Современная математика. Фундаментальные направления. Том 67, № 1 (2021). С. 1–13

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-1-13 УДК 517.956.25

ОТСУТСТВИЕ НЕТРИВИАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

© 2021 г. **В. Э. АДМАСУ, Е. И. ГАЛАХОВ, О. А. САЛИЕВА**

Аннотация. В этой статье мы модифицируем результаты, полученные Митидиери и Похожаевым о достаточных условиях отсутствия нетривиальных слабых решений нелинейных неравенств и систем с целыми степенями оператора Лапласа и с нелинейным слагаемым вида $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q + b(x)|\nabla u|^s$. Мы получаем оптимальные априорные оценки, применяя метод нелинейной емкости с соответствующим выбором пробных функций. В итоге мы доказываем отсутствие нетривиальных слабых решений нелинейных неравенств и систем от противного.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В последние десятилетия большое внимание уделяется условиям отсутствия решений различных нелинейных уравнений и неравенств в частных производных в соответствующих функциональных классах.

Эта статья вдохновлена различными недавними работами об отсутствии нетривиальных слабых решений некоторых нелинейных уравнений и неравенств в частных производных, содержащих целые степени оператора Лапласа. Мы получаем достаточные условия отсутствия нетривиальных слабых решений некоторых нелинейных уравнений и неравенств с целыми степенями оператора Лапласа и с градиентными нелинейностями вида $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q + b(x)|\nabla u|^s$, применяя метод нелинейной емкости, предложенный С. И. Похожаевым [4]. Позднее этот метод был развит в совместной работе Э. Митидиери и С. И. Похожаева [3], см. также [10,11]. Так как метод позволил им получить новые точные достаточные условия отсутствия решений в более широких функциональных классах, чем ранее известные методы (в частности, метод сравнения), авторов заинтересовало его применение с соответствующим выбором пробных функций к задачам с различными операторами [11].

Метод основан на получении асимптотически оптимальных априорных оценок путем применения подходящих алгебраических неравенств к интегральной форме рассматриваемой задачи при соответствующем выборе пробных функций. Этот тип нелинейных слагаемых рассматривался в [1] для параболических неравенств. Метод также применялся для различных классов эллиптических уравнений, неравенств и систем, см. [2, 5–9].

В настоящей работе мы модифицируем условия отсутствия решений из [4], изменяя нелинейное слагаемое в рассматриваемом неравенстве или системе с целыми степенями оператора Лапласа.

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

Оставшаяся часть статьи состоит из раздела 2 и раздела 3. В разделе 2 мы доказываем отсутствие нетривиальных слабых решений для рассматриваемого неравенства, а в разделе 3 — для системы таких неравенств.

2. Скалярные неравенства

Рассмотрим неравенство вида

$$\Delta^k u(x) \geqslant a(x)\,|\nabla(\Delta^m u(x))|^q + b(x)|\nabla u(x)|^s, \qquad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.1}$$

с

$$q > 1, \quad s > 1, \tag{2.2}$$

где a и b — локально интегрируемые неотрицательные функции, удовлетворяющие оценкам

$$a(x) \geqslant c_1(1+|x|)^\alpha, \quad b(x) \geqslant c_2(1+|x|)^\beta \tag{2.3}$$

для некоторых $c_1, c_2 > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и всех $x \in \mathbb{R}^N$.

Определение 2.1. Будем называть *слабым решением нелинейного неравенства* (2.1) функцию $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ такую, что $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $b(x)|\nabla u|^s \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, и неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(a(x)\,|\nabla(\Delta^m u(x))|^q + b(x)|\nabla u(x)|^s\right) \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta^k \varphi(x)\,dx \tag{2.4}$$

выполняется для всякой пробной функции $\varphi \in C_0^{2k}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}_+)$.

Теорема 2.1. *Предположим, что показатели q и s удовлетворяют неравенствам* (2.2) *и*

$$\begin{aligned} &q \leqslant \frac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1} \ \text{при } N > 2(k-m)-1, \\ &s \leqslant \frac{N+\beta}{N-2k+1} \ \text{при } N > 2k-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Тогда задача (2.1) *не имеет нетривиальных слабых решений.*

Доказательство. По определению слабого решения, интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(a(x)\,|\nabla(\Delta^m u(x))|^q + b(x)|\nabla u(x)|^s\right) \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta^k \varphi(x)\,dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla\left(\Delta^m u(x)\right) \nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi(x)\right)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\Delta^m u(x))| \cdot |\nabla(\Delta^{k-m-1}\varphi(x))|\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)| \cdot |\nabla(\Delta^{k-1}\varphi(x))|\,dx. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^{p'}}{p'} \quad \left(A, B > 0, \quad p > 1, \quad p' = \frac{p}{p-1}\right), \tag{2.7}$$

мы оцениваем слагаемые в правой части (2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\Delta^m u(x))| \cdot |\nabla(\Delta^{k-m-1}\varphi(x))|\,dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u(x)\right)|^q \varphi(x)\,dx + C_1(q)\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi(x)\right)\right|^{q'} a^{-\frac{q'}{q}}(x)\varphi^{-\frac{q'}{q}}(x)\,dx, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где (2.7) применяется с $p = q$ и

$$\begin{cases} A = A(x) = a^{\frac{1}{q}}(x)\,|\nabla\left(\Delta^m u(x)\right)|\,\varphi^{\frac{1}{q}}(x), \\ B = B(x) = a^{-\frac{1}{q}}(x)\left|\nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi(x)\right)\right|\varphi^{-\frac{1}{q}}(x), \end{cases} \tag{2.9}$$

и

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)\right|dx\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N}b(x)|\nabla u(x)|^s\varphi(x)\,dx+C_2(s)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)\right|^{s'}b^{-\frac{s'}{s}}(x)\varphi^{-\frac{s'}{s}}(x)\,dx,\end{gathered}\tag{2.10}$$

где (2.7) применяется с $p=s$ и

$$\begin{cases}A=A(x)=b^{\frac{1}{s}}(x)|\nabla u(x)|\varphi^{\frac{1}{s}}(x),\\ B=B(x)=a^{-\frac{1}{s}}(x)\left|\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi(x)\right)\right|\varphi^{-\frac{1}{s}}(x),\end{cases}\tag{2.11}$$

$C_1(q)$ и $C_2(s)$ — положительные константы, зависящие только от q и s соответственно. Тогда, комбинируя (2.7), (2.10) и (2.13), получим следующую априорную оценку:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\left|\nabla(\Delta^m u(x))\right|^q+b(x)|\nabla u(x)|^s\right)\varphi(x)\,dx\right)\leqslant\\ \leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(C_1(q)\frac{|L_{k-m-1}(\varphi)|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}}+C_2(q)\frac{|L_{k-1}(\varphi)|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\right)dx,\end{gathered}\tag{2.12}$$

где $L_j(\varphi)=\nabla\left(\Delta^j\varphi\right)$ ($j=k-m-1$ или $k-1$), $q'=\dfrac{q}{q-1}$, $s'=\dfrac{s}{s-1}$.

Теперь выберем пробную функцию φ вида

$$\varphi(x)=\varphi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right),\tag{2.13}$$

где $R>0$ и $\varphi_0\in C_0^{2k}\left(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}_+\right)$ такова, что

$$\varphi_0(s)=\begin{cases}1, & 0\leqslant s\leqslant 1,\\ 0, & s\geqslant 2.\end{cases}\tag{2.14}$$

Далее сделаем замену переменных:

$$x\to\xi: x=R\xi.\tag{2.15}$$

Преобразуя правую часть неравенства (2.12) по формуле (2.15), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|L_{k-m-1}(\varphi)|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}}\,dx=R^{\theta_1}\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-m-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(a_0\varphi_0)^{q'-1}}\,d\xi,\tag{2.16}$$

где $L^*_{k-m-1}(\varphi_0)=\nabla\left(\Delta^{k-m-1}\varphi_0\right)$, $a_0(\xi)=a(R\xi)$, $\theta_1=N-\left(2(k-m)-1+\dfrac{\alpha}{q}\right)q'$, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{|L_{k-1}(\varphi)|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\,dx=R^{\theta_2}\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(b_0\varphi_0)^{s'-1}}\,d\xi,\tag{2.17}$$

где $L^*_{k-1}(\varphi_0)=\nabla\left(\Delta^{k-1}\varphi_0\right)$, $b_0(\xi)=b(R\xi)$, $\theta_2=N-\left(2k-1+\dfrac{\beta}{q}\right)q'$.

Теперь выберем пробную функцию φ_0 так, что

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-m-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(a_0\varphi_0)^{q'-1}}\,d\xi<\infty$$

и

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} \frac{\left|L^*_{k-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(b_0\varphi_0)^{s'-1}}\,d\xi<\infty,$$

так что интеграл в правой части (2.12) конечен. Тогда из (2.12) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\left|\nabla\left(\Delta^m u(x)\right)\right|^q+b(x)\left|\nabla u(x)\right|^s)\varphi\,dx\leqslant CR^{\theta}, \tag{2.18}$$

где $\theta=\max(\theta_1,\theta_2)$. Теперь предположим, что $\theta=\theta_1\geqslant\theta_2$ (противоположный случай можно исследовать аналогично) и рассмотрим следующие два случая для значений θ.

Случай 1: если $\theta<0$, переходя к пределу при $R\to\infty$ в (2.18), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\left|\nabla\left(\Delta^m u\right)\right|^q+b(x)\left|\nabla u\right|^s\right)dx\to 0. \tag{2.19}$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано при $\theta<0$, т. е.

$$1<q<\frac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1}. \tag{2.20}$$

Случай 2: если $\theta=0$,

$$q=\frac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1}. \tag{2.21}$$

В этом случае из соотношения (2.16) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|L_{k-m-1}(\varphi)\right|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}}\,dx=c_1, \tag{2.22}$$

где

$$c_1=\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-m-1}(\varphi_0)\right|^{q'}}{(a_0\varphi_0)^{q'-1}}\,d\xi, \tag{2.23}$$

и (так как $\theta_2\leqslant\theta_1=0$)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\frac{\left|L_{k-1}(\varphi)\right|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\,dx=\lim_{R\to\infty}c_2R^{\theta_2}\leqslant c_2, \tag{2.24}$$

где

$$c_2=\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\frac{\left|L^*_{k-1}(\varphi_0)\right|^{s'}}{(b_0\varphi_0)^{s'-1}}\,d\xi. \tag{2.25}$$

Отсюда и из (2.12) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\left|\nabla\left(\Delta^m u\right)\right|^q+b(x)\left|\nabla u\right|^s)\varphi\,dx\leqslant c. \tag{2.26}$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left(a(x)\left|\nabla\left(\Delta^m u\right)\right|^q+b(x)\left|\nabla u\right|^s\right)dx\leqslant c. \tag{2.27}$$

Теперь вернемся к неравенству (2.6). Заметим, что

$$\operatorname{supp}L_j(\varphi)\subseteq\{x\in\mathbb{R}^N\mid R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R\}=\overline{B}_{\sqrt{2}R}\backslash B_R,$$

где $B_L=\{x\in\mathbb{R}^N\mid|x|<L\}$, $L>0$ ($L=R$ или $2R$).

Тогда в силу неравенства Гельдера из соотношения (2.6) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q + b(x)\,|\nabla u|^s)\varphi\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} a\,|\nabla(\Delta^m u)|^q\,\varphi\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} \frac{|L_{k-m-1}(\varphi)|^{q'}}{(a\varphi)^{q'-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} +$$
$$+\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} b(x)\,|\nabla u|^s\,\varphi\,dx\right)^{\frac{1}{s}} \left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} \frac{|L_{k-1}(\varphi)|^{s'}}{(b\varphi)^{s'-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}. \tag{2.28}$$

Однако, в силу (2.27) и абсолютной сходимости интеграла в этом соотношении, имеем

$$\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q\;dx \to 0 \tag{2.29}$$

и

$$\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} b(x)|\nabla u|^s\,dx \to 0 \tag{2.30}$$

при $R\to\infty$.

Переходя к пределу при $R\to\infty$ в (2.28) и учитывая (2.22) и (2.24), вновь получим (2.19). Таким образом, $u=0$ п.в. и в этом случае, т. е. с учетом (2.21) условие отсутствия решения окончательно записывается как $1<q\leqslant\dfrac{N+\alpha}{N-2(k-m)+1}$, и это завершает доказательство теоремы 1. □

3. Системы неравенств

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \Delta^{k_1}u(x) \geqslant a(x)\,|\nabla(\Delta^{m_1}v(x))|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}, & x\in\mathbb{R}^N,\\ \Delta^{k_2}v(x) \geqslant c(x)\,|\nabla(\Delta^{m_2}u(x))|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}, & x\in\mathbb{R}^N \end{cases} \tag{3.1}$$

с

$$\begin{aligned} &k_1,k_2,m_1,m_2\in\mathbb{N},\quad k_1>m_2,\quad k_2>m_1,\quad \min(q_1,q_2,s_1,s_2)>1,\\ &a(x)\geqslant C(1+|x|)^{\alpha_1},\quad b(x)\geqslant C(1+|x|)^{\beta_1},\\ &c(x)\geqslant C(1+|x|)^{\alpha_2},\quad d(x)\geqslant C(1+|x|)^{\beta_2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

для некоторых $C>0$, α_1, α_2, β_1, $\beta_2\in\mathbb{R}$ и всех $x\in\mathbb{R}^N$.

Определение 3.1. Будем называть *слабым решением системы нелинейных неравенств* (3.1) пару функций $(u,v)\in\left(L^{s_1}_{loc}(\mathbb{R}^N)\cap L^{q_2}_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)\times\left(L^{q_1}_{loc}(\mathbb{R}^N)\cap L^{s_2}_{loc}(\mathbb{R}^N)\right)$ таких, что неравенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla(\Delta^{m_1}v(x))|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} u(x)\Delta^{k_1}\varphi(x)\,dx, \tag{3.3}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (c(x)\,|\nabla(\Delta^{m_2}u(x))|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N} v(x)\Delta^{k_2}\varphi(x)\,dx \tag{3.4}$$

выполняются для любой пробной функции $\varphi\in C_0^{2k}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}_+)$, где $k=\max(k_1,k_2)$.

Теорема 3.1. *Пусть выполняется* (3.2). *Предположим, что* $\theta\overset{\mathrm{def}}{=}\max\limits_{i=1,\dots,4}\theta_i\leqslant 0$, *где*

$$\begin{aligned} &\theta_1 = N-\frac{2(k_1-m_2)q_2-q_2+\alpha_2}{q_2-1},\quad \theta_2 = N-\frac{(2k_1-1)s_1+\beta_1}{s_1-1},\\ &\theta_3 = N-\frac{2(k_2-m_1)q_1-q_1+\alpha_1}{q_1-1},\quad \theta_4 = N-\frac{(2k_2-1)s_2+\beta_2}{s_2-1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда задача (3.1) *не имеет нетривиальных слабых решений в* $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Начнем с того, что положим $\psi(x)=\varphi(x)$. В силу определения слабого решения и интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla(\Delta^{m_1}v(x))|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}u(x)\Delta^{k_1}\varphi(x)\,dx\leqslant\\&\leqslant\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla(\Delta^{m_2}u(x))\,\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\,dx+\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla u(x)\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\,dx\leqslant\\&\leqslant\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Delta^{m_2}u(x))\,|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx+\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx,\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla(\Delta^{m_2}u(x))|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N}v(x)\Delta\varphi^{k_2}(x)\,dx\leqslant\\&\leqslant\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla(\Delta^{m_1}v(x))\,\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\,dx+\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}\nabla v(x)\nabla\left(\Delta\varphi^{k_2-1}(x)\right)\,dx\leqslant\\&\leqslant\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Delta^{m_1}v(x))\,|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx+\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla v(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Отсюда, применяя неравенство Юнга в соотношениях (3.6) и (3.7), имеем

$$\begin{aligned}&\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Delta^{m_2}u(x))\,|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\&\leqslant\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}c(x)\,|\nabla(\Delta^{m_2}u(x))|^{q_2}\,\varphi(x)\,dx+C_1(q_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'}c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx,\end{aligned}\tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}&\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla u(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\&\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}\varphi(x)\,dx+C_2(s_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'}b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx,\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}&\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla(\Delta^{m_1}v(x))\,|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\&\leqslant\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}a(x)\,|\nabla(\Delta^{m_1}v(x))|^{q_1}\,\varphi(x)\,dx+C_3(q_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'}a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx,\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}&\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla v(x)|\cdot\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|\,dx\leqslant\\&\leqslant\frac12\int\limits_{\mathbb{R}^N}d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}\varphi(x)\,dx+C_4(s_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_2'}d^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx,\end{aligned}\tag{3.11}$$

где $\dfrac{1}{q_i}+\dfrac{1}{q_i'}=1$ и $\dfrac{1}{s_i}+\dfrac{1}{s_i'}=1$ $(i=1,2)$.

Введем следующие обозначения:

$$X=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(a(x)\,|\nabla(\Delta^{m_1}v(x))|^{q_1}+b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx$$

и

$$Y=\int\limits_{\mathbb{R}^N}(c(x)\,|\nabla(\Delta^{m_2}u(x))|^{q_2}+d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx.$$

Тогда из (3.6)–(3.11) следует, что

$$\begin{aligned} X \leqslant{}& \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} c(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)\right|^{q_2}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} b(x)|\nabla u(x)|^{s_1}\varphi(x)\,dx + \\ &+ C_1(q_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'}c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx + \\ &+ C_2(s_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'}b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} Y \leqslant{}& \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} a(x)\left|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)\right|^{q_1}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} d(x)|\nabla v(x)|^{s_2}\varphi(x)\,dx + \\ &+ C_3(q_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'}a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx + \\ &+ C_4(s_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_2'}d^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Складывая (3.12) с (3.13) и упрощая, получим

$$\begin{aligned} X + Y \leqslant{}& 2C_1(q_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'}c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx + \\ &+ 2C_2(s_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'}b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx + \\ &+ 2C_3(q_1)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_1'}a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx + \\ &+ 2C_4(s_2)\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_2'}d^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Теперь введем стандартную пробную функцию φ вида

$$\varphi(x) = \varphi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right),$$

где $R > 0$ и $\varphi_0 \in C_0^{2k}(\mathbb{R}_+)$ такова, что

$$\varphi_0(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant s \leqslant 1, \\ 0, & s \geqslant 2. \end{cases}$$

Далее сделаем замену переменных в правой части неравенства (3.14):

$$x \to \xi : x = R\xi,$$

что приводит к

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)\right|^{q_2'}c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx = \\ &= R^{\theta_1}\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)\right|^{q_2'}(c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi, \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)\right|^{s_1'}b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx =$$

$$= R^{\theta_2} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_1'}(b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi, \tag{3.16}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)|^{q_1'} a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx =$$

$$= R^{\theta_3} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)|^{q_1'}(a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi, \tag{3.17}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla \left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)|^{q_1'} d^{-\frac{s_2'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx =$$

$$= R^{\theta_4} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_2'}(d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi. \tag{3.18}$$

Тогда соотношение (3.14) принимает вид

$$\begin{aligned} X + Y \leqslant\ & 2C_1(q_2)R^{\theta_1} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{q_2'}(c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi + \\ & + 2C_2(s_1)R^{\theta_2} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_1'}(b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi + \\ & + 2C_3(q_1)R^{\theta_3} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)|^{q_1'}(a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi + \\ & + 2C_4(s_2)R^{\theta_4} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_2'}(d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Теперь выберем пробную функцию φ_0 так, что

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{q_2'}(c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi < \infty,$$

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_1'}(b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi < \infty,$$

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)|^{q_1'}(a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi < \infty,$$

и

$$\int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla \left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_2'}(d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi < \infty.$$

Тогда из неравенства (3.19) следует, что

$$X + Y \leqslant \sum_{i=1}^{4} C_i R^{\theta_i} \tag{3.20}$$

с некоторыми $C_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$. Если выполняется какое-либо из неравенств (3.5), т. е. если $\theta = \max\limits_{i=1,\ldots,4} \theta_i \leqslant 0$, имеем два случая.

Случай 1: $\theta < 0$.

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (3.20), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1} v(x)\right)|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx + \\ + \int_{\mathbb{R}^N} (c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2} u(x)\right)|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx = 0.$$

Отсюда $u = 0$ и $v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N$.

Случай 2: $\theta = 0$.

В этом случае в силу (3.15)–(3.18) выполняются соотношения

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi(x)\right)|^{q_2'} c^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\varphi^{-\frac{q_2'}{q_2}}(x)\,dx = c_1, \tag{3.21}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi(x)\right)|^{s_1'} b^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_1'}{s_1}}(x)\,dx = c_2, \tag{3.22}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(x)\right)|^{q_1'} a^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\varphi^{-\frac{q_1'}{q_1}}(x)\,dx = c_3, \tag{3.23}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi(x)\right)|^{q_1'} d^{-\frac{s_2'}{s_1}}(x)\varphi^{-\frac{s_2'}{s_2}}(x)\,dx = c_4, \tag{3.24}$$

где

$$c_1 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_1-m_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{q_2'}(c_0\varphi_0)^{1-q_2'}\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_1 = 0,\\ 0, \text{ если } \theta_1 < 0;\end{cases}$$

$$c_2 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_1-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_1'}(b_0\varphi_0)^{1-s_1'}(\xi)\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_2 = 0,\\ 0, \text{ если } \theta_2 < 0;\end{cases}$$

$$c_3 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-m_1-1}\varphi(\xi)\right)|^{q_1'}(a_0\varphi_0)^{1-q_1'}(\xi)\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_3 = 0,\\ 0, \text{ если } \theta_3 < 0;\end{cases}$$

$$c_4 = \begin{cases} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant\sqrt{2}} |\nabla\left(\Delta^{k_2-1}\varphi_0(\xi)\right)|^{s_2'}(d_0\varphi_0)^{1-s_2'}(\xi)\,d\xi, \text{ если } \theta = \theta_4 = 0,\\ 0, \text{ если } \theta_4 < 0.\end{cases}$$

Отсюда в силу (3.20) имеем

$$\int_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1} v(x)\right)|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx + \\ + \int_{\mathbb{R}^N} (c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2} u(x)\right)|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx \leqslant c, \tag{3.25}$$

где $0 < c < \infty$. Переходя к пределу при $R \to \infty$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1} v(x)\right)|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx + \\ + \int_{\mathbb{R}^N} (c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2} u(x)\right)|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx \leqslant c. \tag{3.26}$$

Теперь вернемся к неравенствам (3.6) и (3.7). Заметим, что

$$\mathrm{supp}\nabla\left(\Delta^p(\varphi)\right) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^N \mid R \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2}R\} = \overline{B}_{\sqrt{2}R} \backslash B_R$$

для всех $p \in \mathcal{N}$, где $B_L = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < L\}$, $L > 0$ ($L = R$ или $2R$).

Тогда в силу неравенства Гельдера из соотношений (3.6) и (3.7) следует

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\varphi(x)\,dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{c_1^{\frac{1}{q_2'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q_2}} + \\
&+ \frac{c_2^{\frac{1}{s_1'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} (b(x)\,|\nabla u(x)|^{s_1}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{s_1}},
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N} (c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\varphi(x)\,dx \leqslant \\
&\leqslant \frac{c_3^{\frac{1}{q_1'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q_1}} + \\
&+ \frac{c_4^{\frac{1}{s_2'}}}{2}\left(\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} d(x)\,|\nabla v(x)|^{s_2}\,\varphi(x)\,dx\right)^{\frac{1}{s_2}}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Однако из (3.26) и абсолютной сходимости интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} (c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx = c$$

имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} (a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx + \\
&+ \int\limits_{R\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}R} (c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx \to 0
\end{aligned}$$

при $R \to \infty$.

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (3.27), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (a(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_1}v(x)\right)|^{q_1} + b(x)|\nabla u(x)|^{s_1})\,dx = 0.$$

Тогда из неравенства (3.28) следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (c(x)\,|\nabla\left(\Delta^{m_2}u(x)\right)|^{q_2} + d(x)|\nabla v(x)|^{s_2})\,dx = 0.$$

Таким образом, $u = 0$ и $v = 0$ п.в. и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галахов Е. И.* О некоторых неравенствах в частных производных с градиентными слагаемыми// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 40–48.
2. *Галахов Е. И., Салиева О. А.* Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах// Мат. заметки. — 2015. — *98*, № 2. — С. 187–195.
3. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и разрушение решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. МИАН. — 2001. — *234*. — С. 3–383.
4. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *357*, № 5. — С. 592–594.
5. *Салиева О. А.* Отсутствие решений некоторых нелинейных неравенств с дробными степенями оператора Лапласа// Мат. заметки. — 2017. — *101*, № 4. — С. 699–703.
6. *Farina A., Serrin J.* Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations// J. Differ. Equ. — 2011. — *250*, № 12. — С. 4367–4408.
7. *Farina A., Serrin J.* Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations II// J. Differ. Equ. — 2011. — *250*, № 12. — С. 4409–4436.
8. *Filippucci R., Pucci P., Rigoli M.* Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms// Commun. Contemp. Math. — 2010. — *12*, № 3. — С. 501–535.
9. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408*, № 1. — С. 102–113.
10. *Galakhov E., Salieva O.* Nonexistence of solutions of some inequalities with gradient non-linearities and fractional Laplacian// В сб.: «Proc. Int. Conf. Equadiff 2017». — Bratislava: Spektrum STU Publishing, 2017. — С. 157–162.
11. *Galakhov E., Salieva O.* Uniqueness of the trivial solution of some inequalities with fractional Laplacian// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2019. — *2019*, № 1. — С. 1–8.
12. *Li X., Li F.* Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity// Nonlinear Anal. — 2012. — *75*, № 2. — С. 2812–2822.

Васе Эсмелалем Адмасу

Евгений Игоревич Галахов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `galakhov@rambler.ru`

Ольга Алексеевна Салиева
Московский государственный технологический университет «Станкин»,
127055, Москва, Вадковский пер., д. 1
E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2021-67-1-1-13 UDC 517.956.25

Nonexistence of Nontrivial Weak Solutions of Some Nonlinear Inequalities with Gradient Nonlinearity

© 2021 **V. E. Admasu, E. I. Galakhov, O. A. Salieva**

Abstract. In this article, we modify the results obtained by Mitidieri and Pohozaev on sufficient conditions for the absence of nontrivial weak solutions to nonlinear inequalities and systems with integer powers of the Laplace operator and with a nonlinear term of the form $a(x)\,|\nabla(\Delta^m u)|^q + b(x)|\nabla u|^s$. We obtain optimal a priori estimates by applying the nonlinear capacity method with an appropriate choice of test functions. As a result, we prove the absence of nontrivial weak solutions to nonlinear inequalities and systems by contradiction.

REFERENCES

1. Е. И. Галахов, "О некоторых неравенствах в частных производных с градиентными слагаемыми" [Some partial differential inequalities with gradient terms], *Тр. МИАН* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 40–48 (in Russian).
2. Е. И. Галахов and О. А. Салиева, "Разрушение решений некоторых нелинейных неравенств с особенностями на неограниченных множествах" [Blow-up of solutions of some nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets], *Мат. заметки* [Math. Notes], 2015, **98**, No. 2, 187–195 (in Russian).
3. E. Mitidieri and С. И. Pohozaev, "Априорные оценки и разрушение решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных" [A priori estimates and blowup of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities], *Тр. МИАН* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2001, **234**, 3–383 (in Russian).
4. С. И. Pohozaev, "Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами" [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Докл. РАН* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, No. 5, 592–594 (in Russian).
5. О. А. Салиева, "Отсутствие решений некоторых нелинейных неравенств с дробными степенями оператора Лапласа" [Absence of solutions of some nonlinear inequalities with fractional powers of the Laplace operator], *Мат. заметки* [Math. Notes], 2017, **101**, No. 4, 699–703 (in Russian).
6. A. Farina and J. Serrin, "Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations," *J. Differ. Equ.*, 2011, **250**, No. 12, 4367–4408.
7. A. Farina and J. Serrin, "Entire solutions of completely coercive quasilinear elliptic equations II," *J. Differ. Equ.*, 2011, **250**, No. 12, 4409–4436.
8. R. Filippucci, P. Pucci, and M. Rigoli, "Nonlinear weighted p-Laplacian elliptic inequalities with gradient terms," *Commun. Contemp. Math.*, 2010, **12**, No. 3, 501–535.
9. E. Galakhov and O. Salieva, "On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, No. 1, 102–113.
10. E. Galakhov and O. Salieva, "Nonexistence of solutions of some inequalities with gradient non-linearities and fractional Laplacian," In: *Proc. Int. Conf. Equadiff 2017*, Spektrum STU Publishing, Bratislava, 2017, pp. 157–162.
11. E. Galakhov and O. Salieva, "Uniqueness of the trivial solution of some inequalities with fractional Laplacian," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2019, **2019**, No. 1, 1–8.
12. X. Li and F. Li, "Nonexistence of solutions for singular quasilinear differential inequalities with a gradient nonlinearity," *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, No. 2, 2812–2822.

V. E. Admasu

E. I. Galakhov
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: galakhov@rambler.ru

O. A. Salieva
Moscow State Technological University "Stankin," Moscow, Russia
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com