_{j+1}^\varepsilon + \varepsilon b_{j+1}(\varepsilon))$. Из полученного представления для δ^j , ограниченности нормы $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\omega)}$ и легко доказываемого соотношения

$$c_1 |s_{j+1}^\varepsilon - s_j^\varepsilon| \leq \theta_\varepsilon(s_{j+1}^\varepsilon) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \varepsilon \pi$$

вытекает второе неравенство из утверждения леммы. Лемма доказана. \square

Из доказанной леммы очевидным образом вытекают следствия.

Следствие 13.1. В условиях теоремы 12.1 выполнено $\delta^*(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A + \mu)^{-1})$.

Следствие 13.2. *Функция $\delta^*(\varepsilon)$ ограничена.*

Из леммы 13.1 следует, что $\alpha^j + \beta^j > 0$, т. е. длина множества γ_j^1 положительна. Учитывая данное обстоятельство и вид задачи (13.22), заключаем, что данная задача не имеет ограниченных на бесконечности нетривиальных решений. Ввиду (13.19), (13.21) это дает:

$$w_{0,0}^{(j)} = 0.$$

Из этого равенства и асимптотики (13.19), (13.21) вытекает граничное условие (12.4) для функции Ψ_0 .

Доказательство леммы 12.1. Краевая задача (12.3), (12.4) является регулярно возмущенной. Сходимость собственных значений и утверждаемая голоморфность собственных элементов по μ легко устанавливается, если переписать (12.3), (12.4) к операторному уравнению и применить затем результаты [43, гл. 7]. Лемма доказана. \square

Функции Λ_0 и Ψ_0 выберем так, чтобы они сходились к λ_0 и ψ_0 при $(\varepsilon, \mu) \rightarrow (0, 0)$. Возможность такого выбора гарантируется леммой 12.1. Отметим также, что, благодаря гладкости границы $\partial\omega$ и функции θ'_ε , функция Ψ_0 — бесконечно дифференцируема по x в $\bar{\omega}$.

Определим теперь функцию $w_{1,0}$. Пусть

$$Z^{(j)}(\varsigma, \varepsilon) = \operatorname{Re} \ln (y^{(j)} + \sqrt{(y^{(j)})^2 - 1}), \quad y^{(j)} = \frac{\varsigma_1 + i\varsigma_2 + \alpha^j - \beta^j}{\alpha^j + \beta^j}. \quad (13.24)$$

Здесь $(\alpha^j + \beta^j) > 0$ в силу леммы 13.1. Легко убедиться, что $Z^{(j)} \in \mathcal{W}$, где обозначено

$$\mathcal{W} \equiv C^\infty(\{\varsigma : \varsigma_2 \geq 0, \varsigma \neq (-2\alpha^j, 0), \varsigma \neq (2\beta^j, 0)\}) \cap W_2^1(\{\varsigma : \varsigma_2 > 0, |\varsigma| < 5\}). \quad (13.25)$$

Функция $Z^{(j)}$ — решение задачи (13.22), имеющее на бесконечности асимптотику (см. (8.27)):

$$Z^{(j)} = \ln |\varsigma| + \ln 2 - \ln(\alpha^j + \beta^j) + (\alpha^j - \beta^j)\varsigma_1 |\varsigma|^{-2} + O(|\varsigma|^{-2}), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (13.26)$$

В силу перечисленных свойств $Z^{(j)}$, функция $w_{1,0}^{(j)}$ имеет следующий вид:

$$w_{1,0}^{(j)}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) = -\frac{\Psi_0'(s, \mu, \varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)} Z^{(j)}(\varsigma, \varepsilon).$$

Ясно, что $w_{1,0}^{(j)} \in \mathcal{W}$. Выпишем теперь асимптотику функции $w_{1,0}^{(j)}$ на бесконечности (см. (13.26)) и сравним ее с (13.20), (13.21). В результате такого сравнения приходим к равенству

$$\frac{\Psi_0'(s, \mu, \varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)} \ln(\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) = \Psi_1^D(s, \mu, \varepsilon) + \frac{\Psi_1'(s, \mu, \varepsilon)}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon(s)}. \quad (13.27)$$

Это равенство фактически является граничным условием для функции Ψ_1 . Необходимо лишь корректно определить правую часть граничного условия, которая бы учитывала то обстоятельство, что, вообще говоря, величины $\ln(\alpha^j + \beta^j)$ зависят от номера j и параметра ε . Так как согласование проводится в окрестности точки x_j^ε , то переменная s в равенстве (13.27) меняется в малой (порядка $O(\varepsilon\eta^{\frac{1}{4}})$) окрестности точки s_j^ε . Следовательно, чтобы удовлетворить равенству (13.27), достаточно построить функцию, которая была бы равна $(\alpha^j + \beta^j)$ в указанных окрестностях точек s_j^ε и заменить затем $(\alpha^j + \beta^j)$ в (13.27) на эту функцию. Функция $f_\varepsilon(\theta)$, как несложно убедиться, бесконечно дифференцируема по θ и равна $(\alpha^j + \beta^j)$ при $|\theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)| \leq \varepsilon \frac{\pi}{4}$. Поэтому в качестве функции, на которую заменяется сумма $(\alpha^j + \beta^j)$ в (13.27), мы берем $f_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$, что дает граничное условие для Ψ_1 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta'_\varepsilon \right) \Psi_1 = (A + \mu)\Psi_0' \ln f_\varepsilon(\theta_\varepsilon), \quad x \in \partial\omega.$$

Теперь еще учтем, что $\Psi_0' = -(A + \mu)\theta'_\varepsilon \Psi_0^D$, и окончательно получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta'_\varepsilon \right) \Psi_1 = -(A + \mu)^2 \Psi_0^D \theta'_\varepsilon \ln f_\varepsilon(\theta_\varepsilon), \quad x \in \partial\omega. \quad (13.28)$$

Задача (13.7), (13.28) разрешима при подходящем выборе Λ_1 . Условие разрешимости получается стандартно, путем умножения уравнения (13.7) на Ψ_0 и интегрированием по частям с учетом граничного условия (13.28). Принимая во внимание нормировку функции Ψ_0 , из указанного условия разрешимости получаем формулу (12.7) для первого члена асимптотики. Из леммы 13.1 и определения f_ε следует оценка:

$$\frac{c_1 c_3}{2} \leq f_\varepsilon(\theta) \leq 1, \quad (13.29)$$

откуда в силу формулы (12.7) вытекает неположительность Λ_1 . Утверждаемая голоморфность Λ_1 по μ является следствием соответствующих свойств Ψ_0 , ограниченности θ'_ε и $f_\varepsilon(\theta)$ и оценки нормы $\|\Psi_0\|_{L_2(\partial\omega)}$ через $\|\Psi_0\|_{W_2^1(\omega)}$.

Функция Ψ_1 определена с точностью до слагаемого $C\Psi_0$, $C = \text{const}$; данный произвол фиксируем, считая Ψ_1 ортогональной Ψ_0 в $L_2(\omega)$. Функция $\ln f_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$ — гладкая, поэтому нетрудно показать, что $\Psi_1 \in C^\infty(\bar{\omega})$. Кроме того, функция Ψ_1 голоморфна по μ в норме $W_2^1(\omega)$, что несложно доказать, используя результаты [43].

Проведенное построение позволило определить первые члены асимптотических разложений λ_ε и ψ_ε на формальном уровне. Для того, чтобы обосновать эти асимптотики, предварительно надо доказать, что данные асимптотики являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи, т. е. удовлетворяют ей с точностью до достаточно малой невязки. Однако построенные асимптотики не дают порядка малости невязки, достаточного для последующего обоснования. Чтобы добиться невязки нужного порядка малости, необходимо построить дополнительные члены в асимптотических разложениях для λ_ε и ψ_ε . Данное построение будет проведено в следующем разделе.

14. ФОРМАЛЬНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

В настоящем разделе будет получено формальное асимптотическое решение задачи (1.1), (1.2). Как уже было сказано в конце предыдущего раздела, для этого нужно построить дополнительные члены в формальных асимптотических разложениях λ_ε и ψ_ε . Во внешнем разложении необходимо построить одно дополнительное слагаемое:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x, \mu) = \Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon\Psi_1(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2\Psi_2(x, \mu, \varepsilon) + \dots \quad (14.1)$$

В пограничном слое необходимо построить еще два члена:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \mu) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \dots \quad (14.2)$$

С учетом равенства $w_{0,0}^{(j)} = 0$ и дополнительных членов внутреннее разложение имеет следующий вид:

$$\psi_\varepsilon^{in,j}(\varsigma^j, s, \mu) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i w_{i,0}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \eta \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i w_{i,1}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \dots \quad (14.3)$$

Во внешнем разложении (14.1) первые члены известны, осталось определить лишь функцию Ψ_2 . Эта функция будет в дальнейшем использована только для возможности согласования дополнительных членов внутреннего разложения. Как и ранее, согласование будет влиять лишь на вид граничного условия для Ψ_2 , а потому есть произвол в выборе уравнения для Ψ_2 , так как конкретный вид этого уравнения не оказывает существенного влияния на оценку невязки. Уравнение для Ψ_2 мы выбираем так, чтобы гарантировать его разрешимость и упростить дальнейшие вычисления. Эти две цели достигаются за счет следующего выбора:

$$(\Delta - 1)\Psi_2 = -\Lambda_1\Psi_1, \quad x \in \omega. \quad (14.4)$$

Дополнительные члены пограничного слоя зададим так:

$$v_3 = \frac{\Psi_1'}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} - k \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_1'}{\theta'_\varepsilon} \right)' \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt + 4a_6 \int_{\xi_2}^{+\infty} t X(\xi_1, t) dt - \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \Psi_2' X,$$

$$v_4 = \frac{\Psi_2'}{2(\theta_\varepsilon')^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta_\varepsilon''}{\theta_\varepsilon'} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} - k \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{\theta_\varepsilon'} \left(\frac{\Psi_2'}{\theta_\varepsilon'} \right)' \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt,$$

где $\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_6(s, \mu, \varepsilon)$ — некоторая функция, которая будет определена ниже, Ψ_2' — значение нормальной производной Ψ_2 на границе $\partial\omega$. Легко убедиться, что $v_3, v_4 \in \mathcal{V}_0(0)$.

Для того чтобы провести согласование асимптотических разложений и определить внутреннее разложение, нам понадобятся асимптотики функций v_i при $\xi \rightarrow \xi^{(j)}$. Асимптотика интеграла $\int_{\xi_2}^{+\infty} tX(\xi_1, t) dt$ легко получается интегрированием (13.13) по ξ_1 с учетом соотношений:

$$\int_{\xi_2}^{+\infty} tX(0, t) dt = \left(\int_0^{+\infty} - \int_0^{\xi_2} \right) tX(0, t) dt = -\frac{1}{4}\zeta(3) - \int_0^{\xi_2} tX(0, t) dt.$$

В результате получаем:

$$\int_{\xi_2}^{+\infty} tX(\xi_1, t) dt = -\frac{1}{4}\zeta(3) + O(\rho_j \ln \rho_j), \quad \xi \rightarrow \xi^{(j)}. \quad (14.5)$$

В результате, с учетом (13.12), (13.13) и определения функций v_i , приходим к дифференцируемым асимптотикам при $\xi \rightarrow \xi^{(j)}$:

$$\begin{aligned} v_1(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= -\frac{\Psi_0'}{\theta_\varepsilon'} (\ln \rho_j + \ln 2 - \xi_2) + O(\rho_j^2), \\ v_2(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= -\frac{\Psi_1'}{\theta_\varepsilon'} (\ln \rho_j + \ln 2 - \xi_2) + V_\varepsilon(\xi - \xi^{(j)}, s, \Psi_0'(s, \mu, \varepsilon)) + O(\rho_j^2), \\ v_3(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= -\frac{\Psi_2'}{\theta_\varepsilon'} (\ln \rho_j + \ln 2 - \xi_2) - \zeta(3)\mathbf{a}_6(s, \mu, \varepsilon) + \\ &\quad + V_\varepsilon(\xi - \xi^{(j)}, s, \Psi_1'(s, \mu, \varepsilon)) + O(\rho_j^2 \ln \rho_j), \\ v_4(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= V_\varepsilon(\xi - \xi^{(j)}, s, \Psi_2'(s, \mu, \varepsilon)) + O(\rho_j^2), \\ V_\varepsilon(\xi, s, \Psi(s)) &= \frac{\Psi(s)}{2(\theta_\varepsilon'(s))^2} \frac{\xi_2^2}{|\xi|^2} \left(\frac{\theta_\varepsilon''(s)}{\theta_\varepsilon'(s)} \xi_1 - k(s)\xi_2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\theta_\varepsilon'(s)} \left(\frac{\Psi(s)}{\theta_\varepsilon'(s)} \right)' \xi_1 (\ln |\xi| + \ln 2 - 1). \end{aligned}$$

Коэффициенты внешнего разложения в окрестности границы $\partial\omega$ удовлетворяют соотношениям:

$$\Psi_i = \Psi_i^D - \tau \Psi_i' + O(\tau^2), \quad \tau \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Переписывая теперь вышеприведенные асимптотики функций v_i и Ψ_j к переменным ς , с учетом (7.9) получаем, что при $\eta^{\frac{1}{4}} < 4\rho_j < 3\eta^{\frac{1}{4}}$ ($\eta^{-\frac{3}{4}} < 4|\varsigma| < 3\eta^{-\frac{3}{4}}$) справедливо равенство:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(\mathbf{x}, \mu) + \psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \mu) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon^k W_{k,0}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) + \eta \sum_{k=1}^4 \varepsilon^k W_{k,1}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) + O(\eta^2 |\varsigma|^2 \ln |\varsigma|), \quad (14.6)$$

$$W_{2,0} = -\frac{\Psi_1'}{\theta_\varepsilon'} (\ln |\varsigma| + \ln 2) + \Psi_2^D + \frac{\Psi_2'}{(A + \mu)\theta_\varepsilon'}, \quad W_{3,0} = -\frac{\Psi_2'}{\theta_\varepsilon'} (\ln |\varsigma| + \ln 2) - \zeta(3)\mathbf{a}_6, \quad (14.7)$$

$$W_{1,1} = -\frac{1}{(A + \mu)\theta_\varepsilon'} \left(\frac{\Psi_0'}{\theta_\varepsilon'} \right)' \varsigma_1, \quad W_{k,1} = V_\varepsilon(\varsigma, s, \Psi_{k-2}') - \frac{1}{(A + \mu)\theta_\varepsilon'} \left(\frac{\Psi_{k-1}'}{\theta_\varepsilon'} \right)' \varsigma_1, \quad k = 2, 3.$$

Здесь

$$\Psi_2^D = \Psi_2^D(s, \mu, \varepsilon) = \Psi_2(\mathbf{x}, \mu, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in \partial\omega, \quad \Psi_3' \equiv 0.$$

Следовательно, функции $w_{k,i}^{(j)}$ должны удовлетворять асимптотикам:

$$w_{k,i}^{(j)} = W_{k,i} + o(|\varsigma|^i), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (14.8)$$

Задачи для коэффициентов внутреннего разложения получаем как и ранее, подстановкой (13.1) и (14.3) в (1.1), (1.2) и выписыванием коэффициентов при старших степенях ε и η :

$$\Delta_{\varsigma} w_{k,1}^{(j)} = \frac{1}{\theta'_{\varepsilon}} \left(\left(1 + 2\varsigma_2 \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} \right) \left(k \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} - \frac{\theta''_{\varepsilon}}{\theta'_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varsigma_1} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_1 \partial s} \right) w_{k-1,0}^{(j)}, \quad \varsigma_2 > 0,$$

$$w_{k,1}^{(j)} = 0, \quad \varsigma \in \gamma_j^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{k,1}^{(j)} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma_j^1,$$

$k = 2, 3, 4$; а для $w_{1,1}^{(j)}$ и $w_{k,0}^{(j)}$, $k = 2, 3$ получаем краевую задачу (13.22). Функции $w_{k,0}^{(j)}$, $k = 2, 3$, определим следующим образом:

$$w_{k,0}^{(j)} = -\frac{\Psi_{k-1}^{\nu}}{\theta'_{\varepsilon}} Z^{(j)} \in \mathcal{W}. \quad (14.9)$$

Теперь выпишем асимптотики функций $w_{k,0}^{(j)}$ (см. (13.26), (14.9)) и сравним их с асимптотиками (14.7), (14.8). Тогда получим два равенства:

$$\frac{\Psi_1^{\nu}(s, \mu, \varepsilon)}{\theta'_{\varepsilon}(s)} \ln(\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) = \Psi_2^D(s, \mu, \varepsilon) + \frac{\Psi_2^{\nu}(s, \mu, \varepsilon)}{(A + \mu)\theta'_{\varepsilon}(s)},$$

$$\frac{\Psi_2^{\nu}(s, \mu, \varepsilon)}{\theta'_{\varepsilon}(s)} \ln(\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) = -\zeta(3) \mathfrak{a}(s, \mu, \varepsilon).$$

Первое из полученных равенств приводит к граничному условию для Ψ_2 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta'_{\varepsilon}(s) \right) \Psi_2 = (A + \mu)\Psi_1^{\nu}(s, \mu, \varepsilon) \ln f_{\varepsilon}(\theta_{\varepsilon}(s)), \quad x \in \partial\omega, \quad (14.10)$$

а второе позволяет определить функцию \mathfrak{a}_6 :

$$\mathfrak{a}_6(s, \mu, \varepsilon) = -\frac{1}{\zeta(3)\theta'_{\varepsilon}(s)} \Psi_2^{\nu}(s, \mu, \varepsilon) \ln f_{\varepsilon}(\theta_{\varepsilon}(s)).$$

Краевая задача (14.4), (14.10) однозначно разрешима. Правые части в уравнении (14.4) и граничном условии (14.10) содержат гладкие по x и s функции, а потому $\Psi_2 \in C^{\infty}(\bar{\omega})$.

Вернемся к построению внутреннего разложения. Несложно проверить, что функция

$$Z_1^{(j)}(\varsigma, \varepsilon) = (\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) \operatorname{Re} \sqrt{(y^{(j)})^2 - 1} \in \mathcal{W} \quad (14.11)$$

является решением краевой задачи (13.22) с асимптотикой

$$Z_1^{(j)}(\varsigma, \varepsilon) = \varsigma_1 + O(|\varsigma|^{-1}), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (14.12)$$

Следовательно, функция $w_{1,1}^{(j)}$ имеет вид:

$$w_{1,1}^{(j)} = -\frac{1}{(A + \mu)\theta'_{\varepsilon}} \left(\frac{\Psi_0^{\nu}}{\theta'_{\varepsilon}} \right)' Z_1^{(j)}.$$

Остальные функции внутреннего разложения также строятся явно:

$$w_{k,1}^{(j)} = \frac{\Psi_{k-2}^{\nu}}{2(\theta'_{\varepsilon})^2} \varsigma_2^2 \left(\frac{\theta''_{\varepsilon}}{\theta'_{\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \varsigma_1} - k \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} \right) Z^{(j)} + \frac{1}{\theta'_{\varepsilon}} \left(\frac{\Psi_{k-2}^{\nu}}{\theta'_{\varepsilon}} \right)' \varsigma_1 Z^{(j)} +$$

$$+ \frac{1}{\theta'_{\varepsilon}} \left(\left(\frac{\Psi_{k-2}^{\nu}}{\theta'_{\varepsilon}} \right)' (\ln(\alpha^j + \beta^j) - 1) - \frac{1}{(A + \mu)} \left(\frac{\Psi_{k-1}^{\nu}}{\theta'_{\varepsilon}} \right)' \right) Z_1^{(j)} \in \mathcal{W},$$

где $k = 2, 3, 4$. Используя асимптотики (13.26) и (14.12), непосредственно проверяем, что

$$w_{k,i}^{(j)} = W_{k,i} + O(|\varsigma|^{i-1}), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (14.13)$$

Формальное построение внешнего разложения (14.1), пограничного слоя (14.2) и внутреннего разложения (14.3) закончено.

Обозначим $\omega^{bl} = \{x : 0 < \tau < c_0\}$, где c_0 , напомним, малое фиксированное число, такое что на множестве ω^{bl} координаты (s, τ) определены корректно, а функция $\mathfrak{H}(s, \tau)$ не имеет нулей. Если не оговорено иное, всюду далее до конца главы посредством C будем обозначать различные не специфические константы, не зависящие от ε и μ .

Следующие пять лемм носят вспомогательный характер.

Лемма 14.1. Пусть $\varphi \in C^1(\bar{\omega})$ и $\tilde{\varphi} \in C^1(\partial\omega)$. Тогда существуют конечные пределы $\lim_{t \rightarrow +0} \|\varphi\|_{C^t(\bar{\omega})}$, $\lim_{t \rightarrow +0} \|\tilde{\varphi}\|_{C^t(\partial\omega)}$, где C^t — пространства Гельдера. Верны равномерные оценки:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|\varphi\|_{C^t(\bar{\omega})} \leq 3\|\varphi\|_{C(\omega)}, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \|\tilde{\varphi}\|_{C^t(\partial\omega)} \leq 3\|\tilde{\varphi}\|_{C(\partial\omega)}.$$

Доказательство. Утверждение леммы докажем для $\|\varphi\|_{C^t(\bar{\omega})}$; для $\|\tilde{\varphi}\|_{C^t(\partial\omega)}$ доказательство аналогично. Ясно, что достаточно выяснить сходимость и оценить предел величины

$$\langle \varphi \rangle_{\omega}^{(t)} = \sup_{x, y \in \omega} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^t}.$$

Легко проверить, что для произвольного множества \mathfrak{B} и заданных на нем ограниченных вещественнозначных функций \mathfrak{f} и \mathfrak{g} верны неравенства

$$|\sup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{f} - \sup_{\mathfrak{B}} \mathfrak{g}| \leq \sup_{\mathfrak{B}} |\mathfrak{f} - \mathfrak{g}|.$$

Используя эти неравенства, получаем (d — диаметр области ω):

$$\begin{aligned} |d^t \langle \varphi \rangle_{\omega}^{(t)} - \langle \varphi \rangle_{\omega}^{(0)}| &\leq \sup_{x, y \in \omega} |\varphi(x) - \varphi(y)| (d^t |x - y|^{-t} - 1) = \\ &= \sup_{x, y \in \omega} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|} (d^t - |x - y|^t) |x - y|^{1-t} \leq \\ &\leq C \|\varphi\|_{C^1(\bar{\omega})} \max_{z \in [0, d]} (d^t z^{1-t} - z) = C d \|\varphi\|_{C^1(\bar{\omega})} \frac{t(1-t)^{\frac{1}{t}}}{1-t}. \end{aligned}$$

Здесь константа C не зависит от t , а потому при $t \rightarrow +0$ выполнено $\langle \varphi \rangle_{\omega}^{(t)} \rightarrow \langle \varphi \rangle_{\omega}^{(0)}$, что и доказывает утверждение леммы для $\|\varphi\|_{C^t(\bar{\omega})}$. Лемма доказана. \square

Лемма 14.2. Пусть $F = F(x, \mu, \varepsilon) \in C^{\infty}(\bar{\omega})$ и $f = f(s, \mu, \varepsilon) \in C^{\infty}(\partial\omega)$ — некоторые функции, чьи нормы $\|f\|_{C(\partial\omega)}$, $\|F\|_{C(\bar{\omega})}$ и $\|F\|_{C^k(\bar{\omega}_1)}$, $\omega_1 \Subset \omega$ — произвольная подобласть, $k \in \mathbb{N}$, ограничены равномерно по ε и μ , $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0(\mu, \varepsilon)$ — некоторая функция, равномерно ограниченная по ε и μ . Если краевая задача

$$(\Delta + \mathfrak{a}_0)u = F, \quad x \in \omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta'_{\varepsilon} \right) u = f, \quad x \in \partial\omega. \quad (14.14)$$

имеет решение с равномерно ограниченной по ε и μ нормой в $W_2^1(\omega)$, то для этого решения верны равномерные по ε и μ оценки:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^1(\omega)} &\leq C(\|f\|_{C^1(\partial\omega)} + 1), \\ \|u\|_{C^k(\bar{\omega}_1)} &\leq C, \\ \|u^{\nu}\|_{C(\partial\omega)} &\leq C(A + \mu + \|f\|_{C(\partial\omega)}), \\ \|u^{\nu}\|_{C^i(\partial\omega)} &\leq C(\|f\|_{C^i(\partial\omega)} + 1), \quad i = 1, 2, \\ \|u^{\nu}\|_{C^3(\partial\omega)} &\leq C(\|F\|_{C^1(\bar{\omega})} + \|f\|_{C^3(\partial\omega)} + 1), \end{aligned}$$

где $u^{\nu} = u^{\nu}(s, \mu, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \mu, \varepsilon)$, $x \in \partial\omega$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Гладкость функций f и F позволяет утверждать, что решение $u \in C(\bar{\omega})$. Кроме того, в силу ограниченности нормы $\|u\|_{W_2^1(\omega)}$ для всякой пары строго внутренних подобластей $\omega_1 \Subset \omega_2 \Subset \omega$ выполнено

$$\|u\|_{H^{k+2}(\omega_1)} \leq C \left(\|F\|_{H^k(\omega_2)} + 1 \right) \leq C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Последние неравенства и теоремы вложения C^k в H^{k+2} позволяют утверждать, что верны оценки

$$\|u\|_{C^k(\bar{\omega}_1)} \leq C. \quad (14.15)$$

На области ω^{bl} сделаем замену функции u :

$$v(x, \mu, \varepsilon) = u(x, \mu, \varepsilon) e^{-(A+\mu)\theta'_{\varepsilon}(s)\tau} (\mathfrak{a}_7 - \mathfrak{a}_8 \tau^2),$$

где a_7 и a_8 — некоторые положительные числа. В силу (14.14) функция v есть решение задачи:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_x + a_9 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{10} \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{11} \right) v &\equiv L_1 v = \tilde{F}, \quad x \in \omega^{bl}, \\ v = a_{12}, \quad \tau = c_0, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} &= -a_7 f, \quad \tau = 0, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{F} = e^{-(A+\mu)\theta'_\varepsilon(s)\tau} (a_7 - a_8 \tau^2) F, \quad a_i = a_i(x, \mu, \varepsilon), \quad i = 9, 10, 11,$$

$a_{12} = a_{12}(s, \mu, \varepsilon)$ — гладкие функции пространственных переменных, голоморфные по μ , причем

$$\|a_{12}\|_{C(\{\tau=c_0\})} \leq C, \quad \|a_i\|_{C^1(\bar{\omega}^{bl})} \leq C,$$

см. (14.15)). Функции a_i , $i = 9, 10, 11$, легко получить в явном виде, мы не будем приводить здесь этих явных формул, отметим лишь, что за счет подходящего выбора констант a_7 и a_8 и константы c_0 из определения ω^{bl} всегда можно добиться выполнения неравенств $a_7 - a_8 c_0^2 > 0$, $a_{11} \leq C < 0$ при $x \in \bar{\omega}^{bl}$. Тогда для оператора L_1 и всякой функции $V \in C^2(\bar{\omega}^{bl})$ справедливо утверждение: если

$$L_1 V < 0, \quad x \in \bar{\omega}^{bl}, \quad V > 0, \quad \tau = c_0, \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} < 0, \quad \tau = 0,$$

то $V > 0$. Действительно, если допустить обратное, то в точке минимума на $\bar{\omega}^{bl}$ функция V отрицательна, $\Delta V \geq 0$, $\nabla_x V = 0$, т. е. в этой точке $L_1 V > 0$. Ясно, что данная точка минимума лежит строго внутри области ω^{bl} ; полученное противоречие и доказывает утверждение. Берем теперь барьерную функцию $(a_{13} - a_{14}\tau - a_{15}\tau^2)$, a_{13} , a_{14} , a_{15} — положительные константы и применяем данное утверждение к функциям $V = (a_{13} - a_{14}\tau - a_{15}\tau^2) \pm v$, каждый раз подходящим образом выбирая константы a_i . В результате имеем оценку:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} &\leq C \|v\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} \leq C \left(\|\tilde{F}\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} + \|f\|_{C(\partial\omega)} + \|a_{12}\|_{C(\{\tau=c_0\})} \right) \leq \\ &\leq C \left(\|F\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} + \|f\|_{C(\partial\omega)} + \|u\|_{C(\omega \setminus \omega^{bl})} \right) \leq C. \end{aligned}$$

Соединяя последнее неравенство с (14.15), окончательно получаем:

$$\|u\|_{C(\bar{\omega})} \leq C. \quad (14.16)$$

В [46, гл. 3, теорема 3.1] приводится оценка, которая позволяет оценить $\|u\|_{C^2(\bar{\omega})}$ через сумму норм Гельдера $\|F\|_{C^t(\bar{\omega})}$, $\|f\|_{C^{1+t}(\partial\omega)}$ и $\|u\|_{C(\bar{\omega})}$. Константы, входящие в эту оценку, будут иметь конечные пределы при $t \rightarrow +0$, если предварительно поделить уравнение и краевое условие из (14.14) на достаточно большое фиксированное число. Пределы норм функций F и f при $t \rightarrow +0$ оцениваются с помощью леммы 14.1, что в итоге дает оценку:

$$\|u\|_{C^2(\bar{\omega})} \leq C \left(\|F\|_{C(\bar{\omega})} + \|f\|_{C^1(\partial\omega)} + \|u\|_{C(\bar{\omega})} \right). \quad (14.17)$$

Из (14.16) и (14.17) выводим

$$\|u\|_{C^2(\bar{\omega})} \leq C \left(\|f\|_{C^1(\partial\omega)} + 1 \right), \quad (14.18)$$

что дает требуемую оценку для $\|u\|_{C^1(\bar{\omega})}$. Очевидное равенство $u^\nu = -(A+\mu)\theta'_\varepsilon u + f$, (14.16), (14.18) и ограниченность $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ приводят к оценкам для $\|u^\nu\|_{C^i(\partial\omega)}$, $i = 0, 1, 2$. Оценим $\|u^\nu\|_{C^3(\partial\omega)}$. При $x \in \omega^{bl}$ продифференцируем задачу (14.14) по s . Тогда получим, что функция $U = \frac{\partial u}{\partial s}$ есть решение краевой задачи:

$$\begin{aligned} \left(\Delta_x + \frac{\partial H^{-2}}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H^{-2}}{\partial s^2} + a_0 \right) U &= \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{k}{H} \frac{\partial u}{\partial \tau} \equiv F_1, \quad x \in \omega^{bl}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A+\mu)\theta'_\varepsilon \right) U &= f' - (A+\mu)\theta''_\varepsilon U \equiv f_1, \quad x \in \partial\omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau}, \quad \tau = c_0. \end{aligned}$$

Для такой задачи, вновь делая замену функции U и опираясь на [46, гл. 3, теорема 3.1], можно выписать оценку типа (14.17); здесь она будет иметь следующий вид:

$$\|U\|_{C^2(\bar{\omega}^{bl})} \leq C \left(\|F_1\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} + \|f_1\|_{C^1(\partial\omega)} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau} \right\|_{C^1(\{\tau=c_0\})} + \|U\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} \right). \quad (14.19)$$

Величина $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau} \right\|_{C^1(\{\tau=c_0\})}$ оценивается сверху некоторой константой C в силу (14.15); остальные слагаемые оцениваются с помощью (14.18):

$$\|F_1\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} + \|f_1\|_{C^1(\partial\omega)} + \|U\|_{C(\bar{\omega}^{bl})} \leq C \left(\|F\|_{C^1(\bar{\omega}^{bl})} + \|f\|_{C^2(\partial\omega)} + 1 \right).$$

Подставляя теперь полученную оценку в (14.19), приходим к неравенству

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{C^2(\bar{\omega}^{bl})} \leq C \left(\|F\|_{C^1(\bar{\omega})} + \|f\|_{C^2(\partial\omega)} + 1 \right),$$

из которого, с учетом равенства $u^\nu = -(A + \mu)\theta'_\varepsilon u + f$ и ограниченности $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\omega)}$, вытекает требуемая оценка для $\|u^\nu\|_{C^3(\partial\omega)}$. Лемма доказана. \square

Лемма 14.3. *Функции Ψ_1 и Λ_1 представимы в виде:*

$$\Psi_1(x, \mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \tilde{\Psi}_1(x, \mu, \varepsilon), \quad \Lambda_1(\mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \tilde{\Lambda}_1(\mu, \varepsilon), \quad (14.20)$$

где $\tilde{\Psi}_1$ — бесконечно дифференцируема по x , $\tilde{\Psi}_1$ и $\tilde{\Lambda}_1$ голоморфны по μ для каждого фиксированного значения ε . Верны равномерные по ε и μ оценки ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} |\Lambda_0| &\leq C, & \|\Psi_0\|_{W_2^1(\omega)} &\leq C, & \|\Psi_0'\|_{C^3(\partial\omega)} &\leq C(A + \mu), \\ |\Lambda_1| &\leq C(A + \mu)^2, & \|\Psi_1\|_{W_2^1(\omega)} &\leq C(A + \mu)^2, & \|\Psi_2\|_{W_2^1(\omega)} &\leq C(A + \mu)^3, \\ \|\Psi_1^\nu\|_{C(\partial\omega)} &\leq C(A + \mu)^2, & \|\Psi_1^\nu\|_{C^i(\partial\omega)} &\leq C(A + \mu)^2(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon) + 1), \\ \|\Psi_2^\nu\|_{C(\partial\omega)} &\leq C(A + \mu)^3, & \|\Psi_2^\nu\|_{C^i(\partial\omega)} &\leq C(A + \mu)^3(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon) + 1). \end{aligned} \quad (14.21)$$

Доказательство. Представления (14.20) доказываются весьма просто. В самом деле, представление для Λ_1 есть прямое следствие (12.7). Используя это представление и наличие множителя $(A + \mu)^2$ в граничном условии (13.28), приходим к требуемому представлению для Ψ_1 .

Оценки для Λ_0 и Ψ_0 из (14.21) доказываются элементарно. Ограниченность Λ_0 следует из сходимости $\Lambda_0 \rightarrow \lambda_0$. Так как $\|\Psi_0\|_{L_2(\omega)} = 1$, то, умножая уравнение (12.3) на Ψ_0 и интегрируя один раз по частям, в силу ограниченности Λ_0 и $\|\theta'_\varepsilon\|_{C(\partial\omega)}$ получаем требуемую оценку нормы $\|\Psi_0\|_{W_2^1(\omega)}$. Теперь, применяя лемму 14.2 к задаче для функции Ψ_0 , получаем оценку $\|\Psi_0'\|_{C^3(\partial\omega)}$ и, кроме того,

$$\|\Psi_0\|_{C^1(\bar{\omega})} \leq C, \quad \|\Psi_0\|_{C^k(\bar{\omega}_1)} \leq C$$

для всякой подобласти $\omega_1 \Subset \omega$.

Оценка для Λ_1 вытекает из доказанных оценок для Ψ_0 , ограниченности функций θ'_ε и $f_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$ и формулы (12.7).

Неравенства для Ψ_1 и Ψ_2 из (14.21) также будем доказывать на основе леммы 14.2. Так как Ψ_1 ортогональна Ψ_0 в $L_2(\omega)$, а величины Λ_0 и Λ_1 ограничены, то верна равномерная оценка

$$\|\Psi_1\|_{W_2^1(\omega)} \leq C(A + \mu)^2 \left(\|\Psi_0\|_{L_2(\omega)} + \|\Psi_0^D \theta'_\varepsilon \ln f_\varepsilon(\theta_\varepsilon)\|_{L_2(\partial\omega)} \right) \leq C(A + \mu)^2.$$

Правая часть уравнения (13.7) и граничного условия (13.28) удовлетворяют всем условиям леммы 14.2. Кроме того, оценки производных граничного условия (13.28) фактически сводятся к оценке производных (ограниченной) функции $f_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$, так как производные θ'_ε ограничены, а производные Ψ_0^D оцениваются с помощью уже доказанных оценок для Ψ_0^ν и равенства $\Psi_0^\nu = (A + \mu)\theta'_\varepsilon \Psi_0^D$. Производные $f_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$, очевидно, оцениваются так:

$$\|f_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))\|_{C^i(\partial\omega)} \leq C \left(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon) + 1 \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя этот факт и применяя лемму 14.2 к задаче для $\tilde{\Psi}_1$, приходим к оценкам для Ψ_1 из (14.21). Кроме того, в силу леммы 14.2

$$\|\Psi_1\|_{C^1(\bar{\omega})} \leq C(A + \mu)^2(\varepsilon^{-1}\delta^*(\varepsilon) + 1), \quad \|\Psi_1\|_{C^k(\bar{\omega}_1)} \leq C,$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и всех $\omega_1 \in \omega$. Из очевидного неравенства

$$\|\Psi_2\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \left(|\Lambda_1| \|\Psi_1\|_{L_2(\omega)} + (A + \mu) \|\Psi_1'\|_{L_2(\partial\omega)} \right)$$

и уже доказанных оценок для Ψ_1 и Λ_1 выводим требуемую оценку для нормы $\|\Psi_2\|_{W_2^1(\omega)}$. Представляя Ψ_2 в виде $\Psi_2 = (A + \mu)^3 \tilde{\Psi}_2$ и применяя к $\tilde{\Psi}_2$ лемму 14.2, получаем и остальные оценки для Ψ_2 из (14.21). Лемма доказана. \square

Обозначим

$$\begin{aligned} \Pi^{(j)} &= \left\{ \xi : |\xi_1 - \pi j| < \frac{\pi}{2}, \xi_2 > 0 \right\}, & \Pi_\eta^{(j)} &= \Pi^{(j)} \cap \{ \xi : 4|\xi - \xi^{(j)}| > \eta^{\frac{1}{4}} \}, \\ \omega_\eta^{bl} &= \omega^{bl} \cap \{ x : \xi \in \Pi_\eta^{(j)}, j = 0, \dots, N-1 \}, & \lambda_{\varepsilon,1} &= \Lambda_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon \Lambda_1(\mu, \varepsilon), \\ \psi_{\varepsilon,1}^{ex}(x, \mu) &= \Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \Psi_1(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 \Psi_2(x, \mu, \varepsilon), & \psi_{\varepsilon,1}^{bl}(\xi, s, \mu) &= \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i(\xi, s, \mu, \varepsilon), \\ \psi_{\varepsilon,1}^{in,j}(\zeta^j, s, \mu) &= \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i w_{i,0}^{(j)}(\zeta^j, s, \mu, \varepsilon) + \eta \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i w_{i,1}^{(j)}(\zeta^j, s, \mu, \varepsilon). \end{aligned}$$

Лемма 14.4. Для пограничного слоя (14.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие равномерные оценки:

$$\begin{aligned} \|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} &\leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} (A + \mu), \\ \|\varepsilon^2 \tilde{v}_2 + \varepsilon^3 v_3 + \varepsilon^4 v_4\|_{W_2^1(\omega_\eta^{bl})} &\leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} (A + \mu), \\ \|(\Delta_x + \lambda_{\varepsilon,1}) \psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} &\leq C \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} (A + \mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta^*(\varepsilon) (A + \mu)^2 \right). \end{aligned}$$

Доказательство. Всюду в доказательстве, не подчеркивая дополнительно, мы будем опираться на принадлежности (2.19), взятые с $\eta = 0$. Верна оценка

$$\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leq \varepsilon \left(\sum_{j=0}^{N-1} \|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Нормы $\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ оцениваем, используя явный вид функций v_i и оценки из леммы 14.3:

$$\|\psi_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C \varepsilon (A + \mu).$$

Из последних двух оценок и равенства $N = 2\varepsilon^{-1}$ следует первое неравенство из утверждения леммы. Второе неравенство из утверждения леммы доказывается аналогично на основе явного вида функций v_i и леммы 14.3. Для краткости обозначим: $F_{\varepsilon,1}^{bl} = (\Delta_x + \lambda_{\varepsilon,1}) \psi_{\varepsilon,1}^{bl}$. Используя явный вид функций v_i , вычисляем:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^3 F_{\varepsilon,1}^{bl} &= \varepsilon \sum_{i=1}^3 \xi_2^i \left(c_{0,i} \frac{\partial^i X}{\partial \xi_2^i} + c_{1,i-1} \frac{\partial^i X}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^{i-1}} \right) + \varepsilon c_{0,0} X + \\ &+ \varepsilon^2 c_{1,-1} \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt + \varepsilon c_{0,-1} \int_{\xi_2}^{+\infty} t X(\xi_1, t) dt. \end{aligned}$$

Здесь $c_{i,k} = c_{i,k}(\xi_2, s, \varepsilon, \mu)$ — полиномы по ξ_2 с коэффициентами, зависящими от остальных переменных, причем эти коэффициенты в силу леммы 14.3 оцениваются сверху величиной $C \left((A + \mu) + \varepsilon^{-1} \delta^*(\varepsilon) (A + \mu)^2 \right)$, где C не зависит от ε, μ, s . Используя указанные оценки коэффициентов полиномов $c_{i,k}$ и вид функции $\mathbf{H}^3 F_{\varepsilon,1}^{bl}$, убеждаемся, что

$$\|\mathbf{H}^3 F_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C \left(\varepsilon (A + \mu) + \delta^*(\varepsilon) (A + \mu)^2 \right),$$

где C не зависит от ε , μ , s и j . Так как при $x \in \bar{\omega}^{bl}$ функция \mathbf{H} не обращается в нуль, то

$$\|F_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leq C \|\mathbf{H}^3 F_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\omega^{bl})} \leq C\varepsilon \left(\sum_{j=0}^{N-1} \|\mathbf{H}^3 F_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

что вместе с уже полученными оценками норм $\|\mathbf{H}^3 F_{\varepsilon,1}^{bl}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ дает третье неравенство из утверждения леммы. Лемма доказана. \square

Обозначим

$$\omega_j^{in} = \{x : 4\eta^{\frac{3}{4}} |\zeta^j| < 3\}, \quad \omega_j^{mat} = \{x : 1 < 4|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}} < 3, j = 0, \dots, N-1\}.$$

Аналогично лемме 14.4 доказывается справедливость следующего утверждения.

Лемма 14.5. *Для внутреннего разложения (14.3) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие равномерные по ε , μ и η оценки:*

$$\begin{aligned} \|\psi_{\varepsilon,1}^{in,j}\|_{L_2(\omega_j^{in})} &\leq C\eta^{\frac{1}{5}}, & \|(\Delta_x + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}^{in,j}\|_{L_2(\omega_j^{in})} &\leq C\eta^{\frac{1}{5}}, \\ \|\psi_{\varepsilon,1}^{in,j} - \varepsilon w_{1,0}^{(j)} - \varepsilon^2 w_{2,0}^{(j)}\|_{W_2^1(\omega_j^{in})} &\leq C\varepsilon^2 (A + \mu)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\psi_{\varepsilon,1}(x) = \left(\psi_{\varepsilon,1}^{ex}(x, \mu) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) \psi_{\varepsilon,1}^{bl}(\xi, s, \mu) \right) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \psi_{\varepsilon,1}^{in,j}(\zeta^j, s, \mu),$$

где

$$\chi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}}).$$

В следующем утверждении мы докажем, что формально построенные асимптотики $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,1}$ являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи.

Лемма 14.6. *Функции $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,1} \in W_2^1(\omega) \cap C^\infty(\hat{\omega})$ сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к λ_0 и ψ_0 (последняя — в $L_2(\omega)$) и удовлетворяют краевой задаче (5.1) с $u_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,1}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,1}$ и $f = f_{\varepsilon,1}$, где для $f_{\varepsilon,1}$ верна оценка:*

$$\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu(\varepsilon)) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta^*(\varepsilon)(A + \mu(\varepsilon))^2). \quad (14.22)$$

Доказательство. Утверждаемая гладкость функции $\psi_{\varepsilon,1}$ — очевидна. Сходимость $\lambda_{\varepsilon,1}$ к λ_0 следует из лемм 12.1 и 14.3. Сходимость $\psi_{\varepsilon,1}$ к ψ_0 следует из оценки:

$$\|\psi_{\varepsilon,1} - \psi_0\|_{L_2(\omega)} \leq \|\psi_{\varepsilon,1} - \Psi_0\|_{L_2(\omega)} + \|\Psi_0 - \psi_0\|_{L_2(\omega)}.$$

Здесь первое слагаемое в правой части стремится к нулю в силу лемм 14.3–14.5, второе — в силу леммы 12.1. Проверим граничные условия из (5.1). Равенство функции $\psi_{\varepsilon,1}$ на γ_ε вытекает из равенства нулю χ_ε на γ_ε и равенства нулю $\psi_{\varepsilon,1}^{in,j}$ на γ_j^1 . Нетрудно проверить, что при $x \in \Gamma_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{\varepsilon,1}}{\partial \nu} &= \left(\frac{\partial \psi_{\varepsilon,1}^{ex}}{\partial \nu} - \frac{\theta'_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial \psi_{\varepsilon,1}^{bl}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi \in \Gamma^0} \right) \chi_\varepsilon(x) - \frac{\theta'_\varepsilon}{\varepsilon \eta} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \frac{\partial \psi_{\varepsilon,1}^{in,j}}{\partial \zeta_2} \Big|_{\zeta \in \Gamma_j^1} = \\ &= \chi_\varepsilon(x) \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \left(\Psi_i^\nu - \theta'_\varepsilon \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi \in \Gamma^0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Оценим функцию $f_{\varepsilon,1}$. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,1} &= -(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1} = -\sum_{i=1}^5 f_\varepsilon^{(i)}, & f_{\varepsilon,1}^{(1)} &= \chi_\varepsilon(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}^{ex}, \\ f_{\varepsilon,1}^{(2)} &= \chi_\varepsilon \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) (\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}^{bl}, & f_{\varepsilon,1}^{(4)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}}) (\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}^{in,j}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\varepsilon,1}^{(3)} &= \chi_\varepsilon \left(2 \left(\nabla_x \psi_{\varepsilon,1}^{bl}, \nabla_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \right)_{\mathbb{R}^2} + \psi_{\varepsilon,1}^{bl} \Delta \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \right), \\
 f_{\varepsilon,1}^{(5)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(2 \left(\nabla_x \psi_{\varepsilon,1}^{mat,j}, \nabla_x \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \right)_{\mathbb{R}^2} + \psi_{\varepsilon,1}^{mat,j} \Delta \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \right), \\
 \psi_{\varepsilon,1}^{mat,j} &= \psi_{\varepsilon,1}^{in,j} - \psi_{\varepsilon,1}^{ex} - \psi_{\varepsilon,1}^{bl}.
 \end{aligned}$$

Используя уравнения (12.3), (13.7) и (14.4) нетрудно убедиться, что

$$(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1}) \psi_{\varepsilon,1}^{ex} = \varepsilon^2 (\Lambda_0 + 1 + \varepsilon \Lambda_1) \Psi_2,$$

а потому, в силу леммы 14.3,

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(1)}\|_{L_2(\omega)} = O(\varepsilon^2 (A + \mu)^3).$$

Функция $f_{\varepsilon,1}^{(2)}$ обращается в нуль при $\tau > c_0$ и оценивается с помощью леммы 14.4:

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(2)}\|_{L_2(\omega)} \leq \|f_{\varepsilon,1}^{(2)}\|_{L_2(\omega^{bl})} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} (A + \mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \delta^*(\varepsilon) (A + \mu)^2\right).$$

Функции v_i и, следовательно, $\psi_{\varepsilon,1}^{bl}$ экспоненциально убывают, а интегрирование $f_{\varepsilon,1}^{(3)}$ по ω в силу определения χ фактически сводится к интегрированию по области $\left\{x : \frac{c_0 \theta'_\varepsilon}{4\varepsilon} \leq \xi_2 \leq \frac{3c_0 \theta'_\varepsilon}{4\varepsilon}\right\}$, а потому

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(3)}\|_{L_2(\omega)} = O((A + \mu)e^{-1/\varepsilon^{a_{16}}}),$$

где $a_{16} > 0$ — некоторое фиксированное число. Далее, функцию $f_{\varepsilon,1}^{(4)}$ оцениваем на основе леммы 14.5:

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(4)}\|_{L_2(\omega)} \leq C \sum_{j=0}^{N-1} \|(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1}) \psi_{\varepsilon,1}^{in,j}\|_{L_2(\omega_j^{in})} = O(\eta^{\frac{1}{6}}).$$

В силу проведенного согласования (см. (14.6), (14.13)) функция $\psi_{\varepsilon,1}^{mat,j}$ при $\eta^{-\frac{3}{4}} \leq 4|\varsigma^j| \leq 3\eta^{-\frac{3}{4}}$ имеет дифференцируемую асимптотику:

$$\psi_{\varepsilon,1}^{mat,j} = O\left(\eta^2 |\varsigma|^2 |\ln |\varsigma|| + \varepsilon |\varsigma|^{-1} + \varepsilon \eta\right),$$

используя которую, оцениваем $f_{\varepsilon,1}^{(5)}$:

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(5)}\|_{L_2(\omega)} \leq C \sum_{j=0}^{N-1} \|f_{\varepsilon,1}^{(5)}\|_{L_2(\omega_j^{mat})} = O\left(\eta^{\frac{1}{5}}\right).$$

Собирая полученные оценки величин $f_{\varepsilon,1}^{(i)}$, приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. \square

15. ОБОСНОВАНИЕ

В данном разделе мы обосновываем формальные асимптотики, построенные в предыдущем разделе и завершаем тем самым доказательство теорем 12.1, 12.2. Обоснование формальных асимптотик, построенных в двух предыдущих разделах, проводится аналогично разделу 5. Всюду в разделе будем считать, что выполнено условие (С2). В этом предположении утверждение леммы 5.1 остается верным, где под предельной следует понимать задачу (12.2). Доказательство этой леммы не меняется вплоть до соотношений (5.5). Далее, ввиду другой предельной задачи, несколько иначе выглядит вывод задачи для u_* . А именно, пусть $\varphi \in C^\infty(\bar{\omega})$ — произвольная функция (не обязательно равная нулю на границе). Из [65, 66, 91] и (5.5) следует, что существует последовательность функций $\varphi_\varepsilon \in W_2^1(\omega)$, равных нулю на γ_ε , для которых верны сходимости:

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \quad \text{слабо в } W_2^1(\omega), \quad (\nabla u_{\varepsilon_k}, \varphi_{\varepsilon_k})_{L_2(\omega)} \rightarrow (\nabla u_*, \varphi)_{L_2(\omega)} + A(\theta'_0 u_*, \varphi)_{L_2(\partial\omega)}.$$

Выделяя при необходимости из ε_k подпоследовательность, можно считать, что φ_{ε_k} сходится к φ сильно в $L_2(\omega)$. Переходя теперь в (5.6) к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем, что u_* — нетривиальное решение задачи (12.2) с $\lambda_0 = \lambda_*$: противоречие. Утверждение леммы 5.2 также остается верным,

где под предельной вновь следует понимать задачу (12.2). Доказательство этой леммы остается без изменений.

Доказательство теорем 12.1, 12.2 будет основано на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 15.1. Пусть выполнено условие (C2). Тогда собственное значение λ_ε удовлетворяет оценке

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}| = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A + \mu)^2\right),$$

а соответствующая собственная функция может быть выбрана так, что будет удовлетворять равенству:

$$\|\psi_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,1}\|_{W_2^1(\omega)} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A + \mu)^2\right),$$

где $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,1}$ — из предыдущего раздела.

Доказательство. Пусть вначале ψ_ε нормирована в $L_2(\omega)$. Из лемм 5.2 и 14.6 следует:

$$\psi_{\varepsilon,1} = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int_{\omega} f_{\varepsilon,1} \psi_\varepsilon dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (15.1)$$

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A + \mu)^2 \right),$$

где C не зависит от ε и μ . Так как

$$\|\psi_{\varepsilon,1} - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\omega)} = \|\psi_0\|_{L_2(\omega)}(1 + o(1)) = 1 + o(1),$$

см. лемму 14.6, то в силу (14.22), (15.1) имеем:

$$C \leq \frac{\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\omega)}}{|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}|},$$

где C не зависит от ε и μ , откуда следует, что

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}| = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu) + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\delta^*(A + \mu)^2\right).$$

Ясно, что

$$\frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int_{\omega} f_{\varepsilon,1} \psi_\varepsilon dx$$

— собственная функция, соответствующая λ_ε . Переобозначая ее за ψ_ε , из (15.1) выводим вторую оценку из утверждения леммы. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 12.1. Утверждаемая асимптотика λ_ε легко выводится из леммы 15.1 и следствия 13.1 леммы 13.1. Из леммы 15.1 также следует, что собственную функцию, соответствующую λ_ε , можно выбрать так, что в норме $W_2^1(\omega)$ она будет иметь асимптотику

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) = & \left(\Psi_0(\mathbf{x}, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \Psi_1(\mathbf{x}, \mu, \varepsilon) - \frac{\chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right)}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{l=0}^1 \varepsilon^{l+1} \Psi_l^\nu(s, \mu, \varepsilon) X(\xi) \right) \chi_\varepsilon(\mathbf{x}) - \\ & - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}})}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{l=0}^1 \varepsilon^{l+1} \Psi_l^\nu(s, \mu, \varepsilon) Z^{(j)}(\zeta^j, \varepsilon) + o(\varepsilon(A + \mu)), \end{aligned} \quad (15.2)$$

где, напомним, переменные ξ и ζ^j были определены в (13.4), (13.6), Ψ_i^ν — значения нормальных производных функций Ψ_i на границе $\partial\omega$, X — из (8.14), $Z^{(j)}$ — из (13.24), а константа c_0 выбрана согласно (4.7).

Здесь мы отбросили из $\psi_{\varepsilon,1}$ дополнительные члены, построенные в предыдущем разделе, и $\varepsilon^2 \tilde{v}_2$, так как в силу лемм 14.3, 14.4, 14.5 их $W_2^1(\omega)$ -норма есть величина порядка $O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu))$. Теорема доказана. \square

Доказательство теоремы 12.2. Если условие (12.5) не выполнено, то, ввиду ограниченности $\delta^*(\varepsilon)$ (следствие 13.2 леммы 13.1), правые части в оценках из утверждения леммы 15.1 суть величины порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A + \mu)^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu)\right)$. Вначале выведем асимптотику собственной функции. Как и в доказательстве теоремы 12.1, из функции $\psi_{\varepsilon,1}$ можно отбросить ряд слагаемых, $W_2^1(\omega)$ -норма которых имеет порядок $O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A + \mu)^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu)\right)$. Прямыми вычислениями с использованием лемм 14.3, 14.4, 14.5 проверяется, что во внешнем разложении, в пограничном слое и во внутреннем слое можно оставить только главные члены, соответственно, $\Psi_0, \varepsilon v_1, \varepsilon w_{1,0}^{(j)}$. В результате выводим, что собственная функция, соответствующая λ_ε , может быть выбрана так, что в $W_2^1(\omega)$ она будет иметь асимптотику

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) = & \left(\Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\chi\left(\frac{x}{c_0}\right)}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0'(s, \mu, \varepsilon) X(\xi) \right) \chi_\varepsilon(x) - \\ & - \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}})}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0'(s, \mu, \varepsilon) Z^{(j)}(\zeta^j, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A + \mu)\right), \end{aligned} \quad (15.3)$$

где, напомним, переменные ξ и ζ^j были определены в (13.4), (13.6), Ψ_0' — значения нормальной производной функций Ψ_0 на границе $\partial\omega$, X — из (8.14), $Z^{(j)}$ — из (13.24), а константа c_0 выбрана согласно (4.7).

Из лемм 14.3, 15.1 следует:

$$\lambda_\varepsilon - \Lambda_0(\mu, \varepsilon) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(A + \mu)^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}}(A + \mu)\right). \quad (15.4)$$

В свою очередь, функция Λ_0 удовлетворяет асимптотической формуле:

$$\Lambda_0(\mu, \varepsilon) = \lambda_0 + \mu \lambda_1 + O(\mu^2 + A\sigma_\varepsilon), \quad \lambda_1 = \int_{\partial\omega} \psi_0^2 \theta'_\varepsilon ds. \quad (15.5)$$

Так как, очевидно, асимптотика (12.8) есть прямое следствие (15.4) и (15.5), то достаточно доказать (15.5). Пусть

$$\Lambda_{0,1} = \lambda_0 + \mu \lambda_1, \quad \Psi_{0,1} = \psi_0 + \mu \psi_1 + \psi,$$

где функции ψ_1 и ψ определяются как решения задач:

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda_0)\psi_1 &= -\lambda_1\psi_0, \quad x \in \omega, & \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A\theta'_0\right)\psi_1 &= -\theta'_\varepsilon\psi_0, \quad x \in \partial\omega, \\ (\Delta - 1)\psi &= -\mu^2\lambda_1\psi_1, \quad x \in \omega, \\ \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A + \mu)\theta'_\varepsilon\right)\psi &= -A(\theta'_\varepsilon - \theta'_0)(\psi_0 + \mu\psi_1) - \mu^2\theta'_\varepsilon\psi_1, \quad x \in \partial\omega. \end{aligned}$$

Задача для ψ_1 разрешима, формула для λ_1 из (15.5) есть в точности условие разрешимости. Функцию ψ_1 выберем ортогональной ψ_0 в $L_2(\omega)$. Задача для ψ , очевидно, однозначно разрешима. Из общих свойств решений эллиптических краевых задач вытекает, что для $\psi_1, \psi \in C^\infty(\bar{\omega})$ верны оценки:

$$\|\psi_1\|_{W_2^1(\omega)} \leq C, \quad \|\psi\|_{W_2^1(\omega)} \leq C(\mu^2 + A\sigma_\varepsilon),$$

где константы C не зависят от ε и μ . С использованием этих оценок и определения λ_1, ψ_1 и ψ проверяется, что сходящиеся к λ_0 и ψ_0 функции $\Lambda_{0,1}$ и $\Psi_{0,1}$ (последняя — в $W_2^1(\omega)$) удовлетворяют краевой задаче

$$(\Delta + \Lambda_{0,1})\Psi_{0,1} = F_{\varepsilon,\mu}, \quad x \in \omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + (A + \mu)\theta'_\varepsilon\right)\Psi_{0,1} = 0, \quad x \in \partial\omega,$$

где для правой части справедлива оценка

$$\|F_{\varepsilon,\mu}\|_{L_2(\omega)} = O(\mu^2 + A\sigma_\varepsilon).$$

Используя результаты [43, гл. 5, § 3.5], рассуждениями, полностью аналогичными доказательству леммы 5.2, нетрудно получить следующие представление и равномерную по ε и μ оценку:

$$\Psi_{0,1} = \frac{\Psi_0}{\Lambda_0 - \Lambda_{0,1}} \int_{\Omega} \Psi_0 F_{\varepsilon,\mu} dx + U_{\varepsilon,\mu},$$

$$\|U_{\varepsilon,\mu}\|_{W_2^1(\omega)} \leq C \|F_{\varepsilon,\mu}\|_{L_2(\omega)} = O(\mu^2 + A\sigma_\varepsilon).$$

Так как $\|\Psi_{0,1}\|_{L_2(\omega)} = 1 + o(1)$, то из последних соотношений легко выводятся оценки

$$|\Lambda_0 - \Lambda_{0,1}| = O(\mu^2 + A\sigma_\varepsilon),$$

которые и доказывают равенства (15.5). Теорема доказана. \square

ГЛАВА 5

ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА С НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ

16. Постановка задачи и основные результаты главы

В данной главе мы продолжаем изучение задачи (1.1), (1.2) в случае непериодического чередования граничных условий. Как было показано в предыдущей главе, в случае усредненного третьего краевого условия при определенных условиях на структуру чередования удастся построить первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций рассматриваемой задачи. Вместе с тем, в случае усредненного условия Дирихле подобного построения провести не удастся. Поэтому в данной главе исследование направлено на решение следующего вопроса: выяснить максимально слабые ограничения на множество γ_ε , при которых можно получить явные неувлучшаемые двусторонние асимптотические оценки на разности собственных значений возмущенной и предельной задач. Задача о построении асимптотик здесь уже не ставится, а заменяется на задачу получения тонких оценок скорости сходимости. Оказывается, что такие оценки можно получить, комбинируя принцип минимакса и результаты об асимптотических разложениях, полученные в предыдущих главах.

Постановка задачи (1.1), (1.2) остается прежней, однако условие (С2) заменяется на следующее: (С3). *Существует функция $\theta = \theta(s)$, заданная на границе множества ω , принимающая значения на отрезке $[0, 2\pi]$, удовлетворяющая условиям (1.3), такая что*

$$\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j.$$

где c_3 — некоторая положительная константа, не зависящая от ε , η и j , а для функции η выполнено равенство (7.3) с $A = \text{const} \geq 0$. Норма $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε .

Данное условие является ослабление условия (С2), так как фактически в нем остается лишь требования возможности гладко и взаимнооднозначно отобразить границу $\partial\Omega$ можно на окружность единичного радиуса так, что множество точек $\{x_j^\varepsilon\}$ перейдет в периодическое множество точек, делящее единичную окружность на N дуг длины $\varepsilon\pi$ каждая. Данное отображение может зависеть от ε , на характер этой зависимости накладываются лишь условие ограниченности нормы $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\Omega)}$.

Собственные значения возмущенной задачи занумеруем в порядке неубывания с учетом кратности:

$$\lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \dots$$

Соответствующие собственные функции ψ_ε^k выберем ортонормированными в $L_2(\Omega)$.

Сформулируем теперь основные результаты главы.

Теорема 16.1. Пусть выполнены условия (С3) и существует положительная ограниченная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству (1.5), такая что имеют место оценки

$$2c_1^{-1}\eta(\varepsilon) \leq \min_j a_j(\varepsilon) + \min_i b_i(\varepsilon), \quad 0 < \eta(\varepsilon) \leq \frac{\pi}{2},$$

где c_1 из (С3), а также существует константа $c_3 > 0$, для которой норма Гельдера $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$ ограничена по ε . Тогда собственные значения λ_ε^k возмущенной задачи сходятся к собственным значениям λ_0^k предельной задачи Дирихле (1.6), расположенным в порядке неубывания с учетом кратности, и справедливы оценки

$$C_{k,1}\varepsilon \ln \sin \eta(\varepsilon) - C_{k,2}|\varepsilon \ln \eta(\varepsilon)|^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon) \right) \leq \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leq 0,$$

где $C_{k,i}$ — некоторые положительные константы, не зависящие от ε .

Теорема 16.2. Пусть выполнено условие (С3), и существуют положительные функции $\eta = \eta(\varepsilon)$ и $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon) = 0, \quad \eta_0(\varepsilon) < 1, \quad (16.1)$$

и (7.3) с $A > 0$, такие что имеют место оценки

$$2c_1^{-1}\eta_0\eta \leq a_j + b_j \leq 2c_2^{-1}\eta, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

с константами c_1 и c_2 из (С3). При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\theta_\varepsilon(s)$ сходится в $C^1[0, S]$ к некоторой функции $\theta_0(s)$, $\theta'_0 \in C^\infty(\partial\omega)$. Тогда собственные значения λ_ε^k возмущенной задачи сходятся к собственным значениям λ_0^k предельной третьей краевой задачи (12.2), расположенным в порядке неубывания с учетом кратности, и справедливы оценки

$$C_{k,1}\mu(\varepsilon) + C_{k,2}\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon) - C_{k,3}\varepsilon - C_{k,4}\sigma(\varepsilon) \leq \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leq C_{k,5}\mu(\varepsilon) + C_{k,6}\varepsilon^{\frac{3}{2}} + C_{k,7}\sigma(\varepsilon),$$

где μ — из (7.8), $\sigma(\varepsilon) = \|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\Omega)}$, $C_{k,i}$ — некоторые положительные константы, не зависящие от ε , а функция $\eta_0(\varepsilon)$ ограничена сверху единицей.

Теорема 16.3. Пусть выполнены условия (С3) и существует положительная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству (7.3) с $A = 0$, такая что имеют место оценки

$$a_j + b_j \leq 2c_2^{-1}\eta, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

с константой c_2 из (С3). Тогда собственные значения λ_ε^k возмущенной задачи сходятся к собственным значениям λ_0^k задачи (12.2) с $A = 0$ и справедливы оценки

$$0 \leq \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leq C_k\mu(\varepsilon),$$

где μ — из (7.8), C_k — некоторые положительные константы, не зависящие от ε .

Поясним геометрический смысл условий теорем 16.1, 16.2, 16.3. Оценки для сумм $(a_j + b_j)$ в условиях данных теорем являются ограничениями на длины отдельных составляющих множества γ_ε и позволяют множествам $\gamma_{\varepsilon,j}$ иметь длины разных порядков. Более того, оценка для $(a_j + b_j)$ в условии теоремы 16.3 допускает ситуацию, когда для некоторых ε и j выполнено равенство $a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon) = 0$, т. е. соответствующее множество $\gamma_{\varepsilon,j}$ — пустое, и в окрестности точки x_j^ε задается граничное условие Неймана. Следует отметить, что упомянутых оценках из условий теорем 16.1, 16.2, 16.3 могут быть произвольными, однако их всегда можно выбрать указанным образом путем умножения функций η и η_0 на подходящие числа.

Условия теорем 16.1, 16.2, 16.3 очевидно значительно слабее, чем условия теоремы из предыдущих глав. Вместе с тем, их достаточно, чтобы получить двусторонние оценки на разности собственных значений возмущенной и усредненных задач. Порядки малости в этих оценках совпадают с порядками первых членов асимптотик, построенных в предыдущих главах. Это означает, что полученные двусторонние оценки неулучшаемые по порядку.

Результаты данной главы были опубликованы в [13].

17. ВСПОМОГАТЕЛЬНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ
В СЛУЧАЕ УСРЕДНЕННОГО КРАЕВОГО УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

В настоящем разделе мы докажем вспомогательную лемму, которая будет использована в следующем разделе при доказательстве теоремы 16.1. Сформулируем указанную лемму.

Лемма 17.1. Пусть выполнены условие (С3) и существует положительная ограниченная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, такая что выполнены оценки

$$c_4\eta(\varepsilon) \leq a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon) \leq 2c_2^{-1}\eta(\varepsilon), \quad j = 0, \dots, N-1, \quad \eta(\varepsilon) < \frac{\pi}{2},$$

где положительная константа c_4 не зависит от ε , η и j , а сама функция η удовлетворяет условию (1.5) и для всех i, j и ε справедливы равенства

$$a^j(\varepsilon) + b^j(\varepsilon) = 2\eta(\varepsilon), \quad a^i(\varepsilon) = a^j(\varepsilon), \quad b^i(\varepsilon) = b^j(\varepsilon).$$

Пусть также существует фиксированное число $c_3 > 0$, для которого норма Гельдера $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$ ограничена по ε . Тогда собственное значение λ_ε^k возмущенной задачи сходится к собственному значению λ_0^k предельной задачи (1.6) и имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon^k = \lambda_0^k + \varepsilon \ln \sin \eta(\varepsilon) \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \psi_0^k}{\partial \nu} \right)^2 \frac{ds}{\theta'_\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(|\ln \eta(\varepsilon)|^{\frac{3}{2}} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon) \right)\right).$$

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству данной леммы. Сходимость собственных значений доказывается аналогично работам [65, 66, 91]. Доказательство асимптотик проведем по схеме, использованной в главе 2. Как и ранее, мы вначале формально построим асимптотики, а затем проведем их строгое обоснование. Следует также отметить, что формальное построение асимптотик мы будем проводить по схеме, предложенной в работах [22, 23]. Отличием является оценка остатка в асимптотиках одновременно по двум параметрам ε и η , а также чуть более общая постановка рассматриваемой здесь задачи по сравнению с [22, 23], и отказ от дополнительных ограничений, сделанных в [22, 23]. Мы подробно остановимся только на случае простого предельного собственного значения; случай кратного собственного значения доказывается аналогично.

Пусть λ_0 — простое собственное значение предельной задачи (1.6), ψ_0 — соответствующая (нормированная в $L_2(\Omega)$) собственная функция, λ_ε — собственное значение возмущенной задачи, сходящееся к λ_0 .

Асимптотику собственного значения λ_ε будем искать в виде:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varepsilon) \ln \sin \eta, \quad (17.1)$$

а асимптотика соответствующей собственной функции строится как сумма внешнего разложения и пограничного слоя:

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon^{ex}(x, \eta) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) \psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \eta),$$

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x, \eta) = \psi_0(x) + \varepsilon \psi_1(x, \varepsilon) \ln \sin \eta, \quad (17.2)$$

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \eta) = \varepsilon v_1(\xi, s, \varepsilon, \eta) + \varepsilon^2 v_2(\xi, s, \varepsilon, \eta), \quad (17.3)$$

где

$$\xi = (\xi_1, \xi_2), \quad \xi_1 = \frac{\theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{b^j(\varepsilon) - a^j(\varepsilon)}{2}, \quad \xi_2 = \frac{\tau \theta'_\varepsilon(s)}{\varepsilon}.$$

Заметим также, что построение асимптотик здесь удастся провести без использования метода согласования асимптотических разложений.

Подставим (17.1) и (17.2) в уравнение (1.1) и выпишем коэффициенты при $\varepsilon \ln \sin \eta$:

$$(\Delta + \lambda_0)\psi_1 = -\lambda_1\psi_0, \quad x \in \Omega. \quad (17.4)$$

Подстановка (17.1) и (17.3) в уравнение (1.1) приводит к уравнениям (13.8) и (13.9) для функций v_1 и v_2 . Граничные условия для этих функций выводим из требования, что сумма (17.2) и (17.3) удовлетворяет обоим граничным условиям из (1.2):

$$v_1 = -\psi_1^D \ln \sin \eta, \quad \xi \in \gamma^\eta, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \psi_0^\nu, \quad \xi \in \Gamma^\eta, \quad (17.5)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \psi_1^\nu \ln \sin \eta, \quad \xi \in \Gamma^\eta, \quad (17.6)$$

где γ^η — объединение интервалов $(\pi j - \eta, \pi j + \eta)$, $j \in \mathbb{Z}$, лежащих на оси ξ_1 , а Γ^η — дополнение $\overline{\gamma^\eta}$ до оси ξ_1 , ψ_1^D и ψ_i^ν — значений функций ψ_i и их нормальных производных на границе $\partial\Omega$. Задача (13.8), (17.5) решается явно:

$$v_1(\xi, s, \varepsilon, \eta) = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)} \psi_0^\nu(s) X(\xi), \quad (17.7)$$

где функция X — из (2.8). Функция v_1 , определенная равенством (17.7), в силу (2.9) удовлетворяет граничному условию

$$v_1 = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon} \psi_0^\nu \ln \sin \eta, \quad \xi \in \gamma^\eta,$$

сравнивая которое с (17.5), получаем краевое условие для ψ_1 :

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (17.8)$$

Условие разрешимости краевой задачи (17.4), (17.8) приводит к формуле для λ_1 :

$$\lambda_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \right)^2 \frac{ds}{\theta'_\varepsilon(s)}. \quad (17.9)$$

Функцию ψ_1 выберем ортогональной ψ_0 в $L_2(\Omega)$. Функция v_2 определяется следующим образом:

$$v_2 = \frac{\psi_0^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} + K \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right) - \frac{2}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' v_2^{odd} - \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \psi_1^\nu \ln \sin \eta X, \quad (17.10)$$

где v_2^{odd} — экспоненциально убывающее решение краевой задачи

$$\Delta_\xi v_2^{odd} = \frac{\partial X}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \quad v_2^{odd} = 0, \quad \xi \in \gamma^\eta, \quad \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^\eta. \quad (17.11)$$

Решение задачи (17.11) существует, существование, а также его нечетность по ξ_1 и принадлежность $\mathcal{V}_\eta \cap W_2^1(\Pi^{(j)})$ следуют из леммы 2.1.

Для обоснования формально построенных асимптотик нам понадобятся дополнительные леммы.

Лемма 17.2. *Выполняются следующие свойства:*

(1). *для целых $m \geq 0$ справедливы неравенства*

$$\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right)^2 \left(\left| \ln \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right|^{\frac{1}{2}} + 1 \right),$$

где константы C не зависят от η .

(2). *для целых $m, p \geq 0$ имеют место оценки*

$$\begin{aligned} \left\| \xi_2^m \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \\ \left\| \xi_2^{m+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right)^2 \left(\left| \ln \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right|^{\frac{1}{2}} + 1 \right), \end{aligned}$$

где константы C не зависят от η .

Доказательство. Вначале докажем утверждение пункта (1) для $m = 0$. В [8, § 3] было показано, что $\|X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ — непрерывная функция по $\eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Для доказательства требуемой оценки выясним поведение этой функции при $\eta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Непосредственно проверяется, что функция

$$X^1(\xi) = -\frac{1}{2} \xi_2 \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt$$

— четная по ξ_1 , принадлежит \mathcal{V}_η и является в области $\xi_2 > 0$ решением уравнения $\Delta_\xi X^1(\xi) = X$, удовлетворяющим граничным условиям:

$$X^1 = 0, \quad \frac{\partial X^1}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} X(\xi_1, t) dt, \quad \xi_2 = 0.$$

Используя перечисленные свойства функций X^1 и X и доказанное в [8, § 3] равенство

$$\int_{\Pi^{(j)}} X^2 d\xi = \int_{\Pi^{(j)}} (X + \xi_2 - \ln \sin \eta) X d\xi,$$

интегрируя по частям, выводим:

$$\int_{\Pi^{(j)}} X^2 d\xi = \int_{\Pi^{(j)}} (X + \xi_2 - \ln \sin \eta) \Delta_\xi X_\eta^1 d\xi = \int_\eta^{\frac{\pi}{2}} (X(\xi_1, 0) - \ln \sin \eta) \int_0^{+\infty} X(\xi_1, t) dt d\xi_1. \quad (17.12)$$

Так как при $\xi_1 \in \left(\eta, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{d^2}{d\xi_1^2} \int_0^{+\infty} X(\xi_1, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} X(\xi_1, t) dt = -1,$$

то ввиду четности и π -периодичности X по ξ_1 получаем:

$$\int_0^{+\infty} X(\xi_1, t) dt = -\frac{1}{2} \left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \int_0^{+\infty} X\left(\frac{\pi}{2}, t\right) dt. \quad (17.13)$$

Применяя оценку $|\ln(1+a)| \leq a$, $a \geq 0$, к подынтегральной функции

$$X\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \ln \left(1 + \frac{e^{-2t} - 1 + \sqrt{(1 - e^{-2t})^2 + 4e^{-2t} \cos^2 \eta}}{2} \right)$$

в правой части равенства (17.13) и вычисляя полученный интеграл, выводим соотношение:

$$\int_0^{+\infty} X\left(\frac{\pi}{2}, t\right) dt = O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2 \ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right), \quad \eta \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

В [22] было доказано, что:

$$\int_{\gamma^n \cap \bar{\Pi}} \frac{\partial X}{\partial \xi_2} d\xi_1 = \pi - 2\eta, \quad \int_{\Gamma^n \cap \bar{\Pi}} X d\xi_1 = -2\eta \ln \sin \eta. \quad (17.14)$$

Подставляя теперь (17.13)–(17.14) в (17.12), приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \int_{\Pi^{(j)}} X^2 d\xi &= -\frac{1}{2} \int_\eta^{\frac{\pi}{2}} \ln \left(\frac{\sin \xi_1}{\sin \eta} + \sqrt{\frac{\sin^2 \xi_1}{\sin^2 \eta} - 1} \right) \left(\xi_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 d\xi_1 + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} X\left(\frac{\pi}{2}, \xi_2\right) d\xi_2 \int_\eta^{\frac{\pi}{2}} (X(\xi_1, 0) - \ln \sin \eta) d\xi_1 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} t^2 \left(\ln \left(\cos t + \sqrt{\cos^2 t - \sin^2 \eta} \right) - \ln \sin \eta \right) dt + O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^4 \ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right) = \\ &= O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^4 \ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right), \quad \eta \rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

В вычислениях была сделана замена $t = \frac{\pi}{2} - \xi_1$. Из полученной оценки для $\|X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2$ и непрерывности этой функции по $\eta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ вытекает утверждение пункта (1) для $m = 0$.

Из явного вида функции X , ее бесконечной дифференцируемости по (ξ, η) при $\xi_2 \geq 1$, непрерывности по $(\xi, \eta) \in \{\xi : \xi_2 > 0\} \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ и экспоненциального убывания при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ следует, что для $m \geq 1$ величина $\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ — непрерывная по $\eta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция и верна оценка:

$$\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 > 1\})} \leq C\eta_1^2,$$

где константа C не зависит от η . Тогда в силу неравенства

$$\|\xi_2^m X\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 < 1\})} < \|X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C\eta_1^2 \left(|\ln \eta_1|^{\frac{1}{2}} + 1\right)$$

и утверждения пункта (1) для $m = 0$ заключаем, что пункт (1) имеет место и для $m > 0$.

Проинтегрируем по частям в равенстве $\int_{\Pi} X \Delta_{\xi} X d\xi = 0$; в результате получим:

$$\int_{\Pi} |\nabla_{\xi} X|^2 d\xi = -\ln \sin \eta \int_{\gamma^{\eta} \cap \bar{\Pi}^{(j)}} \frac{\partial X}{\partial \xi_2} d\xi_1 + \int_{\Gamma^{\eta} \cap \bar{\Pi}^{(j)}} X d\xi_1,$$

откуда и из (17.14) вытекает:

$$\|\nabla_{\xi} X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = \pi^{\frac{1}{2}} |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}. \quad (17.15)$$

Из цепочки равенств ($m \geq 0, p \geq 0, m + p \geq 1, m, p \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \Delta_{\xi} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} d\xi = \\ &= - \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)} \left| \nabla_{\xi} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right|^2 d\xi - 2(m+p) \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)-1} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \frac{\partial^{m+1} X}{\partial \xi_2^{m+1}} d\xi = \\ &= - \left\| \xi_2^{m+p} \nabla_{\xi} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 + (m+p)(2(m+p)-1) \left\| \xi_2^{m+p-1} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 \end{aligned}$$

выводим формулы:

$$\left\| \xi_2^{m+p} \nabla_{\xi} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = \sqrt{(m+p)(2(m+p)-1)} \left\| \xi_2^{m+p-1} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \quad (17.16)$$

Применяя данные формулы с $p = 0, m \geq 1$ и с $p \geq 1, m \geq 0$, получаем оценки

$$\left\| \xi_2^m \nabla_{\xi} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C \|\nabla_{\xi} X\|_{L_2(\Pi^{(j)})}, \quad \left\| \xi_2^{m+p+1} \nabla_{\xi} \frac{\partial^m X}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C \|X\|_{L_2(\Pi^{(j)})},$$

из которых, пункта (1) и равенства (17.15) вытекает утверждение пункта (2). Лемма доказана. \square

Лемма 17.3. Функция v_2^{odd} удовлетворяет оценкам:

$$\begin{aligned} \|\xi_2^p v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \\ \|\xi_2^p \nabla_{\xi} v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \\ \left\| \xi_2^p \nabla_{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_2^{odd} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $p \geq 0, p \in \mathbb{Z}$, а константы C не зависят от η .

Доказательство. Пусть $v \in \mathcal{V}_{\eta} \cap W_2^1(\Pi^{(j)})$ — нечетная по ξ_1 функция, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta_{\xi} v = f, \quad \xi_2 > 0, \quad v = 0, \quad \xi \in \gamma^{\eta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^{\eta}, \quad (17.17)$$

где $f \in \mathcal{V}_\eta \cap L_2(\Pi^{(j)})$ — нечетна по ξ_1 . Так как $v \in \mathcal{V}_\eta$ нечетна по ξ_1 , то $v = 0$ при $\xi_1 = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$v(\xi) = \int_{-\frac{\pi}{2} + \pi j}^{\xi_1} \frac{\partial v}{\partial t}(t, \xi_2) dt,$$

откуда в силу неравенства Коши—Буняковского выводим оценку:

$$|v(\xi)|^2 \leq \pi \int_{-\frac{\pi}{2} + \pi j}^{\frac{\pi}{2} + \pi j} \left| \frac{\partial v}{\partial \xi_1}(\xi) \right|^2 d\xi_1,$$

используя которую, окончательно получаем:

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq \pi \|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \quad (17.18)$$

Теперь умножим уравнение из (17.17) на v и один раз проинтегрируем по частям:

$$\|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = - \int_{\Pi^{(j)}} v f d\xi,$$

что в силу неравенства Коши—Буняковского и оценки (17.18) дает:

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq \pi^2 \|f\|_{L_2(\Pi^{(j)})}, \quad \|\nabla v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq \pi \|f\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \quad (17.19)$$

Применяя неравенства (17.19) к решению задачи (17.11) и учитывая лемму 17.2, получаем равномерные по η оценки:

$$\|v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C \|\nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \quad \|\nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}. \quad (17.20)$$

Далее, функции $\xi_2^p v_2^{odd}$ являются решением задачи (17.17), где γ_η совпадает с осью $O\xi_1$, а правые части имеют вид

$$f = p(p-1)\xi_2^{p-2}v_2^{odd} + 2p\xi_2^{p-1}\frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} + \xi_2^p\frac{\partial X}{\partial \xi_1}.$$

Поэтому, применяя к $\xi_2^p v_2^{odd}$ оценки (17.19), с учетом (17.20) и леммы 17.2 получаем:

$$\begin{aligned} \|\xi_2 v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\|\nabla v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\nabla X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \right) \leq C |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \\ \|\xi_2^p v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\|\xi_2^{p-2} v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\xi_2^{p-1} \nabla v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\xi_2^p \nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \right), \quad p \geq 2. \end{aligned} \quad (17.21)$$

Интегрируя по частям в равенствах ($m \in \mathbb{N}$)

$$\begin{aligned} \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2m} v_2^{odd} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} d\xi &= \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2m} v_2^{odd} \Delta_\xi v_2^{odd} d\xi, \\ \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+1)} \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} d\xi &= \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+1)} \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} \Delta_\xi \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} d\xi, \end{aligned}$$

аналогично тому, как было получено (17.16), выводим неравенства:

$$\begin{aligned} \|\xi_2^m \nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\|\xi_2^{m-1} v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \left\| \xi_2^{m+1} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \right), \\ \left\| \xi_2^{m+1} \nabla_\xi \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\|\xi_2^m \nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \left\| \xi_2^{m+2} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \right). \end{aligned}$$

Из полученных неравенств, леммы 17.2 и оценок (17.20), (17.21) по индукции вытекает утверждение леммы. Лемма доказана. \square

Лемма 17.4. Для любого $R > 0$ и целого $m \geq 3$ имеют место равномерные по R и η оценки ($k = 0, 1, 2$):

$$\begin{aligned} \|X\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} \left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2 \left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right| + 1\right), \\ \|\xi_2^k \nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} \left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2 \left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right| + 1\right), \\ \left\|\xi_2^{k+1} \nabla_\xi \frac{\partial X}{\partial \xi_2}\right\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} \left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2 \left(\left|\ln\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)\right| + 1\right), \\ \|v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}, \\ \|\nabla_\xi v_2^{odd}\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Доказательство. Для любой функции $v \in \mathcal{V}_\eta$ при $\xi_2 \geq R$ в силу неравенства Коши—Буняковского справедливы соотношения:

$$|v(\xi)| = \left| \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi_1, t) dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2m-3}} \xi_2^{-m+\frac{3}{2}} \left\| \xi_2^{m-1} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Интегрируя это неравенство по $\Pi^{(j)} \cap \{\xi : \xi_2 > R\}$, получаем:

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 > R\})} \leq \frac{R^{-m}}{\sqrt{(2m-3)(2m-4)}} \left\| \xi_2^{m-1} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 > R\})}.$$

Последовательно полагая в данном неравенстве

$$v = X, \quad v = \xi_2^k \frac{\partial X}{\partial \xi_i}, \quad v = \xi_2^{k+1} \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_i \partial \xi_2}, \quad v = v_2^{odd}, \quad v = \frac{\partial v_2^{odd}}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2,$$

приходим к утверждению леммы. Лемма доказана. \square

Лемма 17.5. Функции $\lambda_1(\varepsilon)$ и $\psi_1(x, \varepsilon) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ограничены по ε :

$$|\lambda_1| \leq C, \quad \|\psi_1\|_{C^3(\bar{\Omega})} \leq C.$$

Доказательство. Ограниченность $\lambda_1(\varepsilon)$ следует из условия (С2) и формулы (17.9). Гладкость функции ψ_1 — очевидна. В силу хорошо известных оценок решений эллиптических краевых задач для функции ψ_1 имеем:

$$\|\psi_1\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(|\lambda_1| \|\psi_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi_0' / \theta_\varepsilon'\|_{C^2(\partial\Omega)} \right) \leq C,$$

где C не зависит от ε , откуда в силу теоремы вложения $H^2(\Omega)$ в $C(\Omega)$ получаем: $\|\psi_1\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C$ с независимой от ε константой C . Применяя теперь оценки Шаудера (см. [46, гл. III, § 1, формула (1.11)]) и учитывая ограниченность нормы $\|\theta_\varepsilon'\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$, выводим:

$$\|\psi_1\|_{C^3(\bar{\Omega})} \leq C \left(|\lambda_1| \|\psi_0\|_{C^2(\bar{\Omega})} + \|\psi_1\|_{C(\bar{\Omega})} + \|\psi_0' / \theta_\varepsilon'\|_{C^{3+d}(\partial\Omega)} \right) \leq C,$$

где C не зависит от ε . Лемма доказана. \square

Обозначим:

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon \ln \sin \eta \lambda_1, \\ \widehat{\psi}_\varepsilon(x) &= \psi_0(x) + \varepsilon \ln \sin \eta \psi_1(x, \varepsilon) + \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) \psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, \eta) + R_\varepsilon(x), \\ R_\varepsilon(x) &= \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) \psi_0' / \theta_\varepsilon', \end{aligned}$$

где λ_1 из (17.9), ψ_ε^{bl} из (17.3) с v_1 и v_2 из (17.7) и (17.10).

Следующее утверждение является аналогом леммы 14.6.

Лемма 17.6. Функция $\widehat{\psi}_\varepsilon \in C^\infty(\Omega \cup \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon) \cap W_2^1(\Omega)$ сходится к ψ_0 в $W_2^1(\Omega)$ и удовлетворяет краевой задаче

$$-\Delta \widehat{\psi}_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \widehat{\psi}_\varepsilon + f_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad \widehat{\psi}_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\widehat{\psi}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где для f_ε верна равномерная оценка:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right),$$

константа C не зависит от ε и η . Для функции $R_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ верна равномерная по ε и η оценка:

$$\|R_\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta.$$

Доказательство. Гладкость $\widehat{\psi}_\varepsilon$ и R_ε является прямым следствием определения этих функций. Утверждаемые граничные условия для $\widehat{\psi}_\varepsilon$ вытекают из (17.5), (17.6), (2.9), (17.8), (17.11). Доказательство оценки для R_ε основывается на лемме 17.5 и условии (C2):

$$\|R_\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta \|\psi_1\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leq C \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta.$$

Докажем оценку для f_ε . Эта функция представляется в виде:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &= -(\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \widehat{\psi}_\varepsilon = -\sum_{i=1}^3 f_\varepsilon^{(i)}, \\ f_\varepsilon^{(1)} &= \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta \left(\lambda_1 \psi_1 + \left(\Delta + \widehat{\lambda}_\varepsilon \right) \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{\psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right), \\ f_\varepsilon^{(2)} &= \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) (\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \psi_\varepsilon^{bl}, \\ f_\varepsilon^{(3)} &= 2 \left(\nabla_x \psi_\varepsilon^{bl}, \nabla_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \right) + \psi_\varepsilon^{bl} \Delta_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right). \end{aligned}$$

Функция $f_\varepsilon^{(1)}$ легко оценивается благодаря лемме 17.5:

$$\|f_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta,$$

где C не зависит от ε и η . Так как $\nabla_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right)$ и $\Delta_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right)$ не равны нулю лишь при $\frac{c_0}{4} < \tau < \frac{3c_0}{4}$, то, учитывая определение переменных ξ и используя лемму 17.4 с $m = 3$ и $R = \frac{c_0 c_1}{4\varepsilon}$, где c_1 из (C2), получаем оценку:

$$\|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{\frac{7}{2}} |\ln \sin \eta|^{\frac{1}{2}},$$

где C не зависит от η и ε . Используя гармоничность X и уравнение для v_2^{odd} , приходим к представлению для функции $f_\varepsilon^{(3)}$:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^{(3)} &= \varepsilon \sum_{k=0}^2 \sum_{i=1}^2 \left((\ln \sin \eta)^{\lfloor \frac{3-k}{2} \rfloor} G_{4k+2i-1} + \xi_2 G_{4k+2i} \right) \xi_2^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \frac{\partial^{k+1} X}{\partial \xi_i \partial \xi_2^k} + \\ &+ \varepsilon (\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta G_{13} + \varepsilon \ln \sin \eta G_{14} + G_{15}) X + \varepsilon \sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^2 \xi_2^k G_{2k+i+15} \frac{\partial^{k+1} v_2^{odd}}{\partial \xi_i \partial \xi_2^k} + \\ &+ \varepsilon^2 (\varepsilon \ln \sin \eta G_{20} + G_{21}) v_2^{odd}, \end{aligned}$$

где $G_i = G_i(\xi_2; s, \varepsilon)$ — полиномы по ξ_2 с коэффициентами, зависящими от s и ε , причем в силу леммы 17.5 эти коэффициенты ограничены равномерно по s и ε , $[\cdot]$ — целая часть числа. Учитывая эти оценки и применяя леммы 17.2 и 17.3, заключаем, что

$$\|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1 \right) \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right),$$

где C не зависит от ε и η . Здесь мы также использовали очевидные соотношения:

$$\ln \sin \eta = O(\eta), \quad \eta \rightarrow 0, \quad \ln \sin \eta = O\left(\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)^2\right), \quad \eta \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Лемма доказана. \square

Обоснование построенных асимптотик проводится аналогично обоснованию асимптотик из раздела 5.

Формальное построение асимптотик в случае кратного предельного собственного значения принципиально не отличается от случая простого предельного собственного значения. Отличием будет лишь то, что одновременно строятся асимптотики всех собственных значений, сходящихся к кратному предельному собственному значению; в целом же формальное построение дословно повторяет приведенные выше рассуждения. Обоснование асимптотик в случае кратного предельного собственного значения также аналогично разделу 6. Лемма 17.1 полностью доказана.

18. ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ

В настоящем разделе мы докажем теоремы 16.1, 16.2, 16.3. Доказательство этих теорем будет основываться на следующем вспомогательном утверждении.

Лемма 18.1. Пусть множества $\gamma_1(\varepsilon), \gamma_2(\varepsilon) \subseteq \partial\Omega$ таковы, что $\gamma_1(\varepsilon) \subseteq \gamma_2(\varepsilon)$, $\lambda_{\varepsilon,1}^k, \lambda_{\varepsilon,2}^k$ — собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon = \gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_\varepsilon = \gamma_2(\varepsilon)$ соответственно, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Тогда для всех k верны неравенства

$$\lambda_{\varepsilon,1}^k \leq \lambda_{\varepsilon,2}^k.$$

Лемма 18.1 представляет из себя стандартное утверждение о вариационных свойствах собственных значений эллиптических краевых задач. Доказательство основано на минимаксном свойстве собственных значений и очевидном вложении функциональных пространств:

$$W_2^1(\Omega, \gamma_2(\varepsilon)) \subseteq W_2^1(\Omega, \gamma_1(\varepsilon)),$$

где $W_2^1(\Omega, \gamma_i(\varepsilon))$, $i = 1, 2$ — множество функций из $W_2^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\gamma_i(\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 16.1. Согласно теореме Лагранжа, функции a^j и b^j , введенные в разделе 17, можно выразить через a_j и b_j следующим образом:

$$a^j = \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(3)})a_j, \quad b^j = \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(4)})b_j,$$

где $M_{j,\varepsilon}^{(3)} \in (s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j, s_j^\varepsilon)$, $M_{j,\varepsilon}^{(4)} \in (s_j^\varepsilon, s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j)$. Из полученных представлений в силу предположений теоремы вытекает, что

$$a^j \geq c_1 a_j, \quad b^j \geq c_1 b_j.$$

Эти оценки, предположения теоремы и факт непересечения множеств $\gamma_{\varepsilon,j}$ дают:

$$2\eta(\varepsilon) \leq \min_j a^j(\varepsilon) + \min_i b^i(\varepsilon) \leq \pi,$$

т. е. функция η ограничена сверху числом $\frac{\pi}{2}$. Кроме того, из последних неравенств следует существование функций $a_*(\varepsilon)$ и $b_*(\varepsilon)$, таких что $a_* + b_* = 2\eta$, а для множества

$$\gamma_{\varepsilon,*} = \{x : x \in \partial\Omega, -\varepsilon a_*(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \varepsilon b_*(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\}$$

выполнено включение $\gamma_{\varepsilon,*} \subseteq \gamma_\varepsilon$. Через $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ обозначим собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,*}$, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Множество $\gamma_{\varepsilon,*}$ удовлетворяет условиям леммы 17.1 с функцией η . Согласно лемме 17.1, собственные значения $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ сходятся к собственным значениям λ_0^k задачи (1.6) и для них верны асимптотики из этой леммы. Дважды применяя теперь лемму 18.1 с $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma_{\varepsilon,*}$, $\gamma_2(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon$ и $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon$, $\gamma_2(\varepsilon) = \partial\Omega$, выводим двусторонние оценки:

$$\lambda_{\varepsilon,*}^k \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \lambda_0^k.$$

Теперь в полученных оценках заменим $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ на асимптотики из леммы 18.1, что дает, во-первых, сходимости λ_ε^k к λ_0^k , и, во-вторых, требуемые двусторонние оценки разностей $(\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k)$. Теорема 16.1 доказана. \square

Доказательство теоремы 16.2. Из первой оценки леммы 13.1 и условия теоремы выводим, что

$$2\eta_0\eta \leq a^j + b^j \leq 2\eta.$$

Из полученных неравенств вытекает, что, во-первых, функция η_0 ограничена сверху единицей и, во-вторых, найдутся неотрицательные ограниченные функции $a_*^j(\varepsilon)$, $b_*^j(\varepsilon)$, $a^{j,*}(\varepsilon)$, $b^{j,*}(\varepsilon)$, такие что $a_*^j + b_*^j = 2\eta_0\eta$, $a^{j,*} + b^{j,*} = 2\eta$, а для множеств

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon,*} &= \{x : x \in \partial\Omega, -\varepsilon a_*^j(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \varepsilon b_*^j(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\}, \\ \gamma_\varepsilon^* &= \{x : x \in \partial\Omega, -\varepsilon a^{j,*}(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \varepsilon b^{j,*}(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

выполнены вложения

$$\gamma_{\varepsilon,*} \subseteq \gamma_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^*. \quad (18.1)$$

Через $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ и $\lambda_\varepsilon^{k,*}$ обозначим собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,*}$ и $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^*$, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Множества $\gamma_{\varepsilon,*}$ и γ_ε^* удовлетворяют условиям (С2), функция η для них, соответственно, это функция $\eta_0\eta$ и η из условия теоремы; равенство (7.3) для этих функций выполнено с одним и тем же $A > 0$. Величины $\delta^j(\varepsilon)$ для множеств $\gamma_{\varepsilon,*}$ и γ_ε^* равны нулю, а потому в силу леммы 15.1 собственные значения $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ и $\lambda_\varepsilon^{k,*}$ сходятся к собственным значениям задачи (12.2) и верны асимптотики

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,*}^k &= \Lambda_0^k(\tilde{\mu}, \varepsilon) + \varepsilon(A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega} \left(\Psi_0^k(x, \mu, \varepsilon) \right)^2 \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)) \theta'_\varepsilon(s) ds + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \lambda_\varepsilon^{k,*} &= \Lambda_0^k(\mu, \varepsilon) + \varepsilon(A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega} \left(\Psi_0^k(x, \tilde{\mu}, \varepsilon) \right)^2 \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)) \theta'_\varepsilon(s) ds + O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \end{aligned} \quad (18.2)$$

где μ — из (7.8),

$$\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\varepsilon) = -(\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon) \eta(\varepsilon))^{-1} - A = \mu(\varepsilon) + \frac{(A^2 - \mu(\varepsilon)^2) \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)}{1 + (A + \mu(\varepsilon)) \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)}.$$

Из леммы 14.3 выводим оценку $\|\Psi_0^k\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C$ с не зависящей от ε и μ константой C . Данная оценка, (13.29) и условие (С3) позволяют оценить интегралы в (18.2):

$$-C \leq (A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega} (\Psi_0^k)^2 \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon) \theta'_\varepsilon ds \leq 0, \quad (18.3)$$

где $C > 0$ не зависит от ε и μ . Лемма 18.1 в силу включений (18.1) утверждает справедливость оценок

$$\lambda_{\varepsilon,*}^k \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \lambda_\varepsilon^{k,*},$$

из которых, а также из асимптотик (18.2), (15.5) и неравенства (18.3) выводим сходимость $\lambda_\varepsilon^k \rightarrow \lambda_0^k$ и требуемые двусторонние оценки величин $(\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k)$. Теорема 16.2 доказана. \square

Доказательство теоремы 16.3. Методика доказательства — такая же, как и в теоремах 16.1, 16.2. Из первой оценки леммы 13.1 и условия теоремы следует, что существуют неотрицательные функции $a^{j,*}(\varepsilon)$ и $b^{j,*}(\varepsilon)$, такие что $a^{j,*} + b^{j,*} = 2\eta$, и для подмножества границы $\partial\Omega$

$$\gamma_\varepsilon^* = \{x : x \in \partial\Omega, -\varepsilon a^{j,*}(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \varepsilon \pi j < \varepsilon b^{j,*}(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\}$$

выполнено $\gamma_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^*$. Пусть $\lambda_\varepsilon^{k,*}$ — собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^*$. Множество γ_ε^* удовлетворяет всем требованиям теоремы 12.2 с функцией η из условия теоремы. Поэтому

$$\lambda_\varepsilon^{k,*} = \lambda_0^k + \mu \int_{\partial\Omega} (\psi_0^k)^2 \theta'_0 ds + o(\mu), \quad (18.4)$$

где λ_0^k , напомним, собственные значения задачи (12.2) с $A = 0$. Включения $\emptyset \subseteq \gamma(\varepsilon) \subseteq \gamma^*(\varepsilon)$ в силу леммы 18.1 дают неравенства:

$$\lambda_0^k \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \lambda_\varepsilon^{k,*},$$

из которых и асимптотик (18.4) вытекает утверждение теоремы. Теорема 16.3 доказана. \square

ГЛАВА 6

**ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ
ЧЕРЕДОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ**

19. Постановка задачи и основные результаты главы

В настоящей главе мы переходим к рассмотрению трехмерных краевых задач с частой сменой краевых условий. В качестве основной модели выбирается задача для оператора Лапласа в прямом трехмерном цилиндре с частой сменой краевых условий на узких поперечных полосах на боковой поверхности. В целом схема исследования здесь повторяет идеи, использованные в двумерных задачах в предыдущих главах. Однако особенность постановки состоит в том, что ширина полос может меняться, в том числе, и достаточно нерегулярным образом, и это вносит дополнительные особенности в исследование.

Постановка задачи такова. Пусть $x = (x, x_3)$ и $x = (x_1, x_2)$ — двух- и трехмерные декартовы координаты, $\Omega = \omega \times [0, H]$, где ω — произвольная односвязная ограниченная область в \mathbb{R}^2 с бесконечно дифференцируемой границей, s — натуральный параметр кривой $\partial\omega$. Через Σ обозначим боковую поверхность цилиндра Ω , через ω_1 и ω_2 — верхнее и нижнее основания соответственно,

$$\omega_1 = \{x : x \in \partial\omega, x_3 = H\}, \quad \omega_2 = \{x : x \in \partial\omega, x_3 = 0\}.$$

Малый параметр введем следующим образом: $\varepsilon = \frac{H}{\pi N}$, где $N \gg 1$ — натуральное число. Боковую поверхность разобьем на два подмножества γ^ε и Γ^ε , определив эти подмножества как объединение большого числа узких полос (см. рис. 3):

$$\gamma^\varepsilon = \left\{ x : x \in \partial\omega, \left| x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon\eta g_\varepsilon(s), j = 0, \dots, N-1 \right\}, \quad \Gamma^\varepsilon = \Sigma \setminus \bar{\gamma}^\varepsilon.$$

Здесь $\eta = \eta(\varepsilon)$ — произвольная функция, принимающая значения из интервала $(0, \pi/2)$, $g_\varepsilon \in C^\infty(\partial\omega)$ — произвольная функция, удовлетворяющая оценке

$$0 < c_4 \leq g_\varepsilon(s) \leq 1$$

с константой c_4 , не зависящей от ε и s . Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения:

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad (19.1)$$

$$\psi_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \gamma^\varepsilon, \quad \frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2 \cup \Gamma^\varepsilon, \quad (19.2)$$

где ν — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$. Отметим, что в этой задаче разбиение границы ω не производится, а разбивается только боковая поверхность цилиндра Ω .

В работе [101] была изучена сходимость краевой задачи для уравнения Пуассона в круговом цилиндре с граничными условиями (19.2) в предположении $g_\varepsilon(s) \equiv 1$. Здесь на основе методик работ [26, 66, 91, 101] будет изучена сходимость задачи (19.1), (19.2) и доказано следующее утверждение.

Теорема 19.1. Пусть норма $\|g_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε , а для функции η выполнено одно из равенств (1.5), (7.3). Тогда собственные значения задачи (19.1), (19.2) сходятся к собственным значениям одной из предельных задач:

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad (19.3)$$

$$\psi_0 = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \Sigma, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2,$$

если для η выполнено равенство (1.5), и

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \quad (19.4)$$

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A \right) \psi_0 = 0, \quad x \in \Sigma,$$

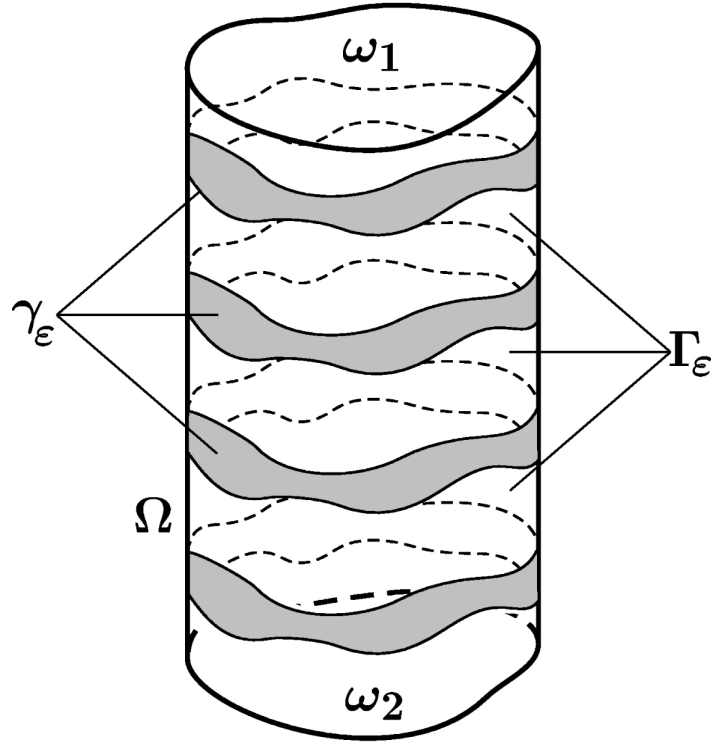


Рис. 3. Трехмерный цилиндр с частым периодическим чередованием краевых условий на полосах на боковой поверхности

если для η выполнено равенство (7.3). Совокупная кратность собственных значений возмущенной задачи, сходящихся к одному и тому же предельному собственному значению, совпадает с кратностью этого предельного собственного значения. Для всякой собственной функции ψ_0 , соответствующей собственному значению λ_0 , существует сходящаяся к ней линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи, соответствующих собственным значениям, сходящимся к λ_0 . Эта сходимостъ — сильная в $W_2^1(\Omega)$, если предельной является задача (19.3) или (19.4) с $A = 0$, и сильная в $L_2(\Omega)$ и слабая в $W_2^1(\Omega)$ в случае предельной задачи (19.4) с $A > 0$.

Как и в двух предыдущих главах, основной целью третьей главы является построение асимптотических разложений собственных элементов задачи (19.1), (19.2). Прежде чем сформулировать основные результаты третьей главы, введем дополнительные обозначения.

Задачи (19.3), (19.4) легко решаются разделением переменных:

$$\lambda_0 = M^2 + \kappa, \quad \psi_0(x) = \phi_0(x) \cos Mx_3, \quad M = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) H^{-1},$$

где $m \geq 0$ — целое число, κ и ϕ_0 — собственные значения и собственные функции двумерной задачи

$$-\Delta_x \phi_0 = \kappa \phi_0, \quad x \in \omega, \quad \phi_0 = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad (19.5)$$

— для задачи (19.3) и

$$-\Delta_x \phi_0 = \kappa \phi_0, \quad x \in \omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A \right) \phi_0 = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad (19.6)$$

— для задачи (19.4). Здесь ν — внешняя нормаль к $\partial\omega$.

Сформулируем теперь основные результаты главы.

Теорема 19.2. Пусть выполнено равенство (1.5) и существует $c_5 > 0$, такое что норма Гельдера $\|g_\epsilon\|_{C^{2+c_5}(\partial\omega)}$ ограничена по ϵ . Тогда собственные значения λ_ϵ задачи (19.1), (19.2),

сходящиеся к простым собственным значениям λ_0 задачи (19.3), имеют следующие двупараметрические асимптотики:

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\eta, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)\right), \quad (19.7)$$

$$\lambda_1(\eta, \varepsilon) = \int_{\partial\omega} \left(\frac{\partial\phi_0}{\partial\nu}\right)^2 \ln \sin \eta g_\varepsilon ds, \quad (19.8)$$

где $\|\phi_0\|_{L_2(\omega)} = 1$. Асимптотика соответствующей собственной функции ψ_ε в норме $W_2^1(\Omega)$ имеет вид (23.4).

Следующая лемма носит вспомогательный характер и необходима для формулировки теоремы 19.3. Доказательство этой леммы будет проведено в разделе 22.

Лемма 19.1. Для каждого простого собственного значения \varkappa задачи (19.6) существует единственное и простое собственное значение задачи

$$-\Delta_x \Phi_0 = \mathcal{K} \Phi_0, \quad x \in \omega, \quad (19.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A + \mu\right) \Phi_0 = 0, \quad x \in \partial\omega, \quad (19.10)$$

сходящиеся к \varkappa при $\mu \rightarrow 0$. Для соответствующих нормированных в $L_2(\omega)$ собственных функций имеет место сильная в $W_2^1(\omega)$ сходимост $\Phi_0 \rightarrow \phi_0$. Собственное значение $\mathcal{K}(\mu)$ и соответствующая собственная функция $\Phi_0(x, \mu)$ голоморфны по μ (последняя — в норме $W_2^1(\omega)$).

Теорема 19.3. Пусть выполнено равенство (7.3) для функции η и норма $\|g_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}$ ограничена равномерно по ε . Тогда собственные значения λ_ε задачи (19.1), (19.2), сходящиеся к простым собственным значениям λ_0 задачи (19.4), имеют следующие двупараметрические асимптотики:

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon \Lambda_1(\mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 \Lambda_2(\mu, \varepsilon) + O(\varepsilon^3(A + \mu)), \quad (19.11)$$

$$\Lambda_1(\mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \int_{\partial\omega} \Phi_0^2 \ln g_\varepsilon ds, \quad (19.12)$$

$$\Lambda_2(\mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \int_{\partial\omega} \left(\Phi_0 \Phi_1 \ln g_\varepsilon - \frac{\pi^2}{24} k \Phi_0^2\right) ds + (A + \mu)^3 \int_{\partial\omega'} \Phi_0^2 \ln^2 g_\varepsilon ds,$$

где $\Lambda_0 = \mathcal{K}(\mu) + M^2$, \mathcal{K} и Φ_0 удовлетворяют лемме 19.1, причем \mathcal{K} выбрано из условия

$$\mathcal{K}(\mu) \rightarrow \varkappa, \quad \mu \rightarrow 0.$$

Функция $\Phi_1 = \Phi_1(x, \mu, \varepsilon)$ — решение задачи

$$-\Delta_x \Phi_1 = \mathcal{K} \Phi_1 + \Lambda_1 \Phi_0, \quad x \in \omega, \quad (19.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A + \mu\right) \Phi_1 = -(A + \mu)^2 \Phi_0 \ln g_\varepsilon, \quad x \in \partial\omega, \quad (19.14)$$

удовлетворяющее условию ортогональности $(\Phi_0, \Phi_1)_{L_2(\omega)} = 0$, $k(s) = -(r''(s), \nu(s))_{\mathbb{R}^2}$, $\nu = \nu(s)$, $r(s)$ — двумерная вектор-функция, задающая $\partial\omega$. Функции Λ_i , Φ_i голоморфны по μ (последние — в норме $W_2^1(\omega)$). Асимптотики соответствующих собственных функций ψ_ε в норме $W_2^1(\Omega)$ имеют вид (23.6).

Отметим, что в случае кратного предельного значения μ задач (19.3), (19.4) также возможно построить асимптотики собственных элементов задачи (19.1), (19.2). Кроме того, методика построения асимптотик в условиях теорем 19.2, 19.3 позволяет также строить и полные асимптотические разложения собственных элементов задачи (19.1), (19.2). Подобные исследования были сделаны в работах [11, 12], где изучался случай кругового цилиндра с полосами постоянной ширины ($g_\varepsilon \equiv 1$). В [12] для усредненной задачи (19.3), а в [11] — для усредненной задачи (19.4) были построены полные асимптотические разложения собственных значений задачи (19.1), (19.2), сходящихся к

простым и кратным предельным значениям, а также полные асимптотические разложения соответствующих собственных функций. На основе полученных асимптотических разложений удалось установить достаточно простой и конструктивный критерий определения кратности у заданного собственного значения задачи (19.1), (19.2).

Теорема 19.1 будет доказана в разделе 20. Схема доказательства теорем 19.2, 19.3 аналогична доказательству аналогичных теорем в предыдущих главах. Формальные построения асимптотик в условиях теорем 19.2, 19.3 проводятся в разделах 21, 22. Раздел 23 посвящен обоснованию формальных асимптотических разложений.

Результаты главы были опубликованы в [11, 12, 14, 74].

20. СХОДИМОСТЬ

Основной целью данного раздела является доказательство теоремы 19.1. Схема доказательства этой теоремы в целом совпадает с доказательством аналогичных утверждений в [26, 66, 91, 101]. Всюду в разделе будем считать выполненными условия теоремы 19.1. Для доказательства этой теоремы нам потребуются дополнительные обозначения и ряд вспомогательных лемм. В окрестности боковой поверхности Σ введем координаты (s, τ, x_3) , где (s, τ) определены в разделе 1. Всюду в разделе константу c_0 считаем выбранной согласно (4.7).

Лемма 20.1. Пусть $u_0, f_0 \in W_2^1(\Omega)$, $f_1 \in L_2(\Omega)$. Тогда существует решение $u \in W_2^1(\Omega)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} (\Delta - 1)u &= \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{1}{\mathbf{H}} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{\mathbf{H}} \frac{\partial f_0}{\partial s} + f_1, \quad x \in \Omega, \\ pu &= 0, \quad x \in \omega_1, \quad u = u_0, \quad x \in \gamma^\varepsilon, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2 \cup \Gamma^\varepsilon, \end{aligned} \quad (20.1)$$

где функция \mathbf{H} — из (2.5), p — граничный оператор, $pu = u$ или $pu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$. Для этого решения справедлива равномерная по $\varepsilon, \eta, f_0, f_1, u_0$ оценка:

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \left(\left\| \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{\partial f_0}{\partial s} \right\|_{L_2(\Omega)} + \|f_1\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right).$$

Доказательство. Решение задачи (20.1), следуя [46], понимаем как решение интегрального уравнения:

$$-(u, v)_{W_2^1(\Omega)} = \left(\chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{1}{\mathbf{H}} \frac{\partial f_0}{\partial s}, \frac{1}{\mathbf{H}} \frac{\partial v}{\partial s} \right)_{L_2(\Omega)} + (f_1, v)_{L_2(\Omega)},$$

имеющее на γ^ε след, равный u_0 , где v — произвольный элемент из $W_2^1(\Omega)$, $v = 0$ на γ^ε . В случае $pu = u$ дополнительно предполагается, что $u|_{\omega_1} = 0$, $v|_{\omega_1} = 0$. Заметим, что данное интегральное уравнение получается стандартным интегрированием по частям с учетом того, что координаты (s, τ) — криволинейные. Правая часть этого интегрального уравнения, очевидно, оценивается сверху величиной

$$C \left(\left\| \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{\partial f_0}{\partial s} \right\|_{L_2(\Omega)} + \|f_1\|_{L_2(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \|v\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где константа C не зависит от $\varepsilon, \eta, f_0, f_1, u_0$ и v . Из данной оценки, следуя методике [46], уже легко выводится утверждение леммы. Лемма доказана. \square

Определим растянутые переменные $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\varsigma^j = (\varsigma_1^j, \varsigma_2^j)$,

$$\xi_1 = x_3 \varepsilon^{-1} - \frac{\pi}{2}, \quad \xi_2 = \tau \varepsilon^{-1}, \quad \varsigma_1^j = (\xi_1 - \pi j) \eta^{-1}, \quad \varsigma_2^j = \xi_2 \eta^{-1}. \quad (20.2)$$

Как и в двух предыдущих главах, эти переменные в различных формальных построениях асимптотик будут играть роль характерных переменных для пограничных слоев и внутренних разложений. Именно поэтому, несмотря на иное определение, мы оставляем за этими переменными прежнее обозначение. Через $Z = Z(\varsigma)$ обозначим функцию $Z^{(j)}$ из (13.24) с $\alpha^j = \beta^j = \frac{1}{2}$. Будем считать,

что функция η удовлетворяет равенству (7.3), и рассмотрим функцию:

$$W_\varepsilon^{in}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma^j, s), \quad \widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma, s) = \varepsilon(A + \mu) \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon \eta \varsigma_2 k(s) \right) Z(\varsigma g_\varepsilon^{-1}(s)).$$

Обозначим $\widehat{\Omega} = \overline{\Omega} \setminus (\overline{\gamma^\varepsilon} \cap \overline{\Gamma^\varepsilon})$. Прямыми вычислениями проверяется, что для $W_\varepsilon^{in} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ верна равномерная по ε и η оценка:

$$\left\| \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{\partial W_\varepsilon^{in}}{\partial s} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C \eta^{\frac{1}{3}}.$$

С учетом последней и леммы 20.1 заключаем, что существует решение задачи (20.1) с $pu = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, $u_0 = 0$, $f_1 = 0$, $f_0 = -W_\varepsilon^{in}$; обозначим это решение через W_ε^{ad} . В силу теорем о повышении гладкости решений эллиптических уравнений имеем: $W_\varepsilon^{ad} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$. Из леммы 20.1 следует равномерная по ε и η оценка

$$\|W_\varepsilon^{ad}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \eta^{\frac{1}{3}}. \quad (20.3)$$

Положим

$$W_\varepsilon(x) = \left(1 + \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) W_\varepsilon^{bl}(x) \right) \chi_\varepsilon(x) + W_\varepsilon^{in}(x) - W_\varepsilon^{ad}(x),$$

$$W_\varepsilon^{bl}(x) = \varepsilon(A + \mu) \left(\left(1 + \varepsilon \frac{\xi_2 k(s)}{2} \right) X(\xi) - \ln g_\varepsilon(s) \right),$$

где X — из (8.14), и

$$\chi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}).$$

Далее нам понадобятся некоторые свойства функции W_ε , которые удобно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 20.2. *Функция $W_\varepsilon \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ удовлетворяет краевым условиям обладает следующими свойствами:*

$$W_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma^\varepsilon, \quad \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \omega_2, \quad (20.4)$$

и сходимостями

$$\|\Delta W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|1 - W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} - A \right\|_{L_2(\Gamma^\varepsilon)} + \|1 - W_\varepsilon\|_{L_2(\partial\Omega)} \rightarrow 0, \quad (20.5)$$

$$\|\nabla W_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow A.$$

Доказательство. Так как функция W_ε задана явно, то проверка граничных условий и первой сходимости проводится прямыми вычислениями. При этом следует лишь учитывать гармоничность функций X и Z , асимптотики (13.12), (13.26) (последняя — с $\alpha^j = \beta^j = \frac{1}{2}$), ограниченность нормы $\|g_\varepsilon\|_{C^2(\partial\Omega)}$, равенство (7.3) для функции η , а также краевую задачу для W_ε^{ad} и оценку (20.3).

Кроме того, следует учесть, что $\text{supp } \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \subset \text{supp } \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right)$ и

$$\Delta W_\varepsilon = \sum_{i=1}^5 f_\varepsilon^{(i)}, \quad f_\varepsilon^{(1)} = W_\varepsilon^{ad}, \quad f_\varepsilon^{(2)} = \chi_\varepsilon \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \Delta W_\varepsilon^{bl},$$

$$\Delta W_\varepsilon^{bl} = -\frac{\varepsilon(A + \mu)}{H} \left(\frac{k^2}{2} \left(3\xi_2 \frac{\partial X}{\partial \xi_2} + X \right) + \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \xi_2 k X - \ln g_\varepsilon \right) \right),$$

$$f_\varepsilon^{(3)} = 2 \left(\nabla_x W_\varepsilon^{bl}, \nabla_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \right)_{\mathbb{R}^3} + W_\varepsilon^{bl} \Delta \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right),$$

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon^{(4)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \left(\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(H \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma^j, s) = \\
&= -\frac{\varepsilon(A + \mu)k^2}{2H} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \left(Z(\varsigma^j \mathbf{g}_\varepsilon^{-1}) + 3\varsigma_2 \mathbf{g}_\varepsilon^{-1} Z_{\varsigma_2}(\varsigma^j \mathbf{g}_\varepsilon^{-1}) \right), \\
f_\varepsilon^{(5)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(2 \left(\nabla W_\varepsilon^{mat,j}, \nabla \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \right)_{\mathbb{R}^3} + W_\varepsilon^{mat,j} \Delta \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \right), \\
W_\varepsilon^{mat,j}(x) &= \widetilde{W}_\varepsilon^{in}(\varsigma^j, s) - W_\varepsilon^{bl}(x) - 1,
\end{aligned}$$

а также оценку

$$W_\varepsilon^{mat,j} = O\left(\eta^3 |\varsigma^j|^3 + \eta^2 |\varsigma^j|^2 + \eta |\varsigma^j| |\ln |\varsigma^j|| + |\varsigma^j|^{-2}\right),$$

справедливую для $\eta^{-\frac{3}{4}} \leq 4|\varsigma^j| \leq 3\eta^{-\frac{3}{4}}$. Вторая сходимость является следствием первой и краевых условий:

$$\int_{\Omega} |\nabla W_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Gamma^\varepsilon} W_\varepsilon \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} dx - \int_{\Omega} W_\varepsilon \Delta W_\varepsilon dx \rightarrow A.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 20.3. Пусть функция η удовлетворяет равенству (7.3), $\varepsilon_k \rightarrow 0$ — произвольная последовательность, u_{ε_k} — последовательность функций из $W_2^1(\Omega)$, имеющих нулевой след на $\omega_1 \cup \gamma^{\varepsilon_k}$ и сходящихся при $k \rightarrow \infty$ к $u_* \in W_2^1(\Omega)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$, причем $u_{\varepsilon_k}|_{\partial\Omega}$ сходится к $u_*|_{\partial\Omega}$ сильно в $L_2(\partial\Omega)$. Тогда для любой функции $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ верны сходимости при $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\varphi W_{\varepsilon_k}))_{L_2(\Omega)} &\rightarrow (\nabla u_*, \nabla \varphi)_{L_2(\Omega)} + A(u_*, \varphi)_{L_2(\Sigma)}, \\
\|\nabla(\varphi W_{\varepsilon_k})\|_{L_2(\Omega)}^2 &\rightarrow \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + A\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)}^2.
\end{aligned}$$

Доказательство. Всюду в доказательстве для краткости будем опускать индекс k у последовательности ε_k . Интегрируя по частям, с учетом краевых условий (20.4) из леммы 20.2 получаем:

$$(\nabla u_\varepsilon, \nabla(\varphi W_\varepsilon))_{L_2(\Omega)} = (\nabla u_\varepsilon, W_\varepsilon \nabla \varphi)_{L_2(\Omega)} + (\nabla u_\varepsilon, \varphi \nabla W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}. \quad (20.6)$$

В силу сходимости (20.5) леммы 20.2 и слабой сходимости u_ε к u_* в $W_2^1(\Omega)$ первое слагаемое в правой части стремится к $\int_{\Omega} (\nabla u_*, \nabla \varphi) dx$, а второе с помощью интегрирования по частям представляется в виде:

$$\begin{aligned}
(\nabla u_\varepsilon, \varphi \nabla W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} &= \left(u_\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} \right)_{L_2(\Gamma^\varepsilon)} - (u_\varepsilon \nabla \varphi, \nabla W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - (u_\varepsilon \varphi, \Delta W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}, \\
(u_\varepsilon \nabla \varphi, \nabla W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} &= (u_\varepsilon \nabla \varphi, \nabla(W_\varepsilon - 1))_{L_2(\Omega)} = \left(W_\varepsilon - 1, u_\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)_{L_2(\partial\Omega)} - (W_\varepsilon - 1, \operatorname{div}(u_\varepsilon \nabla \varphi))_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Здесь мы проинтегрировали по частям с учетом граничных условий для u_ε и для W_ε из (20.4). Используя полученные формулы, сходимость (20.5) леммы 20.2, сходимости для функций u_{ε_k} и очевидную ограниченность последних в норме $W_2^1(\Omega)$, равномерную по k , убеждаемся, что второе слагаемое в правой части (20.6) сходится к $A(u_*, \varphi)_{L_2(\Sigma)}$.

Интегрируя по частям и используя лемму 20.2, при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем:

$$\begin{aligned}
\|\nabla(\varphi W_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \left(\varphi W_\varepsilon, \frac{\partial}{\partial \nu}(\varphi W_\varepsilon) \right)_{L_2(\partial\Omega)} - (\varphi W_\varepsilon, \Delta(\varphi W_\varepsilon))_{L_2(\Omega)} = \\
&= \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)_{L_2(\partial\Omega)} + \left(\varphi^2 W_\varepsilon, \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \nu} \right)_{L_2(\Gamma^\varepsilon)} - 2(\varphi \nabla \varphi, \nabla W_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - (\varphi, \Delta \varphi)_{L_2(\Omega)} + o(1) = \\
&= \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + A\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)}^2 - 2 \left(W_\varepsilon \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right)_{L_2(\partial\Omega)} + 2(W_\varepsilon, \operatorname{div}(\varphi \nabla \varphi))_{L_2(\Omega)} + o(1) = \\
&= \|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)}^2 + A\|\varphi\|_{L_2(\Sigma)}^2 + o(1).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Следующие две леммы являются аналогами леммы 5.1.

Лемма 20.4. Пусть функция η удовлетворяет равенству (7.3), Q — произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел задачи (19.4). Тогда при $\lambda \in Q$, $f \in L_2(\Omega)$ краевая задача

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f, \quad x \in \Omega, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1 \cup \gamma^\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2 \cup \Gamma^\varepsilon, \quad (20.7)$$

однозначно разрешима, и ее решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по λ сходится к решению задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 &= \lambda u_0 + f, \quad x \in \Omega, \quad u_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \omega_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A \right) u_0 = 0, \quad x \in \Sigma. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Эта сходимость сильная в $W_2^1(\Omega)$ при $A = 0$ и слабая в $W_2^1(\Omega)$ и сильная в $L_2(\Omega)$ при $A > 0$. Для решения задачи (20.7) верна оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad (20.9)$$

где константа C не зависит от ε , η , λ и f .

Доказательство. Разрешимость задачи (20.7) для каждого фиксированного ε — очевидна. Единственность этого решения вытекает непосредственно из оценки (20.9). Доказательство последней проводится в целом аналогично доказательству оценки (5.2) в лемме 5.1. А именно, допустив противное, рассуждениями, аналогичными выводу (5.3)–(5.5), доказываем существование последовательностей $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $f_k \in L_2(\Omega)$, $\lambda_k \in Q$, для которых выполнено при $k \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon_k}\|_{L_2(\Omega)} &= 1, \quad \|f_k\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0, \quad \lambda_k \rightarrow \lambda_* \in Q, \\ u_{\varepsilon_k} &\rightarrow u_* \quad \text{слабо в } W_2^1(\Omega) \text{ и сильно в } L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (20.10)$$

Выделяя при необходимости из $\{k\}$ подпоследовательность, можно считать, что

$$u_{\varepsilon_k}|_{\partial\Omega} \rightarrow u_*|_{\partial\Omega} \quad \text{в } L_2(\partial\Omega). \quad (20.11)$$

Пусть $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ — произвольная функция, равная нулю на ω_1 . Выбирая $\varphi W_{\varepsilon_k}$ в качестве пробной функции, заключаем, что выполнено интегральное равенство:

$$(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla(\varphi W_{\varepsilon_k}))_{L_2(\Omega)} = (\lambda_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} + f, \varphi W_{\varepsilon_k})_{L_2(\Omega)}.$$

Переходя теперь к пределу при $k \rightarrow \infty$, с учетом (20.10), (20.11) и леммы 20.3 получаем, что u_* — нетривиальное решение краевой задачи (19.4) с $\lambda_0 = \lambda_*$. Последнее означает, что λ_* — собственное значение задачи (19.4): противоречие. Оценка (20.9) доказана.

Используя оценку (20.9), рассуждениями, полностью аналогичными доказательству последней, легко установить сходимость u_{ε_k} к u_0 на произвольных последовательностях $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $\lambda = \lambda_k \rightarrow \lambda_*$. Отсюда и из непрерывной зависимости функции u_0 от параметра λ вытекает равномерная по λ сходимость u_ε к u_0 , сильная в $L_2(\Omega)$ и слабая в $W_2^1(\Omega)$. Интегрированием по частям легко установить, что

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = \lambda \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + (f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}.$$

Переходя теперь к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \lambda \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + (f, u_0)_{L_2(\Omega)} = \|\nabla u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + A \|u_0\|_{L_2(\Sigma)}^2. \quad (20.12)$$

Последняя сходимость при $A = 0$ означает сходимость норм $\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \rightarrow \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)}$, что с учетом слабой сходимости u_ε к u_0 в $W_2^1(\Omega)$ доказывает сильную сходимость в том же пространстве. Лемма доказана. \square

Лемма 20.5. Пусть функция η удовлетворяет равенству (1.5), Q — произвольный компакт на комплексной плоскости, не содержащий собственных чисел задачи (19.3). Тогда при $\lambda \in Q$,

$f \in L_2(\Omega)$ краевая задача (20.7) однозначно разрешима, и ее решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по λ сильно в $W_2^1(\Omega)$ сходится к решению задачи

$$-\Delta u_0 = \lambda u_0 + f, \quad x \in \Omega, \quad u_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus \bar{\omega}_2, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2.$$

Для решения задачи (20.7) верна оценка (20.9).

Доказательство. Оценка (20.9) в целом доказывается так же, как и в предыдущей лемме. Как и ранее, устанавливается существование последовательностей $\varepsilon_k \rightarrow 0$, $f_k \in L_2(\Omega)$, $\lambda_k \in Q$, для которых выполнены соотношения (20.10), (20.11). Отличие проявляется лишь при выводе краевой задачи для u_* . Здесь в качестве пробной функции следует брать произвольную функцию $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, обращающуюся в нуль на $\partial\Omega \setminus \bar{\omega}_2$. Тогда функция u_{ε_k} будет удовлетворять следующему интегральному равенству:

$$(\nabla u_{\varepsilon_k}, \nabla \varphi)_{L_2(\Omega)} = (\lambda_{\varepsilon_k} u_{\varepsilon_k} + f, \varphi)_{L_2(\Omega)}.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем следующее интегральное уравнение для функции u_* :

$$(\nabla u_*, \nabla \varphi)_{L_2(\Omega)} = (\lambda_* u_* + f, \varphi)_{L_2(\Omega)}. \quad (20.13)$$

Выясним граничные условия для функции u_* . Равенство $u_*|_{\omega_1} = 0$ вытекает непосредственно из (20.11). Учитывая нормировку функции u_{ε_k} (см. (20.10)), аналогично доказательству (20.12) легко установить, что

$$\|\nabla u_{\varepsilon_k}\|_{L_2(\Omega)}^2 \rightarrow \lambda_* + (f, u_*)_{L_2(\Omega)}. \quad (20.14)$$

Докажем, что $u_*|_{\Sigma} = 0$. Для этого будет использована методика доказательства из [101, теорема II.4]. Так как η удовлетворяет равенству (1.5), то функция u_ε обращается в нуль на множестве

$$\left\{ x : x' \in \partial\omega, \left| x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon p}}, \quad j = 0, \dots, N-1 \right\}$$

для всех $p > 0$ и достаточно малых ε . Рассматривая данное множество как γ^ε , возьмем соответствующую ему функцию W_ε . Для произвольной функции $\tilde{\varphi} \in C^\infty(\Omega)$ имеем:

$$\|\nabla(u_\varepsilon - \tilde{\varphi}W_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 - 2(\nabla u_\varepsilon, \nabla(\tilde{\varphi}W_\varepsilon))_{L_2(\Omega)} + \|\nabla(\tilde{\varphi}W_\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Левая часть в последнем равенстве неотрицательна, а потому, полагая в нем $\varepsilon = \varepsilon_k$ и переходя к пределу вначале при $k \rightarrow \infty$ (с учетом леммы 20.3 и (20.14)), а затем при $\varphi \rightarrow u_*$ в смысле нормы $W_2^1(\Omega)$, получаем неравенство:

$$\lambda_* + (f, u_*)_{L_2(\Omega)} - \|\nabla u_*\|_{L_2(\Omega)}^2 - p\|u_*\|_{L_2(\Sigma)}^2 \geq 0,$$

справедливое для любого p . Если $\|u_*\|_{L_2(\Sigma)}^2 \neq 0$, то полученное неравенство противоречиво, так как за счет выбора достаточно большого p всегда можно добиться обратного неравенства. Таким образом, $u_*|_{\Sigma} = 0$, что с уже установленным равенством $u_*|_{\omega_1} = 0$ и интегральным уравнением (20.13) означает, что u_* — нетривиальное решение задачи (19.3) с $\lambda_0 = \lambda_*$. Нетривиальность этого решения следует из нормировки функции u_{ε_k} . Следовательно, λ_* — собственное значение задачи (19.3): противоречие. Доказательство равномерной по λ сильной в $W_2^1(\Omega)$ сходимости u_ε к u_0 проводится так же, как и в доказательстве предыдущей леммы. Лемма доказана. \square

Доказательство теоремы 19.1. Пусть вначале функция η удовлетворяет равенству (7.3). Известно [43, гл. 5, § 3.5], что решения задач (20.7) и (20.8) мероморфны по λ в норме $W_2^1(\Omega)$ и имеют в качестве особенностей простые полюса, совпадающие с собственными значениями соответственно задач (19.1), (19.2) и (19.4). Вычеты в данных полюсах (собственных значениях) суть соответствующие собственные функции.

Пусть λ_0 — p -кратное собственное значение задачи (19.4), $p \geq 1$, $\psi_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$ — соответствующие собственные функции, а $\mathcal{B}_t(\lambda_0)$, напомним, открытый круг радиуса t на комплексной плоскости с центром в точке λ_0 . Возьмем t достаточно малым так, чтобы круг $\mathcal{B}_t(\lambda_0)$ не содержал собственных значений задачи, не совпадающих с λ_0 . Тогда в силу аналитичности решений

задач (20.7), (20.8) по параметру λ и леммы 20.4 имеем сходимость

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}_t} u_\varepsilon d\lambda \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}_t} u_0 d\lambda, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (20.15)$$

Данная сходимость сильная в $W_2^1(\Omega)$ при $A = 0$ и сильная в $L_2(\Omega)$ и слабая в $W_2^1(\Omega)$ при $A > 0$. Так как круг $\mathcal{B}_t(\lambda_0)$ содержит (простой) полюс функции u_0 , то правая часть в (20.15) не равна нулю. Следовательно, левая часть (20.15) также не равна нулю, т. е. круг $\mathcal{B}_t(\lambda_0)$ содержит простой полюс функции u_ε . Отсюда и из произвола в выборе t выводим сходимость собственных значений задачи (19.1), (19.2) к собственным значениям задачи (19.4).

Докажем теперь сходимость собственных функций. Прямыми вычислениями проверяется, что при $\lambda \in \mathcal{B}_t(\lambda_0)$, $\lambda \neq \lambda_0$, $f = \psi_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$ решением задачи (20.8) является функция $u_0 = \frac{\psi_0^{(j)}}{\lambda_0 - \lambda}$. Подставляя последнее равенство в (20.15) и вычисляя правую часть, получаем, что левая часть (20.15), где u_ε — решение задачи (20.7) с $f = \psi_0^{(j)}$, и есть требуемая линейная комбинация собственных функций задачи (19.1), (19.2), сходящаяся к $\psi_0^{(j)}$. Подчеркнем, что данные собственные функции задачи (19.1), (19.2) соответствуют собственным значениям, сходящимся к λ_0 .

Пусть к λ_0 сходятся собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(k)}$, $k = 1, \dots, q$, задачи (19.1), (19.2), взятые с учетом кратности. Докажем, что $p = q$. Через $\psi_\varepsilon^{(k)}$, $k = 1, \dots, q$ обозначим собственные функции, соответствующие $\lambda_\varepsilon^{(k)}$. Так как собственные функции $\psi_0^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$ линейно независимы, то соответствующие линейные комбинации функций $\psi_\varepsilon^{(k)}$, сходящиеся к $\psi_0^{(j)}$, также линейно независимы. Функции $\psi_\varepsilon^{(k)}$ линейно независимы, следовательно, по теореме Штейница, число q не может быть меньше p . С другой стороны, допустив, что $q > p$, аналогично доказательству леммы 20.4 нетрудно показать существование последовательности $\varepsilon_l \rightarrow 0$, на которой каждая из линейно независимых функций $\psi_{\varepsilon_l}^{(k)}$ сходится к линейным комбинациям функций $\psi_0^{(j)}$, причем эти комбинации также линейно независимы. Следовательно, p не превосходит q , т. е. $p = q$.

В случае, когда η удовлетворяет равенству (1.5), доказательство теоремы совершенно аналогично и опирается на лемму 20.5 вместо леммы 20.4. Теорема доказана. \square

21. ФОРМАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК В СЛУЧАЕ УСРЕДНЕННОГО УСЛОВИЯ ДИРИХЛЕ

В настоящем разделе будут формально построены первые члены асимптотических разложений для собственных элементов задачи (19.1), (19.2) в условиях теоремы 19.2. Всюду в разделе считаем выполненными условия данной теоремы.

Так как λ_0 — простое собственное значение задачи (19.3), то согласно теореме 19.1 к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (19.1), (19.2), которое является простым.

Первые члены асимптотики собственного значения λ_ε , сходящегося к λ_0 , будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\eta, \varepsilon) + \dots \quad (21.1)$$

Асимптотику соответствующей собственной функции будем строить как сумму внешнего разложения и пограничного слоя. Внешнее разложение определим следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x, \eta) = (\phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \eta, \varepsilon)) \Upsilon^+(Mx_3) + \dots \quad (21.2)$$

Пограничный слой будем искать в виде

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, s, x_3, \eta) = (\varepsilon v_1^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) + \varepsilon^2 v_2^+(\xi, s, \eta, \varepsilon)) \Upsilon^+(Mx_3) + \varepsilon^2 v_1^-(\xi, s, \eta, \varepsilon) \Upsilon^-(Mx_3) + \dots \quad (21.3)$$

Здесь ξ — переменные, введенные в разделе 20. Отметим, что слагаемые $\varepsilon^2 v_2^+$ и $\varepsilon^2 v_1^-$ играют в построении лишь вспомогательную роль. Они не влияют на вид первого члена в асимптотике собственного значения. Вместе с тем, они необходимы для доказательства того, что формальные асимптотики, которые будут построены ниже, являются формальным асимптотическим решением задачи (19.1), (19.2) (см. доказательство леммы 21.4).

Целью формального построения является определение вида величины λ_1 и функций ϕ_1 , v_i^\pm .

Перейдем непосредственно к построению. Вначале подставим (21.1) и (21.2) в уравнение (19.1) и соберем коэффициенты при первой степени ε . Эта стандартная процедура дает уравнение для функции ϕ_1 :

$$(\Delta_x + \varkappa)\phi_1 = -\lambda_1\phi_0, \quad x \in \omega. \quad (21.4)$$

Краевое условие для функции ϕ_1 будет определено при построении пограничного слоя.

Выведем граничные условия для функций v_i^\pm . В соответствии с методом пограничного слоя потребуем, чтобы сумма функций ψ_ε^{ex} и ψ_ε^{bl} асимптотически (по ε) удовлетворяла краевым условиям (19.2) на γ^ε и Γ^ε . Из этого требования вытекают граничные условия для функций v_i^\pm :

$$v_1^+ = -\phi_1^D, \quad \xi \in \gamma(\eta\mathbf{g}_\varepsilon), \quad \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} = \phi_0^V, \quad \xi \in \Gamma(\eta\mathbf{g}_\varepsilon), \quad (21.5)$$

$$\frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} = \phi_1^V, \quad \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma(\eta\mathbf{g}_\varepsilon), \quad (21.6)$$

$$\phi_1^D = \phi_1^D(s, \eta, \varepsilon) = \phi_1(x, \eta, \varepsilon), \quad \phi_0^V = \phi_0^V(s) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \phi_0(x), \quad x \in \partial\omega,$$

$$\phi_1^V = \phi_1^V(s, \eta, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \phi_0(x), \quad x \in \partial\omega.$$

Отметим, что мы не фиксируем никаких граничных условий для v_1^+ и v_1^- на $\gamma(\eta\mathbf{g}_\varepsilon)$. Эти функции играют лишь вспомогательную роль и ниже будут построены явно.

Выведем теперь уравнения для функций пограничного слоя. Для этого подставим (21.1) и (21.3) в уравнение (19.1), учтем при этом выражение (2.5) для двумерного оператора Лапласа в переменных x и вычислим в получившемся уравнении коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\Upsilon^+(Mx_3)$ и $\Upsilon^-(Mx_3)$. В результате приходим к уравнениям для функций v_i^\pm :

$$\Delta_\xi v_1^+ = 0, \quad \Delta_\xi v_2^+ = k \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2}, \quad \Delta_\xi v_1^- = 2M \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0. \quad (21.7)$$

Функции v_i^\pm будем строить экспоненциально убывающими при $\xi_2 \rightarrow +\infty$. Решение краевой задачи (21.5), (21.7) строится явно:

$$v_1^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) = -\phi_0^V(s)X(\xi, \eta\mathbf{g}_\varepsilon(s)), \quad (21.8)$$

где, напомним, X — из (2.8). Тогда, в силу граничных условий (2.9),

$$v_1^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) = -\phi_0^V(s) \ln \sin \eta\mathbf{g}_\varepsilon(s) \quad \text{на} \quad \gamma(\eta\mathbf{g}_\varepsilon(s)).$$

Ввиду (21.5) и (2.9) последнее равенство позволяет получить граничное условие для ϕ_1 :

$$\phi_1 = \phi_0^V \ln \sin \eta\mathbf{g}_\varepsilon, \quad x \in \partial\omega. \quad (21.9)$$

Условие разрешимости краевой задачи (21.4), (21.9) получаем стандартным путем: умножаем обе части уравнения (21.4) на ϕ_0 и интегрируем по частям. Полученное таким образом равенство и нормировка ϕ_0 приводят к формуле (19.8).

Для $\xi \in \overline{\Pi}$ обозначим:

$$Y(\xi, a) = \operatorname{Im} \ln \left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 a} \right) - \frac{\pi}{2} + \xi_1.$$

Продолжим эту функцию π -периодически по ξ_1 и обозначим это продолжение вновь через Y . Непосредственно проверяется, что $Y \in \mathcal{V}_1^-(\eta)$ — гармоническая функция, вместе с X удовлетворяющая условиям Коши—Римана:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1} = \frac{\partial Y}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -\frac{\partial Y}{\partial \xi_1}. \quad (21.10)$$

Функции v_1^- и v_2^+ также можно получить в явном виде:

$$\begin{aligned} v_2^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) &= -\frac{1}{2}k(s)\phi_0^v(s) \left(\xi_2 X(\xi, \eta g_\varepsilon(s)) + \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta g_\varepsilon(s)) dt \right) - \\ &\quad - \phi_1^v(s, \eta, \varepsilon) X(\xi, \eta g_\varepsilon(s)), \\ v_1^-(\xi, s, \eta, \varepsilon) &= -M\phi_0^v(s) \left(\xi_2 Y(\xi, \eta g_\varepsilon(s)) + \int_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1, t, \eta g_\varepsilon(s)) dt \right). \end{aligned} \quad (21.11)$$

Ясно, что $v_1 \in \mathcal{V}_1^\pm(\eta g_\varepsilon)$, $v_2^+ \in \mathcal{V}_1^+(\eta g_\varepsilon)$, $v_1^- \in \mathcal{V}_1^-(\eta g_\varepsilon)$.

Далее нам понадобятся следующие вспомогательные леммы. Всюду в следующей лемме посредством C будем обозначать различные не специфические константы, не зависящие от η .

Лемма 21.1. При $\eta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ функции $X(\xi, \eta)$ и $Y(\xi, \eta)$ обладают следующими свойствами.

а) Выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} \|\xi_2^p Y\|_{L_2(\Pi)} &= \|\xi_2^p X\|_{L_2(\Pi)} \leq C, \quad p = 0, 1 \\ \|\xi_2 \nabla_\xi Y\|_{L_2(\Pi)} &= \|\xi_2 \nabla_\xi X\|_{L_2(\Pi)} \leq C, \\ \left\| \int_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1, t, \eta) dt \right\|_{L_2(\Pi)} &= \left\| \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt \right\|_{L_2(\Pi)} \leq C. \end{aligned}$$

б) Для функций

$$\frac{\partial}{\partial \eta} X, \frac{\partial}{\partial \eta} Y \in \mathcal{V}_0(\eta), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt, \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt \in \mathcal{V}_1(\eta)$$

имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} &= \left\| \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} = \frac{\sqrt{\pi} \operatorname{ctg} \eta |\ln \cos \eta|^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}, \\ \left\| \xi_2 \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} &= \left\| \xi_2 \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq \pi \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)}, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt \right\|_{L_2(\Pi)} &= \left\| \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1, t, \eta) dt \right\|_{L_2(\Pi)} \leq \pi \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Доказательство. Всюду в доказательстве, не оговаривая особо, при различных интегрированиях по частям мы будем пользоваться очевидными граничными условиями:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_2} = 0, \quad Y = 0, \quad \xi_1 = \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (21.12)$$

вытекающими из принадлежностей $X \in \mathcal{V}^+(\eta)$, $Y \in \mathcal{V}^-(\eta)$.

Принадлежности

$$\frac{\partial X}{\partial \eta}, \frac{\partial Y}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt, \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt \in \mathcal{V}_0(\eta)$$

устанавливаются непосредственно, с использованием явного вида X и Y . Производные по ξ_1 , ξ_2 последних двух функций равны в силу условий Коши—Римана (21.10) функциям $\frac{\partial X}{\partial \eta}$, $\frac{\partial Y}{\partial \eta}$, что доказывает принадлежность функций $\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt$, $\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt$ пространству $\mathcal{V}_1(\eta)$.

Существование остальных норм из утверждения леммы нетрудно доказать на основе явного вида

функций X и Y . Докажем теперь равенство соответствующих норм X и Y из утверждения леммы. Используя условия Коши—Римана (21.10) и интегрируя по частям, для $\xi_2 > 0$ получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y^2 d\xi_1 = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y \frac{\partial X}{\partial \xi_1} d\xi_1 = -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial Y}{\partial \xi_1} X d\xi_1 = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial X}{\partial \xi_2} X d\xi_1 = \frac{\partial}{\partial \xi_2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X^2 d\xi_1,$$

откуда следует, что

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Y^2 d\xi_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X^2 d\xi_1 \quad \text{при } \xi_2 > 0.$$

Полученное равенство доказывает формулы

$$\|\xi_2^p X\|_{L_2(\Pi)} = \|\xi_2^p Y\|_{L_2(\Pi)}, \quad p = 0, 1.$$

Равенства остальных норм X и Y устанавливаются аналогично.

Переходим к доказательству оценок и остальных равенств из утверждения леммы. Первые две оценки пункта а) суть прямое следствие пунктов а)–в) леммы 3.2. Из леммы 3.1 и равенств (3.1) для функции X с учетом условий Коши—Римана (21.10) выводим:

$$\left\| \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt \right\|_{L_2(\Pi)} \leq 2\pi \left\| \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial \xi_1}(\xi_1, t, \eta) dt \right\|_{L_2(\Pi)} = 2\pi \|Y\|_{L_2(\Pi)} \leq C.$$

Пункт а) доказан. Прямыми вычислениями несложно проверить, что

$$X_1(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}\xi_2 \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial \eta}(\xi_1, t, \eta) dt \in \mathcal{V}_1^+(\eta)$$

— решение задачи

$$\Delta_\xi X_1 = \frac{\partial X}{\partial \eta}, \quad \xi_2 > 0, \quad X_1 = 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial \eta}(\xi_1, t, \eta) dt, \quad \xi_2 = 0. \quad (21.13)$$

Так как при $\xi_1 \in \left(\eta, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \int_0^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial \eta}(\xi_1, t, \eta) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial \eta} X(\xi_1, t, \eta) dt = 0,$$

то ввиду четности и π -периодичности X по ξ_1 получаем при $\xi_1 \in \left(\eta, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\partial X}{\partial \eta}(\pi/2, t, \eta) dt = \operatorname{ctg} \eta \ln \cos \eta.$$

Опираясь теперь на равенства (3.1) для функции X и интегрируя по частям, с учетом последнего равенства и (2.9), (21.13) получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} \right)^2 d\xi &= \int_{\Pi} \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} - \operatorname{ctg} \eta \right) \frac{\partial X}{\partial \eta} d\xi = \int_{\Pi} \left(\frac{\partial X}{\partial \eta} - \operatorname{ctg} \eta \right) \Delta_\xi \frac{\partial X_1}{\partial \eta} d\xi = \\ &= \int_{\eta}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} X(\xi_1, 0, \eta) - \operatorname{ctg} \eta \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \int_0^{+\infty} X(\xi, \eta) d\xi_2 d\xi_1 = -\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg}^2 \eta \ln \cos \eta. \end{aligned}$$

Аналогично (3.2) доказывается равенство

$$\left\| \xi_2 \nabla_\xi \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} = \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)},$$

что вместе с вытекающей из леммы 3.1 оценкой

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq 2\pi \left\| \frac{\partial^2 X}{\partial \xi_1 \partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} \leq 2\pi \left\| \xi_2 \nabla_\xi \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)}$$

приводит ко второму неравенству пункта б). Третья оценка этого пункта доказывается на основе леммы 3.1 и условий Коши—Римана (21.10):

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta) dt \right\|_{L_2(\Pi)} \leq 2\pi \left\| \frac{\partial Y}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)} = 2\pi \left\| \frac{\partial X}{\partial \eta} \right\|_{L_2(\Pi)}.$$

Лемма доказана. \square

Лемма 21.2. *Имеют место равномерные по ε и η оценка:*

$$|\lambda_1| \leq C(\ln \eta + 1), \quad \|\phi_1\|_{C^2(\bar{\omega})} \leq C(|\ln \eta| + 1).$$

Доказательство. Оценка для λ_1 очевидным образом вытекает из (19.8) и нормированности ϕ_0 . Согласно общей теории эллиптических краевых задач и теореме вложения $H^2(\omega) \subset C(\bar{\omega})$ ввиду ортогональности ϕ_1 и ϕ_0 имеет место неравенство

$$\|\phi_1\|_{C(\bar{\omega})} \leq C\|\phi_0\|_{H^2(\omega)} \leq C(|\lambda_1| \|\phi_1\|_{L_2(\omega)} + \|\phi_0^\vee \ln \sin \eta \mathbf{g}_\varepsilon\|_{C^2(\partial\omega)}) \leq C(|\ln \eta| + 1),$$

где константы C не зависят от ε и η . Из неравенства Шаудера [46, гл. III, § 1, формула (1.11)], выводим:

$$\|\phi_1\|_{C^{2+c_5}(\bar{\omega})} \leq C \left(|\lambda_1| \|\phi_0\|_{C^{c_5}(\bar{\omega})} + \|\phi_1\|_{C(\bar{\omega})} + \|\phi_0^\vee \ln \sin \eta \mathbf{g}_\varepsilon\|_{C^{2+c_5}(\bar{\omega})} \right),$$

откуда и из полученных оценок для λ_1 и $\|\phi_1\|_{C(\bar{\omega})}$ вытекает требуемое неравенство для ϕ_1 . Лемма доказана. \square

Обозначим:

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl}(x, \eta) = \varepsilon^2 (v_2^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) \cos Mx_3 + v_1^-(\xi, s, \eta, \varepsilon) \sin(Mx_3)) \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right).$$

Из определения функций v_2^+ и v_1^- , граничных условий (21.12) и лемм 21.1, 21.2 вытекает

Лемма 21.3. *Функция $\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\hat{\Omega})$ удовлетворяет граничным условиям*

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} = 0, \quad x \in \omega_1, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} = 0, \quad x \in \omega_2, \quad \frac{\partial}{\partial \nu} \tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon.$$

Справедливы равномерные по ε и η оценки:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{bl}\|_{W_2^1(\Omega)} &= O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{1}{2}} + 1)), \quad \left\| \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \frac{\partial \tilde{\psi}_\varepsilon^{bl}}{\partial s} \right\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}), \\ \left\| \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \tilde{\psi}_\varepsilon^{bl} \right\|_{W_2^1(\Omega)} &= O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{1}{2}} + 1)). \end{aligned}$$

Пусть $R_{\varepsilon,1}$ — решение задачи (20.1) с граничным оператором $\mathbf{p}u = u$ и $f_1 = -\varepsilon^2 \lambda_1 \phi_1 \Upsilon^+(Mx_3)$, $f_0 = -\psi_\varepsilon^{bl}$. Тогда в силу лемм 20.1 и 21.3 верна оценка:

$$\|R_{\varepsilon,1}\|_{W_2^1(\Omega)} = O(\varepsilon^2 |\ln \eta|^2 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} |\ln \eta|^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (21.14)$$

Ясно, что $R_{\varepsilon,1} \in C^\infty(\hat{\Omega})$. Обозначим: $\lambda_{\varepsilon,1} = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varepsilon, \eta)$,

$$\psi_{\varepsilon,1}(x) = \psi_{\varepsilon,1}^{ex}(x, \eta) + \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \psi_{\varepsilon,1}^{bl}(\xi, s, x_3, \eta) + R_{\varepsilon,1}(x),$$

$$\psi_{\varepsilon,1}^{ex}(x, \eta) = (\phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \eta, \varepsilon)) \Upsilon^+(Mx_3),$$

$$\psi_{\varepsilon,1}^{bl}(\xi, s, x_3, \eta) = (\varepsilon v_1^+(\xi, s, \eta, \varepsilon) + \varepsilon^2 v_2^+(\xi, s, \eta, \varepsilon)) \Upsilon^+(Mx_3) + \varepsilon^2 v_1^-(\xi, s, \eta, \varepsilon) \Upsilon^-(Mx_3).$$

Здесь c_0 выбрана согласно (4.7). Следующая лемма утверждает, что формально построенные асимптотики собственных элементов — формальное асимптотическое решение возмущенной задачи.

Лемма 21.4. *Функции $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,1} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ сходятся к λ_0 и ψ_0 (последняя — в норме $W_2^1(\Omega)$) и удовлетворяют краевой задаче (20.1) с $u_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,1}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,1}$, $f = f_{\varepsilon,1}$, где для $f_{\varepsilon,1}$ верна оценка:*

$$\|f_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)). \quad (21.15)$$

Доказательство. Сходимости для $\lambda_{\varepsilon,1}$ и $\psi_{\varepsilon,1}$ вытекают из лемм 21.2, 21.3 и оценки (21.14). Граничные условия для $\psi_{\varepsilon,1}$ следуют из (2.9), (21.5), (21.6), (21.9), (21.11), (21.12). Гладкость функции $\psi_{\varepsilon,1}$ — очевидна. В силу (19.5), (21.4) функция $f_{\varepsilon,1} = -(\Delta + \lambda_{\varepsilon,1})\psi_{\varepsilon,1}$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,1} &= -\sum_{i=1}^3 f_{\varepsilon,1}^{(i)}, \quad f_{\varepsilon,1}^{(1)} = (\lambda_{\varepsilon,1} + 1)\mathcal{R}_{\varepsilon,1}, \\ f_{\varepsilon,1}^{(2)} &= \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right) \left(\frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(H \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \lambda_{\varepsilon,1} \right) \psi_{\varepsilon,1}^{bl}, \\ f_{\varepsilon,1}^{(3)} &= 2(\nabla \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right), \nabla \psi_{\varepsilon,1}^{bl})_{\mathbb{R}^3} + \psi_{\varepsilon,1}^{bl} \Delta \chi\left(\frac{\tau}{c_0}\right). \end{aligned}$$

Оценка (21.14) и лемма 21.2 позволяют оценить $f_{\varepsilon,1}^{(1)}$:

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)).$$

Используя лемму 21.2, равенство (1.5), уравнения (21.7), формулы (21.8), (21.11), условия Коши—Римана (21.10) и оценку $\varepsilon \xi_2 < c_0$ на области $\{x : \tau < c_0\}$, получаем, что

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,1}^{(2)}(x) &= \varepsilon c_1 Y(\xi, \eta \mathbf{g}_\varepsilon) + \varepsilon^2 c_2 \int_{\xi_2}^{+\infty} Y(\xi_1, t, \eta \mathbf{g}_\varepsilon) dt + \varepsilon c_3 X(\xi, \eta \mathbf{g}_\varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^2 c_4 \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t, \eta \mathbf{g}_\varepsilon) dt + \varepsilon(c_5 \xi_2 + c_6) \frac{\partial}{\partial \xi_2} X(\xi, \eta \mathbf{g}_\varepsilon) + \varepsilon(c_7 \xi_2 + c_8) \frac{\partial}{\partial \xi_2} Y(\xi, \eta \mathbf{g}_\varepsilon), \end{aligned}$$

где функции $c_i = c_i(\xi, s, x_3, \varepsilon)$ удовлетворяют равномерным по ξ, s, x_3, ε и η оценкам:

$$|c_i| \leq C(|\ln \eta| + 1).$$

Отсюда, из леммы 21.1 и пункта а) леммы 3.2 вытекает оценка:

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{1}{2}} + 1)).$$

Функция $f_{\varepsilon,1}^{(3)}$ не равна нулю на области $\{x : c_0 < 4\tau < 3c_0\}$, что соответствует значениям $\xi_2 = O(\varepsilon^{-1})$. Так как $X, Y, v_i^\pm \in \mathcal{V}(\eta)$ экспоненциально убывают, то из явного вида X и Y выводим, что

$$\|f_{\varepsilon,1}^{(3)}\|_{L_2(\Omega)} = O(e^{-\varepsilon^{-a_{18}}}),$$

где $a_{18} > 0$ — некоторое фиксированное число. Собирая вместе полученные неравенства для $f_{\varepsilon,1}^{(i)}$, приходим к утверждаемой оценке для $f_{\varepsilon,1}$. Лемма доказана. \square

22. ФОРМАЛЬНОЕ ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИК В СЛУЧАЕ УСРЕДНЕННОГО ТРЕТЬЕГО КРАЕВОГО УСЛОВИЯ

В настоящем разделе будут формально построены первые члены асимптотических разложений для собственных элементов задачи (19.1), (19.2) в условиях теоремы 19.3. Всюду в разделе считаем выполненными условия этой теоремы.

Так как λ_0 — простое собственное значение задачи (19.4), то согласно теореме 19.1 к нему сходится одно собственное значение λ_ε задачи (19.1), (19.2), которое является простым.

Первые члены асимптотики собственного значения λ_ε , сходящегося к λ_0 , будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu) + \varepsilon\Lambda_1(\mu, \varepsilon) + \varepsilon^2\Lambda_2(\mu, \varepsilon) + \dots \quad (22.1)$$

Асимптотику соответствующей собственной функции будем строить на основе метода согласования асимптотических разложений, метода пограничного слоя и метода многих масштабов. Основным отличием от построения предыдущего раздела здесь является то обстоятельство, что использование только внешнего разложения и пограничного слоя не позволяет добиться требуемых граничных условий на γ^ε и Γ^ε . Поэтому приходится применять также метод согласования асимптотических разложений и строить дополнительное внутреннее разложение в окрестности множества γ^ε .

Внешнее разложение для собственной функции определим следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{ex}(x) = \Upsilon^+(Mx_3) \left(\Phi_0(x, \mu) + \varepsilon\Phi_1(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2\Phi_2(x, \mu, \varepsilon) \right) + \dots \quad (22.2)$$

Пограничный слой будем строить в виде:

$$\psi_\varepsilon^{bl}(\xi, x_3, s) = \Upsilon^+(Mx_3) \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i^+(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \Upsilon^-(Mx_3) \varepsilon \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i v_i^-(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \dots \quad (22.3)$$

Здесь под ξ мы вновь понимаем растянутые переменные, введенные в разделе 20.

Выведем уравнения для функций Φ_i . Для этого подставим (22.1) и (22.2) в уравнение (19.1) и вычислим коэффициенты при степенях ε^p , $p = 0, 1, 2$. Эта процедура приводит к уравнению (19.9) с $\mathcal{K}(\mu) = \Lambda_0(\mu) - M^2$ для Φ_0 , к уравнению (19.13) для Φ_1 и к следующему уравнению для Φ_2 :

$$-\Delta_x \Phi_2 = \mathcal{K} \Phi_2 + \Lambda_1 \Phi_1 + \Lambda_2 \Phi_0, \quad x \in \omega. \quad (22.4)$$

Граничные условия для функций Φ_i будут получены ниже. Из этих граничных условий и уравнений для Φ_i будет следовать, что $\Phi_i \in C^\infty(\bar{\omega})$, поэтому всюду ниже будем считать функции Φ_i бесконечно дифференцируемыми.

Выведем теперь краевые задачи для функций пограничного слоя. Для этого подставим (22.1) и (22.3) в уравнение (19.1), учтем выражение (2.5) для оператора Лапласа и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях ε отдельно для $\Upsilon^+(Mx_3)$ и $\Upsilon^-(Mx_3)$. В результате получим уравнения (21.7) и следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_2^- &= k \frac{\partial v_1^-}{\partial \xi_2} + 2M \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_1}, \\ \Delta_\xi v_3^\pm &= k \frac{\partial v_2^\pm}{\partial \xi_2} + k^2 \xi_2 \frac{\partial v_1^\pm}{\partial \xi_2} - \mathcal{K} v_1^\pm - \frac{\partial^2 v_1^\pm}{\partial s^2} - 2M \frac{\partial v_{2\mp 1}^\mp}{\partial \xi_1}, \\ \Delta_\xi v_4^+ &= k \frac{\partial v_3^+}{\partial \xi_2} + k^2 \xi_2 \frac{\partial v_2^+}{\partial \xi_2} + k^3 \xi_2^2 \frac{\partial v_1^+}{\partial \xi_2} - \mathcal{K} v_2^+ - \Lambda_1 v_1^+ - \\ &\quad - \frac{\partial^2 v_2^+}{\partial s^2} - \xi_2 \left(3k \frac{\partial^2}{\partial s^2} + k' \frac{\partial}{\partial s} \right) v_1^+ - 2M \frac{\partial v_2^-}{\partial \xi_1}. \end{aligned} \quad (22.5)$$

Потребуем, чтобы сумма функций $(\psi_\varepsilon^{ex} + \psi_\varepsilon^{bl})$ удовлетворяла однородному граничному условию Неймана на $\Sigma \setminus \left\{ x : x \in \omega, x_3 = \varepsilon \pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right\}$. Это приводит к граничным условиям для функций v_i^\pm :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i^+}{\partial \xi_2} &= \Phi_{i-1}^y, & \frac{\partial v_4^+}{\partial \xi_2} &= 0, & \frac{\partial v_i^-}{\partial \xi_2} &= 0, & i &= 1, 2, 3, & \xi &\in \Gamma(0), \\ \Phi_j^y &= \Phi_j^y(s, \mu, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi_j^y(x, \mu, \varepsilon), & x &\in \partial \omega. \end{aligned} \quad (22.6)$$

Отметим, что как и в случае двумерных задач, за счет пограничного слоя мы удовлетворяем только граничному условию Неймана на Γ^ε . Попытка одновременно добиться также выполнения и граничного условия Дирихле на γ^ε за счет пограничного слоя приводит к неразрешимым задачам на функции пограничного слоя.

Краевые задачи (21.7), (22.5), (22.6) решаются явно, их решения имеют следующий вид:

$$v_i^+(\xi, s, \mu, \varepsilon) = \tilde{v}_i^+(\xi, s, \mu, \varepsilon) - \Phi_{i-1}^y(s, \mu, \varepsilon) X(\xi), \quad i = 1, \dots, 4, \quad (22.7)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1^+ &= 0, & \tilde{v}_2^+ &= -\frac{1}{2}k\Phi_0^y\left(\xi_2 X + \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt\right), \\
\tilde{v}_3^+ &= -\frac{1}{2}k\Phi_1^y\left(\xi_2 X + \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt\right) - \Phi_0^y\left(\frac{3}{8}k^2 + \frac{1}{2}M^2\right)\xi_2^2 X - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi_0^y}{\partial s^2} + 2\Phi_0^y M^2 + \Lambda_0 \Phi_0^y + \frac{3}{4}k^2 \Phi_0^y\right) \int_{\xi_2}^{+\infty} t X(\xi_1, t) dt, \\
\tilde{v}_4^+ &= -\frac{1}{2}k\Phi_2^y\left(\xi_2 X + \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt\right) + (\mathfrak{b}_1^+ \xi_2 + \mathfrak{b}_2^+) \xi_2^2 X + \\
&\quad + \int_{\xi_2}^{+\infty} (\mathfrak{b}_3^+ t^2 + \mathfrak{b}_4^+ t + \mathfrak{b}_5^+ \xi_2^2) X(\xi_1, t) dt, \\
v_1^- &= \Phi_0^y M \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt, \\
v_2^- &= \Phi_1^y M \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt + \frac{1}{2}k\Phi_0^y M \int_{\xi_2}^{+\infty} t^2 \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt, \\
v_3^- &= \Phi_2^y M \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt + \int_{\xi_2}^{+\infty} (\mathfrak{b}_1^- t^3 + \mathfrak{b}_2^- \xi_2^2 t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt.
\end{aligned}$$

Здесь $\mathfrak{b}_i^\pm = \mathfrak{b}_i^\pm(s, \mu, \varepsilon)$ — некоторые вполне определенные функции, имеющие вид полиномов по k , Φ_i^y , производным этих функций по s до второго порядка и по \mathcal{K} , Λ_1 . Более того, функции \mathfrak{b}_i^\pm обращаются в нуль, если равны нулю функции Φ_i^y , производные этих функций по s и Λ_1 .

Выясним асимптотики функций пограничного слоя при $\xi \rightarrow \xi^{(j)}$. Ясно, что в силу π -периодичности по ξ_1 достаточно выяснить эти асимптотики при $\xi \rightarrow 0$ и распространить их затем на остальные точки $\xi^{(j)}$. Вычислим асимптотику для интеграла $\int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt$. Обозначим:

$$Y(\xi) = Y(\xi, 0) \equiv \operatorname{Re} \ln \sin z + \ln 2 - \xi_2.$$

Ясно, что для функций X и Y выполнены условия Коши—Римана (21.10). С учетом последних выводов формулы:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt &= \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} Y(\xi_1, t) dt = -Y(\xi), \\
\int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt &= - \int_0^{\xi_2} Y(t, \xi_2) dt + \int_{\xi_2}^{+\infty} X(0, t) dt = - \int_0^{\xi_2} Y(t, \xi_2) dt - \int_0^{\xi_2} X(0, t) dt + \int_0^{+\infty} X(0, t) dt.
\end{aligned}$$

Отсюда в силу (13.12) и определения функции Y следует, что при $\xi \rightarrow 0$:

$$\int_{\xi_2}^{+\infty} X(\xi_1, t) dt = -\frac{\pi^2}{12} - \xi_2(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) - \xi_1\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + \xi_2 + O(\rho^2). \quad (22.8)$$

Из равенств ($p = 2, 3$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \int_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt &= - \int_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial t^2} X(\xi_1, t) dt = \\ &= -\xi_2^p \frac{\partial X}{\partial \xi_2} - p\xi_2^{p-1} X - p(p-1) \int_{\xi_2}^{+\infty} t^{p-2} X(\xi_1, t) dt, \\ \int_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt \Big|_{\xi_1=\frac{\pi}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

и асимптотик (13.12), (14.5), (22.8) выводим:

$$\int_{\xi_2}^{+\infty} t^p \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt = a_{17+p} \xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \quad \xi \rightarrow 0, \quad (22.9)$$

где a_{19}, a_{20} — некоторые числовые константы. Интегрирование полученных асимптотик по ξ_1 позволяет получить асимптотики при $\xi \rightarrow 0$ для интегралов $\int_{\xi_2}^{+\infty} t^p X(\xi_1, t) dt$. В результате с учетом (13.12), (14.5), (22.8), (22.9) можно утверждать, что функции v_i^\pm обладают следующими асимптотическими разложениями при $\xi \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} v_i^+(\xi, s, \mu) &= -\Phi_{i-1}^v(s, \mu, \varepsilon)(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) + \tilde{v}_i(0, s, \mu, \varepsilon) + \\ &\quad + \frac{1}{2} k(s) \Phi_{i-2}^v(s, \mu, \varepsilon) (\xi_1(\vartheta - \pi/2) - \xi_2) + O(\rho^2 \ln \rho), \\ v_i^-(\xi, s, \mu) &= -\Phi_{i-1}^v(s, \mu, \varepsilon) M \xi_1 \ln \rho + b_i(s, \mu, \varepsilon) \xi_1 + O(\rho^2 \ln \rho), \\ \tilde{v}_2^+(0, s, \mu, \varepsilon) &= \frac{\pi^2}{24} k(s) \Phi_0^v(s, \mu), \quad \Phi_3^v \equiv 0, \end{aligned} \quad (22.10)$$

где ϑ — полярный угол, соответствующий переменным ξ , b_i — функции, полиномиально зависящие от Φ_i^v , k , производных этих функций по s до второго порядка и от Λ_0, Λ_1 , причем b_i обращаются в нуль, если равны нулю функции $\Phi_i^v, \Phi_1^v, \Phi_2^v$, их производные по s и коэффициент Λ_1 .

Сумма $(\psi_\varepsilon^{ex} + \psi_\varepsilon^{bl})$ не удовлетворяет однородному граничному условию Дирихле на γ^ε даже асимптотически. Более того, функции v_i^+ имеют логарифмические особенности в точках $\xi^{(j)} = (\pi j, 0)$, $j \in \mathbb{Z}$. Поэтому в окрестности этих точек, т. е. в окрестности отдельных составляющих множества γ^ε , асимптотику собственной функции будем строить в виде внутреннего разложения:

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{in}(\varsigma^j, s, x_3) &= \Upsilon^+(Mx_3) \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i (w_{i,0}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \eta w_{i,1}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon)) + \\ &\quad + \Upsilon^-(Mx_3) \varepsilon \eta \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i w_{i,1}^-(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \dots \end{aligned} \quad (22.11)$$

Здесь ς^j — растянутые переменные, введенные разделе 20. Ввиду периодичности по ξ_1 функций v_i^\pm и периодичности по x_3 множества γ^ε , внутренние разложения, соответствующие разным составляющим множества γ^ε , описываются одинаковыми функциями $w_{i,j}^\pm$. Поэтому достаточно построить внутреннее разложение для точки $\xi^{(0)} = 0$ и распространить затем полученные результаты на остальные точки $\xi^{(j)}$.

Определим функции $w_{i,j}^\pm$. Выведем краевые задачи для этих функций. Для этого подставим (22.1) и (22.11) в (19.1), (19.2) и вычислим отдельно коэффициенты при одинаковых степенях ε и η .

В результате получим краевые задачи:

$$\begin{aligned} \Delta_{\varsigma} w_{i,0}^+ &= 0, \quad \Delta_{\varsigma} w_{i,1}^+ = k \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,0}^+, \quad \Delta_{\varsigma} w_{i,1}^- = 2M \frac{\partial}{\partial \varsigma_1} w_{i,0}^+, \quad \varsigma_2 > 0, \\ w_{i,j}^{\pm} &= 0, \quad \varsigma \in \gamma^{\mathfrak{g}}, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,j}^{\pm} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^{\mathfrak{g}}, \end{aligned} \quad (22.12)$$

где

$$\gamma^{\mathfrak{g}} = \{\varsigma : |\varsigma_1| < \mathfrak{g}_{\varepsilon}, \varsigma_2 = 0\}, \quad \Gamma^{\mathfrak{g}} = O_{\varsigma_1} \setminus \bar{\gamma}^{\mathfrak{g}}.$$

Теперь выпишем асимптотики для функций $w_{i,j}^{\pm}$. Пусть (ϱ, ϑ) — полярные координаты, соответствующие переменным ς . Обозначим:

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,2} &= \Lambda_0(\mu) + \varepsilon \Lambda_1(\mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 \Lambda_2(\mu, \varepsilon), \\ \Psi_{\varepsilon,2}(x) &= \psi_{\varepsilon,2}^{ex}(x) + \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \psi_{\varepsilon,2}^{bl}(\xi, x_3, s), \\ \psi_{\varepsilon,2}^{ex}(x) &= \Upsilon^+(Mx_3) \left(\Phi_0(x, \mu) + \varepsilon \Phi_1(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 \Phi_2(x, \mu, \varepsilon) \right), \\ \psi_{\varepsilon,2}^{bl}(\xi, x_3, s) &= \Upsilon^+(Mx_3) \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i^+(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \Upsilon^-(Mx_3) \varepsilon \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i v_i^-(\xi, s, \mu, \varepsilon). \end{aligned}$$

Так как при $\tau \rightarrow 0$

$$\Phi_i = \Phi_i^D - \tau \Phi_i^y + O(\tau^2), \quad \Phi_i^D = \Phi_i^D(s, \mu, \varepsilon) = \Phi_i^D(x, \mu, \varepsilon), \quad x \in \partial\omega,$$

то, учитывая асимптотики (22.10) и очевидное равенство $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = -(A+\mu)^{-1}$ (см. (7.9)), нетрудно убедиться, что при $\eta^{\frac{1}{4}} < 4\rho < 3\eta^{\frac{1}{4}}$ (или, что тоже самое, при $\eta^{-\frac{3}{4}} < 4\rho < 3\eta^{-\frac{3}{4}}$) имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \Psi_{\varepsilon,2}(x) &= \Upsilon^+(Mx_3) \left(\sum_{i=0}^3 \varepsilon^i W_{i,0}^+(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \eta \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i W_{i,1}^+(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) \right) + \\ &+ \varepsilon \eta \Upsilon^-(Mx_3) \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i W_{i,1}^-(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) + O(\eta^2 \varrho^2 \ln \varrho), \\ W_{i,0}^+(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) &= -\Phi_{i-1}^y(s, \mu, \varepsilon) (\ln \varrho + \ln 2) + \frac{\Phi_i^y(s, \mu, \varepsilon)}{A + \mu} + \Phi_i^D(s, \mu, \varepsilon) + \tilde{v}_i^+(0, s, \mu, \varepsilon), \\ W_{i,1}^+(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) &= \frac{1}{2} k(s) \Phi_{i-1}^y(s, \mu, \varepsilon) \left(\varsigma_1 \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) - \varsigma_2 \right), \\ W_{i,1}^-(\varsigma, s, \mu) &= -\Phi_{i-1}^y(s, \mu, \varepsilon) M \varsigma_1 \ln \varrho + \left(\frac{M \Phi_i^y(s, \mu, \varepsilon)}{A + \mu} + \mathfrak{b}_i(s, \mu, \varepsilon) \right) \varsigma_1, \end{aligned} \quad (22.13)$$

где $\Phi_3^D = \Phi_{-1}^y \equiv 0$, $\mathfrak{b}_0 = 0$. Согласно полученным формулам и методу согласования асимптотических разложений, мы должны построить решения задач (22.12) с асимптотиками

$$w_{i,k}^{\pm} = W_{i,k}^{\pm} + o(\varrho^k), \quad \varrho \rightarrow \infty. \quad (22.14)$$

Функции $w_{i,0}^+$ и $w_{i,1}^-$ строятся явно:

$$\begin{aligned} w_{0,0}^+ &= 0, \quad w_{i,0}^+ = -\Phi_{i-1}^y Z(\varsigma \mathfrak{g}_{\varepsilon}^{-1}), \\ w_{i,1}^- &= -\Phi_{i-1}^y M \varsigma_1 Z(\varsigma \mathfrak{g}_{\varepsilon}^{-1}) + \mathfrak{g}_{\varepsilon} \left(\frac{M \Phi_i^y}{A + \mu} + \mathfrak{b}_i + \Phi_{i-1}^y M (\ln 2 - \ln \mathfrak{g}_{\varepsilon}) \right) Z_1(\varsigma \mathfrak{g}_{\varepsilon}^{-1}). \end{aligned}$$

Здесь $Z_1(\varsigma)$ — это функция $Z_1^{(j)}$ из (14.11) с $\alpha^j = \beta^j = \frac{1}{2}$. Соотношения (13.26) с $\alpha^j = \beta^j = \frac{1}{2}$ для функции Z позволяют вычислить асимптотики только что определенных функций $w_{i,0}^+$, сравнивая которые с (22.13), (22.14), приходим к необходимости выполнения равенств:

$$\frac{\Phi_i^y(s, \mu, \varepsilon)}{A + \mu} + \Phi_i^D(s, \mu, \varepsilon) + \tilde{v}_i(0, s, \mu, \varepsilon) = \Phi_{i-1}^y(s, \mu, \varepsilon) \ln \mathfrak{g}_{\varepsilon}(s).$$

Последние дают граничные условия (19.10), (19.14) для Φ_0 и Φ_1 и граничное условие для Φ_2 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A + \mu\right) \Phi_2 = -(A + \mu)^3 \Phi_0 \ln^2 g_\varepsilon + (A + \mu)^2 \left(\frac{\pi^2}{24} k \Phi_0 - \Phi_1 \ln g_\varepsilon\right), \quad x \in \partial\omega. \quad (22.15)$$

Собственные элементы \mathcal{K} и Φ_0 выберем согласно лемме 19.1 сходящимися к \varkappa и ϕ_0 . Утверждение данной леммы следует из леммы 12.1 для $\theta'_\varepsilon \equiv 1$ с соответствующей заменой обозначений. Следовательно, $\Lambda_0(\mu) = \mathcal{K}(\mu) + M^2$ — голоморфная функция, $\Lambda_0(0) = \lambda_0$. Краевые задачи (19.13), (19.14), (22.4), (22.15) разрешимы при подходящем выборе Λ_1 и Λ_2 . Условия разрешимости получаем стандартным образом: умножаем уравнения в (19.13), (22.4) на Φ_0 и интегрируем по частям по области ω , учитывая граничные условия (19.10), (19.14), (22.15). Функции Φ_1 и Φ_2 определены с точностью до слагаемого $c\Phi_0$; однозначно определяем функции Φ_1 и Φ_2 , считая их ортогональными Φ_0 в $L_2(\omega)$. Такой выбор функций Φ_1 и Φ_2 и условия разрешимости задач для этих функций дают формулы (19.12). Также очевидно, что $\Phi_1, \Phi_2 \in C^\infty(\bar{\omega})$.

Лемма 22.1. *Верны равномерные по ε и μ оценки ($i = 1, 2$):*

$$\|\Phi_0\|_{C^3(\bar{\omega})} \leq C, \quad \|\Phi_i\|_{C^2(\bar{\omega})} \leq C(A + \mu)^2, \quad \|\Phi_i^\vee\|_{C^2(\partial\omega)} \leq C(A + \mu)^2, \quad |\Lambda_i| \leq C(A + \mu)^2.$$

Доказательство. Так как $\mathcal{K} \rightarrow \varkappa$, то функция Λ_0 ограничена равномерно по μ . Отсюда, из нормировки функции Φ_0 и стандартных теорем о повышении гладкости решений эллиптических краевых задач легко следует оценка для Φ_0 . Следовательно, в силу (19.12), верна утверждаемая оценка для Λ_1 . Последняя вместе с ортогональностью Φ_0 и Φ_1 в $L_2(\omega)$ приводит к равномерной ограниченности нормы $\|\Phi_1\|_{W_2^1(\omega)}$. Применяя теперь лемму 14.2 с $\theta'_\varepsilon \equiv 1$ к задаче (19.13), (19.14), приходим к оценкам для Φ_1 . Эти оценки в силу (19.12) дают требуемое неравенство для Λ_2 , что аналогично оценкам для Φ_1 позволяет доказать и оценки для Φ_2 . Лемма доказана. \square

Закончим построение внутреннего разложения.

Лемма 22.2. *Существует решение задачи*

$$\Delta_\varsigma U = \frac{\partial Z}{\partial \varsigma_2}, \quad \varsigma_2 > 0, \quad U = 0, \quad \varsigma \in \gamma^1, \quad \frac{\partial U}{\partial \varsigma_2} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma^1, \quad (22.16)$$

принадлежащее пространству \mathcal{W} с $\alpha^j = \beta^j = \frac{1}{2}$ (см. (13.25)) и имеющее дифференцируемую асимптотику:

$$U(\varsigma) = -\frac{1}{2} \left(\varsigma_1 \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) - \varsigma_2 \right) + O(1), \quad \varrho \rightarrow \infty. \quad (22.17)$$

Здесь $Z = Z(\varsigma)$, $\gamma^1 = \{\varsigma : |\varsigma_1| < 1, \varsigma_2 = 0\}$, $\Gamma^1 = O_{\varsigma_1} \setminus \bar{\gamma}^1$.

Доказательство. Для доказательства достаточно сделать комплексную замену переменных, отображающую верхнюю полуплоскость $\varsigma_2 > 0$ в полукруг и решить затем полученную задачу разделением переменных. Такой путь легко приводит к решению задачи (22.16) с дифференцируемой асимптотикой (22.17). Лемма доказана. \square

Функции $w_{i,1}^+$ определим так:

$$w_{0,1}^+ = 0, \quad w_{i,1}^+ = -\Phi_{i-1}^\vee g_\varepsilon k U(\varsigma g_\varepsilon^{-1}),$$

где U — решение задачи (22.16). Обозначим:

$$\begin{aligned} \Psi_{\varepsilon,2}^{in}(x) &= \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \psi_{\varepsilon,2}^{in}(\varsigma^j, s, x_3), \\ \psi_{\varepsilon,2}^{in,j}(\varsigma^j, s, x_3) &= \Upsilon^+(Mx_3) \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i (w_{i,0}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \eta w_{i,1}^+(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon)) + \\ &+ \Upsilon^-(Mx_3) \varepsilon \eta \sum_{i=0}^3 \varepsilon^i w_{i,1}^-(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon). \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями проверяется, что для $\Psi_{\varepsilon,2}^{in} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ верна равномерная по ε и η оценка:

$$\left\| \frac{\partial \Psi_{\varepsilon,2}^{in}}{\partial s} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C\eta^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $R_{\varepsilon,2}$ — решение краевой задачи (20.1) с $f_0 = -\Psi_{\varepsilon,2}^{in}$, $f_1 = 0$, $u_0 = 0$. Из леммы 20.1 следует, что для $R_{\varepsilon,2}$ верна равномерная оценка:

$$\|R_{\varepsilon,2}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\eta^{\frac{1}{2}}. \quad (22.18)$$

Положим:

$$\psi_{\varepsilon,2}(x) = \Psi_{\varepsilon,2}(x)\chi_\varepsilon(x) + \Psi_{\varepsilon,2}^{in}(x) + R_{\varepsilon,2},$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ из раздела 20.

Лемма 22.3. *Функции $\lambda_{\varepsilon,2}$ и $\psi_{\varepsilon,2} \in W_2^1(\Omega) \cap C^\infty(\widehat{\Omega})$ сходятся к λ_0 и ψ_0 (последняя — в норме $L_2(\Omega)$) и удовлетворяют краевой задаче (20.1) с $u_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,2}$, $\lambda = \lambda_{\varepsilon,2}$, $f = f_{\varepsilon,2}$, где для $f_{\varepsilon,2}$ верна оценка:*

$$\|f_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^3(A + \mu)).$$

Доказательство. Сходимости для $\lambda_{\varepsilon,2}$ и $\psi_{\varepsilon,2}$ проверяются непосредственно, с учетом определения функций v_i^\pm и $w_{i,j}^\pm$ и леммы 22.1. Гладкость функции $\psi_{\varepsilon,2}$ — очевидна. Краевые условия для $\psi_{\varepsilon,2}$ есть прямое следствие граничных условий (22.6), (22.12) и равенств (21.12) для X с $\eta = 0$. Функция $f_{\varepsilon,2} = -(\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}$ представляется в виде:

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,2} &= -\sum_{i=1}^5 f_{\varepsilon,2}^{(i)}, \quad f_{\varepsilon,2}^{(1)} = \chi_\varepsilon(\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}^{ex} + (\lambda_{\varepsilon,2} - 1)R_{\varepsilon,2}, \\ f_{\varepsilon,1}^{(2)} &= \chi_\varepsilon \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) (\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}^{bl}, \quad f_{\varepsilon,2}^{(4)} = \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}) (\Delta + \lambda_{\varepsilon,2})\psi_{\varepsilon,2}^{in,j}, \\ f_{\varepsilon,2}^{(3)} &= \chi_\varepsilon \left(2 \left(\nabla_x \psi_{\varepsilon,2}^{bl}, \nabla_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \right)_{\mathbb{R}^3} + \psi_{\varepsilon,2}^{bl} \Delta_x \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \right), \\ f_{\varepsilon,2}^{(5)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \left(2 \left(\nabla_x \psi_{\varepsilon,2}^{mat,j}, \nabla_x \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}) \right)_{\mathbb{R}^3} + \psi_{\varepsilon,2}^{mat,j} \Delta_x \chi(|\varsigma^j|\eta^{\frac{3}{4}}) \right), \\ \psi_{\varepsilon,2}^{mat,j}(x) &= \psi_{\varepsilon,2}^{in,j}(x) - \psi_{\varepsilon,2}^{ex}(x) - \psi_{\varepsilon,2}^{bl}(\xi, s, x_3). \end{aligned}$$

В силу леммы 22.1, уравнений (19.9), (19.13), (22.4) и оценки (22.18) получаем:

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^3(A + \mu)^2).$$

Функция $f_{\varepsilon,1}^{(2)}$ вычисляется явно, так как функции v_i^\pm заданы явно. Она имеет вид (конечной) суммы

$$f_{\varepsilon,1}^{(2)}(x) = \varepsilon^3 \Upsilon^+(Mx_3) \sum_j \mathbf{c}_j^+(\mu, \varepsilon) f_{\varepsilon,2,j}^{2,+}(\xi) + \varepsilon^3 \Upsilon^-(Mx_3) \sum_j \mathbf{c}_j^-(\mu, \varepsilon) f_{\varepsilon,2,j}^{2,-}(\xi),$$

где $\mathbf{c}_j^\pm(\varepsilon, \mu) = O(A + \mu)$, $f_{\varepsilon,2,j}^{2,\pm} \in L_2(\Pi)$. Следовательно,

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon^{\frac{7}{2}}(A + \mu)).$$

Функция $f_{\varepsilon,2}^{(3)}$ не равна нулю на области $\{x : c_0 < 4\tau < 3c_0\}$, что соответствует значениям $\xi_2 = O(\varepsilon^{-1})$. Так как $v_i^\pm \in \mathcal{V}(0)$ — экспоненциально убывают, то

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(3)}\|_{L_2(\Omega)} = O((A + \mu)e^{-\varepsilon^{-a_{21}}}),$$

где $a_{21} > 0$ — некоторая фиксированная константа. В силу уравнений (22.12) с учетом асимптотик для $w_{i,j}^\pm$ при $\varsigma \rightarrow \infty$ прямыми вычислениями проверяется, что

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(4)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\eta^{\frac{1}{6}}).$$

При $\eta^{-\frac{3}{4}} < 4|\zeta^j| < 3\eta^{-\frac{3}{4}}$ функция $\psi_\varepsilon^{mat,j}$ в силу проведенного согласования удовлетворяет асимптотике:

$$\psi_{\varepsilon,2}^{mat,j} = O(\eta^2 |\zeta^j|^2 |\ln |\zeta^j|| + \varepsilon |\zeta^j|^{-2} + \varepsilon \eta),$$

откуда выводим:

$$\|f_{\varepsilon,2}^{(5)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\eta^{\frac{1}{5}}).$$

Полученные оценки для $f_{\varepsilon,2}^{(i)}$ дают требуемую оценку для $f_{\varepsilon,2}$. Лемма доказана. \square

23. ОБОСНОВАНИЕ

В настоящем разделе мы проведем обоснование формальных асимптотических разложений собственных значений и собственных функций задачи (19.1), (19.2), построенных в двух предыдущих разделах, и докажем тем самым теоремы 19.2, 19.3. Для этого нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 23.1. Пусть выполнены условия теоремы 19.1, λ_0 — p -кратное собственное значение предельной задачи, $\lambda_\varepsilon^{(j)}$, $j = 1, \dots, p$ — собственные значения задачи (19.1), (19.2), сходящиеся к λ_0 и взятые с учетом кратности, $\psi_\varepsilon^{(j)}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции. Тогда при λ , близких к λ_0 , для решения краевой задачи (20.7) справедливо представление

$$u_\varepsilon = \sum_{j=1}^p \frac{\psi_\varepsilon^{(j)}}{\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon^{(j)} f \, dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (23.1)$$

где функция \tilde{u}_ε голоморфна по λ в норме $W_2^1(\Omega)$, ортогональна всем $\psi_\varepsilon^{(j)}$ в $L_2(\Omega)$ и удовлетворяет равномерной по ε , η , λ и f оценке

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L_2(\omega)}. \quad (23.2)$$

В утверждении леммы, как и в утверждении теоремы 19.1, под предельной понимается краевая задача (19.3), если выполнено равенство (1.5), и задача (19.4), если выполнено равенство (7.3).

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство леммы 5.2, где вместо леммы 5.1 следует применять лемму 20.5, если выполнено равенство (1.5), и лемму 20.4, если выполнено равенство (7.3).

Доказательство теоремы 19.2. Леммы 21.4 и 23.1 позволяют применить представление (23.1) к функции $\psi_{\varepsilon,1}$, построенной в разделе 21, что с учетом простоты собственного значения λ_0 дает:

$$\psi_{\varepsilon,1} = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,1} \, dx + \tilde{u}_\varepsilon,$$

где ψ_ε — нормированная в $L_2(\Omega)$ собственная функция, соответствующая λ_ε , а функция \tilde{u}_ε в силу (21.15) и (23.2) удовлетворяет оценке:

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} (|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)\right). \quad (23.3)$$

Так как $\psi_{\varepsilon,1}$ сходится к ψ_0 в $W_2^1(\Omega)$, то из последней оценки следует, что

$$\|\psi_{\varepsilon,1} - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = \|\psi_0\|_{L_2(\Omega)} (1 + o(1)) \neq 0,$$

а потому из (23.2) и (21.15) выводим:

$$\|\psi_0\|_{L_2(\Omega)} (1 + o(1)) \leq \frac{C \varepsilon^{\frac{3}{2}} (|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)}{|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}|},$$

где константа C не зависит от ε и η . Отсюда следует:

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}| = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} (|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)\right),$$

что доказывает асимптотику (19.7). Из (23.2), (23.3) и леммы 21.4 следует, что собственная функция

$$\tilde{\psi}_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,1}} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,1} dx,$$

соответствующая λ_ε , сходится к ψ_0 в $W_2^1(\Omega)$ (так как $\tilde{\psi}_\varepsilon = \psi_{\varepsilon,1} - \tilde{u}_\varepsilon$) и удовлетворяет оценке:

$$\|\tilde{\psi}_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,1}\|_{W_2^1(\Omega)} = O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)\right).$$

Переобозначив $\tilde{\psi}_\varepsilon$ через ψ_ε , из последнего равенства выводим, что собственная функция, соответствующая λ_ε , может быть выбрана так, что будет иметь следующую асимптотику в норме $W_2^1(\Omega)$:

$$\psi_\varepsilon(x) = \Upsilon^+(Mx_3) \left(\phi_0(x) + \varepsilon \phi_1(x, \eta, \varepsilon) - \varepsilon \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \phi_0^v(s) X(\xi, \eta \mathbf{g}_\varepsilon(s)) \right) + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{3}{2}} + 1)\right), \quad (23.4)$$

где, напомним, ϕ_1 — решение задачи (21.4), (21.9), ϕ_0^v — значение нормальной производной функции ϕ_0 на $\partial\omega$, ξ — из (20.2), X — из (2.8), а константа c_0 выбрана согласно (4.7). Отметим, что мы отбросили в (23.4) слагаемые $\varepsilon^2 v_2^+$, $\varepsilon^2 v_2^-$ и $R_{\varepsilon,1}$. Нетрудно проверить, используя (21.11), (21.14) и лемму 21.1, что $W_2^1(\Omega)$ -норма отброшенных слагаемых есть величина порядка $O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}(|\ln \eta|^{\frac{1}{2}} + 1)\right)$. Теорема 19.2 доказана. \square

Доказательство теоремы 19.3. Доказательство проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 19.2. В силу лемм 22.3, 23.1 для функции $\psi_{\varepsilon,2}$, построенной в предыдущем разделе, справедливо представление:

$$\psi_{\varepsilon,1} = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,2} dx + \tilde{u}_\varepsilon,$$

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = O(\varepsilon^3(A + \mu)).$$

Так как $\psi_{\varepsilon,2}$ сходится к ψ_0 в $L_2(\Omega)$ (см. лемму 22.3), то из данного представления легко вывести оценки

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}| = O(\varepsilon^3(A + \mu)), \quad \|\tilde{\psi}_\varepsilon - \psi_{\varepsilon,2}\|_{W_2^1(\Omega)} = O(\varepsilon^3(A + \mu)). \quad (23.5)$$

Здесь

$$\tilde{\psi}_\varepsilon = \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \lambda_{\varepsilon,2}} \int_{\Omega} \psi_\varepsilon f_{\varepsilon,2} dx$$

— собственная функция, соответствующая λ_ε , сходящаяся к ψ_0 в $L_2(\Omega)$. Первая из оценок (23.5) доказывает асимптотику (19.11). Переобозначив $\tilde{\psi}_\varepsilon$ через ψ_ε , из последней оценки из (23.5) выводим, что собственная функция, соответствующая λ_ε , может быть выбрана так, что будет иметь следующую асимптотику в норме $W_2^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon(x) = & \chi_\varepsilon(x) \left(\Upsilon^+(Mx_3) \left(\Phi_0(x, \mu) + \sum_{i=1}^2 \varepsilon^i \Phi_i(x, \mu, \varepsilon) \right) + \right. \\ & \left. + \chi \left(\frac{\tau}{c_0} \right) \left(\Upsilon^+(Mx_3) \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i v_i^+(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \Upsilon^-(Mx_3) \varepsilon^2 v_1^-(\xi, s, \mu, \varepsilon) \right) \right) - \\ & - \Upsilon^+(Mx_3) \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\zeta^j| \eta^{\frac{3}{4}}) \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i \Phi_{i-1}^v(s, \mu, \varepsilon) Z(\zeta^j \mathbf{g}_\varepsilon^{-1}(s)) + O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}(A + \mu)), \end{aligned} \quad (23.6)$$

где, напомним, Φ_2 — решение задачи (22.4), (22.15), v_i^+ , v_1^- — из (22.7), ξ и ζ^j — из (20.2), X — из (8.14), Φ_i^v — значение нормальное производной Φ_i^v на $\partial\omega$, Z — функция $Z^{(j)}$ из (13.24) с $\alpha^j = \beta^j = \frac{1}{2}$. Отметим, что мы отбросили в (23.6) ряд слагаемых. Прямыми вычислениями нетрудно проверить, что $W_2^1(\Omega)$ -норма отброшенных слагаемых есть величина порядка $O(\varepsilon^{\frac{5}{2}}(A + \mu))$. Теорема 19.3 доказана. \square

ГЛАВА 7

**ТРЕХМЕРНАЯ ЗАДАЧА С НЕПЕРИОДИЧЕСКИМ ЧЕРЕДОВАНИЕМ
ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ: НЕУЛУЧШАЕМЫЕ ОЦЕНКИ**

В настоящей главе мы продолжаем изучение трехмерной краевой задачи в цилиндре с частой сменой краевых условий, поставленной в предыдущей главе, а именно, задачи (19.1), (19.2). Как было показано в теоремах 19.1, 19.2, 19.3, если полосы на боковой поверхности расположены периодически и функция g_ε , описывающая вариацию их ширины, зависит от ε и s достаточно регулярно, то удастся доказать теоремы сходимости и построить асимптотические разложения для собственных значений и собственных функций задачи (19.1), (19.2). Доказательстве этих теорем существенно используют периодичность расположения полос и регулярное изменение их ширины. Вместе с тем, несложно обобщить рассматриваемую задачу до случая непериодического расположения полос с произвольно меняющейся шириной. В настоящей главе мы рассматриваем задачу (19.1), (19.2) именно в такой общей постановке. При этом ширина полос может зависеть от малого параметра ε достаточно произвольным образом, в том числе, быстро осциллировать. В таких условиях задача о построении асимптотических разложений уже не имеет решения, однако по аналогии с подходами главы 5 можно эффективно решить задачу о получении неумлучшаемых по порядку оценок скорости сходимости собственных значений.

Опишем постановку задачи. На боковой поверхности $\Sigma = \partial\omega \times (0, H)$ цилиндра Ω вновь выделим подмножество, состоящее из N узких полос:

$$\gamma_\varepsilon = \left\{ x : x \in \partial\omega, -\varepsilon a_j(s, \varepsilon) < x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) < \varepsilon b_j(s, \varepsilon), j = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Здесь $a_j = a_j(s, \varepsilon)$ и $b_j = b_j(s, \varepsilon)$ — произвольные функции из $C^\infty(\partial\omega)$, удовлетворяющие равномерным по ε , s и j оценкам:

$$0 < a_j + b_j, \quad a_j < \frac{\pi}{2}, \quad b_j < \frac{\pi}{2}. \quad (23.7)$$

Геометрически эти оценки означают, что ширина каждой полосы множества γ_ε положительна, и полосы, соответствующие разным значениям j , не пересекаются, см. рис. 4. Вновь рассматривается задача (19.1), (19.2), но уже с только что введенным множеством γ_ε .

Собственные значения задачи (19.1), (19.2) расположим в порядке неубывания с учетом кратности:

$$\lambda_\varepsilon^{(1)} \leq \lambda_\varepsilon^{(2)} \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^{(n)} \leq \dots$$

Соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции обозначим через $\psi_\varepsilon^{(n)}$.

Рассмотрим также усредненные задачи (19.3), (19.4) и их собственные значения $\lambda_0^{(k)}$ также расположим в порядке неубывания с учетом кратности. Соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции обозначим через $\psi_0^{(n)}$.

Сформулируем основные результаты главы.

Теорема 23.1. Пусть выполнены неравенства (23.7) и существует функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству (1.5), такая что верны равномерные по ε , s и j неравенства

$$0 < \eta(\varepsilon) \leq a_j(s, \varepsilon), \quad 0 < \eta(\varepsilon) \leq b_j(s, \varepsilon). \quad (23.8)$$

Тогда собственные значения задачи (19.1), (19.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к собственным значениям задачи (19.3) и верны равномерные по ε оценки:

$$-c_n \varepsilon (|\ln \eta(\varepsilon)| + 1) \leq \lambda_\varepsilon^{(n)} - \lambda_0^{(n)} \leq 0, \quad (23.9)$$

где $c_n > 0$ — некоторые константы. Для каждой собственной функции $\psi_0^{(n)}$, $n = m, \dots, m+p-1$, задачи (19.3), соответствующей p -кратному собственному значению $\lambda_0^{(m)} = \lambda_0^{(m+1)} = \dots = \lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация собственных функций $\psi_\varepsilon^{(j)}$, $j = m, \dots, m+p-1$,

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} = \sum_{j=m}^{m+p-1} \alpha_j^{(n)}(\varepsilon) \psi_\varepsilon^{(j)}, \quad \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} = 1, \quad (23.10)$$

удовлетворяющая равномерным по ε оценкам:

$$\|\psi_0^{(n)} - \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_n \varepsilon (|\ln \eta(\varepsilon)| + 1), \quad \|\psi_0^{(n)} - \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_n \sqrt{\varepsilon} \left(\sqrt{|\ln \eta(\varepsilon)|} + 1 \right), \quad (23.11)$$

где $c_n > 0$ — некоторые константы.

Теорема 23.2. Пусть выполнены неравенства (23.7) и существует функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству (7.3) с $A = 0$, такая что верны равномерные по ε , s и j неравенства

$$\eta(\varepsilon) \leq a_j(s, \varepsilon), \quad \eta(\varepsilon) \leq b_j(s, \varepsilon).$$

Тогда собственные значения задачи (19.1), (19.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к собственным значениям задачи (19.4) с $A = 0$ и верны равномерные по ε оценки:

$$0 \leq \lambda_\varepsilon^{(n)} - \lambda_0^{(n)} \leq c_n \mu(\varepsilon), \quad (23.12)$$

где $c_n > 0$ — некоторые константы, $\mu = \mu(\varepsilon) = -(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} \rightarrow 0$. Для каждой собственной функции $\psi_0^{(n)}$, $n = t, \dots, t + p - 1$, задачи (19.4) с $A = 0$, соответствующей p -кратному собственному значению $\lambda_0^{(m)} = \lambda_0^{(m+1)} = \dots = \lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация (23.10), удовлетворяющая равномерным по ε оценкам:

$$\|\psi_0^{(n)} - \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_n \mu(\varepsilon), \quad \|\psi_0^{(n)} - \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_n \sqrt{\mu(\varepsilon)},$$

где $c_n > 0$ — некоторые константы.

Теорема 23.3. Пусть существуют функции $\eta = \eta(\varepsilon)$, $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, удовлетворяющие соотношениям (19.4) с $A > 0$ и (16.1), такие что верны равномерные по ε , s и j неравенства

$$\eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon) \leq a_j(s, \varepsilon) \leq \eta(\varepsilon), \quad \eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon) \leq b_j(s, \varepsilon) \leq \eta(\varepsilon).$$

Тогда собственные значения задачи (19.1), (19.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся к собственным значениям задачи (19.4) с $A = 0$, и верны равномерные по ε оценки:

$$-c_n(\varepsilon^2 + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)) \leq \lambda_\varepsilon^{(n)} - \lambda_0^{(n)} \leq c_n(\varepsilon^2 + |\mu(\varepsilon)|), \quad (23.13)$$

где $c_n > 0$ — некоторые константы, $\mu = \mu(\varepsilon) = -A - (\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1}$. Для каждой собственной функции $\psi_0^{(n)}$, $n = t, \dots, t + p - 1$, задачи (19.4), соответствующей p -кратному собственному значению $\lambda_0^{(m)} = \lambda_0^{(m+1)} = \dots = \lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация (23.10), удовлетворяющая равномерной по ε оценке:

$$\|\psi_0^{(n)} - \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq c_n(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)), \quad (23.14)$$

где $c_n > 0$ — некоторые константы.

Как уже было отмечено выше, в рассматриваемом случае непериодического чередования полос задача о построении первых членов асимптотических разложений собственных значений и собственных функций задачи не имеет решения. Именно поэтому в случае непериодического чередования актуальным является вопрос о получении максимально точных оценок скорости сходимости при минимальных ограничениях на структуру чередования. Этот вопрос эффективно решается в приведенных теоремах. Отметим, что условия теорем 23.1, 23.2, 23.3 включают в рассмотрение широкий класс случаев непериодического расположения полос множества γ_ε . Кроме того, ширина полос, оставаясь ограниченной, может меняться произвольным образом. Не исключаются и полосы с быстро меняющейся шириной, т. е. случай, когда ширина полос осциллирует и период осцилляций стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Также подчеркнем, что во всех трех теоремах оценки для собственных значений и собственных функций неумлучшаемы по порядку. А именно, всякий раз найдутся функции a_j и b_j такие, что утверждаемые оценки будут точными. Такие функции легко построить: множество γ_ε следует выбирать периодическим и состоящим из полос постоянной ширины, после чего использовать асимптотические разложения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$, полученные в предыдущей главе. При этом первые члены асимптотических разложений по порядку будут в точности совпадать с правыми и левыми частями оценок для собственных значений и правыми частями оценок для собственных функций из теорем 23.1, 23.2, 23.3.

Результаты данной главы были опубликованы в [14, 15].

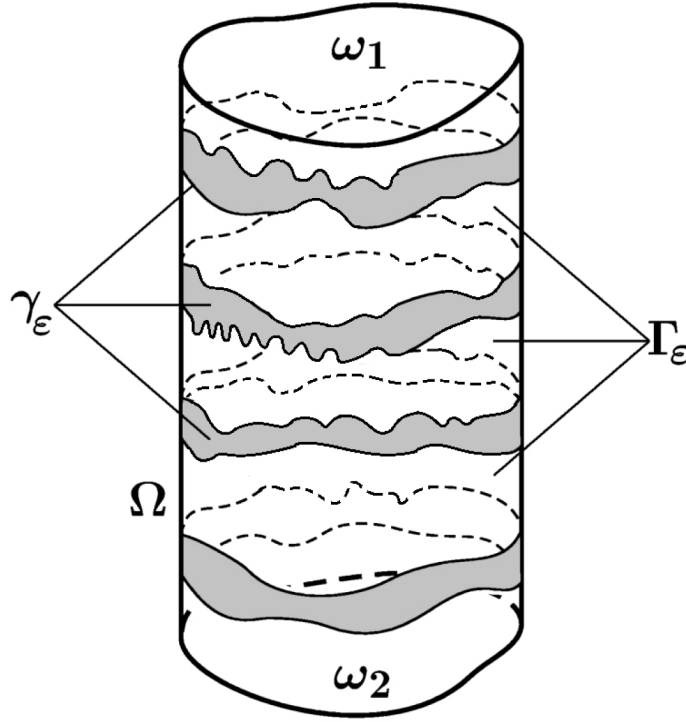


Рис. 4. Трехмерный цилиндр с частым непериодическим чередованием краевых условий на полосах на боковой поверхности

24. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В настоящем разделе мы докажем вспомогательные леммы, необходимые для доказательства теорем 23.1, 23.2, 23.3 в следующем разделе.

Лемма 24.1. Пусть подмножества $\gamma_{\epsilon,*}$ и γ_{ϵ}^* боковой поверхности Σ таковы, что

$$\gamma_{\epsilon,*} \subseteq \gamma_{\epsilon} \subseteq \gamma_{\epsilon}^*, \quad (24.1)$$

и края отдельных составляющих множеств $\gamma_{\epsilon,*}$ и γ_{ϵ}^* являются гладкими кривыми без самопересечений. Пусть также $\lambda_{\epsilon,*}^{(n)}$ и $\lambda_{\epsilon}^{*,n}$ — собственные значения задачи (19.1), (19.2) с заменой γ_{ϵ} на $\gamma_{\epsilon,*}$ и γ_{ϵ}^* и Γ_{ϵ} на $\Sigma \setminus \bar{\gamma}_{\epsilon,*}$ и $\Sigma \setminus \bar{\gamma}_{\epsilon}^*$ соответственно. Тогда верны оценки:

$$\lambda_{\epsilon,*}^{(n)} \leq \lambda_{\epsilon}^{(n)} \leq \lambda_{\epsilon}^{*,n}. \quad (24.2)$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 18.1 и также основано на принципе минимакса для задачи (19.1), (19.2).

Для точек, лежащих в малой окрестности Σ , через τ обозначим расстояние от точки до Σ , измеренное в направлении внутренней нормали к Σ .

Лемма 24.2. Пусть функция $u \in C^2(\bar{\Omega} \setminus \bar{\gamma}_{\epsilon}) \cap C(\bar{\Omega})$ такова, что

$$\Delta u \leq 0, \quad x \in \Omega, \quad u \geq 0, \quad x \in \bar{\gamma}_{\epsilon} \cup \bar{\omega}_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} \leq 0, \quad x \in \bar{\omega}_2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq 0, \quad x \in \Gamma_{\epsilon}.$$

Тогда $u \geq 0$ при $x \in \bar{\Omega}$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Положим

$$v(x) = \frac{u(x)}{Q(x_3)}, \quad Q(x_3) = 2H^2 - x_3^2.$$

Тогда $v \in C^2(\bar{\Omega} \setminus \bar{\gamma}_{\epsilon}) \cap C(\bar{\Omega})$ и

$$Lv := \left(\Delta - \frac{4x_3}{Q(x_3)} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{2}{Q(x_3)} \right) v \leq 0, \quad x \in \Omega,$$

$$v \geq 0, \quad x \in \overline{\gamma}_\varepsilon \cup \overline{\omega}_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x_3} \leq 0, \quad x \in \overline{\omega}_2, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} \geq 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon.$$

Пусть $x^0 \in \overline{\Omega}$ — точка минимума функции $v(x)$ и $v(x^0) < 0$. Если $x^0 \in \Omega$, то $\nabla v = 0$, $\Delta v \geq 0$ при $x = x^0$, и в этом случае $Lv > 0$ при $x = x^0$. Следовательно, $x^0 \in \partial\Omega$. Ясно, что $x^0 \notin \overline{\gamma}_\varepsilon \cup \overline{\omega}_1$. Пусть $x^0 \in \Gamma_\varepsilon$. Тогда $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ при $x = x^0$, так как неравенство $\frac{\partial v}{\partial \nu} > 0$ противоречит тому, что x^0 — точка минимума. В малой окрестности точки x^0 перейдем к координатам (s, τ, x_3) . В этих координатах оператор Лапласа имеет вид:

$$\Delta = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial \tau} H \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

где H — из (2.5). Так как $v \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon)$, $Lv \leq 0$, $\frac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ при $x = x_0$, а x^0 — точка минимума, то $\nabla_{(s, \tau, x_3)} v = 0$ при $x = x_0$ и

$$\left(\Delta_{(s, \tau, x_3)} - \frac{2}{Q(x_3)} \right) v \leq 0, \quad x = x^0. \quad (24.3)$$

Так как x^0 — точка минимума, то $\Delta_{(s, \tau, x_3)} v \geq 0$ при $x = x_0$. Из неравенства $v(x^0) < 0$ теперь следует, что соотношение (24.3) невозможно. Аналогично доказывается, что $x^0 \notin \overline{\omega}_2$. \square

Лемма 24.3. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$ — решение краевой задачи

$$\Delta u = F, \quad x \in \Omega, \quad u = f_D, \quad x \in \gamma_\varepsilon \cup \omega_1, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = f_N, \quad x \in \omega_2, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = f_N, \quad x \in \Gamma_\varepsilon,$$

где F, f_N, f_D — некоторые функции. Тогда

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq C \left(\sup_{\Omega} |F| + \sup_{\gamma_\varepsilon \cup \omega_1} |f_D| + \sup_{\Gamma_\varepsilon \cup \omega_2} |f_N| \right),$$

где константа C не зависит от ε и выбора функций a_j и b_j, F, f_N, f_D .

Доказательство. Для доказательства воспользуемся методом барьерных функций. Пусть $U(x) = Q(x_3)V(x')$, где $Q(x_3)$ из доказательства леммы 24.2. Функцию V определим как решение краевой задачи

$$\Delta_{x'} V = 1, \quad x' \in \omega, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|} > 0, \quad x' \in \partial\omega,$$

где $|\Omega|$ и $|\partial\Omega|$ — соответственно, площадь области Ω и длина кривой $\partial\Omega$. Ясно, что данная краевая задача разрешима, а ее решение $V \in C^\infty(\overline{\omega})$ определено с точностью до константы. Выберем данную константу так, чтобы было выполнено равномерное по $\overline{\omega}$ неравенство $V \geq 1$. С учетом вида функции $Q(x_3)$ и принадлежности $U \in C^\infty(\overline{\Omega})$, выводим, что существует константа $c_0 > 1$ такая, что $H^2 \leq U \leq c_0 H^2$. Выбирая теперь подходящую константу C и применяя лемму 24.2 к функциям $(CU \pm u)$, приходим к утверждению леммы. \square

Пусть $U_i = U_i(x, \varepsilon)$, $i = 1, 2$ — решения краевых задач

$$\Delta U_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad U_i = 0, \quad x \in \omega_1, \quad \frac{\partial U_i}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \omega_2, \quad (24.4)$$

$$U_1 = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = \cos \frac{\pi x_3}{2H}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (24.5)$$

$$U_2 = \cos \frac{\pi x_3}{2H}, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial U_2}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (24.6)$$

где $A = \text{const} > 0$. Согласно результатам [51, гл. IV], задачи (24.4), (24.5), (24.6) однозначно разрешимы и $U_i \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$. Из леммы 24.2 также следует, что

$$U_1 \geq 0, \quad U_2 \geq 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (24.7)$$

Лемма 24.4. Пусть множество $\tilde{\gamma}_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon$ таково, что края отдельных составляющих множества $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ являются гладкими кривыми без самопересечений, \tilde{U}_i — решения краевых задач (24.4), (24.5), (24.6) с заменой γ_ε на $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ и Γ_ε на $\Sigma \setminus \overline{\tilde{\gamma}_\varepsilon}$. Тогда

$$U_1 \leq \tilde{U}_1, \quad U_2 \geq \tilde{U}_2. \quad (24.8)$$

Доказательство. Функция $(\tilde{U}_1 - U_1) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \tilde{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\overline{\Omega})$ является гармонической в Ω , удовлетворяет однородному краевому условию Дирихле на ω_1 и однородному краевому условию Неймана на $\Gamma_\varepsilon \cup \omega_2$. Так как $\tilde{U}_1 \geq 0$, то при $x \in \gamma_\varepsilon$ в силу (24.5) имеем: $\tilde{U}_1 - U_1 \geq 0$. В силу леммы 24.2 отсюда следует первая из оценок (24.8).

Докажем вторую из оценок (24.8). С учетом леммы 24.2 ясно, что для доказательства этой оценки достаточно показать, что

$$0 \leq U_2 - \tilde{U}_2 = \cos \frac{\pi x_3}{2H} - \tilde{U}_2, \quad x \in \gamma_\varepsilon. \quad (24.9)$$

Так как $U_2 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \tilde{\gamma}_\varepsilon)$ и $U_2 = 0$ при $x \in \omega_1$, то функция

$$V_2(x) = \frac{U_2(x)}{\cos \frac{\pi x_3}{2H}}$$

также является элементом пространства $C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \tilde{\gamma}_\varepsilon)$. Аналогично,

$$\tilde{V}_2 = \frac{\tilde{U}_2(x)}{\cos \frac{\pi x_3}{2H}} \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \tilde{\gamma}_\varepsilon).$$

Неравенство (24.9) в терминах функций V_2, \tilde{V}_2 переписывается как $\tilde{V}_2 \leq 1, x \in \gamma_\varepsilon$. Для доказательства этого неравенства достаточно установить, что $\max_{\overline{\Omega}} \tilde{V}_2 = 1$. Докажем последнее соотношение.

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ — точка максимума функции \tilde{V}_2 в $\overline{\Omega}$. Так как $\tilde{V}_2 = 1$ при $x \in \tilde{\gamma}_\varepsilon$, то $\tilde{V}_2(x^0) \geq 1$. Функция \tilde{V}_2 , очевидно, удовлетворяет уравнению

$$\cos \frac{\pi x_3}{2H} \left(\Delta - \frac{\pi^2}{4H^2} \right) \tilde{V}_2 - \frac{\pi}{H} \sin \frac{\pi x_3}{2H} \frac{\partial \tilde{V}_2}{\partial x_3} = 0. \quad (24.10)$$

Используя это уравнение, аналогично доказательству леммы 24.2 нетрудно установить, что $x^0 \in \tilde{\gamma}_\varepsilon \cup \overline{\omega_1}$. Допустим, что $x^0 \in \overline{\omega_1}$. Так как $\tilde{V}_2 \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \tilde{\gamma}_\varepsilon)$, то при x_3 , близких к H , верно разложение в ряд Тейлора

$$\tilde{V}_2(x) = \phi_0(x') + (x_3 - H)\phi_1(x') + (x_3 - H)^2\phi_2(x') + O((x_3 - H)^3). \quad (24.11)$$

Подставляя это разложение в уравнение (24.10), получаем, что

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = \frac{H}{6\pi} \left(\frac{\pi^2}{4H^2} - \Delta_{x'} \right) \phi_0. \quad (24.12)$$

Пусть $x^0 \in \omega_1$. Так как x^0 — точка максимума для функции ϕ_0 , то $\Delta_{x'}\phi_0 \leq 0$ при $x = x^0$. Если $x^0 \in \partial\omega_1 = \omega \times \{H\}$, то из (24.6) выводим: $\frac{\partial\phi_0}{\partial\tau} = 0, x = x^0$. Кроме того, $\frac{\partial\phi_0}{\partial s} = 0, x = x^0$, и, следовательно, и в этом случае $\Delta_{x'}\phi_0 \leq 0$ при $x = x^0$. Так как $\phi_0(x_1^0, x_2^0) = \tilde{V}_2(x^0) \geq 1$, то из (24.12) выводим: $\phi_2(x_1^0, x_2^0) > 0$. С учетом равенства $\phi_1 = 0$ последнее неравенство противоречит (24.11) и тому факту, что x^0 — точка максимума. \square

Положим

$$\gamma_\varepsilon(\eta) = \left\{ x : x \in \partial\omega, -\varepsilon\eta < x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) < \varepsilon\eta, j = 0, \dots, N-1 \right\}, \quad \Gamma_\varepsilon(\eta) = \Sigma \setminus \overline{\gamma_\varepsilon(\eta)}.$$

Через $U_i^\eta, i = 1, 2$, обозначим решения краевых задач (24.4), (24.5), (24.6) с заменой γ_ε на $\gamma_\varepsilon(\eta)$ и Γ_ε на $\Gamma_\varepsilon(\eta)$.

Пусть выполнены условия теоремы 23.1. В этом случае совершенно аналогично построениям разделов 21, 23 нетрудно построить асимптотическое разложение функции $U_1^{\eta(\varepsilon)}$, где $\eta(\varepsilon)$ из теоремы 23.1. Мы не будем приводить здесь этого построения, отметим лишь, что из этого разложения следует равенство

$$\|U_1^{\eta(\varepsilon)}\|_{L_2(\Omega)} = O((\varepsilon |\ln \eta(\varepsilon)| + 1)).$$

Отсюда в силу первой из оценок (24.7), вложения $\gamma_\varepsilon(\eta(\varepsilon)) \subseteq \gamma_\varepsilon$ и леммы 24.4 выводим, что в условиях теоремы 23.1 верна равномерная по ε оценка

$$\|U_1\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\varepsilon |\ln \eta(\varepsilon)| + 1). \quad (24.13)$$

Пусть выполнены условия теоремы 23.2. В этом случае аналогично разделам 21, 23 можно построить асимптотику функции $U_2^{\eta(\varepsilon)}$, где $\eta(\varepsilon)$ из теоремы 23.2 и показать, что

$$\|U_2^{\eta(\varepsilon)}\|_{L_2(\Omega)} = O(\mu(\varepsilon)),$$

где $\mu(\varepsilon)$ из теоремы 23.2. Из этого равенства, второй из оценок (24.7), вложения $\gamma_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon(\eta)$ и леммы 24.4 получаем равномерную по ε оценку

$$\|U_2\|_{L_2(\Omega)} \leq C\mu(\varepsilon). \quad (24.14)$$

Пусть ψ_0 — собственная функция задачи (19.4), а U_3 — решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta U_3 &= 0, & x \in \Omega, & & U_3 &= 0, & x \in \omega_1, & & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} &= 0, & x \in \omega_2, \\ U_3 &= -\psi_0, & x \in \gamma_\varepsilon, & & \frac{\partial U_3}{\partial \nu} &= A\psi_0, & x \in \Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \quad (24.15)$$

Ясно, что эта задача однозначно разрешима, $\psi_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $U_3 \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus \bar{\gamma}_\varepsilon) \cap C(\bar{\Omega})$. Пусть выполнены условия теоремы 23.3. Совершенно аналогично разделам 21, 23 нетрудно построить функцию \tilde{U}_3 , удовлетворяющую краевой задаче

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{U}_3 &= F, & x \in \Omega, & & \tilde{U}_3 &= 0, & x \in \omega_1, & & \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial x_3} &= 0, & x \in \omega_2, \\ \tilde{U}_3 &= -\psi_0, & x \in \gamma_\varepsilon(\eta_0\eta), & & \frac{\partial \tilde{U}_3}{\partial \nu} &= A\psi_0, & x \in \Gamma_\varepsilon(\eta_0\eta), \end{aligned}$$

причем выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{U}_3 &= -\psi_0 + f_D, & x \in \gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon(\eta_0\eta), & & \|\tilde{U}_3\|_{L_2(\Omega)} &= O(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)), \\ \sup_{\Omega} |F| &= o(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)), & & & \sup_{\gamma_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon(\eta_0\eta)} |f_D| &= O(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)). \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения и применяя к функции $(\tilde{U}_3 - U_3)$ лемму 24.3, получаем:

$$\|U_3\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)). \quad (24.16)$$

25. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОЦЕНОК

Для доказательства оценок скорости сходимости собственных функций из теорем 23.1, 23.2, 23.3 мы используем подход, предложенный О. А. Олейником, Г. А. Иосифьяном, А. С. Шамаевым [55, гл. III, § 1]. Мы не будем приводить общую абстрактную схему из этой книги, а сформулируем лишь отдельное утверждение, необходимое для доказательства теорем 23.1, 23.2, 23.3.

Через B_ε , B_0 обозначим линейные самосопряженные положительные компактные операторы в $L_2(\Omega)$. Пусть $\Lambda_\varepsilon^{(n)}$, $\Lambda_0^{(n)}$ — собственные значения этих операторов, расположенные в порядке невозрастания с учетом кратности, а $\Psi_\varepsilon^{(n)}$, $\Psi_0^{(n)}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции. Совершенно аналогично доказательству [55, гл. III, § 1.2, теорема 1.12] устанавливается справедливость следующего утверждения.

Теорема 25.1. Пусть верны сходимости

$$\Lambda_\varepsilon^{(n)} \rightarrow \Lambda_0^{(n)}, \quad \|(A_\varepsilon - A_0)\Psi_0^{(n)}\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда для каждой собственной функции $\Psi_0^{(n)}$, соответствующей p -кратному собственному значению $\Lambda_0^{(m)} = \Lambda_0^{(m)} = \dots = \Lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация собственных функций $\Psi_\varepsilon^{(j)}$, $j = m, \dots, m+p-1$,

$$\tilde{\Psi}_\varepsilon^{(n)} = \sum_{j=m}^{m+p-1} \alpha_j^{(n)}(\varepsilon) \Psi_\varepsilon^{(j)}, \quad \|\tilde{\Psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} = 1,$$

удовлетворяющая равномерной по ε оценке:

$$\|\tilde{\Psi}_\varepsilon^{(n)} - \Psi_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_n \|(A_\varepsilon - A_0)\Psi_0^{(n)}\|.$$

Докажем теперь теоремы 23.1, 23.2, 23.3.

Доказательство теоремы 23.1. Обозначим

$$\gamma_{\varepsilon,*} = \left\{ x : x' \in \partial\omega \left| x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon\eta, \quad j = 0, \dots, N-1 \right\}, \quad \gamma_\varepsilon^* := \Sigma.$$

В силу неравенств (23.8) тогда выполнены вложения (24.1) и это дает возможность применить лемму 24.1, согласно которой верны неравенства

$$\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} \leq \lambda_\varepsilon^{(n)} \leq \lambda_0^{(n)}. \quad (25.1)$$

Так как собственные значения $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)}$ соответствуют задаче (19.1), (19.2) с $\mathbf{g}_\varepsilon \equiv 1$, то для них справедливы асимптотики (19.7), (19.8). Подставляя эти асимптотики в (25.1), получаем оценки (23.9).

Докажем оценки для собственных функций. Пусть B_ε и B_0 — операторы, сопоставляющие функции $f \in L_2(\Omega)$, соответственно, обобщенные решения краевых задач:

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon &= f, \quad x \in \Omega, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon \cup \omega_1, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \cup \omega_2, \\ -\Delta u_0 &= f, \quad x \in \Omega, \quad u_0 = 0, \quad x \in \Sigma \cup \omega_1, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Проверим выполнение условий теоремы 25.1 для этих операторов. Пусть $u_\varepsilon = B_\varepsilon f$, $u_0 = B_0 f$. Умножим уравнения в (25.2) на u_ε и u_0 , соответственно, и проинтегрируем по частям. Тогда получим:

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = (f, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (f, B_\varepsilon f)_{L_2(\Omega)}, \quad \|\nabla u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 = (f, u_0)_{L_2(\Omega)} = (f, B_0 f)_{L_2(\Omega)}, \quad (25.3)$$

откуда следует положительность операторов B_ε и B_0 . Для любой функции $u \in W_2^1(\Omega)$, обращаясь в нуль на ω_1 , выполнено неравенство

$$\frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2} \geq \inf_{\substack{u \in W_2^1(\Omega), \\ u|_{\omega_1} = 0}} \frac{\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2} = \frac{\pi^2}{4H^2},$$

где $\frac{\pi^2}{4H^2}$ — минимальное собственное значение оператора $-\Delta$ в цилиндре Ω с краевым условием Дирихле на ω_1 и краевым условием Неймана на остальной части границы. Используя это неравенство и (25.3), получаем:

$$\|B_\varepsilon f\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \left(\frac{4H^2}{\pi^2} + \frac{2H}{\pi} \right) \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|B_0 f\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \left(\frac{4H^2}{\pi^2} + \frac{2H}{\pi} \right) \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из последних двух оценок следует равномерная по ε ограниченность операторов B_ε , B_0 как операторов из $L_2(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$. Следовательно, операторы B_ε , B_0 компактны как операторы из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Самосопряженность операторов $B_\varepsilon, B_0 : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ проверяется стандартным образом.

Так как собственные значения $\Lambda_\varepsilon^{(n)}$, $\Lambda_0^{(n)}$ операторов B_ε, B_0 связаны с собственными значениями задач (19.1), (19.2) и (19.3) равенствами $\Lambda_\varepsilon^{(n)} = (\lambda_\varepsilon^n)^{-1}$, $\Lambda_0^{(n)} = (\lambda_0^n)^{-1}$, то сходимости $\Lambda_\varepsilon^{(n)} \rightarrow \Lambda_0^{(n)}$

следуют из оценок (23.9). Собственные функции операторов B_ε, B_0 совпадают с собственными значениями задач (19.1), (19.2) и (19.3). Кроме того, $B_0\psi_0^{(n)} = (\lambda_0^{(n)})^{-1}\psi_0^{(n)}$. Поэтому для завершения проверки условия теоремы 25.1 достаточно оценить норму $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}$, где

$$v_\varepsilon := \lambda_0^{(n)}u_\varepsilon - \psi_0^{(n)}, \quad u_\varepsilon := B_\varepsilon\psi_0^{(n)}.$$

Ясно, что $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \overline{\gamma_\varepsilon}) \cap C(\overline{\Omega})$, $\psi_0^{(n)} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Функции $\psi_0^{(n)}$ легко находятся разделением переменных; в результате нетрудно проверить, что выполнены равномерные оценки

$$|\psi_0^{(n)}| \leq C \cos \frac{\pi x_3}{2H}, \quad x \in \overline{\Sigma}. \quad (25.4)$$

Функция v_ε является решением краевой задачи

$$\Delta v_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega, \quad v_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1, \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon \cup \omega_2, \quad v_\varepsilon = -\psi_0^{(n)}, \quad x \in \gamma_\varepsilon.$$

Отсюда, из (25.4) и леммы 24.2 следует, что

$$|v_\varepsilon| \leq CU_1, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (25.5)$$

Учитывая теперь оценку (24.13), получаем

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon(|\ln \eta(\varepsilon)| + 1),$$

т. е. $\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Теперь из полученной оценки и теоремы 25.1 следует, что для каждой собственной функции $\psi_0^{(n)}$, $n = m, \dots, m+p-1$ задачи (19.3), соответствующей p -кратному собственному значению $\lambda_0 := \lambda_0^{(m)} = \lambda_0^{(m+1)} = \dots = \lambda_0^{(m+p-1)}$, существует линейная комбинация (23.10), удовлетворяющая первой из оценок (23.11). Докажем вторую из оценок (23.11). Так как $\|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} = 1$, то для коэффициентов линейной комбинации (23.10) справедливо равенство:

$$\sum_{j=m}^{m+p-1} |\alpha_j^{(n)}(\varepsilon)|^2 = 1,$$

а потому числа $\alpha_j^{(n)}(\varepsilon)$ ограничены равномерно по ε . Функция $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}$ является решением уравнения

$$-\Delta \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} = \lambda_0 \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} + f_\varepsilon^{(n)}, \quad x \in \Omega, \quad f_\varepsilon^{(n)} = \sum_{j=m}^{m+p-1} \alpha_j^{(n)}(\varepsilon)(\lambda_\varepsilon^{(j)} - \lambda_0^{(j)})\psi_\varepsilon^{(j)},$$

удовлетворяющим краевым условиям (19.2). Учитывая эти краевые условия и краевую задачу для функции $\psi_0^{(n)}$, интегрированием по частям легко установить равенства:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \lambda_0 \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + (f_\varepsilon^{(n)}, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\Omega)}, & \|\nabla \tilde{\psi}_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \lambda_0 \|\tilde{\psi}_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2, \\ (\nabla \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}, \nabla \tilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} &= \lambda_0 (\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}, \tilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} + (f_\varepsilon^{(n)}, \tilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (25.6)$$

откуда, из оценок (23.9), равномерной ограниченности чисел $\alpha_j^{(n)}(\varepsilon)$ и первой из оценок (23.11) выводим:

$$\|f_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon(|\ln \eta(\varepsilon)| + 1),$$

$$\|\nabla(\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} - \tilde{\psi}_0^{(n)})\|_{L_2(\Omega)}^2 = \lambda_0 \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} - \tilde{\psi}_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + (f_\varepsilon^{(n)}, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)} - 2\tilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon(|\ln \eta(\varepsilon)| + 1).$$

Из последних оценок и первой из оценок (23.11) вытекает вторая из оценок (23.11). \square

Доказательство теоремы 23.2. Положим

$$\gamma_{\varepsilon,*} = \emptyset, \quad \gamma_\varepsilon^* = \left\{ x : x \in \partial\omega \left| x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon\eta(\varepsilon), \quad j = 0, \dots, N-1 \right\}.$$

Тогда в силу леммы 24.1 собственные значения $\lambda_\varepsilon^{(n)}$ удовлетворяют оценкам (24.2). Ясно, что $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} = \lambda_0^{(n)}$. Из теоремы 19.3 и леммы 19.1 следует, что числа $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)}$ имеют асимптотики

$$\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} = \lambda_0^{(n)}, \quad \lambda_\varepsilon^{*,n} = \lambda_0^{(n)} + \lambda_{0,1}^{(n)}\mu + o(\mu),$$

где $\lambda_{0,1}^{(n)}$ — некоторые константы. Из этих асимптотик и неравенств (24.2) уже вытекают оценки (23.12).

Доказательство оценок для собственных функций в целом аналогично доказательству оценок (23.11) в теореме 23.1. В качестве B_ε здесь берется тот же оператор, что и в доказательстве теоремы 23.1, а в качестве B_0 следует взять оператор, сопоставляющий функции $f \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение задачи

$$-\Delta u_0 = f, \quad x \in \Omega, \quad u_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Sigma \cup \omega_2.$$

Требуемая сходимость собственных значений этих операторов следует из (23.12). Нормы $\|(B_\varepsilon - B_0)\psi_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}$ оценивается аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 23.1. Необходимо лишь использовать оценку

$$\left| \frac{\partial \psi_0^{(n)}}{\partial \nu} \right| \leq C \cos \frac{\pi x_3}{2H}, \quad x \in \bar{\Sigma}$$

вместо (25.4) и оценку

$$|v_\varepsilon| \leq CU_2$$

вместо (25.5). Из последней оценки и (24.14) следует, что

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C\mu(\varepsilon),$$

где C не зависит от ε . Аналогом (25.6) являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \lambda_0 \|\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 + (f_\varepsilon^{(n)}, \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)})_{L_2(\Omega)}, \\ (\nabla \tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}, \nabla \tilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)} &= \lambda_0 (\tilde{\psi}_\varepsilon^{(n)}, \tilde{\psi}_0^{(n)})_{L_2(\Omega)}, \quad \|\tilde{\psi}_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \lambda_0 \|\tilde{\psi}_0^{(n)}\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Остальные рассуждения переносятся из доказательства теоремы 23.1 без изменений. \square

Доказательство теоремы 23.3. Для доказательства оценок (23.13) мы используем лемму 24.1. Положим:

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon,*} &= \left\{ x : x \in \partial\omega, \left| x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon\eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1 \right\}, \\ \gamma_\varepsilon^* &= \left\{ x : x \in \partial\omega, \left| x_3 - \varepsilon\pi \left(j + \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon\eta(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1 \right\}. \end{aligned}$$

Согласно теореме 19.3 и лемме 19.1, числа $\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)}$, $\lambda_{\varepsilon^*,n}^*$ имеют следующие асимптотики:

$$\lambda_{\varepsilon,*}^{(n)} = \lambda_0^{(n)} + \tilde{\mu}\lambda_{0,1}^{(n)} + \varepsilon^2\lambda_{1,0}^{(n)} + o(|\tilde{\mu}| + \varepsilon^2), \quad \lambda_{\varepsilon^*,n}^* = \lambda_0^{(n)} + \mu\lambda_{0,1}^{(n)} + \varepsilon^2\lambda_{1,0}^{(n)} + o(|\mu| + \varepsilon^2).$$

Здесь $\lambda_{i,j}^{(n)}$ — некоторые константы, $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\varepsilon) = -A - (\varepsilon \ln \eta_0 \eta)^{-1}$. Из этих асимптотик и оценок (24.2) следуют оценки (23.13).

Доказательство оценок (23.14) проводится аналогично доказательству оценок (23.11) в теореме 23.1. Оператор B_0 следует определить как сопоставляющий функции $f \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение задачи

$$-\Delta u_0 = f, \quad x \in \Omega, \quad u_0 = 0, \quad x \in \omega_1, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \omega_2, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A \right) u_0 = 0, \quad x \in \Sigma.$$

Функция v_ε будет решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta v_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Omega, \quad v_\varepsilon = 0, \quad x \in \omega_1, \quad v_\varepsilon = -\psi_0^{(n)}, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} &= 0, \quad x \in \omega_2, \quad \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = A\psi_0^{(n)}, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. $v_\varepsilon = U_3$, где U_3 — решение задачи (24.15) с $\psi_0 = \psi_0^{(n)}$. Из (24.16) теперь следует, что

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = O(\varepsilon + |\mu(\varepsilon)| - \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)).$$

Применение теоремы 25.2 теперь приводит к оценке (23.14). \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я. Метод пограничного слоя. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1974.
2. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
3. Беляев А. Г., Чечкин Г. А. Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда «предельная» задача неразрешима// Мат. сб. — 1995. — 186, № 4. — С. 47–60.
4. Беляев А. Ю., Чечкин Г. А. Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой// Мат. заметки. — 1999. — 65, № 4. — С. 496–510.
5. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — 15, № 5. — С. 1–108.
6. Бирман М. Ш., Суслина Т. А. Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — 17, № 5. — С. 69–90.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
8. Борисов Д. И. О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задаче для Лапласиана// Мат. заметки. — 2001. — 70, № 4. — С. 520–534.
9. Борисов Д. И. Двухпараметрические асимптотики собственных чисел Лапласиана с частым чередованием граничных условий// Вестн. молод. учен. Сер. прикл. мат. мех. — 2002. — № 1. — С. 32–52.
10. Борисов Д. И. О Лапласиане с часто и неперiodически чередующимися граничными условиями// Докл. РАН. — 2002. — 383, № 4. — С. 443–445.
11. Борисов Д. И. О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий// Мат. сб. — 2002. — 193, № 7. — С. 37–68.
12. Борисов Д. И. О сингулярно возмущенной краевой задаче для Лапласиана в цилиндре// Дифф. уравн. — 2002. — 38, № 8. — С. 1071–1078.
13. Борисов Д. И. Асимптотики и оценки собственных элементов Лапласиана с частой неперiodической сменой граничных условий// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2003. — 67, № 6. — С. 23–70.
14. Борисов Д. И. Асимптотики и оценки скорости сходимости в трехмерной краевой задаче с частой сменой граничных условий// Сиб. мат. ж. — 2004. — 45, № 2. — С. 274–294.
15. Борисов Д. И. О задаче с частым неперiodическим чередованием краевых условий на быстро осциллирующих множествах// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2006. — 46, № 2. — С. 284–294.
16. Борисов Д. И., Гадьльшин Р. Р. О спектре Лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий// Теор. мат. физ. — 1999. — 118, № 3. — С. 347–353.
17. Борисов Д. И., Шарапов Т. Ф. О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае третьего усредненного условия// Пробл. мат. анализа. — 2015. — 83. — С. 3–40.
18. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.
19. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. — М.: ИЛ, 1949.
20. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром// Усп. мат. наук. — 1957. — 12, № 5. — С. 3–122.
21. Гадьльшин Р. Р. Спектр эллиптических краевых задач при сингулярном возмущении граничных условий// В сб.: «Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений». — Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. — С. 3–15.
22. Гадьльшин Р. Р. Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны// Алгебра и анализ. — 1998. — 10, № 1. — С. 3–19.
23. Гадьльшин Р. Р. О краевой задаче для Лапласиана с быстро осциллирующими граничными условиями// Докл. РАН. — 1998. — 362, № 4. — С. 456–459.
24. Гадьльшин Р. Р. Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями// Дифф. уравн. — 1999. — 35, № 4. — С. 540–551.
25. Гадьльшин Р. Р. Системы резонаторов// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2000. — 64, № 3. — С. 51–96.
26. Гадьльшин Р. Р. Осреднение и асимптотики в задаче о часто закрепленной мембране// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2001. — 41, № 12. — С. 1857–1869.
27. Гадьльшин Р. Р. О модельном аналоге резонатора Гельмгольца в усреднении// Тр. МИАН. — 2002. — 236. — С. 79–86.
28. Гадьльшин Р. Р. Об аналогах резонатора Гельмгольца в теории усреднения// Мат. сб. — 2002. — 193, № 11. — С. 43–70.
29. Гадьльшин Р. Р., Чечкин Г. А. Краевая задача для Лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области// Сиб. мат. ж. — 1999. — 40, № 2. — С. 271–287.
30. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963.

31. *Доронина Е. И., Чечкин Г. А.* Об усреднении решений эллиптического уравнения второго порядка с непериодическими быстро меняющимися граничными условиями// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2001. — № 1. — С. 14–19.
32. *Доронина Е. И., Чечкин Г. А.* О собственных колебаниях тела с большим количеством непериодически расположенных концентрированных масс// Тр. МИАН. — 2002. — 236. — С. 158–166.
33. *Егер В., Олейник О. А., Шамаев А. С.* О задаче усреднения для уравнения Лапласа в частично перфорированной области// Докл. РАН. — 1993. — 333, № 4. — С. 424–427.
34. *Жиков В. В.* Об усреднении нелинейных вариационных задач в перфорированных областях// Докл. РАН. — 1995. — 345, № 2. — С. 156–160.
35. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — 191, № 7. — С. 31–72.
36. *Жиков В. В.* О спектральном методе в теории усреднения// Тр. МИАН. — 2005. — 250. — С. 95–104.
37. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — 403, № 3. — С. 305–308.
38. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Физматлит, 1993.
39. *Жиков В. В., Рычаго М. Е.* Усреднение нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в перфорированных областях// Изв. РАН. Сер. Мат. — 1997. — 61, № 1. — С. 70–88.
40. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. I. Двумерный случай// Мат. сб. — 1976. — 99, № 4. — С. 514–537.
41. *Ильин А. М.* Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. II. Область с малым отверстием// Мат. сб. — 1977. — 103(145), № 2. — С. 265–284.
42. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. — М.: Наука, 1989.
43. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
44. *Козлов С. М., Пятницкий А. Л.* Усреднение на фоне исчезающей вязкости// Мат. сб. — 1990. — 181, № 6. — С. 813–832.
45. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1979.
46. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
47. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотика решений эллиптических краевых задач при сингулярных возмущениях области. — Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1981.
48. *Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Асимптотические разложения собственных чисел краевых задач в областях с малыми отверстиями// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1984. — 48, № 2. — С. 347–371.
49. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. — Киев: Наукова думка, 1974.
50. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа «густого гребня»// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1996. — 19. — С. 138–174.
51. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
52. *Мовчан А. Б., Назаров С. А.* Влияние малых неровностей поверхности на напряженное состояние тела и энергетический баланс при росте трещины// Прикл. мат. мех. — 1991. — 55, № 5. — С. 819–828.
53. *Найфе А. Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1986.
54. *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
55. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: Изд-во МГУ, 1990.
56. *Олейник О. А., Чечкин Г. А.* О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий// Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 6(294). — С. 163–165.
57. *Олейник О. А., Чечкин Г. А.* Об одной задаче граничного усреднения для системы теории упругости// Усп. мат. наук. — 1994. — 49, № 4. — С. 114.
58. *Олейник О. А., Шамаев А. С.* Об усреднении решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с условиями Дирихле на границе полостей// Докл. РАН. — 1994. — 337, № 2. — С. 168–171.
59. *Пастухова С. Е.* О характере распределения поля температур в перфорированном теле с заданным его значением на внешней границе в условиях теплообмена на границе полостей по закону Ньютона// Мат. сб. — 1996. — 187, № 6. — С. 85–96.
60. *Перес М. Е., Чечкин Г. А., Яблокова Е. И.* О собственных колебаниях тела с «легкими» концентрированными массами на поверхности// Усп. мат. наук. — 2002. — 57, № 6. — С. 195–196.

61. Планида М. Ю. О сходимости решений сингулярно возмущенных краевых задач для Лапласиана// Мат. заметки. — 2002. — 71, № 6. — С. 867–877.
62. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
63. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.
64. Скрыпник И. В. Асимптотика решений нелинейных эллиптических краевых задач в перфорированных областях// Мат. сб. — 1993. — 184, № 10. — С. 67–90.
65. Чечкин Г. А. О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями// В сб.: «Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных». — Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. — С. 95–104.
66. Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий// Мат. сб. — 1993. — 184, № 6. — С. 99–150.
67. Чечкин Г. А. Полное асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимися граничными условиями в слое// Усп. мат. наук. — 1993. — 48, № 4. — С. 218–219.
68. Чечкин Г. А. Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1996. — 19. — С. 323–337.
69. Шапошникова Т. А. Усреднение краевой задачи для бигармонического уравнения в области, содержащей тонкие каналы малой длины// Мат. сб. — 2001. — 192, № 10. — С. 131–160.
70. Шаранов Т. Ф. О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий в случае усредненного условия Дирихле// Мат. сб. — 2014. — 205, № 10. — С. 125–160.
71. Шаранов Т. Ф. О резольвенте многомерных операторов с частой сменой краевых условий: критический случай// Уфимск. мат. ж. — 2016. — 8, № 2. — С. 66–96.
72. Varenbaltt G. I., Bell J. B., Crutchfield W. Y. The thermal explosion revisited// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1998. — 95, № 23. — С. 13384–13386.
73. Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G. Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam—New-York—Oxford: North Holland, 1978.
74. Borisov D. I. The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. IIb. — 2001. — 329, № 10. — С. 717–721.
75. Borisov D. I. On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition// Asymptot. Anal. — 2003. — 35, № 1. — С. 1–26.
76. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition// Ann. Henri Poincaré. — 2010. — 11, № 8. — С. 1591–1627.
77. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2011. — 176, № 6. — С. 774–785.
78. Borisov D., Bunoiu R., Cardone G. Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics// Z. Angew. Math. Phys. — 2013. — 64, № 3. — С. 439–472.
79. Borisov D., Cardone G. Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions// J. Phys. A: Math. Gen. — 2009. — 42, № 36. — 365205.
80. Borisov D., Cardone G., Durante T. Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2016. — 146, № 6. — С. 1115–1158.
81. Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C. Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary// J. Differ. Equ. — 2013. — 255, № 12. — С. 4378–4402.
82. Brillard A., Lobo M., Pérez M. E. Homogénéisation de frontières par épi-convergence en élasticité linéaire// Modél. Math. Anal. Numér. — 1990. — 24, № 1. — С. 5–26.
83. Chechkin G. A., Doronina E. I. On asymptotics of spectrum of boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions// Funct. Differ. Equ. — 2001. — 8, № 1-2. — С. 111–122.
84. Damlamian A. Le problème de la passoire de Neumann// Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1985. — 43. — С. 427–450.
85. Damlamian A., Li T. (Li D.) Boundary homogenization for elliptic problems// J. Math. Pures Appl. — 1987. — 66, № 4. — С. 351–361.
86. Damlamian A., Li T. (Li D.) Homogénéisation sur le bord pour les problèmes elliptiques// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1984. — 299, № 17. — С. 859–862.
87. Dávila J. A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions// Asymptot. Anal. — 2001. — 28, № 3-4. — С. 279–307.
88. Filo J. A note on asymptotic expansion for a periodic boundary condition// Arch. Math. (Brno). — 1998. — 34, № 1. — С. 83–92.

89. *Filo J., Luckhaus S.* Asymptotic expansion for a periodic boundary condition// J. Differ. Equ. — 1995. — 120, № 1. — С. 133–173.
90. *Filo J., Luckhaus S.* Homogenization of a boundary condition for the heat equation// J. Eur. Math. Soc. — 2000. — 2, № 3. — С. 217–258.
91. *Friedman A., Huang Ch., Yong J.* Effective permeability of the boundary of a domain// Commun. Part. Differ. Equ. — 1995. — 20, № 1-2. — С. 59–102.
92. *Gadyl'shin R. R.* Asymptotics of minimum eigenvalue for a circle with fast oscillating boundary conditions// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1996. — 323, № 3. — С. 319–323.
93. *Gadyl'shin R. R.* On an analog of the Helmholtz resonator in the averaging theory// C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math. — 1999. — 329, № 12. — С. 1121–1126.
94. *Gadyl'shin R. R.* Eigenvalues and scattering frequencies for domain with narrow appendices and tubes// C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. IIb. — 2001. — 329, № 10. — С. 723–726.
95. *Griso G.* Error estimate and unfolding for periodic homogenization// Asymptot. Anal. — 2004. — 40, № 3-4. — С. 269–286.
96. *Griso G.* Interior error estimate for periodic homogenization// Anal. Appl. — 2006. — 4, № 1. — С. 61–79.
97. *Jäger W., Oleinik O. A., Shamaev A. S.* Asymptotics of solutions of the boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with boundary conditions of the third kind on the boundaries of the cavities// Trans. Moscow Math. Soc. — 1997. — С. 163–196.
98. *Kratzer A., Franz W.* Transzendte funktionen. — Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1960.
99. *Kenig C. E., Lin F., Shen Z.* Convergence rates in L_2 for elliptic homogenization problems// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2012. — 203, № 3. — С. 1009–1036.
100. *Lobo M., Pérez M. E.* Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions// RAIRO Model. Math. Anal. Numer. — 1988. — 22, № 4. — С. 609–624.
101. *Lobo M., Pérez M. E.* Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies// Bull. Sci. Math. — 1992. — 116, Ser. 2. — С. 399–426.
102. *Lobo M., Pérez M. E.* On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary// Math. Models Methods Appl. Sci. — 1993. — 3, № 2. — С. 249–273.
103. *Lobo M., Pérez M. E.* Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary// Math. Models Methods Appl. Sci. — 1995. — 5, № 5. — С. 565–585.
104. *Oleinik O. A., Chechkin G. A.* Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. — 1996. — 7, № 1. — С. 5–15.
105. *Ovseevich A. I., Pyatnitskii A. I., Shamaev A. S.* Asymptotic behavior of solutions to a boundary value problem with small parameter// Russ. J. Math. Phys. — 1996. — 4, № 4. — С. 487–498.
106. *Rybalco V.* Vibrations of elastic system with a large number of tiny heavy inclusions// Asymptot. Anal. — 2002. — 32, № 1. — С. 27–62.
107. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — 12, № 4. — С. 515–524.

Д. И. Борисов

Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, д. 112;

Башкирский государственный университет, 450000, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32;

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, 450000, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, д. 3а;

University of Hradec Králové, Czech Republic, 50003, Hradec Králové, Rokitanskeho, 62

E-mail: borisovdi@yandex.ru

Asymptotic Analysis of Boundary-Value Problems for the Laplace Operator with Frequently Alternating Type of Boundary Conditions

© 2021 D. I. Borisov

Abstract. This work, which can be considered as a small monograph, is devoted to the study of two- and three-dimensional boundary-value problems for eigenvalues of the Laplace operator with frequently alternating type of boundary conditions. The main goal is to construct asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions of the considered problems. Asymptotic expansions are constructed on the basis of original combinations of asymptotic analysis methods: the method of matching asymptotic expansions, the boundary layer method and the multi-scale method. We perform the analysis of the coefficients of the formally constructed asymptotic series. For strictly periodic and locally periodic alternation of the boundary conditions, the described approach allows one to construct complete asymptotic expansions of the eigenvalues and eigenfunctions. In the case of nonperiodic alternation and the averaged third boundary condition, sufficiently weak conditions on the alternation structure are obtained, under which it is possible to construct the first corrections in the asymptotics for the eigenvalues and eigenfunctions. These conditions include in consideration a wide class of different cases of nonperiodic alternation. With further, very serious weakening of the conditions on the structure of alternation, it is possible to obtain two-sided estimates for the rate of convergence of the eigenvalues of the perturbed problem. It is shown that these estimates are unimprovable in order. For the corresponding eigenfunctions, we also obtain unimprovable in order estimates for the rate of convergence.

REFERENCES

1. V. M. Babich and N. Ya. Kirpichnikova, *Metod pogranichnogo sloya* [Boundary Layer Method], LGU, Leningrad, 1974 (in Russian).
2. N. C. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging of Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
3. A. G. Belyaev and G. A. Chechkin, "Usrednenie smeshannoy kraevoy zadachi dlya operatora Laplasya v sluchae, kogda «predel'naya» zadacha nerazreshima" [Averaging of a mixed boundary-value problem for the Laplace operator in the case when the "limit" problem is unsolvable], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 4, 47–60 (in Russian).
4. A. Yu. Belyaev and G. A. Chechkin, "Usrednenie operatorov s melkomasshtabnoy strukturoy" [Averaging of operators with small-scale structure], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 4, 496–510 (in Russian).
5. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Periodicheskie differentsial'nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva i usredneniya" [Second-order periodic differential operators. Threshold properties and averagings], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 5, 1–108 (in Russian).
6. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Porogovye approksimatsii rezolventy faktorizovannogo samosopryazhennogo semeystva s uchetom korrektera" [Threshold approximations of the resolvent of a factorized self-adjoint family with allowance for a corrector], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 5, 69–90 (in Russian).
7. N. N. Bogolyubov and Yu. A. Mitropol'skiy, *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
8. D. I. Borisov, "O dvuparametricheskoy asimptotike v odnoy kraevoy zadache dlya Laplasiana" [On two-parameter asymptotics in a boundary-value problem for the Laplacian], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2001, **70**, No. 4, 520–534 (in Russian).
9. D. I. Borisov, "Dvuparametricheskie asimptotiki sobstvennykh chisel Laplasiana s chastym cheredovaniem granichnykh usloviy" [Two-parameter asymptotics of the Laplacian eigenvalues with frequent alternation



- of boundary conditions], *Vestn. Molod. Uchen. Ser. Prikl. Mat. Mekh.* [Bull. Young Sci. Ser. Appl. Math. Mech.], 2002, No. 1, 32–52 (in Russian).
10. D. I. Borisov, “O Laplasiane s chasto i neperiodicheski chereduyushchimisya granichnymi usloviyami” [On the Laplacian with frequently and non-periodically alternating boundary conditions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **383**, No. 4, 443–445 (in Russian).
 11. D. I. Borisov, “O kraevoy zadache v tsilindre s chastoy smenoy tipa granichnykh usloviy” [On a boundary-value problem in a cylinder with frequently alternating type of boundary conditions], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 7, 37–68 (in Russian).
 12. D. I. Borisov, “O singulyarno vozmushchennoy kraevoy zadache dlya Laplasiana v tsilindre” [On a singularly perturbed boundary-value problem for the Laplacian in a cylinder], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 8, 1071–1078 (in Russian).
 13. D. I. Borisov, “Asimptotiki i otsenki sobstvennykh elementov Laplasiana s chastoy neperiodicheskoy smenoy granichnykh usloviy” [Asymptotics and estimates of the Laplacian eigenelements with frequent non-periodic alternation of the boundary conditions], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 2003, **67**, No. 6, 23–70 (in Russian).
 14. D. I. Borisov, “Asimptotiki i otsenki skorosti skhodimosti v trekhmernoy kraevoy zadache s chastoy smenoy granichnykh usloviy” [Asymptotics and estimates of the rate of convergence in a three-dimensional boundary value problem with frequent alternation of boundary conditions], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2004, **45**, No. 2, 274–294 (in Russian).
 15. D. I. Borisov, “O zadache s chastym neperiodicheskim cheredovaniem kraevykh usloviy na bystro ostsilliruyushchikh mnozhestvakh” [On a problem with frequent non-periodic alternation of boundary conditions on rapidly oscillating sets], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2006, **46**, No. 2, 284–294 (in Russian).
 16. D. I. Borisov and R. R. Gadyl’shin, “O spektre Laplasiana s chasto menyayushchimisya tipom granichnykh usloviy” [On the Laplacian spectrum with frequently alternating type of boundary conditions], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 1999, **118**, No. 3, 347–353 (in Russian).
 17. D. I. Borisov and T. F. Sharapov, “O rezolvente mnogomernykh operatorov s chastoy smenoy kraevykh usloviy v sluchae tret’ego usrednennogo usloviya” [On the resolvent of multidimensional operators with frequent alternation of boundary conditions in the case of the third averaged condition], *Probl. Mat. Analiza* [Probl. Math. Anal.], 2015, **83**, 3–40 (in Russian).
 18. M. Van Dyke, *Metody vozmushcheniy v mekhanike zhidkosti* [Perturbation Methods in Fluid Mechanics], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
 19. G. N. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy. Ch. 1* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions. V. 1], IL, Moscow, 1949 (Russian translation).
 20. M. I. Vishik and L. A. Lyusternik, “Regulyarnoe vyrozhdenie i pogranichnyy sloy dlya lineynykh differentsial’nykh uravneniy s malym parametrom” [Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, No. 5, 3–122 (in Russian).
 21. R. R. Gadyl’shin, “Spektr ellipticheskikh kraevykh zadach pri singulyarnom vozmushchenii granichnykh usloviy” [The spectrum of elliptic boundary-value problems with a singular perturbation of the boundary conditions], In: *Asimptoticheskie svoystva resheniy differentsial’nykh uravneniy* [Asymptotic Properties of Solutions of Differential Equations], BNTs UrO AN SSSR, Ufa, 1988, pp. 3–15 (in Russian).
 22. R. R. Gadyl’shin, “Ob asimptotike sobstvennykh znacheniy dlya periodicheski zakreplennoy membrany” [On the asymptotics of eigenvalues for a periodically fixed membrane], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 1998, **10**, No. 1, 3–19 (in Russian).
 23. R. R. Gadyl’shin, “O kraevoy zadache dlya Laplasiana s bystro ostsilliruyushimi granichnymi usloviyami” [On a boundary-value problem for the Laplacian with rapidly oscillating boundary conditions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1998, **362**, No. 4, 456–459 (in Russian).
 24. R. R. Gadyl’shin, “Asimptotiki sobstvennykh znacheniy kraevoy zadachi s bystro ostsilliruyushchimi granichnymi usloviyami” [Asymptotics of the eigenvalues of a boundary-value problem with rapidly oscillating boundary conditions], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 4, 540–551 (in Russian).
 25. R. R. Gadyl’shin, “Sistemy rezonatorov” [Systems of resonators], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2000, **64**, No. 3, 51–96 (in Russian).
 26. R. R. Gadyl’shin, “Osrednenie i asimptotiki v zadache o chasto zakreplennoy membrane” [Averaging and asymptotics in the problem of a densely fixed membrane], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2001, **41**, No. 12, 1857–1869 (in Russian).

27. R. R. Gadyl'shin, "O model'nom analoge rezonatora Gel'mgol'tsa v usrednenii" [On a model analogue of the Helmholtz resonator in averaging], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2002, **236**, 79–86 (in Russian).
28. R. R. Gadyl'shin, "Ob analogakh rezonatora Gel'mgol'tsa v teorii usredneniya" [On analogs of the Helmholtz resonator in averaging theory], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 11, 43–70 (in Russian).
29. R. R. Gadyl'shin and G. A. Chechkin, "Kraevaya zadacha dlya Laplasiana s bystro menyayushchimsya tipom granichnykh usloviy v mnogomernoy oblasti" [Boundary-value problem for the Laplacian with a rapidly alternating type of boundary conditions in a multidimensional domain], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 1999, **40**, No. 2, 271–287 (in Russian).
30. I. C. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of Integrals, Sums, Series, and Products], Fizmatgiz, Moscow, 1963 (in Russian).
31. E. I. Doronina and G. A. Chechkin, "Ob usrednenii resheniy ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka s neperiodicheskimi bystro menyayushchimisya granichnymi usloviyami" [On averaging of solutions of a second-order elliptic equation with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions], *Vestn. Mosk. Un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2001, No. 1, 14–19 (in Russian).
32. E. I. Doronina and G. A. Chechkin, "O sobstvennykh kolebaniyakh tela s bol'shim kolichestvom neperiodicheski raspolozhennykh kontsentriruyemykh mass" [On eigen oscillations of a body with a large number of nonperiodically located concentrated masses], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2002, **236**, 158–166 (in Russian).
33. W. Jäger, O. A. Oleynik, and A. S. Shamaev, "O zadache usredneniya dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti" [On the averaging problem for the Laplace equation in a partially perforated domain], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **333**, No. 4, 424–427 (in Russian).
34. V. V. Zhikov, "Ob usrednenii nelineynykh variatsionnykh zadach v perforirovannykh oblastiakh" [On averaging of nonlinear variational problems in perforated domains], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1995, **345**, No. 2, 156–160 (in Russian).
35. V. V. Zhikov, "Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti" [On one extension and application of the two-scale convergence method], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 7, 31–72 (in Russian).
36. V. V. Zhikov, "O spektral'nom metode v teorii usredneniya" [On the spectral method in homogenization theory], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 95–104 (in Russian).
37. V. V. Zhikov, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305–308 (in Russian).
38. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Fizmatlit, Moscow, 1993 (in Russian).
39. V. V. Zhikov and M. E. Rychago, "Usrednenie nelineynykh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka v perforirovannykh oblastiakh" [Averaging of nonlinear second-order elliptic equations in perforated domains], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 1997, **61**, No. 1, 70–88 (in Russian).
40. A. M. Il'in, "Kraevaya zadacha dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka v oblasti s uzkoj shchel'yu. I. Dvumernyy sluchay" [Boundary-value problem for a second-order elliptic equation in a domain with a narrow slit. I. Two-dimensional case], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1976, **99**, No. 4, 514–537 (in Russian).
41. A. M. Il'in, "Kraevaya zadacha dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka v oblasti s uzkoj shchel'yu. II. Oblast' s malym otverstiem" [Boundary-value problem for a second-order elliptic equation in a domain with a narrow slit. II. Domain with a small hole], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1977, **103(145)**, No. 2, 265–284 (in Russian).
42. A. M. Il'in, *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozheniy resheniy kraevykh zadach* [Reconciliation of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
43. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
44. S. M. Kozlov and A. L. Pyatnitskiy, "Usrednenie na fone ischezayushchey vyazkosti" [Averaging under vanishing viscosity], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1990, **181**, No. 6, 813–832 (in Russian).
45. J. Cole, *Metody vozmushcheniy v prikladnoy matematike* [Perturbation Methods in Applied Mathematics], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
46. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
47. V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, and B. A. Plamenevskiy, *Asimptotika resheniy ellipticheskikh kraevykh zadach pri singulyarnykh vozmushcheniyakh oblasti* [Asymptotics of Solutions of Elliptic Boundary-Value Problems under Singular Perturbations of the Domain], Tbilisi Univ., Tbilisi, 1981 (in Russian).

48. V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov, and B. A. Plamenevskiy, "Asimptoticheskie razlozheniya sobstvennykh chisel kraevykh zadach v oblastiakh s malymi otverstiyami" [Asymptotic expansions of eigenvalues of boundary-value problems in domains with small holes], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1984, **48**, No. 2, 347–371 (in Russian).
49. V. A. Marchenko and E. Ya. Khruslov, *Kraevye zadachi v oblastiakh s melkozernistoy granitse* [Boundary-Value Problems in Domains with a Fine-Grained Boundary], Naukova Dumka, Kiev, 1974 (in Russian).
50. T. A. Mel'nik and S. A. Nazarov, "Asimptotika resheniya spektral'noy zadachi Neymana v oblasti tipa «gustogo grebnya»" [Asymptotic behavior of the solution to the Neumann spectral problem in a domain of the "dense ridge" type], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1996, **19**, 138–174 (in Russian).
51. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
52. A. B. Movchan and S. A. Nazarov, "Vliyanie malyykh nerovnostey poverkhnosti na napryazhennoe sostoyanie tela i energeticheskiy balans pri roste treshchiny" [Influence of small surface irregularities on the stress state of the body and the energy balance during crack growth], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1991, **55**, No. 5, 819–828 (in Russian).
53. A. H. Nayfeh, *Metody vozmushcheniy* [Perturbation Methods], Mir, Moscow, 1986 (in Russian).
54. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskiy, *Ellipticheskie zadachi v oblastiakh s kusochno-gladkoy granitse* [Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundary], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
55. O. A. Oleynik, G. A. Iosif'yan, and A. S. Shamaev, *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnykh uprugikh sred* [Mathematical Problems in the Theory of Strongly Inhomogeneous Elastic Media], MGU, Moscow, 1990 (in Russian).
56. O. A. Oleynik and G. A. Chechkin, "O kraevykh zadachakh dlya ellipticheskikh uravneniy s bystro menyayushchimsya tipom granichnykh usloviy" [Boundary-value problems for elliptic equations with rapidly alternating type of boundary conditions], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **48**, No. 6(294), 163–165 (in Russian).
57. O. A. Oleynik and G. A. Chechkin, "Ob odnoy zadache granichnogo usredneniya dlya sistemy teorii uprugosti" [On one problem of boundary averaging for a system of elasticity theory], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1994, **49**, No. 4, 114 (in Russian).
58. O. A. Oleynik and A. S. Shamaev, "Ob usrednenii resheniy kraevoy zadachi dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti s usloviyami Dirikhle na granitse polostey" [On averaging of solutions of a boundary-value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with Dirichlet conditions on the boundary of cavities], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **337**, No. 2, 168–171 (in Russian).
59. S. E. Pastukhova, "O kharaktere raspredeleniya polya temperatur v perforirovannom tele s zadannym ego znacheniem na vneshney granitse v usloviyakh teploobmena na granitse polostey po zakonu N'yutona" [On the nature of the distribution of the temperature field in a perforated body with its given value at the outer boundary under conditions of heat transfer at the boundary of the cavities according to Newton's law], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1996, **187**, No. 6, 85–96 (in Russian).
60. M. E. Peres, G. A. Chechkin, and E. I. Yablokova, "O sobstvennykh kolebaniyakh tela s «legkimi» kontsentriruyemyymi massami na poverkhnosti" [On eigen vibrations of the body with "light" concentrated masses on the surface], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 6, 195–196 (in Russian).
61. M. Yu. Planida, "O skhodimosti resheniy singulyarno vozmushchennykh kraevykh zadach dlya Laplasiana" [On convergence of solutions of singularly perturbed boundary-value problems for the Laplacian], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2002, **71**, No. 6, 867–877 (in Russian).
62. E. Sanchez-Palencia, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Non-Homogeneous Media and Vibration Theory], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
63. I. V. Skrypnik, *Metody issledovaniya nelineynykh ellipticheskikh granichnykh zadach* [Research Methods for Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).
64. I. V. Skrypnik, "Asimptotika resheniy nelineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach v perforirovannykh oblastiakh" [Asymptotics of solutions of nonlinear elliptic boundary-value problems in perforated domains], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1993, **184**, No. 10, 67–90 (in Russian).
65. G. A. Chechkin, "O kraevykh zadachakh dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka s ostsilliruyushchimi granichnymi usloviyami" [On boundary-value problems for a second-order elliptic equation with oscillating boundary conditions], In: *Neklassicheskie differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Nonclassical Partial Differential Equations], IM SOAN SSSR, Novosibirsk, 1988, pp. 95–104 (in Russian).

66. G. A. Chechkin, “Usrednenie kraevykh zadach s singulyarnym vozmushcheniem granichnykh usloviy” [Averaging of boundary-value problems with singular perturbation of boundary conditions], *Mat. Sb. [Math. Digest]*, 1993, **184**, No. 6, 99–150 (in Russian).
67. G. A. Chechkin, “Polnoe asimptoticheskoe razlozhenie resheniya kraevoy zadachi s bystro menyayushchimisya granichnymi usloviyami v sloe” [Complete asymptotic expansion of a solution to a boundary value problem with rapidly changing boundary conditions in a layer], *Usp. Mat. Nauk [Progr. Math. Sci.]*, 1993, **48**, No. 4, 218–219 (in Russian).
68. G. A. Chechkin, “Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya kraevoy zadachi s bystro menyayushchimisya tipom granichnykh usloviy” [Asymptotic expansion of the solution to a boundary-value problem with a rapidly alternating type of boundary conditions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo [Proc. Petrovskii Semin.]*, 1996, **19**, 323–337 (in Russian).
69. T. A. Shaposhnikova, “Usrednenie kraevoy zadachi dlya bigarmonicheskogo uravneniya v oblasti, sodержashchey tonkie kanaly maloy dliny” [Averaging of a boundary-value problem for a biharmonic equation in a domain containing thin channels of small length], *Mat. Sb. [Math. Digest]*, 2001, **192**, No. 10, 131–160 (in Russian).
70. T. F. Sharapov, “O rezol’vente mnogomernykh operatorov s chastoy smenoy kraevykh usloviy v sluchae usrednennogo usloviya Dirikhle” [On the resolvent of multidimensional operators with frequent alternation of boundary conditions in the case of the averaged Dirichlet condition], *Mat. Sb. [Math. Digest]*, 2014, **205**, No. 10, 125–160 (in Russian).
71. T. F. Sharapov, “O rezol’vente mnogomernykh operatorov s chastoy smenoy kraevykh usloviy: kriticheskiy sluchay” [On the resolvent of multidimensional operators with frequent alternation of boundary conditions: critical case], *Ufimsk. Mat. Zh. [Ufa. Math. J.]*, 2016, **8**, No. 2, 66–96 (in Russian).
72. G. I. Barenblatt, J. B. Bell, and W. Y. Crutchfield, “The thermal explosion revisited,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1998, **95**, No. 23, 13384–13386.
73. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolau, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam—New-York—Oxford, 1978.
74. D. I. Borisov, “The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. IIb*, 2001, **329**, No. 10, 717–721.
75. D. I. Borisov, “On a model boundary value problem for Laplacian with frequently alternating type of boundary condition,” *Asymptot. Anal.*, 2003, **35**, No. 1, 1–26.
76. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, “On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition,” *Ann. Henri Poincaré*, 2010, **11**, No. 8, 1591–1627.
77. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, “Homogenization and asymptotics for a waveguide with an infinite number of closely located small windows,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2011, **176**, No. 6, 774–785.
78. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, “Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2013, **64**, No. 3, 439–472.
79. D. Borisov and G. Cardone, “Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2009, **42**, No. 36, 365205.
80. D. Borisov, G. Cardone, and T. Durante, “Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2016, **146**, No. 6, 1115–1158.
81. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, and C. Perugia, “Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **255**, No. 12, 4378–4402.
82. A. Brillard, M. Lobo, and M. E. Pérez, “Homogénéisation de frontières par épi-convergence en élasticité linéaire,” *Modél. Math. Anal. Numér.*, 1990, **24**, No. 1, 5–26.
83. G. A. Chechkin and E. I. Doronina, “On asymptotics of spectrum of boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions,” *Funct. Differ. Equ.*, 2001, **8**, No. 1-2, 111–122.
84. A. Damlamian, “Le problème de la passoire de Neumann,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, 1985, **43**, 427–450.
85. A. Damlamian and T. Li (D. Li), “Boundary homogenization for elliptic problems,” *J. Math. Pures Appl.*, 1987, **66**, No. 4, 351–361.
86. A. Damlamian and T. Li (D. Li), “Homogénéisation sur le bord pour les problèmes elliptiques,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, 1984, **299**, No. 17, 859–862.
87. J. Dávila, “A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions,” *Asymptot. Anal.*, 2001, **28**, No. 3-4, 279–307.
88. J. Filo, “A note on asymptotic expansion for a periodic boundary condition,” *Arch. Math. (Brno)*, 1998, **34**, No. 1, 83–92.

89. J. Filo and S. Luckhaus, “Asymptotic expansion for a periodic boundary condition,” *J. Differ. Equ.*, 1995, **120**, No. 1, 133–173.
90. J. Filo and S. Luckhaus, “Homogenization of a boundary condition for the heat equation,” *J. Eur. Math. Soc.*, 2000, **2**, No. 3, 217–258.
91. A. Friedman, Ch. Huang, and J. Yong, “Effective permeability of the boundary of a domain,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1995, **20**, No. 1-2, 59–102.
92. R. R. Gadyl’shin, “Asymptotics of minimum eigenvalue for a circle with fast oscillating boundary conditions,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, 1996, **323**, No. 3, 319–323.
93. R. R. Gadyl’shin, “On an analog of the Helmholtz resonator in the averaging theory,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I. Math.*, 1999, **329**, No. 12, 1121–1126.
94. R. R. Gadyl’shin, “Eigenvalues and scattering frequencies for domain with narrow appendixes and tubes,” *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. IIb*, 2001, **329**, No. 10, 723–726.
95. G. Griso, “Error estimate and unfolding for periodic homogenization,” *Asymptot. Anal.*, 2004, **40**, No. 3-4, 269–286.
96. G. Griso, “Interior error estimate for periodic homogenization,” *Anal. Appl.*, 2006, **4**, No. 1, 61–79.
97. W. Jäger, O. A. Oleinik, and A. S. Shamaev, “Asymptotics of solutions of the boundary value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with boundary conditions of the third kind on the boundaries of the cavities,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, 1997, **1997**, 163–196.
98. A. Kratzer and W. Franz, *Transzendte Functionen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1960.
99. C. E. Kenig, F. Lin, and Z. Shen, “Convergence rates in L_2 for elliptic homogenization problems,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2012, **203**, No. 3, 1009–1036.
100. M. Lobo and M. E. Pérez, “Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions,” *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, 1988, **22**, No. 4, 609–624.
101. M. Lobo and M. E. Pérez, “Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies,” *Bull. Sci. Math.*, 1992, **116**, Ser. 2, 399–426.
102. M. Lobo and M. E. Pérez, “On vibrations of a body with many concentrated masses near the boundary,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1993, **3**, No. 2, 249–273.
103. M. Lobo and M. E. Pérez, “Vibrations of a membrane with many concentrated masses near the boundary,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 1995, **5**, No. 5, 565–585.
104. O. A. Oleinik and G. A. Chechkin, “Solutions and eigenvalues of the boundary value problems with rapidly alternating boundary conditions for the system of elasticity,” *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 1996, **7**, No. 1, 5–15.
105. A. I. Ovseevich, A. I. Pyatnitskii, and A. S. Shamaev, “Asymptotic behavior of solutions to a boundary value problem with small parameter,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1996, **4**, No. 4, 487–498.
106. V. Rybalko, “Vibrations of elastic system with a large number of tiny heavy inclusions,” *Asymptot. Anal.*, 2002, **32**, No. 1, 27–62.
107. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.

D. I. Borisov

Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia;

Bashkir State University, Ufa, Russia;

Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmullah, Ufa, Russia;

University of Hradec Králové, Hradec Králové, Czech Republic

E-mail: borisovdi@yandex.ru