

## ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ В НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

© 2020 г. В. А. КРАСНОВ

Аннотация. Вычисление объемов многогранников является классической задачей геометрии, известной со времен античной математики и не потерявшей актуальность в настоящее время. Проблема получения формул объемов трехмерных неевклидовых многогранников заданного комбинаторного типа весьма сложна. В настоящее время она полностью решена для самого простого с комбинаторной точки зрения многогранника — тетраэдра. Однако известно, что в случае многогранника специального вида формула для его объема заметно упрощается. Этот факт заметил еще Н. И. Лобачевский, который нашел объем так называемого идеального тетраэдра в гиперболическом пространстве (все вершины данного тетраэдра находятся на абсолюте). В настоящем обзоре будут представлены основные результаты об объемах произвольных неевклидовых тетраэдров, а также многогранников специального вида (как тетраэдров, так и многогранников, имеющих более сложное комбинаторное строение) в трехмерном сферическом и гиперболическом пространствах постоянной кривизны  $K = 1$  и  $K = -1$  соответственно. Кроме того, мы изложим новый метод И. Х. Сабитова вычисления объемов тел в гиперболическом пространстве (заданном моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве), который позволяет получать явные формулы для объемов многогранников произвольной размерности через координаты вершин. При этом, наряду с обзором основных формул для объемов неевклидовых многогранников, мы будем приводить доказательства (или наброски доказательств) данных формул. Это поможет сформировать у читателя представление об основных методах вычисления объемов тел в неевклидовых пространствах постоянной кривизны.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	559
Некоторые основные обозначения, определения и понятия . . . . .	561
Глава 1. Объемы неевклидовых тетраэдров . . . . .	562
1.1. Объемы тетраэдров в евклидовом пространстве . . . . .	562
1.2. Некоторые вспомогательные результаты о неевклидовых тетраэдрах . . . . .	564
1.3. Объем ортосхемы в $S^3$ и $H^3$ . . . . .	571
1.4. Объем идеального тетраэдра в $H^3$ . . . . .	573
1.5. Объемы гиперболических пирамид, имеющих бесконечно удаленные вершины . . . . .	576
1.6. Объемы симметричных и $Z_2$ -симметричных тетраэдров . . . . .	579
1.6.1. Объем симметричного тетраэдра в $H^3$ и $S^3$ . . . . .	579
1.6.2. Объем $Z_2$ -симметричного тетраэдра в $S^3$ . . . . .	583
1.7. Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии $S_4$ . . . . .	585
1.8. Объем произвольного неевклидова тетраэдра . . . . .	589
1.8.1. Формула Сфорца объема произвольного неевклидова тетраэдра . . . . .	590
1.8.2. Формула Чо—Кима объема произвольного гиперболического тетраэдра . . . . .	595
1.8.3. Формулы Мураками—Яно и Мураками—Ушиджимы . . . . .	596
1.8.4. Формула Деревнина—Медных объема гиперболического тетраэдра общего вида . . . . .	598
Глава 2. Объемы многогранников, имеющих более сложное комбинаторное строение, нежели тетраэдр . . . . .	607

Публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.



2.1. Объем куба Ламберта . . . . .	607
2.2. Объемы неевклидовых многогранников с симметриями . . . . .	612
2.2.1. Объем неевклидова октаэдра с $mm2$ -симметрией . . . . .	612
2.2.2. Объем октаэдра с $2 n$ -симметрией . . . . .	616
2.2.3. Объем октаэдра, обладающего $mm2$ -симметрией . . . . .	621
2.2.4. Объем октаэдра, обладающего $4 n$ -симметрией . . . . .	624
2.2.5. Объем гиперболического октаэдра и гексаэдра с $\bar{3}$ -симметрией . . . . .	629
2.3. Объемы многогранников Лебелля . . . . .	636
Глава 3. Проблема Зейделя . . . . .	638
3.1. Формулировка гипотезы Зейделя . . . . .	638
3.2. Усиленная гипотезы Зейделя . . . . .	639
3.3. Исходная гипотеза Зейделя . . . . .	641
Глава 4. Объемы многогранников в гиперболическом пространстве, заданном моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве . . . . .	644
4.1. Основные формулы . . . . .	644
4.2. Объем гиперболического тетраэдра . . . . .	646
4.3. Объем циклического тетраэдра в гиперболическом пространстве . . . . .	649
4.4. Объем гиперболического симплекса в размерности $n = 4$ . . . . .	651
4.5. Объем гиперболического симплекса в размерности $n = 5$ . . . . .	660
Глава 5. Площади многоугольников на плоскости Лобачевского . . . . .	661
5.1. Формулы Герона и Брамагупты . . . . .	661
5.2. Применение методы Сабитова к вычислению объема циклического $n$ -угольника . . . . .	671
Список литературы . . . . .	673

## ВВЕДЕНИЕ

Основными объектами настоящего обзора являются объемы многогранников в гиперболическом и сферическом пространствах. Исследование условий существования многогранников в пространствах постоянной кривизны и связанных с ними геометрических величин, в частности, объемов, восходит к классическим работам Н. И. Лобачевского [28], Я. Больяи [39] и Л. Шлефли [61]. Ими были получены явные формулы объемов для тетраэдров специального вида (ортосхем) в трехмерном гиперболическом и сферическом пространстве. Одна из функций, участвующая в формулах для объемов тетраэдров, была введена Дж. Милнором и получила название функции Лобачевского [55].

Современный интерес к получению точных формул для объемов гиперболических многогранников обусловлен не только задачами неевклидовых геометрий, но и исследованием геометрических структур на трехмерных многообразиях и орбифолдах в русле знаменитой гипотезы У. Терстона о геометризации [63]. Среди восьми трехмерных геометрий Терстона именно гиперболическая геометрия является наиболее богатой и активно исследуемой. Напомним, что согласно теореме жесткости, объем гиперболического трехмерного многообразия является его топологическим инвариантом. Это позволяет использовать объемы для распознавания трехмерных гиперболических многообразий. В частности, объемы дополнений к узлам в трехмерной сфере являются инвариантами гиперболических узлов. Исследование связи объемов дополнений к узлам с квантовыми инвариантами узлов, известной как гипотеза Р. Кашаева—Х. Мураками—Дж. Мураками об объемах (см., например, книгу [60] и библиографию в ней), определяет одно из направлений развития современной геометрии.

Приближенные вычисления объемов трехмерных гиперболических многообразий, орбифолдов и многогранников возможны благодаря компьютерным программам SnapPea и Orb, разработанным Дж. Виксом и Д. Хердом. В настоящее время известны приближенные значения объемов для нескольких десятков тысяч таких многообразий.

Однако получение формул, выражающих объем неевклидова многогранника через специальные функции типа дилогарифма Эйлера (или функции Лобачевского), опирается в значительные

технические трудности. Согласно теореме Е. М. Андреева [8, 9], остроугольный многогранник в трехмерном гиперболическом пространстве полностью определяется комбинаторным типом и двугранными углами. Таким образом, естественно возникает задача нахождения объема многогранника заданного комбинаторного типа через его двугранные углы.

Проблема получения точных формул, выражающих объем неевклидова многогранника через двугранные углы (или длины ребер), является центральной проблемой для настоящего обзора.

Рассмотрим кратко содержание работы.

Настоящий обзор, помимо введения и раздела обозначений, включает в себя 5 глав.

В главе 1 подробно изучаются неевклидовы тетраэдры. Ее начальные разделы содержат основные сведения, необходимые для вычисления их объема. Затем будет изложен обзор основных результатов, относящихся к объемам неевклидовых тетраэдров. Сначала мы приводим формулы объемов тетраэдров специального вида: бипрямоугольных тетраэдров (ортосхем), тетраэдров, имеющих вершины на абсолюте, симметричных и  $\mathbb{Z}_2$ -симметричных тетраэдров, а также недавние результаты об объеме тетраэдра с группой симметрии  $S_4$  [4, 10, 21, 22, 28, 55]. Наконец, завершающие разделы главы 1 посвящены объемам произвольных гиперболических и сферических тетраэдров [40, 44, 56–58, 62].

В главе 2 обзора рассматриваются неевклидовы многогранники, имеющие более сложное комбинаторное строение, нежели тетраэдр. Глава имеет следующую структуру. Вначале мы приводим результаты об объеме неевклидова куба Ламберта, полученные Р. Келлерхальц для случая  $\mathbb{H}^3$  (см. [51]) и Д. А. Деревниным и А. Д. Медных для  $\mathbb{S}^3$  (см. [20]). В последующих разделах изучаются некоторые многогранники с нетривиальными симметриями. Мы даем обзор полученных ранее результатов автора и других математиков об объемах неевклидовых многогранников (октаэдров, а в некоторых случаях и двойственных к ним гексаэдров) с  $mmm$ -,  $2|m$ -,  $mm2$ - и  $\bar{3}$ -симметриями, а также *новых результатов* автора об объемах гиперболического и сферического октаэдров с  $4|m$ -симметрией, получение которых основано на применении формулы Сфорца [3, 5–7, 24, 25, 27]. В завершение главы 2 мы представим результаты А. Ю. Веснина об объеме многогранников Лебелля [15], являющихся примерами ограниченных прямоугольных многогранников.

Глава 3 посвящена результатам Н. В. Абросимова, касающихся решения исходной и усиленной гипотез Зейделя [1, 2]. Мы приводим формулировку основных теорем, дающих решение проблемы Зейделя, а также основные идеи их доказательств.

В главе 4 дается обзор современного метода И. Х. Сабитова [33, 34] вычисления объемов многогранников в гиперболическом пространстве (заданного моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве) произвольной размерности через координаты вершин, который позволяет найти объем многогранника через некоторый интеграл по его граничной поверхности, являющейся объединением многогранников меньшей размерности. Затем мы, используя метод И. Х. Сабитова, проведем подробное вычисление объема так называемого *циклического тетраэдра*, а также произвольного гиперболического симплекса в размерности 4. В заключительном разделе главы 4 будет указана структура формулы объема гиперболического симплекса в размерности 5 (обзор последних результатов будет основан на недавней работе автора [26]).

Заключительная глава 5 настоящего обзора посвящена последним результатам о площадях многоугольников на плоскости Лобачевского. Вначале будут представлены результаты А. Д. Медных и его учеников, дающие гиперболические аналоги формулы Брахмагупты и формулы для площади трапеции (см. обзор [36] и библиографию к нему). Наконец, в заключительном разделе главы 5 мы, используя метод Сабитова (подробно рассмотренный в главе 4), выведем *новую формулу* для площади циклического многоугольника, заданного в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Полученная формула площади может найти применение не только в неевклидовых геометриях, но и задачах элементарной математики (при изучении свойств обратных тригонометрических функций).

## НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ

Введем сначала некоторые первичные обозначения, определения и понятия, которые понадобятся нам для обзора основных результатов по теории объемов неевклидовых многогранников.

Рассматривается задача вычисления объема многогранника в классических неевклидовых пространствах. Под неевклидовыми пространствами мы будем понимать преимущественно сферическое пространство  $\mathbb{S}^3$  и гиперболическое пространство (пространство Лобачевского)  $\mathbb{H}^3$ . Также предполагается, что данные пространства наделены стандартными метриками, в которых они имеют постоянные кривизны  $K = 1$  и  $K = -1$  соответственно.

Определим  $\mathbb{S}^3$  как множество точек евклидова пространства  $\mathbb{E}^4$ , координаты которых удовлетворяют условию:

$$(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

Аналогично, определим пространство  $\mathbb{H}^3$  как множество точек псевдоевклидова пространства  $\mathbb{E}^{3,1}$ , координаты которых удовлетворяют следующей системе условий:

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{x}) = -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -1, \\ x_1 > 0. \end{cases}$$

Следовательно, гиперболическое пространство  $\mathbb{H}^3$  может быть реализовано как связная компонента двуполостного гиперboloида  $(\vec{x}, \vec{x}) = -1$  в  $\mathbb{E}^4$ .

Обозначим через  $\mathbb{X}^3$  сферическое пространство  $\mathbb{S}^3$  или гиперболическое пространство  $\mathbb{H}^3$ .

Плоскости, прямые и точки  $\mathbb{S}^3$  (соответственно,  $\mathbb{H}^3$ ) в нашем случае представляют собой пересечение линейных подпространств пространства  $\mathbb{E}^4$  ( $\mathbb{E}^{3,1}$ ) коразмерности один, два и три соответственно, и  $\mathbb{S}^3$  (соответственно,  $\mathbb{H}^3$ ). В частности, всякую плоскость  $H_e \subset \mathbb{X}^3$  можно представить в виде:

$$H_e = \{x \in \mathbb{X}^3 \mid (\vec{x}, \vec{e}) = 0\},$$

где  $\vec{e}$  — единичный вектор нормали к  $H_e$ , т. е.  $(\vec{e}, \vec{e}) = 1$ , а  $\vec{x}$  представляет собой радиус-вектор точки  $x \in \mathbb{X}^3$ .

Точки пространства  $\mathbb{H}^3$  мы также будем иногда называть *собственными* точками пространства  $\mathbb{H}^3$ . Мы также скажем, что прямым, являющимся образующими конуса  $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ , соответствуют *бесконечно удаленные (идеальные)* точки пространства  $\mathbb{H}^3$ . Множество бесконечно удаленных точек, представляющих собой компактификацию пространства  $\mathbb{H}^3$ , будем обозначать через  $\mathbb{H}_\infty^3$ . Наконец, назовем множество  $\mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \mathbb{H}_\infty^3$  *замыканием* пространства  $\mathbb{H}^3$ .

Далее, угол между пересекающимися плоскостями  $H_e$  и  $H_p$  с нормальными векторами  $\vec{e}$  и  $\vec{p}$  пространства  $\mathbb{X}^3$  вычисляется по формуле:

$$\cos(\widehat{H_e, H_p}) = -(\vec{e}, \vec{p}). \quad (1)$$

Легко показать, что расстояние  $\rho(x, y)$  между двумя точками  $x$  и  $y$  пространства  $\mathbb{S}^3$  находится следующим образом:

$$\cos \rho(x, y) = (\vec{x}, \vec{y}),$$

где  $\vec{x}$  и  $\vec{y}$  суть радиус-векторы точек  $x$  и  $y$  соответственно.

В случае гиперболического пространства  $\mathbb{H}^3$  формула для расстояния имеет аналогичный вид:

$$\operatorname{ch} \rho(x, y) = -(\vec{x}, \vec{y}).$$

Далее, назовем *конусом будущего*  $C_+$  множество точек пространства  $\mathbb{E}^4$  ( $\mathbb{E}^{3,1}$ ), координаты которых удовлетворяют следующей системе условий:

$$\begin{cases} (\vec{x}, \vec{x}) = 0, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$$

*Тетраэдр*  $T \subset \mathbb{X}^3$  будет представлять в нашем случае пересечение с пространством  $\mathbb{X}^3$  некоторого замкнутого симплицеального конуса  $K \subset C_+$ .

Так как базис пространства  $\mathbb{E}^4$  ( $\mathbb{E}^{3,1}$ ) однозначно с точностью до ортогонального (псевдоортогонального) преобразования определяется своей матрицей Грама, то из формулы (1) следует, что тетраэдр  $T \subset \mathbb{X}^3$  однозначно с точностью до движения определяется своими двугранными углами. Отметим, что тетраэдр в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^3$  определяется своими двугранными углами лишь с точностью до подобия.

Также отметим, что при  $n \neq 3$  пространства  $\mathbb{S}^n$  и  $\mathbb{H}^n$  определяются аналогично рассмотренному выше случаю  $n = 3$ .

## ГЛАВА 1

### ОБЪЕМЫ НЕЕВКЛИДОВЫХ ТЕТРАЭДРОВ

В главе 1 будут подробно изучены неевклидовы тетраэдры. Вначале мы приведем некоторые предварительные результаты о них, которые используются для вычисления их объемов. Затем нами будет дан обзор основных результатов, относящихся к данной проблематике. Но начнем изучение объемов тетраэдров мы с привычного для нас евклидова случая.

#### 1.1. ОБЪЕМЫ ТЕТРАЭДРОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Вычисление объема многогранника является старой и трудной проблемой, которая и в настоящее время весьма актуальна.

Первый серьезный результат об объеме треугольной пирамиды получен еще Архимедом, а в 16-м веке Тарталья выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер. Хотя задачу нахождения объема тетраэдра через длины его ребер впервые решил, по-видимому, Пьеро ди Франческа. Затем эта задача рассматривалась Л. Пачоли. Тарталья же повторил ее решение в работе «General trattato di numeri et misure» [32]. В настоящее время результат Тартальи может быть выражен с помощью детерминантной формулы Кэли—Менгера. Аналогичная формула имеет место и для многомерных симплексов. Заметим, что в общем виде формула объема евклидова тетраэдра в терминах длин ребер была впервые получена Эйлером (см., например, [32]).

**Теорема 1.1.1** (Тарталья, XVI в.). Пусть  $T$  — евклидов тетраэдр с длинами ребер  $d_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq 4$ , соединяющими  $i$ -ю и  $j$ -ю вершины. Тогда объем данного тетраэдра  $V = V(T)$  вычисляется по формуле:

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Доказательство теоремы 1.1.1 можно найти, например, в [32].

В формуле (1.1.1) объем тетраэдра является корнем квадратного уравнения, коэффициенты которого суть многочлены с целыми коэффициентами, зависящими от длин ребер. Удивительно, но этот результат может быть обобщен и на случай произвольного евклидова многогранника. И. Х. Сабитов доказал соответствующую теорему для произвольного многогранника в  $\mathbb{R}^3$  (см. [31]). Затем Р. Коннели, И. Х. Сабитов и А. Вальц [41] дали второе доказательство для общего случая двумерной полиэдральной поверхности.

**Теорема 1.1.2** (Сабитов, 1996 г.; Connely, Sabitov, Walz, 1997 г.). Пусть  $P$  — многогранник в  $\mathbb{R}^3$  с треугольными гранями и длинами ребер  $d_{ij}$ . Тогда его объем  $V = V(P)$  является корнем многочлена четной степени, коэффициенты которого суть многочлены с рациональными коэффициентами от  $d_{ij}^2$  и зависят только от комбинаторного типа многогранника  $P$ .

Заметим, что данный результат является чисто теоретическим. Явный вид указанных в теореме многочленов известен лишь в частных случаях, например, для октаэдров с симметриями (см. работу [19]).

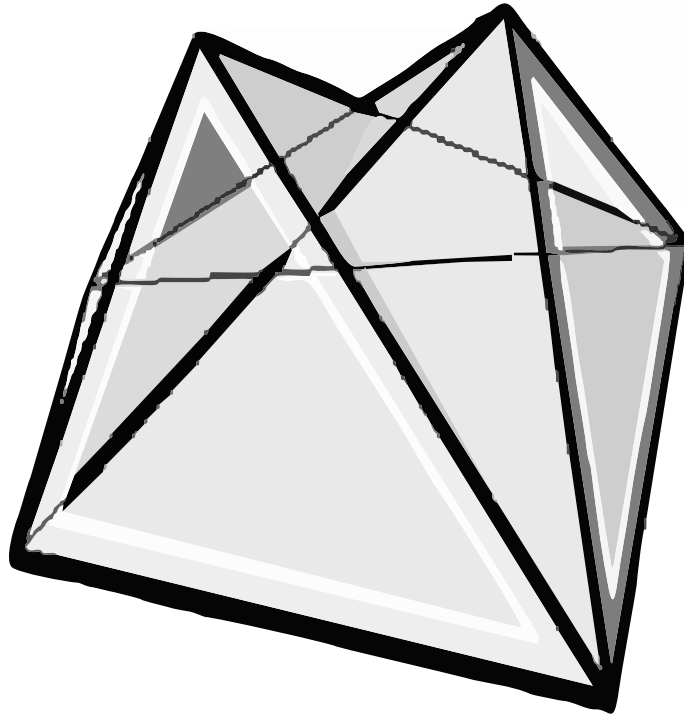


Рис. 1.1.1. Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа

Теорема 1.1.2 позволяет положительно решить *гипотезу о кузнечных мехах*, высказанную в 70-х годах прошлого века.

**Гипотеза о кузнечных мехах** (Connely, Kuiper, Sullivan). *Объем изгибаемого многогранника остается постоянным в процессе изгибания.*

По определению, при изгибании двугранные углы многогранника изменяются непрерывным образом, в то время как его комбинаторный тип не меняется и грани остаются жесткими. Тогда по теореме 1.1.2 все значения объема многогранника при изгибании суть корни одного и того же многочлена с постоянными коэффициентами. Так как множество корней многочлена конечно, то при малой деформации объем изгибаемого многогранника остается постоянным.

Теорема Коши о многогранниках (1813 г.) утверждает, что всякий выпуклый многогранник является жестким. Но это неверно для невыпуклых многогранников: среди них существуют изгибаемые многогранники. Первые примеры изгибаемых многогранников были найдены Брикарсом (1897 г.). Они представляют собой самопересекающиеся октаэдры Брикара 1-го и 2-го типа (см. рис. 1.1.1 и 1.1.2).

Пример изгибаемого многогранника без самопересечений впервые был построен Р. Коннелли в 1978 г. (см., например, [32]). Изгибаемый многогранник Коннелли без самопересечений представлен на рис. 1.1.3.

Еще одним примером изгибаемого многогранника без самопересечений был найден Штеффеном. Изображения многогранника Штеффена, имеющего 14 граней и 9 вершин, а также его развертки представлены на рис. 1.1.4 и 1.1.5.

В 2011 г. А. А. Гайфуллиным [47] был доказан аналог теоремы 1.1.2 для полиэдров в  $\mathbb{R}^4$ , а в 2012 г. им же была доказана аналогичная теорема для многогранника произвольной размерности в случае, когда все его двумерные грани жесткие [48].

Что касается неевклидовых многогранников, то для них аналога теоремы 1.1.2 нет. Из результатов, приведенных в последующих главах и разделах, будет следовать, что объем многогранника в сферическом или в гиперболическом пространствах в общем случае не выражается через элементарные функции.

В свою очередь, особый интерес представляет исследование гипотезы о кузнечных мехах в неевклидовых пространствах. В последние годы был получен ряд фундаментальных результатов

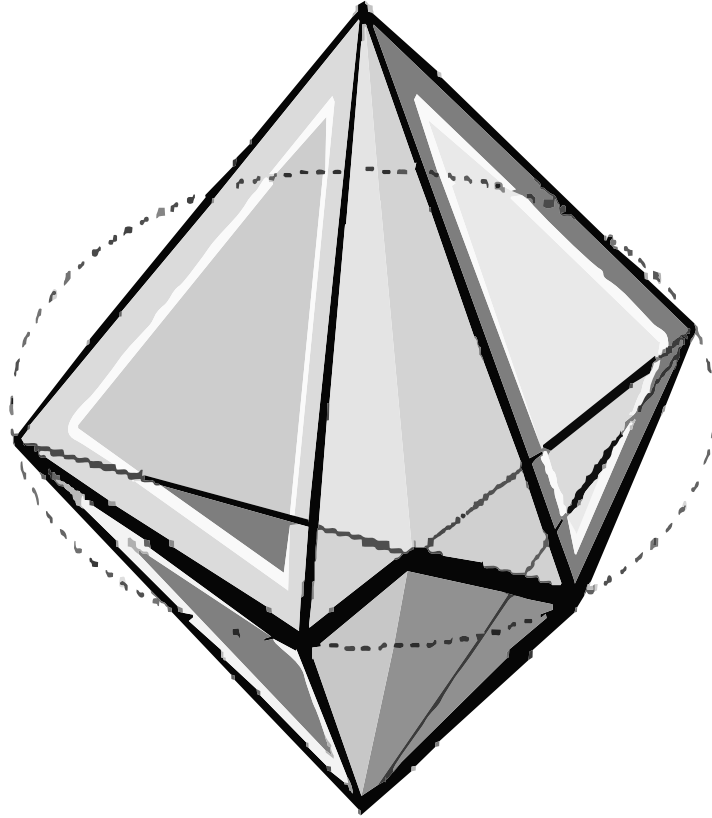


Рис. 1.1.2. Изгибаемый октаэдр Брикара второго типа

по данной проблематике. В частности, в случае сферического пространства  $\mathbb{S}^n$  (при  $n \geq 3$ ) были построены примеры изгибаемых многогранников, не сохраняющих свой объем в процессе изгибания (см. работы [17, 37]). Что касается гиперболического пространства  $\mathbb{H}^n$ , то А. А. Гайфуллиным [18] была доказана справедливость гипотезы кузнечных мехов в нечетных размерностях  $n = 2m + 1$  ( $m \geq 1$ ). Наконец, в недавней работе [49] А. А. Гайфуллин доказал, что данная гипотеза верна для всех изгибаемых многогранников с достаточно малыми длинами ребер как в сферическом, так и в гиперболическом пространствах размерности  $n \geq 3$ .

## 1.2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О НЕЕВКЛИДОВЫХ ТЕТРАЭДРАХ

Перейдем теперь к изучению неевклидовых многогранников. Сначала рассмотрим некоторые предварительные результаты, касающиеся произвольных неевклидовых тетраэдров.

Пусть  $T$  — гиперболический (или сферический) тетраэдр, двугранные углы которого суть  $A, B, C, D, E, F$ . Кроме того, будем полагать, что  $A, B, C$  — двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а  $D, E, F$  — противолежащие им двугранные углы (рис. 1.2.1).

Обозначим через

$$G = \langle -\cos \alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

матрицу Грама тетраэдра  $T$ . Рассмотрим присоединенную матрицу  $H = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$ , где  $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , при этом  $M_{ij}$  —  $ij$ -й минор матрицы  $G$ . В следующей теореме приведены некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер гиперболического тетраэдра (см., например, [64]).

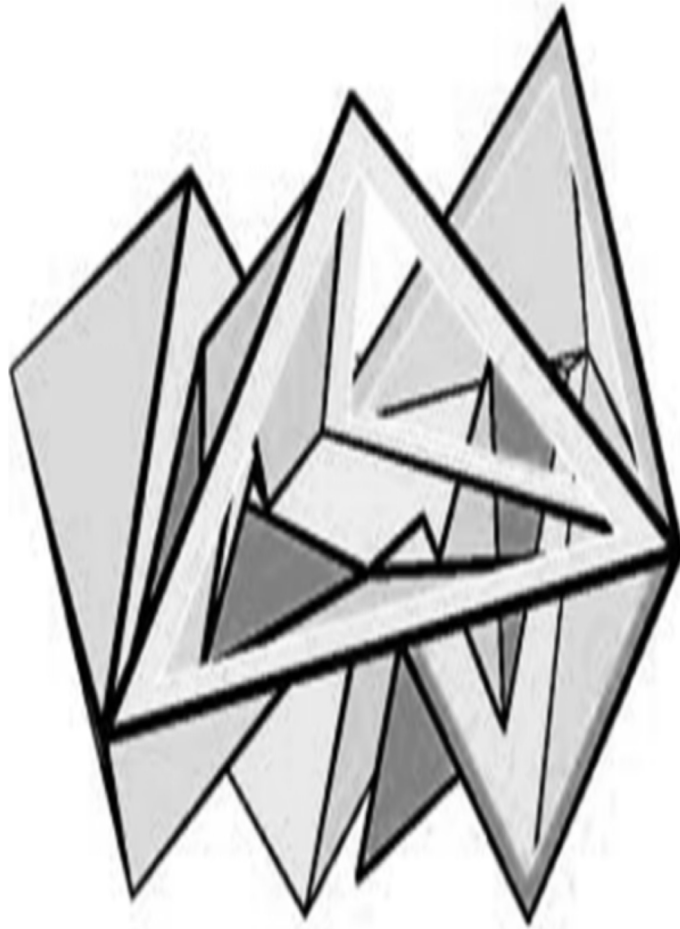


Рис. 1.1.3. Изгибаемый многогранник Коннели

**Теорема 1.2.1.** Пусть  $T$  — гиперболический (соответственно, сферический) тетраэдр. Тогда:

$$(i) \quad \det G < 0 \quad (\det G > 0);$$

$$(ii) \quad c_{ii} > 0; \tag{1.2.2}$$

$$(iii) \quad \operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} \quad (\cos l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}),$$

где  $l_{ij}$  — длина ребра, соединяющего вершины  $V_i$  и  $V_j$ ,  $i, j = \overline{1, 4}, i \neq j$  (см. рис. 1.2.1), а  $G$  — матрица Грама вида (1.2.1).

Основным инструментом при вычислении объемов неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Заметим, что Л. Шлефли [61] доказал эту формулу для сферического  $n$ -мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [52] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда  $n = 3$ .

**Теорема 1.2.2.** Пусть  $P$  — выпуклый многогранник в пространстве  $\mathbb{S}^3$  или  $\mathbb{H}^3$ . Если многогранник  $P$  непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем  $V = V(P)$  также изменяется дифференцируемым образом и его дифференциал выражается



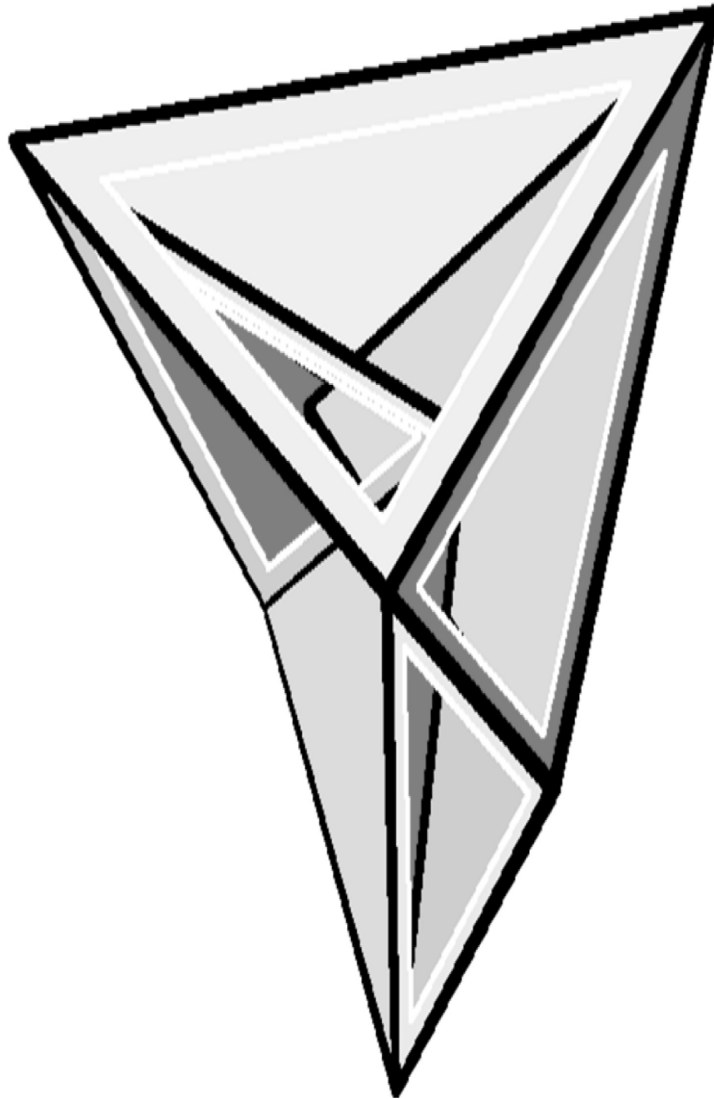


Рис. 1.1.4. Изгибаемый многогранник Штеффена

по формуле

$$K dV = \frac{1}{2} \sum_i l_i d\alpha_i, \quad (1.2.3)$$

где  $K$  — кривизна пространства,  $l_i$  — длина  $i$ -го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника  $P$ . При этом  $d\alpha_i$  обозначает дифференциал двугранного угла  $\alpha_i$  при  $i$ -м ребре.

При доказательстве теоремы 1.2.2 мы будем пользоваться тем, что многогранник  $P$  триангулирован, т. е. его можно представить в виде объединения конечного числа тетраэдров  $P = \bigcup_{i=1}^n T_i$ , и триангуляция деформируется вместе с многогранником. При этом различные тетраэдры разбиения  $T_i \neq T_j$  либо не пересекаются, либо имеют общую вершину, либо общее ребро, либо общую грань. Кроме того, исключается случай, когда ребро тетраэдра триангуляции является частью ребра многогранника  $P$ .

Рассмотрим лемму, которая пригодится нам при доказательстве формулы Шлефли (теоремы 1.2.2).

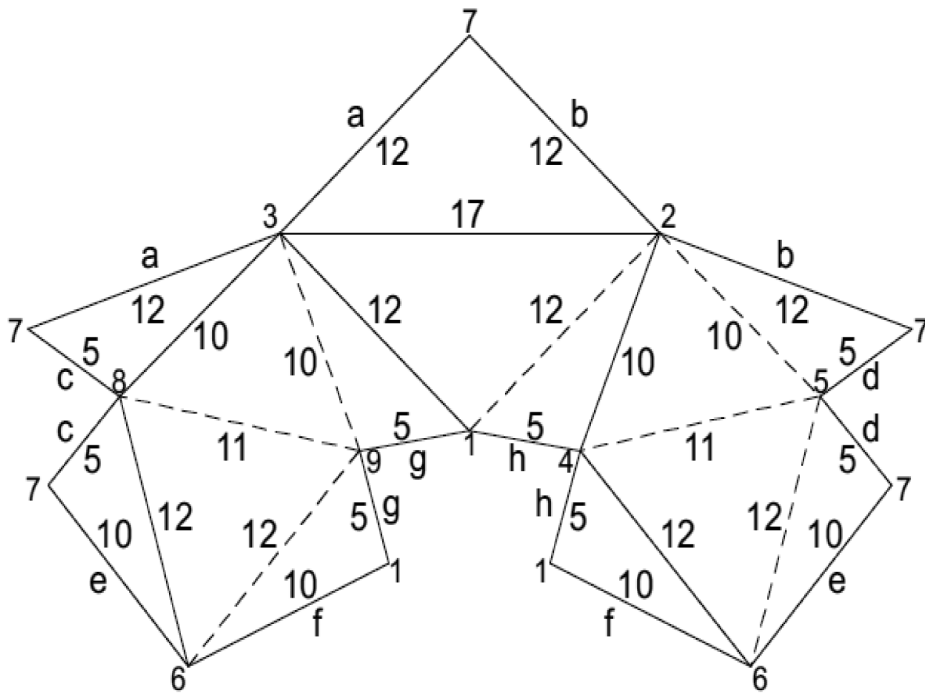


Рис. 1.1.5. Развертка многогранника Штеффена

**Лемма 1.2.1.** *Выражения, стоящие в левой и правой части формулы Шлефли, равны суммам аналогичных выражений для тетраэдров разбиения.*

*Доказательство.* Действительно, что касается левой части, то в силу свойств аддитивности объема и линейности дифференциала имеем:

$$K dV = K \cdot d\left(\sum_{i=1}^n V(T_i)\right) = K \cdot dV(T_1) + K \cdot dV(T_1) + \dots + K \cdot dV(T_n).$$

Таким образом, для левой части формулы Шлефли утверждение леммы доказано. Теперь докажем ее для правой части.

Рассмотрим произвольный тетраэдр разбиения  $T_i$  и его ребро  $a$ , которое не является ребром исходного многогранника  $P$ . Может случиться, что  $T_i$  вообще не имеет ни одного ребра, которое бы совпадало с ребром  $P$ .

Ребро  $a$  принадлежит как минимум еще одному тетраэдру разбиения  $T_j$ , и сумма двугранных углов тетраэдров разбиения при данном ребре всегда постоянна и равна  $2\pi$  или  $\pi$ , если ребро принадлежит грани исходного многогранника.

Теперь для каждого из тетраэдров разбиения составим выражения, аналогичные выражению в правой части формулы Шлефли, и сложим их. Затем сгруппируем слагаемые, которые содержат объемы всех тетраэдров, имеющих одно заданное общее ребро.

После вынесения за скобку длины данного ребра, в скобках получаются суммы следующего вида, которые вследствие свойства линейности дифференциала, примененного уже в другую сторону, равны нулю:

$$d\alpha_1 + d\alpha_2 + \dots + d\alpha_s = d\left(\sum_{i=1}^s \alpha_i\right) = dc = 0,$$

где  $\alpha_i$  — двугранные углы тетраэдров разбиения при соответствующем ребре, а  $c = 2\pi$  (или  $c = \pi$ ).

Следовательно, сумма всех слагаемых, содержащих ребра тетраэдра разбиения, которые не являются ребрами исходного многогранника  $P$ , равна нулю. В свою очередь, просуммировав остальные слагаемые и выполнив аналогичные преобразования, мы получим в точности правую часть формулы Шлефли.  $\square$

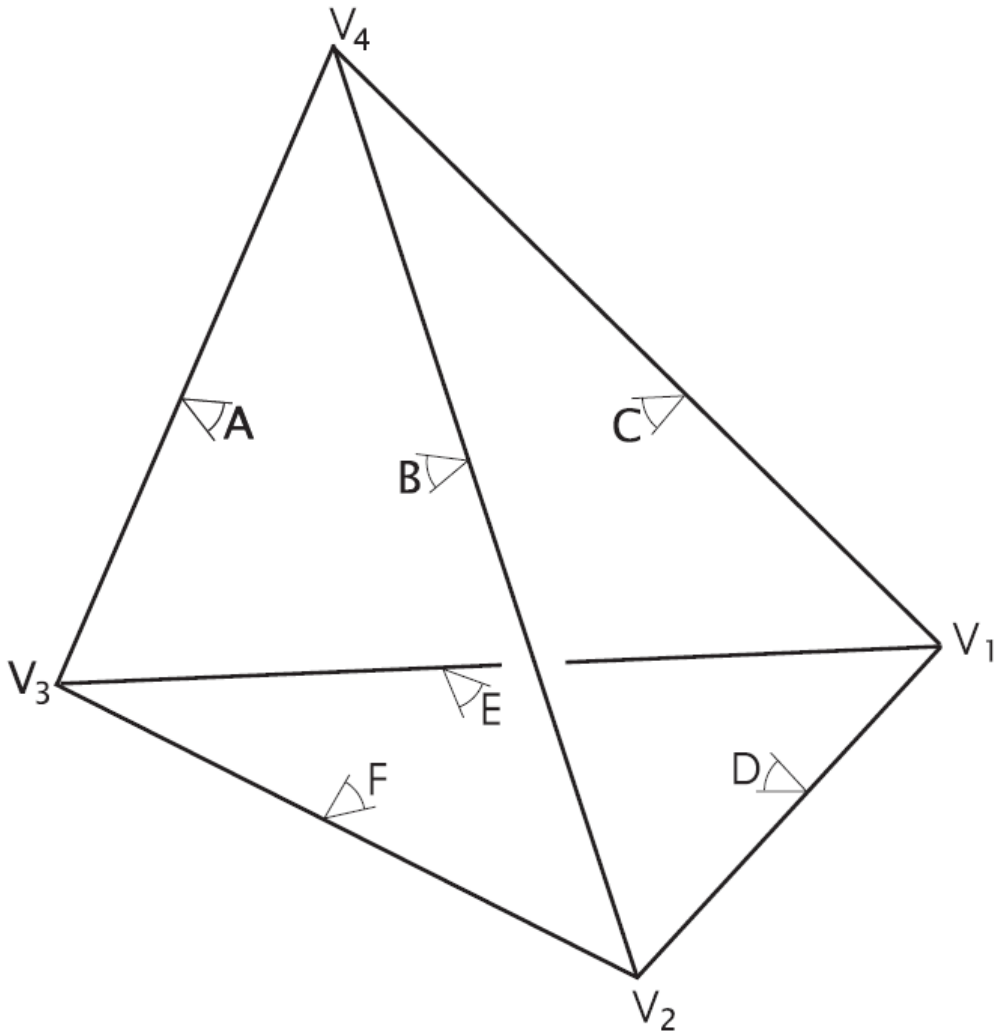


Рис. 1.2.1. Тетраэдр  $T = T(A, B, C, D, E, F)$  в  $\mathbb{H}^3$  или  $\mathbb{S}^3$

Данную лемму мы используем для доказательства теоремы 1.2.2 (в силу леммы 1.2.1, нам достаточно доказать эту теорему для случая тетраэдра).

Для вывода формулы Шлефли нам понадобится понятие *клина* и формула для вычисления объема данного тела (более подробно см., например, [16]).

Пусть, как и прежде,  $\mathbb{X}^3$  — одно из пространств  $\mathbb{S}^3$  или  $\mathbb{H}^3$ ,  $g(t)$  — группа сдвигов вдоль некоторой прямой  $m \subset \mathbb{X}^3$  (более подробное описание однопараметрических групп движений  $\mathbb{X}^3$  содержится также в обзоре Э. Б. Винберга [16]).

Рассмотрим произвольный треугольник  $T \perp m$  с вершиной на прямой  $m$ . Назовем *клином* толщины  $h$  тело  $W$ , зашатаемое треугольником  $T$  под действием движений  $g(t)$ ,  $0 < t < h$ . В свою очередь, сторону треугольника  $T$ , противоположную  $p$ , назовем *кромкой клина*  $W$ , а плоскую фигуру (эквидистантный сектор), зашатаемую высотой треугольника  $T$ , опущенной из  $p$ , под действием движений  $g(t)$ ,  $0 < t < h$ , — его *срезом* (при этом срез не обязан содержаться в клине). Точку  $p$  будем называть *вершиной клина* (рис. 1.2.2).

Имеет место формула (доказательство можно найти, например, в работе [16]), выражающая объем  $V(W)$  клина  $W \subset \mathbb{X}^3$ :

$$V(W) = \frac{1}{2} \cdot l \cdot S,$$

где  $l$  и  $S$  представляют собой длину кромки и площадь среза клина  $W$  соответственно.

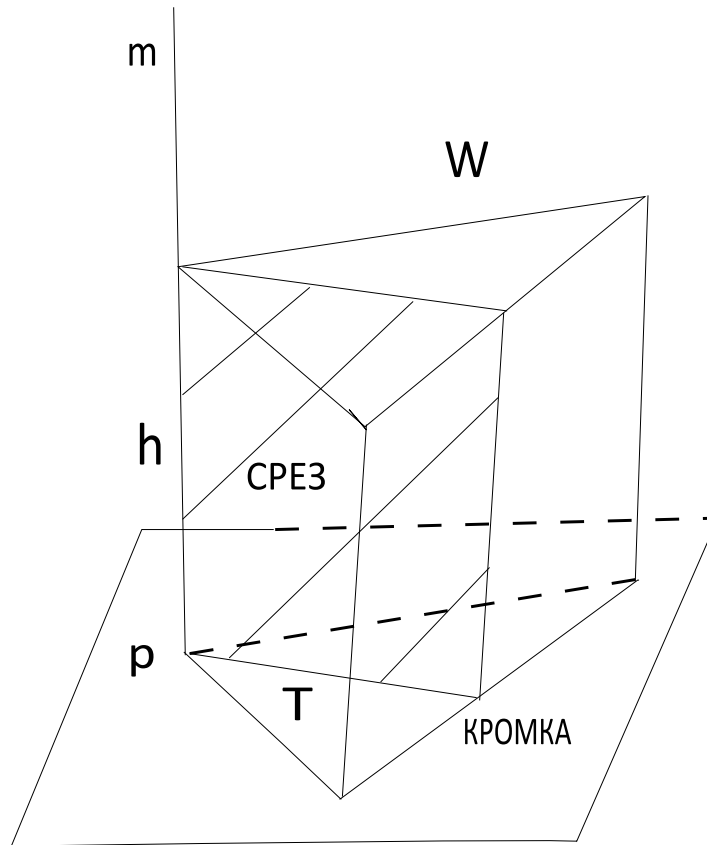


Рис. 1.2.2. Клиn  $W$

Теперь мы готовы дать доказательство теоремы 1.2.2.

**Замечание 1.2.1.** Приведенное ниже доказательство максимально приближено к доказательству формулы Шлефли, предложенному в вышеупомянутом обзоре Э. Б. Винберга [16].

*Доказательство теоремы 1.2.2.* Докажем справедливость теоремы 1.2.2 для произвольного неевклидова тетраэдра  $T$ .

Пусть тетраэдр  $T$  ограничен плоскостями  $H_1, H_2, H_3$  и  $H_4$ . Рассмотрим деформацию такого многогранника, при которой изменяется только один двугранный угол. Такая деформация может быть получена как бесконечно малый сдвиг плоскости  $H_1$  вдоль прямой  $m = H_3 \cap H_4$ .

При таком сдвиге изменится лишь двугранный угол  $\alpha$  при ребре  $e = T \cap H_1 \cap H_2$ .

Далее, пусть  $p$  — вершина  $T$ , которая не принадлежит  $H_2$ , а  $m'$  — проходящая через нее прямая, перпендикулярная  $H_1$ .

Таким образом, приращение объема исходного тетраэдра  $T$  можно рассматривать как бесконечно тонкий клин с ребром, принадлежащим  $m'$  (рис. 1.2.3).

Площадь среза данного клина равна площади четырехугольника  $Q$  с угловым дефектом  $d\alpha$  (рис. 1.2.4).

Следовательно, площадь четырехугольника  $Q$  равна  $K \cdot d\alpha$ , поэтому в силу формулы для объема клина мы получим:

$$K \cdot dV(T) = \frac{1}{2} \cdot e \cdot d\alpha.$$

Таким образом, формула Шлефли доказана. □

Наконец, нам понадобится также следующее утверждение, доказанное Якоби (см., например, [36]).

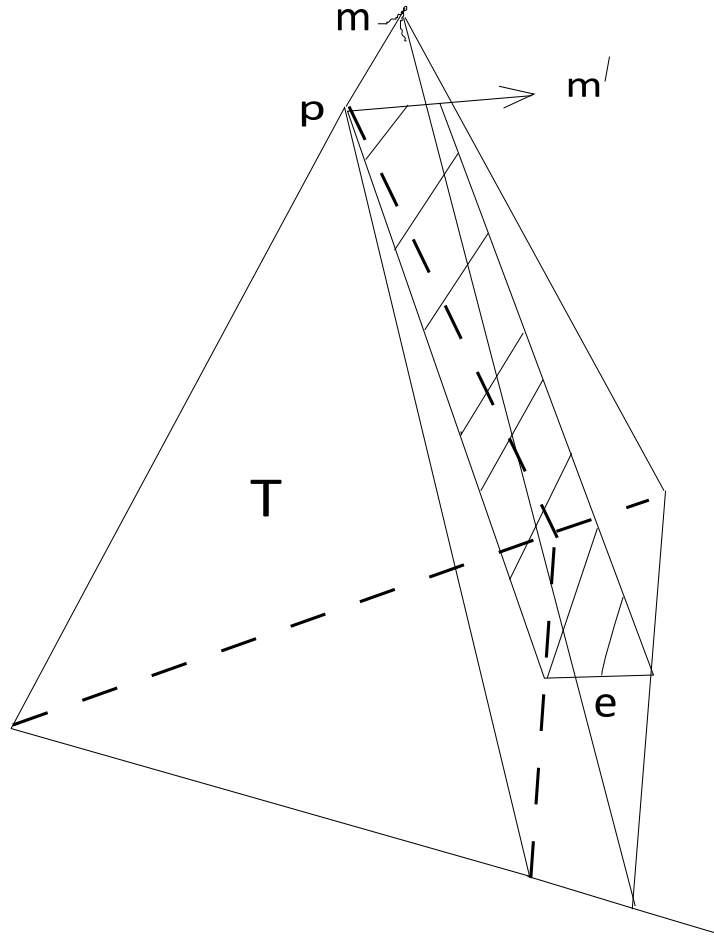


Рис. 1.2.3

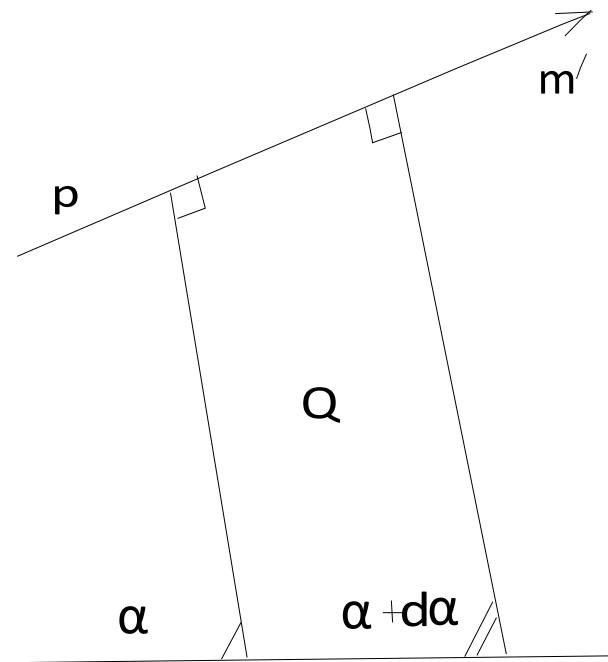


Рис. 1.2.4. Четырехугольник  $Q$

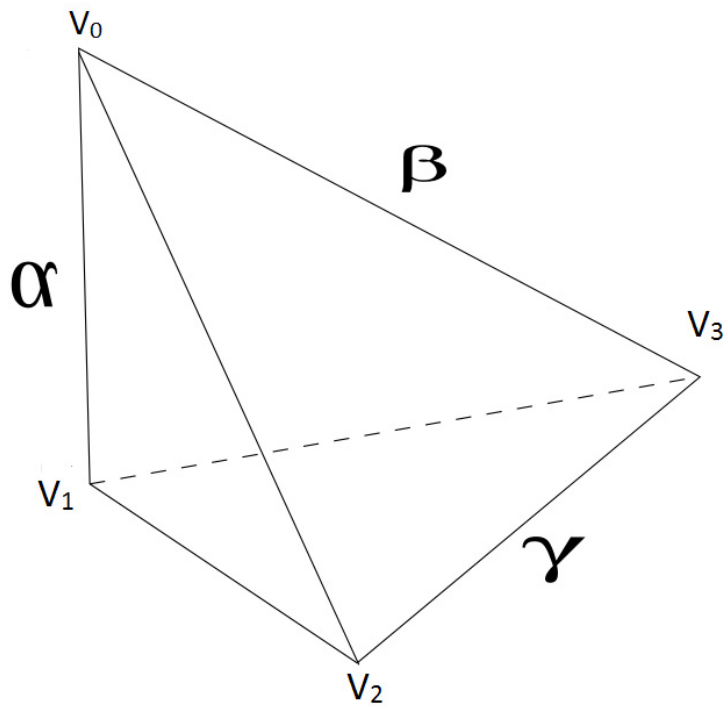


Рис. 1.3.1. Ортосхема  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$

**Теорема 1.2.3** (теорема Якоби). Пусть  $M = \langle m_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,n}$  — матрица с определителем  $\Delta = \det M$ . Далее, пусть  $H = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$ , где  $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ , а  $M_{ij}$  —  $ij$ -й минор матрицы  $G$ . Тогда для любых  $k, 1 \leq k \leq n - 1$  имеет место равенство

$$\det \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,\dots,k} = \Delta^{k-1} \det \langle m_{ij} \rangle_{i,j=k+1,\dots,n}. \tag{1.2.4}$$

В свою очередь, критерии существования неевклидовых тетраэдров, заданных набором двугранных углов, задаются следующими теоремами (см., например, [16]).

**Теорема 1.2.4.** Для существования компактного гиперболического тетраэдра  $T = T(A, B, C, D, E, F)$  необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама  $G$  вида (1.1.1) имела сигнатуру  $(3, 1)$ , а все элементы матрицы  $H$  были положительными.

**Теорема 1.2.5.** Для существования сферического тетраэдра  $T = T(A, B, C, D, E, F)$  необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама  $G$  вида (1.1.1) была положительно определена.

### 1.3. ОБЪЕМ ОРТОСХЕМЫ В $\mathbb{S}^3$ И $\mathbb{H}^3$

Первые шаги к решению задачи вычисления объемов неевклидовых многогранников были сделаны еще Н. И. Лобачевским, Я. Больяи и Л. Шлефли [28, 39, 61]. Они (независимо друг от друга) вычислили объемы так называемых неевклидовых ортосхем.

**Определение 1.3.1.** Ортосхемой в  $\mathbb{X}^n$  называется  $n$ -мерный симплекс, имеющий последовательность взаимно ортогональных ребер  $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n)$ .

Трехмерную ортосхему часто называют *бипрямоугольным тетраэдром*.

Из шести двугранных углов ортосхемы  $T$  три — прямые. Остальные три обозначим буквами  $\alpha, \beta, \gamma$  и назовем их *существенными двугранными углами* (рис. 1.3.1).

**Замечание 1.3.1.** Ортосхемы особенно интересны в связи с тем, что всякий тетраэдр можно разбить на бипрямоугольные, опустив из какой-либо его вершины перпендикуляры на плоскость противоположной грани и на прямые, ограничивающие эту грань (рис. 1.3.2).

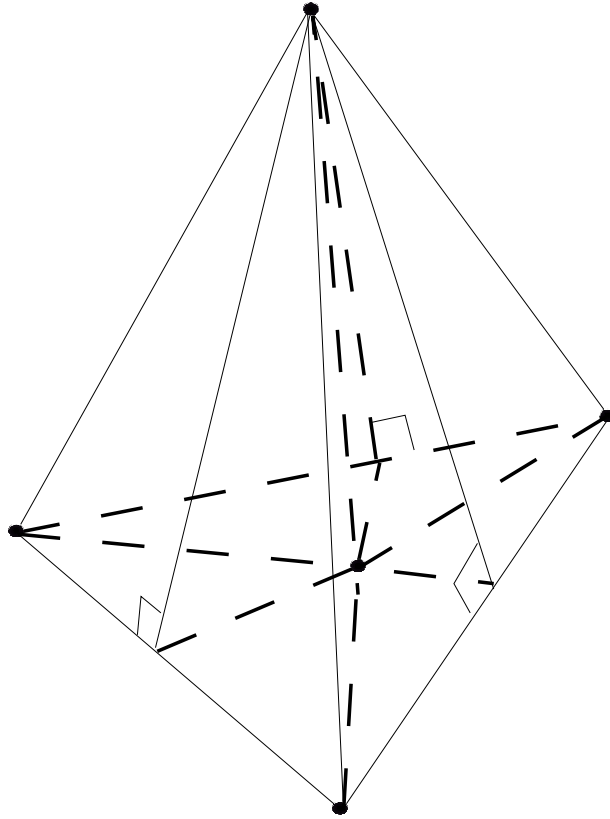


Рис. 1.3.2. Разбиение произвольного тетраэдра на ортосхемы

**Теорема 1.3.1** (Schläfli, 1858 г.). Пусть  $T$  — сферическая ортосхема с существенными двугранными углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда ее объем  $V = V(T)$  задается формулой:

$$V = \frac{1}{4}S(\alpha, \beta, \gamma),$$

где

$$S\left(\frac{\pi}{2} - x, y, \frac{\pi}{2} - z\right) = \hat{S}(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{D - \sin x \sin y}{D + \sin x \sin y} \right)^m \times \right. \\ \left. \times \frac{\cos 2mx - \cos 2my + \cos 2mz - 1}{m^2} \right] - x^2 + y^2 - z^2,$$

а

$$D \equiv \sqrt{\cos^2 x \cos^2 z - \cos^2 y}.$$

Доказательство теоремы 1.3.1 приведено в работе [61].

Функция  $S = S(x, y, z)$ , которая фигурирует в теореме 1.3.1, носит название *функции Шлефли*.

В свою очередь, объем ортосхемы в  $\mathbb{H}^3$  вычислили независимо друг от друга Н. И. Лобачевский [28] и Я. Больяи [39].

В следующей теореме результат Н. И. Лобачевского представлен в очень компактном виде. В такой форме его впервые записал Г. С. М. Кокстер [42].

**Теорема 1.3.2** (Лобачевский, 1835 г.; Coxeter, 1935 г.). Пусть  $T$  — бипрямоугольный тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$  с существенными двугранными углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда его объем  $V = V(T)$  задается формулой:

$$V = \frac{i}{4}S(\alpha, \beta, \gamma),$$

где  $S = S(\alpha, \beta, \gamma)$  — функция Шлефли.

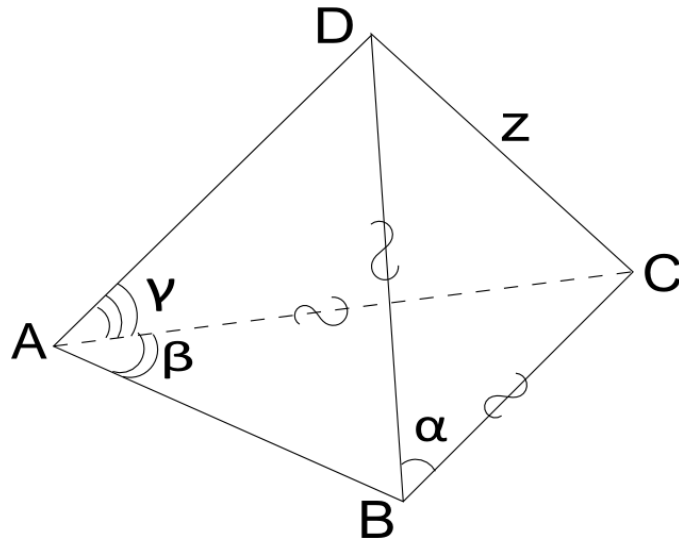


Рис. 1.3.3

В заключении данного раздела мы приведем результат Я. Больяи [39], который вычислил объем гиперболического бипрямоугольного тетраэдра в терминах его плоских углов и длины ребра.

Пусть  $T = ABCD$  — бипрямоугольный тетраэдр с прямыми двугранными углами при ребрах  $AC, BC, BD$ . Далее, пусть  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — величины соответствующих плоских углов, а  $z$  — длина ребра  $CD$  (рис. 1.3.3).

**Теорема 1.3.3** (Bolyai, 1832 г.). Пусть  $T$  — бипрямоугольный тетраэдр с плоскими углами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  и длиной ребра  $z$  (рис. 1.3.3). Тогда его объем  $V = V(T)$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{2 \operatorname{tg} \beta} \int_0^z \frac{u \operatorname{sh} u \operatorname{du}}{\left(\frac{\operatorname{ch}^2 u}{\cos^2 \alpha} - 1\right) \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 u}{\cos^2 \gamma} - 1}}.$$

#### 1.4. ОБЪЕМ ИДЕАЛЬНОГО ТЕТРАЭДРА В $\mathbb{H}^3$

**Определение 1.4.1.** Идеальным тетраэдром называется гиперболический тетраэдр, все вершины которого являются идеальными (т. е. лежат на абсолюте).

Сумма двугранных углов при каждой вершине такого тетраэдра равна  $\pi$ . Нетрудно показать, что противоположные двугранные углы идеального тетраэдра попарно равны, т. е. он однозначно с точностью до движения определяется тремя двугранными углами  $A, B$  и  $C$ . Таким образом,  $T = T(A, B, C)$ .

Объем идеального тетраэдра был впервые вычислен Н. И. Лобачевским [28]. Дж. Милнор [55] же представил результат Лобачевского в более элегантном виде.

**Теорема 1.4.1** (Лобачевский, 1835 г.; Milnor, 1982 г.). Пусть  $T$  — идеальный тетраэдр с двугранными углами  $A, B$  и  $C$ . Тогда его объем выражается формулой:

$$V = \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C), \tag{1.4.1}$$

где

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin t| dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

есть функция Лобачевского.



**Замечание 1.4.1.** Функция  $\Lambda(x)$ , фигурирующая в формуле (1.4.1), была введена Д. Милнором в работе [55] и является модифицированным определением специальной функции

$$L(x) = - \int_0^x \ln |\cos t| dt,$$

введенной самим Н. И. Лобачевским в [28]. Функции  $L(x)$  и  $\Lambda(x)$  связаны между собой соотношением:

$$L(x) = \Lambda\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + x \ln 2.$$

В дальнейшем под функцией Лобачевского мы будем понимать именно модифицированную функцию  $\Lambda(x)$ .

В теореме 1.3.1 объем гиперболической ортосхемы выражается через функцию Шлефли. Однако объем такого тетраэдра может быть выражен и через спецфункцию Лобачевского.

Справедлива

**Теорема 1.4.2** (Лобачевский, 1835 г.; Kellerhals, 1989 г.; Винберг, 1993 г.). Пусть  $T$  — гиперболический бипрямоугольный тетраэдр  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$  с двугранными углами  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда его объем  $V = V(T)$  задается формулой

$$V(T) = \frac{1}{4} [\Lambda(\alpha + \delta) - \Lambda(\alpha - \delta) + \Lambda(\gamma + \delta) - \Lambda(\gamma - \delta) - \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta\right) + \\ + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta\right) - \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) - \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)],$$

где

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin t| dt,$$

а острый угол  $\delta$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Доказательство теоремы 1.4.2 основано на применении формулы Шлефли к некоторой непрерывной деформации  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ , в процессе которой тетраэдр остается бипрямоугольным.

Приведенное ниже доказательство базируется на работах [16, 51].

*Доказательство.* Если обозначить через  $a, b$  и  $c$  ребра, двугранные углы при которых равны соответственно  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , то для гиперболического пространства  $\mathbb{H}^3$  имеет место соотношение<sup>1</sup>:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{th} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \operatorname{th} b = \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{th} c = \operatorname{tg} \delta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\cos \alpha \cos \gamma}, \quad (1.4.2)$$

где

$$\Delta = \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma - \cos^2 \beta$$

представляет собой определитель матрицы Грама  $G$  тетраэдра  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & 1 & -\cos \beta & 0 \\ 0 & -\cos \beta & 1 & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

<sup>1</sup>данные формулы можно получить прямыми вычислениями, используя пункт (iii) теоремы 1.2.1

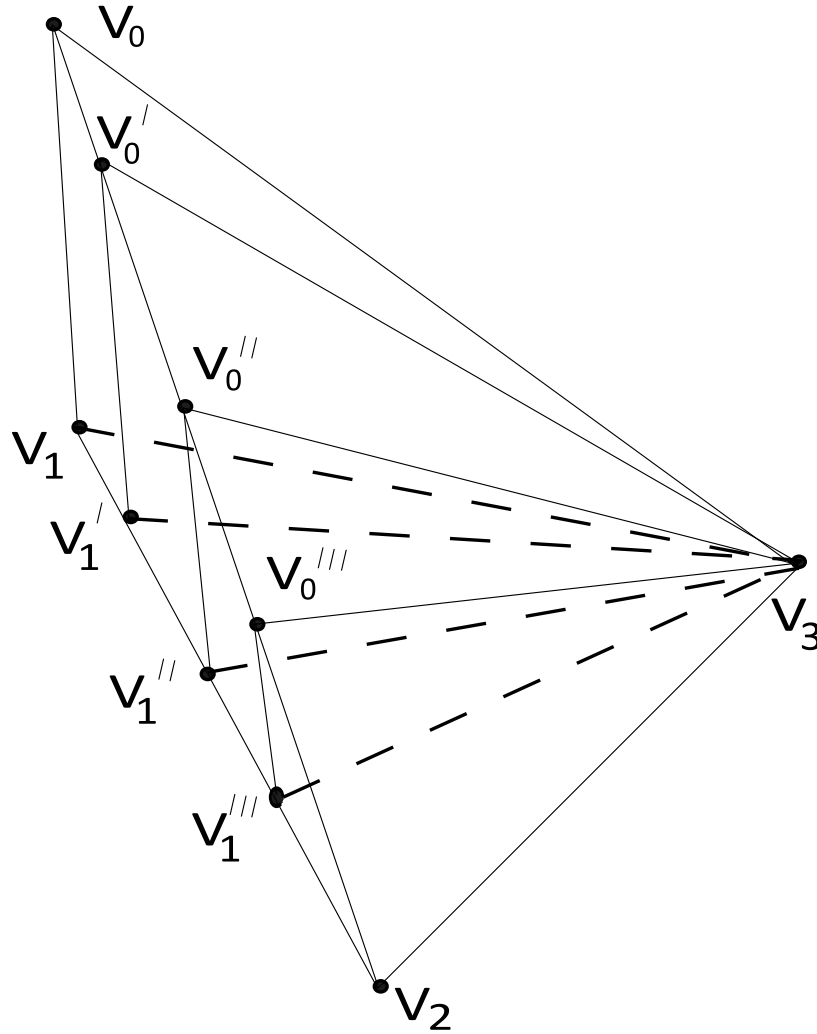


Рис. 1.4.1. Деформация ортосхемы  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$

Из приведенных формул, выполнив несложные преобразования, можно выразить длины ребер  $a, b$  и  $c$  через величины двугранных углов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Окончательно имеем:

$$a = \frac{1}{2} \ln \sin \frac{(\alpha + \delta)}{(\alpha - \delta)}, \quad b = \frac{1}{2} \ln \sin \frac{(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta)}{(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta)}, \quad c = \frac{1}{2} \ln \sin \frac{(\gamma + \delta)}{(\gamma - \delta)}. \quad (1.4.3)$$

Теперь будем стягивать наш тетраэдр к ребру  $V_2V_3$  так, чтобы величины  $c$  и  $\gamma$ , а значит, и  $\delta$ , не изменялись, а сам тетраэдр оставался при этом бипрямоугольным (рис. 1.4.1).

Аналогично,  $T$  можно было стянуть и к ребру  $V_0V_1$  так, чтобы величины  $a$  и  $\alpha$ , а значит, и  $\delta$ , оставались неизменными.

Таким образом, путем последовательного применения двух вышеописанных деформаций, нашу ортосхему можно стянуть в точку таким образом, чтобы она в процессе деформации оставалась ортосхемой, а величина  $\delta$  при этом не изменялась.

Согласно формуле Шлефли,

$$dV = -\frac{1}{2}(ad\alpha + bd\beta + cd\gamma).$$

При этом три других слагаемых в формуле Шлефли в нашем случае равны нулю, так как мы рассматриваем деформацию, при которой тетраэдр все время остается бипрямоугольным. А значит, величины трех других двугранных углов (прямых) в процессе деформации не изменяются, то есть их дифференциалы равны нулю.

Осталось теперь выяснить, в каких же пределах будут меняться углы  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Согласно формуле (1.4.2),

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{th} a}, \quad \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{th} b}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{th} c}.$$

Теперь, перейдя к пределам в последних равенствах при  $a, b, c \rightarrow 0$ , получаем, что углы  $\alpha, \frac{\pi}{2} - \beta$  и  $\gamma$  будут стремиться к  $\frac{\pi}{2}$ .

Значит, угол  $\alpha$  будет меняться в пределах от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\alpha$ ,  $\beta$  — от 0 до  $\beta$ , а  $\gamma$  — от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\gamma$ .

Таким образом, используя вышеописанную деформацию и формулы (1.4.3), можно проинтегрировать формулу Шлефли для  $dV$ . С учетом свойства симметрии функции Лобачевского  $\Lambda(\pi - x) = -\Lambda(x)$ , получаем:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{1}{4} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \ln \sin \left( \frac{\varphi + \delta}{\varphi - \delta} \right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\gamma} \ln \sin \left( \frac{\varphi + \delta}{\varphi - \delta} \right) d\varphi + \int_0^{\beta} \ln \sin \left( \frac{\frac{\pi}{2} - \varphi + \delta}{\frac{\pi}{2} - \varphi - \delta} \right) d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{4} [\Lambda(\alpha + \delta) - \Lambda(\alpha - \delta) + \Lambda(\gamma + \delta) - \Lambda(\gamma - \delta) - \Lambda(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta) + \\ &\quad + \Lambda(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta) - \Lambda(\frac{\pi}{2} + \delta) - \Lambda(\frac{\pi}{2} - \delta)]. \end{aligned}$$

Таким образом, теорема доказана. □

### 1.5. ОБЪЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ПИРАМИД, ИМЕЮЩИХ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫЕ ВЕРШИНЫ

В настоящем разделе будут представлены формулы объемов тетраэдров, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найденные Э. Б. Винбергом в работе [16].

Рассмотрим сначала гиперболический тетраэдр, имеющий три бесконечно удаленные вершины.

Учитывая, что сумма двугранных углов при бесконечно удаленной вершине постоянна и равна  $\pi$ , можно показать, что такой тетраэдр однозначно с точностью до движения пространства определяется тремя двугранными углами  $A, B$  и  $C$  (рис. 1.5.1). При этом двугранные углы  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , противоположные  $A, B$  и  $C$ , связаны между собой соотношениями:

$$A_1 = \frac{1}{2}(\pi + A - B - C), \quad B_1 = \frac{1}{2}(\pi - A + B - C), \quad C_1 = \frac{1}{2}(\pi - A - B + C).$$

Объем гиперболического тетраэдра  $T = T(A, B, C)$  с тремя вершинами на бесконечности задается следующей теоремой.

**Теорема 1.5.1** (Винберг, 1993 г.). Пусть  $T = T(A, B, C)$  — гиперболический тетраэдр с тремя бесконечно удаленными вершинами (рис. 1.5.1). Тогда его объем  $V = V(T)$  выражается формулой

$$V(T) = \frac{1}{2} \left[ \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C) + \Lambda(A_1) + \Lambda(B_1) + \Lambda(C_1) - \Lambda \left( \frac{A + B + C - \pi}{2} \right) \right],$$

где

$$A_1 = \frac{\pi - A - B - C}{2}, \quad B_1 = \frac{\pi - A + B - C}{2}, \quad C_1 = \frac{\pi - A - B + C}{2},$$

а  $\Lambda = \Lambda(x)$  — функция Лобачевского:

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin t| dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

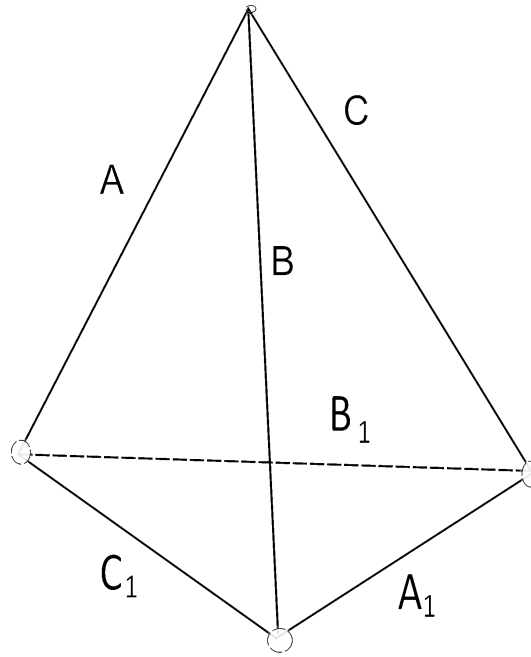


Рис. 1.5.1. Тетраэдр  $T = T(A, B, C)$  с тремя бесконечно удаленными вершинами

При доказательстве теоремы 1.5.1 используется наглядный геометрический прием «достраивания» тетраэдра  $T = T(A, B, C)$  до более сложного многогранника (идеального октаэдра) таким образом, чтобы исходный многогранник представлял собой тетраэдр, подходящей для вычисления его объема триангуляции. Таким образом, формула для объема  $T = T(A, B, C)$  получается из свойства аддитивности объема с помощью известных ранее формул.

Приведем подробное доказательство теоремы 1.5.1, опираясь на работу [16].

*Доказательство.* Продолжим до бесконечности ребра тетраэдра. Получим 6 бесконечно удаленных точек, которые служат вершинами некоторого идеального октаэдра (рис. 1.5.2).

Из приведенного рисунка нетрудно видеть, что объем идеального октаэдра можно представить в виде суммы объемов 8 тетраэдров, имеющих 3 бесконечно удаленные вершины, а двугранные углы тетраэдров разбиения либо равны  $A, B$  или  $C$ , либо смежны с ними.

Далее, пусть  $T_1$  и  $T_2$  — тетраэдры разбиения идеального октаэдра, смежные с исходным тетраэдром  $T = T(A, B, C)$  по граням  $M_1M_3M_4$  и  $M_1M_2M_4$  соответственно, а  $T'_2$  — тетраэдр, симметричный  $T_2$  относительно точки  $M_1$ . Тогда, используя свойство аддитивности объема, получаем:

$$2V(T) = V(T \cup T_1) + V(T \cup T_2) - V(T_1 \cup T'_2). \tag{1.5.1}$$

В свою очередь, тетраэдры  $T \cup T_1$ ,  $T \cup T_2$  и  $T_1 \cup T'_2$  являются идеальными, и их объемы можно нетрудно вычислить по формуле Милнора

$$V(T \cup T_1) = \Lambda(A) + \Lambda(B_1) + \Lambda(C_1),$$

$$V(T \cup T_2) = \Lambda(A_1) + \Lambda(B) + \Lambda(C_1),$$

$$V(T_1 \cup T'_2) = \Lambda(\pi - C) + \Lambda(C_1) + \Lambda\left(\frac{1}{2}(A + B + C - \pi)\right). \tag{1.5.2}$$

Подставив выражения (1.5.2) в (1.5.1), получим требуемую формулу. □

Результаты, представленные в теоремах 1.4.1 и 1.5.1, являются частными случаями формулы для объема пирамиды с бесконечно удаленной вершиной.

Рассмотрим гиперболическую пирамиду  $P$  с бесконечно удаленной вершиной, двугранные углы которой при основании равны  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , а двугранные углы при боковых ребрах суть

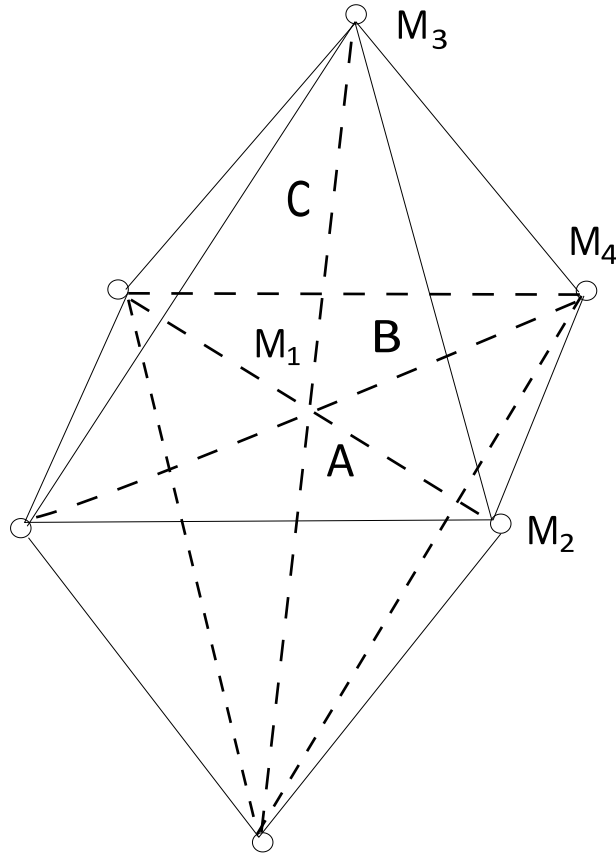


Рис. 1.5.2

$B_1, B_2, \dots, B_n$ , причем данные углы занумерованы так, как показано на рис. 1.5.3 (для случая  $n = 4$ ).

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.5.2** (Винберг, 1993 г.). Пусть  $P$  — пирамида в  $\mathbb{H}^3$  с бесконечно удаленной вершиной, где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — двугранные углы при основании, причем  $A_{n+1} = A_1$ , а  $B_1, B_2, \dots, B_n$  — двугранные углы при боковых ребрах, занумерованные как на рис. 1.3.1. Тогда объем пирамиды  $V = V(P)$  может быть вычислен по формуле

$$V(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \Lambda(B_i) + \Lambda\left(\frac{\pi + A_i - A_{i+1} - B_i}{2}\right) + \right. \\ \left. + \Lambda\left(\frac{\pi - A_i + A_{i+1} - B_i}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{\pi - A_i - A_{i+1} + B_i}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{A_i + A_{i+1} + B_i - \pi}{2}\right) \right].$$

Основная идея доказательства теоремы 1.5.2 заключается в разбиении  $P$  на пирамиды, аналогичные пирамиде  $\hat{P}$  (рис. 1.5.4). У такой пирамиды вершина  $C$  является идеальной, боковое ребро  $CD$  перпендикулярно основанию, а стороны основания, выходящие из  $D$ , перпендикулярны двум другим сторонам основания.

Вычисляя методом «достраивания» (как в доказательстве теоремы 1.5.1) объемы пирамид разбиения, можно получить формулу объема исходной пирамиды  $P$ . В свою очередь, данное разбиение можно получить, опустив перпендикуляр из бесконечно удаленной вершины на противоположную грань и на прямые, ограничивающие эту грань (см. рис. 1.5.5). Подробное вычисление объема пирамиды с бесконечно удаленной вершиной можно найти в обзоре Э. Б. Винберга [16].

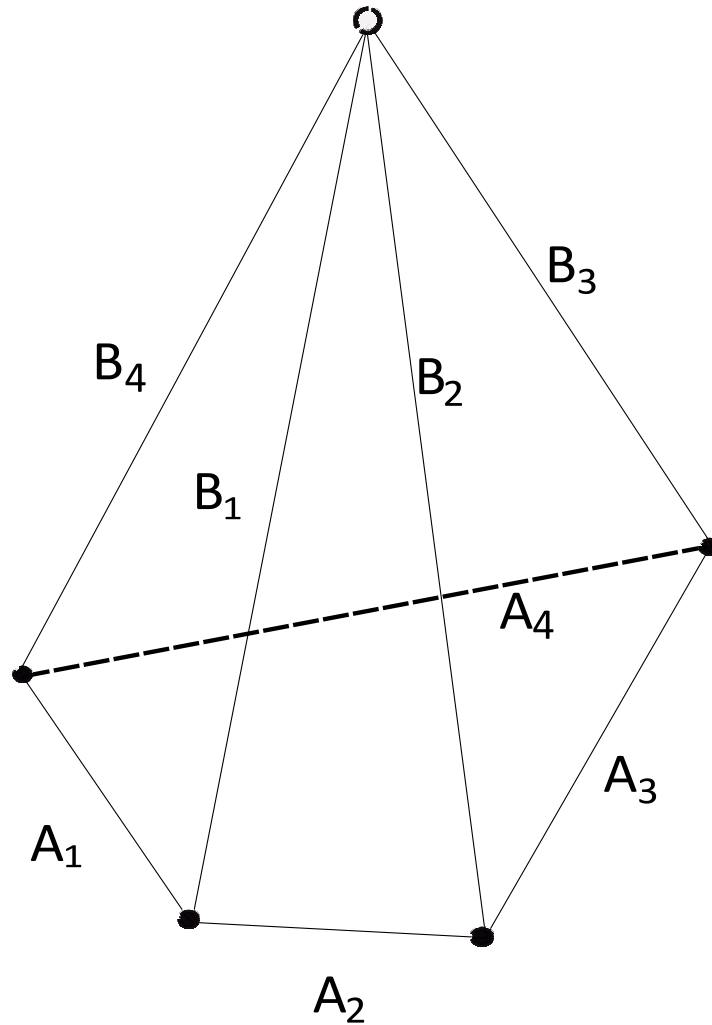


Рис. 1.5.3. Гиперболическая пирамида  $P$  с бесконечно удаленной вершиной

1.6. ОБЪЕМЫ СИММЕТРИЧНЫХ И  $\mathbb{Z}_2$ -СИММЕТРИЧНЫХ ТЕТРАЭДРОВ

В данном подразделе мы рассмотрим интегральные формулы для вычисления объема симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах, а также результат Колпакова—Медных—Пашкевич об объеме сферического тетраэдра, обладающего так называемой  $\mathbb{Z}_2$ -симметрией.

**1.6.1. Объем симметричного тетраэдра в  $\mathbb{H}^3$  и  $\mathbb{S}^3$ .**

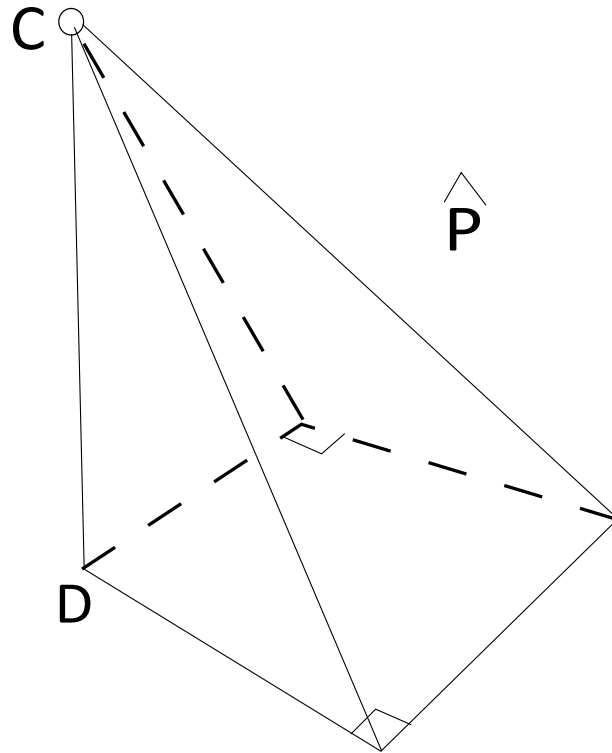
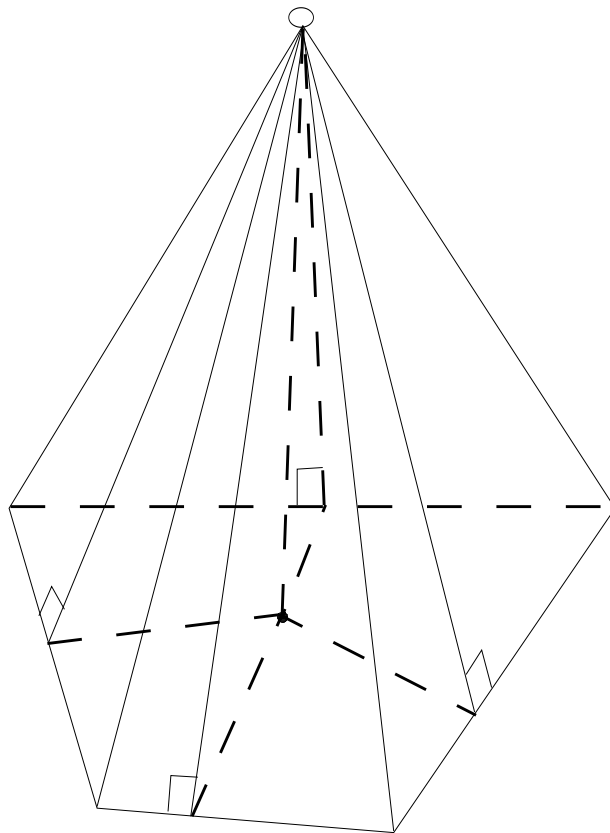
**Определение 1.6.1.** Тетраэдр  $T$  называется *симметричным*, если его двугранные углы при скрещивающихся ребрах попарно равны.

Рассмотрим сначала симметричный гиперболический тетраэдр  $T = T(A, B, C)$  с двугранными углами  $A = D, B = E, C = F$  (рис. 1.6.1).

Формула объема данного тетраэдра задается следующей теоремой.

**Теорема 1.6.1** (Деревнин, Медных, Пашкевич, 2004 г.). Пусть  $T = T(A, B, C)$  — симметричный тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$ . Тогда его объем  $V = V(T)$  может быть вычислен по формуле

$$V(T) = 2 \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} (\arcsin(\cos A \cos t) + \arcsin(\cos B \cos t) + \arcsin(\cos C \cos t) - \arcsin(\cos t)) \frac{dt}{\sin 2t},$$

Рис. 1.5.4. Пирамида  $\hat{P}$ Рис. 1.5.5. Разбиение пирамиды  $P$  на пирамиды типа  $\hat{P}$

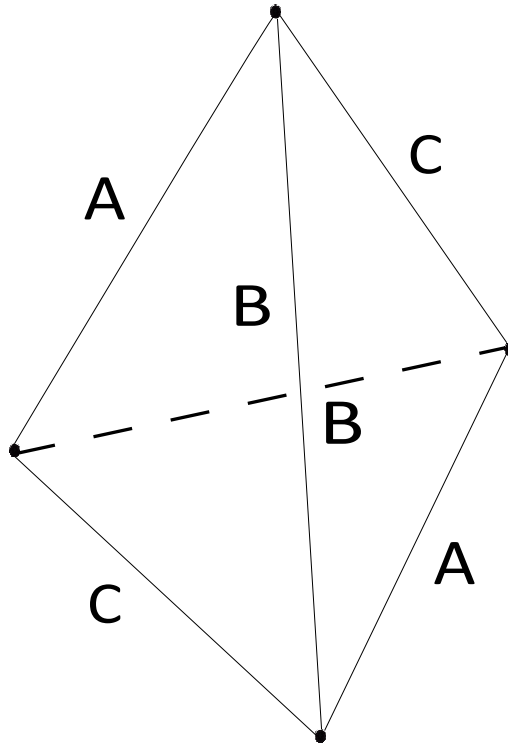


Рис. 1.6.1. Симметричный тетраэдр  $T = T(A, B, C)$

где острый угол  $\theta$  определяется из уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc}{\sqrt{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)}},$$

при этом  $a = \cos A$ ,  $b = \cos B$ ,  $c = \cos C$ .

Еще один метод доказательства формул для объемов неевклидовых многогранников заключается в непосредственной проверке того, что предьявленная в формулировке теоремы функция объема удовлетворяет дифференциальной формуле Шлефли и некоторому начальному условию (то есть является единственным решением задачи Коши).

Приведем подробное доказательство формулы объема симметричного тетраэдра в  $\mathbb{H}^3$ , основываясь на работе [21].

Пусть  $T = T(A, B, C)$  — симметричный тетраэдр, а  $l_A, l_B$  и  $l_C$  — длины ребер двугранных углов  $A, B$  и  $C$  соответственно. Согласно формуле Шлефли (см. теорему 1.2.2), объем  $V$  должен удовлетворять следующим соотношениям:

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -l_A, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = -l_B, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -l_C.$$

Кроме того, при  $A, B, C \rightarrow \arccos \frac{1}{3}$  (т. е. когда  $T$  становится правильным евклидовым тетраэдром) объем  $V \rightarrow 0$  (это можно получить из теоремы 1.2.1; в этом случае наш тетраэдр просто стянется в точку).

Нам также понадобится вспомогательная лемма, доказательство которой проводится прямыми вычислениями с использованием известных тождеств для обратных тригонометрических функций и формулы синусов для симметричного тетраэдра (подробнее см. [21]).

**Лемма 1.6.1.** Пусть  $t$  определяется уравнением

$$t^2 = \frac{4(a + bc)(b + ac)(c + ab)}{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(-1 + a + b + c)}.$$



Тогда

$$\arcsin \frac{a}{t} + \arcsin \frac{b}{t} + \arcsin \frac{c}{t} = \arcsin \frac{1}{t}. \quad (1.6.1)$$

Теперь мы готовы дать доказательство теоремы 1.6.1.

*Доказательство теоремы 1.6.1.* Положим

$$\tilde{V} = \int_u^{+\infty} F(\nu, A, B, C) \frac{d\nu}{\nu},$$

где

$$F(\nu, A, B, C) = \arcsin \frac{a}{\sqrt{\nu^2 + 1}} + \arcsin \frac{b}{\sqrt{\nu^2 + 1}} + \arcsin \frac{c}{\sqrt{\nu^2 + 1}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 1}}.$$

Для доказательства формулы достаточно показать, что  $\tilde{V}$  обладает свойствами:

- (i)  $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial A} = -l_A$ ,  $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial B} = -l_B$ ,  $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial C} = -l_C$ ;  
(ii) при  $A, B, C \rightarrow \arccos \frac{1}{3}$  величина  $\tilde{V} \rightarrow 0$ .

Проверим свойство (i).

Используя формулу Лейбница дифференцирования по параметру, получим:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial A} = -\frac{F(u, A, B, C)}{u} \frac{\partial u}{\partial A} + \int_u^{+\infty} \frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial A} \frac{\partial \nu}{\nu}.$$

По формуле (1.6.1) при  $t^2 = u^2 + 1$  имеем

$$F(u, A, B, C) \arcsin \frac{a}{\sqrt{u^2 + 1}} + \arcsin \frac{b}{\sqrt{u^2 + 1}} + \arcsin \frac{c}{\sqrt{u^2 + 1}} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} = 0.$$

Значит,

$$\frac{F(u, A, B, C)}{u} \frac{\partial u}{\partial A} = 0.$$

Далее,

$$\frac{\partial F(\nu, A, B, C)}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{\nu^2 + 1 - a^2}}$$

и

$$\frac{\partial a}{\partial A} = -\sqrt{1 - a^2},$$

следовательно

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial A} = -\int_u^{+\infty} \frac{\sqrt{1 - a^2} d\nu}{\nu \sqrt{\nu^2 + 1 - a^2}} = \operatorname{arsh} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{\nu} \Big|_u^{+\infty} = -\operatorname{arsh} \frac{\sqrt{1 - a^2}}{u} = -l_A.$$

Аналогично проверяются равенства  $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial B} = -l_B$ ,  $\frac{\partial \tilde{V}}{\partial C} = -l_C$ .

Проверим (ii). Заметим, что  $u \rightarrow +\infty$  при  $A, B, C \rightarrow \arccos \frac{1}{3}$ . В силу сходимости соответствующего интеграла получаем, что  $\tilde{V} \rightarrow 0$ .

Наконец, если мы введем замену переменных  $\nu = \operatorname{tg} t$ , то получим требуемую формулу.  $\square$

Что касается сферического случая, то для симметричного тетраэдра  $T = T(A, B, C)$  в  $\mathbb{S}^3$  справедлива аналогичная

**Теорема 1.6.2** (Деревнин, Медных, Пашкевич, 2004 г.). Пусть  $T = T(A, B, C)$  – симметричный тетраэдр в сферическом пространстве. Тогда его объем  $V = V(T)$  выражается формулой

$$V(T) = -2 \int_0^\tau (\operatorname{arsh}(\cos A \operatorname{sh}(t)) + \operatorname{arsh}(\cos B \operatorname{sh}(t)) + \operatorname{arsh}(\cos C \operatorname{sh}(t)) - t) \frac{dt}{\operatorname{sh} 2t},$$

где

$$\operatorname{cth}^2 \tau = \frac{1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc}{\sqrt{(1 - a + b + c)(1 + a - b + c)(1 + a + b - c)(1 - a - b - c)}},$$

а

$$a = \cos A, \quad b = \cos B, \quad c = \cos C.$$

Схема доказательства теоремы 1.6.2 (аналогично теореме 1.6.1) заключается в непосредственной проверке того, что функция объема  $V = V(A, B, C)$  является единственным решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial A} = l_A, \\ \frac{\partial V}{\partial B} = l_B, \\ \frac{\partial V}{\partial C} = l_C, \\ V(\arccos \frac{1}{3}, \arccos \frac{1}{3}, \arccos \frac{1}{3}) = 0. \end{cases}$$

Подробное доказательство теоремы 1.6.2 содержится в работе [21].

### 1.6.2. Объем $\mathbb{Z}_2$ -симметричного тетраэдра в $\mathbb{S}^3$ .

**Определение 1.6.2.** Тетраэдр  $T$  называется  $\mathbb{Z}_2$ -симметричным, если он инвариантен относительно вращения на угол  $\pi$  вокруг оси, проходящей через середины скрещивающихся ребер.

Из определения 1.6.2 следует, что неевклидов  $\mathbb{Z}_2$ -симметричный тетраэдр однозначно с точностью до движения пространства определяется четырьмя независимыми параметрами (двугранными углами), то есть  $T = T(A, B, C, D)$  (см. рис. 1.6.2).

Рассмотрим сферический  $\mathbb{Z}_2$ -симметричный тетраэдр  $T = T(A, B, C, D)$ .

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$A_+ = \frac{A + D}{2}, \quad A_- = \frac{D - A}{2},$$

$$l_A^+ = \frac{l_A + l_D}{2}, \quad l_A^- = \frac{l_A - l_D}{2},$$

$$a_+ = \cos A_+, \quad a_- = \cos A_-, \quad b = \cos B, \quad c = \cos C,$$

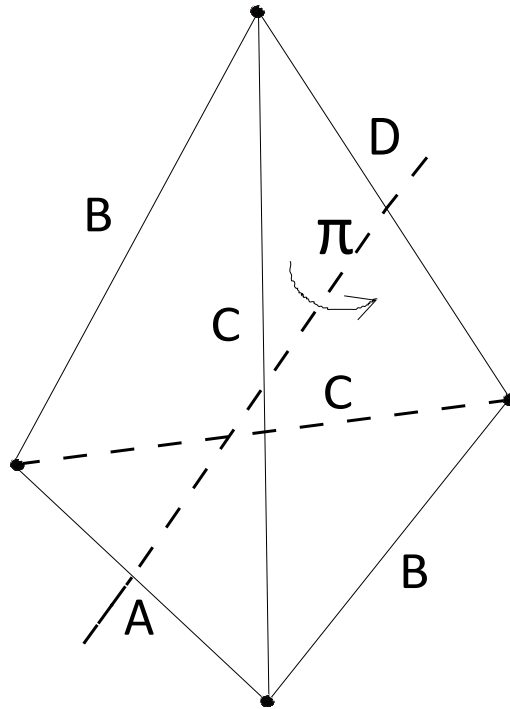
$$\Delta = (a_- - a_+ - b - c)(a_- - a_+ + b + c)(a_- + a_+ - b + c)(a_- + a_+ + b - c),$$

$$t^2 = u^2 - 1 = \frac{4(a_+ a_- + bc)(a_+ b + a_- c)(a_+ c + a_- b)}{\Delta},$$

$$V(\phi, u) = \frac{1}{2} \int_\phi^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Im} \left( \ln \frac{1 - i\sqrt{u^2/\sin^2 \sigma - 1}}{1 + i\sqrt{u^2/\sin^2 \sigma - 1}} \right) d\sigma,$$

$$\Phi = (A_+ + B + C - A_-) - \pi,$$

$$\Psi = \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - l_A^+\right)V(A_+, u) + \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - l_B\right)V(B, u) + \operatorname{sgn}\left(\frac{\pi}{2} - l_C\right)V(C, u) - V(A_-, u),$$

Рис. 1.6.2.  $\mathbb{Z}_2$ -симметричный тетраэдр  $T = T(A, B, C, D)$ 

где  $\ln = \text{Ln}(z)$  представляет собой главную ветвь логарифмической функции  $\ln \theta = \ln |\theta| + i \arg \theta$  на комплексной плоскости с разрезом вдоль полуоси  $(-\infty; 0)$ , а  $\text{sgn} = \text{sgn}(o)$  — функция знака числа.

Объем  $\mathbb{Z}_2$ -симметричного тетраэдра в сферическом пространстве задается следующей теоремой [22].

**Теорема 1.6.3** (Колпаков, Медных, Пашкевич, 2011 г.). Пусть  $T = T(A, B, C, D)$  — сферический  $\mathbb{Z}_2$ -симметричный тетраэдр с двугранными углами  $A, B, C$  и  $D$  и длинами ребер соответствующих двугранных углов  $l_A, l_B, l_C$  и  $l_D$ . Без нарушения общности предположим, что  $l_A \geq l_D$  (эквивалентно  $D \geq A$ ) и  $l_B \leq l_C$ . Тогда если тетраэдр  $T$  удовлетворяет условию  $t^2 \geq 0$ , то его объем  $V = V(T)$  может быть вычислен по формуле

$$V(T) = \frac{\pi\Phi}{2} - \Psi.$$

Для доказательства теоремы 1.6.3 достаточно проверить, что функция  $V(T) = V(A, B, C, D)$  является единственным решением следующей задачи Коши (более подробно см. [22]):

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial A} = \frac{1}{2}l_A, \\ \frac{\partial V}{\partial B} = l_B, \\ \frac{\partial V}{\partial C} = l_C, \\ \frac{\partial V}{\partial D} = \frac{1}{2}l_D, \\ V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{8}. \end{cases}$$

**Определение 1.6.3.** Пусть  $T_n$  — симплекс в  $\mathbb{H}^n$  и  $\mathbb{S}^n$  с радиус-векторами вершин  $p_0, p_1, \dots, p_n$  и единичными векторами нормалей к граням  $v_0, v_1, \dots, v_n$ , направленными наружу (или внутрь) симплекса. Симплекс  $T_n^*$  называется *двойственным* к  $T_n$ , если его радиус-векторы вершин и единичные векторы нормалей суть  $v_0, v_1, \dots, v_n$  и  $p_0, p_1, \dots, p_n$  соответственно.

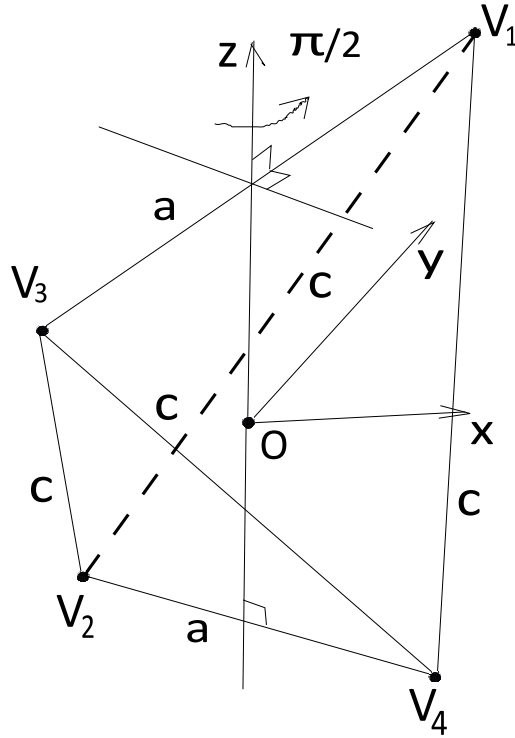


Рис. 1.7.1. Неевклидов тетраэдр с группой симметрии  $S_4$

**Замечание 1.6.1.** В работе [22] показано, что если для сферического  $\mathbb{Z}_2$ -симметричного тетраэдра  $T = T(A, B, C, D)$  с двугранными углами  $A, B, C$  и  $D$  и длинами ребер соответствующих двугранных углов  $l_A, l_B, l_C$  и  $l_D$  выполняются условия  $l_D \geq l_A$  (эквивалентно  $A \geq D$ ),  $B \geq C$  и  $t^2 \leq 0$ , то утверждение теоремы 1.6.3 справедливо для тетраэдра  $T^*$ , двойственного  $T$ .

1.7. ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА С ГРУППОЙ СИММЕТРИИ  $S_4$

В настоящем разделе будет изучен гиперболический тетраэдр с группой симметрии  $S_4$ .

**Определение 1.7.1.** Говорят, что тетраэдр  $T$  имеет *группу симметрии  $S_4$* , если он остается инвариантным относительно поворота вокруг некоторой оси на угол  $\frac{\pi}{2}$  и последующего отражения относительно перпендикулярной к ней плоскости.

Введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  и рассмотрим сначала евклидов тетраэдр  $T$  с группой симметрии  $S_4$ , который переводится в себя вращением вокруг оси  $Oz$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  и последующим отражением относительно плоскости  $Oxy$  (рис. 1.7.1). В этом случае его вершины имеют координаты

$$V_1 \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2} \right), \quad V_2 \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2} \right),$$

$$V_3 \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2} \right), \quad V_4 \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2} \right),$$

при этом

$$u^2 = l_{13}^2 = l_{24}^2,$$

$$l_{12}^2 = l_{34}^2 = l_{14}^2 = l_{23}^2 = \frac{u^2}{2} + h^2,$$

где  $l_{ij}$  — длина ребра  $V_iV_j$ .

Рассмотрим теперь гиперболический тетраэдр, имеющий группу симметрии  $S_4$  (см. рис. 1.7.1), гиперболические длины ребер и двугранные углы которого равны  $(a, c)$  и  $(A, C)$  соответственно.

Из определения 1.7.1 следует, что рассматриваемый гиперболический тетраэдр с группой симметрии  $S_4$  однозначно с точностью до движения определяется двумя независимыми параметрами (двугранными углами)  $A$  и  $C$ .

Однако для вычисления объема такого тетраэдра могут быть использованы длины ребер  $a$  и  $c$ , связанные с двугранными углами формулами [4]:

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch}^2 a - 2 \operatorname{ch}^2 c}{1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch}^2 c},$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{ch} c \cdot (1 - \operatorname{ch} a)}{1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch}^2 c}.$$

Таким образом,  $T = T(a, c)$  (рис. 1.7.1).

Рассмотрим гиперболический тетраэдр  $T = T(a, c)$  с группой симметрии  $S_4$ . Формула объема данного многогранника выражается теоремой, полное доказательство которой содержится в работе [4].

**Теорема 1.7.1** (Абросимов, Вьонг Хыу, 2017 г.). *Объем  $V = V(T)$  гиперболического тетраэдра  $T = T(a, c)$  с группой симметрии  $S_4$ , заданного длинами ребер  $a$  и  $c$ , может быть вычислен по одной из следующих формул:*

$$V(T) = \int_0^a \frac{a((1 + \operatorname{ch} a)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 c \cdot \operatorname{ch} a) + 4c \cdot \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{ch} c \cdot \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}} da,$$

$$V(T) = \int_{\operatorname{arch}(\operatorname{ch} a + 1)/2}^c \frac{2c(1 - \operatorname{ch} a)(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch}^2 c) + 4a \cdot \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{ch} c \cdot \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}} dc.$$

Доказательство данной теоремы базируется на подходе, при котором соответствующий евклидов многогранник помещается в *проективную модель Кэли—Клейна* гиперболического пространства. Заметим, что данный подход весьма эффективен и при вычислении объемов некоторых гиперболических многогранников с симметриями —  $\bar{3}$ -октаэдра и  $\bar{3}$ -гексаэдра (см. раздел 2.2.5 настоящего обзора).

Напомним теперь основные факты из гиперболической геометрии, относящиеся к *проективной модели Кэли—Клейна*.

Пусть  $\mathbb{R}_4^1$  — пространство Минковского, скалярное произведение в котором задано формулой:

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4,$$

где  $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $\vec{Y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ .

**Определение 1.7.2.** *Моделью Кэли—Клейна* называется множество векторов в  $\mathbb{R}_4^1$ , концы которых принадлежат единичному шару, лежащему в гиперплоскости  $x_4 = 1$ :

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, 1) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}.$$

Прямыми и плоскостями в модели Кэли—Клейна являются пересечения  $K$  с евклидовыми прямыми и плоскостями, принадлежащими гиперплоскости  $x_4 = 1$ . Таким образом, плоскость  $P$  в модели  $K$  можно определить как множество

$$P = \{V \in K \mid (\vec{V}, \vec{N}) = 0\},$$

где  $\vec{N} = (\vec{n}, 1)$  — вектор нормали к  $P$ . При этом  $\vec{n}$  представляет собой трехмерный вектор с положительным евклидовым скалярным квадратом  $(\vec{n}, \vec{n})_{\mathbb{E}^3} > 0$ .

Расстояние  $\rho(X, Y)$  между точками  $X$  и  $Y$ , а также один из четырех двугранных углов между плоскостями  $P$  и  $Q$  в модели  $K$  можно определить по формулам:

$$\operatorname{ch}(\rho(X, Y)) = \frac{(\vec{X}, \vec{Y})}{(\vec{X}, \vec{X}) \cdot (\vec{Y}, \vec{Y})},$$

$$\cos(\widehat{P, Q}) = \pm \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{(\vec{N}_1, \vec{N}_1) \cdot (\vec{N}_2, \vec{N}_2)},$$

где  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$  — векторы нормалей к  $P$  и  $Q$ .

Теперь мы готовы дать набросок доказательства теоремы 1.7.1, следуя работе [4].

*Схема доказательства теоремы 1.7.1.* Поместим евклидов тетраэдр  $T$  с группой симметрии  $S_4$  в  $K$ , добавив к каждой его вершине четвертую единичную координату:

$$V_1 \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}, 1 \right), \quad V_2 \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}, 1 \right),$$

$$V_3 \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}, 1 \right), \quad V_4 \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}, 1 \right).$$

Используя приведенные выше формулы для вычисления расстояний и углов в модели Кэли—Клейна  $K$ , можно получить критерий существования тетраэдр  $T = T(a, c)$  с группой симметрии  $S_4$  в  $K$ , который выражается неравенством

$$1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c < 0,$$

а также полезные формулы, связывающие двугранные углы  $A, C$  с длинами ребер  $a, c$ :

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch}^2 a - 2 \operatorname{ch}^2 c}{1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch}^2 c},$$

$$\cos C = \frac{\operatorname{ch} c \cdot (1 - \operatorname{ch} a)}{1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch}^2 c}.$$

Подробный вывод данных соотношений содержится в работе [4, см. теоремы 2 и 3].

Введем в рассмотрение систему координат  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} b)$ . Используя критерий существования тетраэдра  $T = T(a, c)$  с группой симметрии  $S_4$ , построим область существования

$$\Omega = \{(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} b) \mid \operatorname{ch} a > 1, \operatorname{ch} c > 1, 1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c < 0\}$$

тетраэдра  $T$  в данной координатной системе (рис. 1.7.2).

Нетрудно заметить, что на границе области  $\Omega$ , состоящей из объединения двух лучей

$$\{\operatorname{ch} a = 1, \operatorname{ch} c \geq 1\}$$

и

$$\{\operatorname{ch} a \geq 1, 1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c = 0\},$$

наш многогранник вырождается либо в отрезок, либо в четырехугольник, то есть на границе  $\Omega$  объем  $V$  тетраэдра  $T = T(a, c)$  равен нулю.

Дифференцируя объем как сложную функцию от длин ребер, получим:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial a},$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial c}.$$

В свою очередь, в силу формулы Шлефли для  $dV$

$$dV = -adA - 2cdC,$$

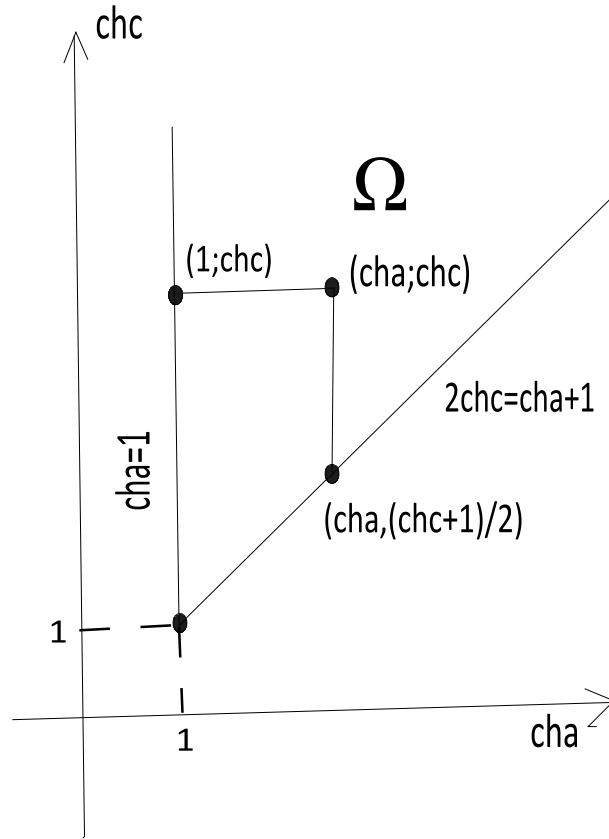


Рис. 1.7.2. Область существования тетраэдра  $T = T(a, c)$  с группой симметрии  $S_4$

откуда находим

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -a, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -2c.$$

Используя формулы связи между двугранными углами и длинами ребер  $T = T(a, c)$ , прямыми вычислениями находим:

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{a((1 + \operatorname{ch} a)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 c \cdot \operatorname{ch} a) + 4c \cdot \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{ch} c \cdot \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}},$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{2c(1 - \operatorname{ch} a)(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch}^2 c) + 4a \cdot \operatorname{sh} c \cdot \operatorname{ch} c \cdot \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}}. \tag{1.7.1}$$

Нам осталось заметить лишь, что интеграл от дифференциальной формы

$$dV = \frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial c} dc \tag{1.7.2}$$

не зависит от пути интегрирования, а зависит только от выбора начальной и конечной точек. Так как  $V = 0$  на границе  $\Omega$ , то по формуле Ньютона—Лейбница объем равен интегралу от данной формы по любой кусочно-гладкой кривой с началом на границе области  $\Omega$  и концом в точке с координатами  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} b)$ . Подставляя выражения (1.7.1) в форму (1.7.2) и интегрируя ее по горизонтальному или вертикальному отрезку, соединяющему границу  $\Omega$  с точкой  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} b)$ , мы завершаем доказательство теоремы 1.7.1.  $\square$

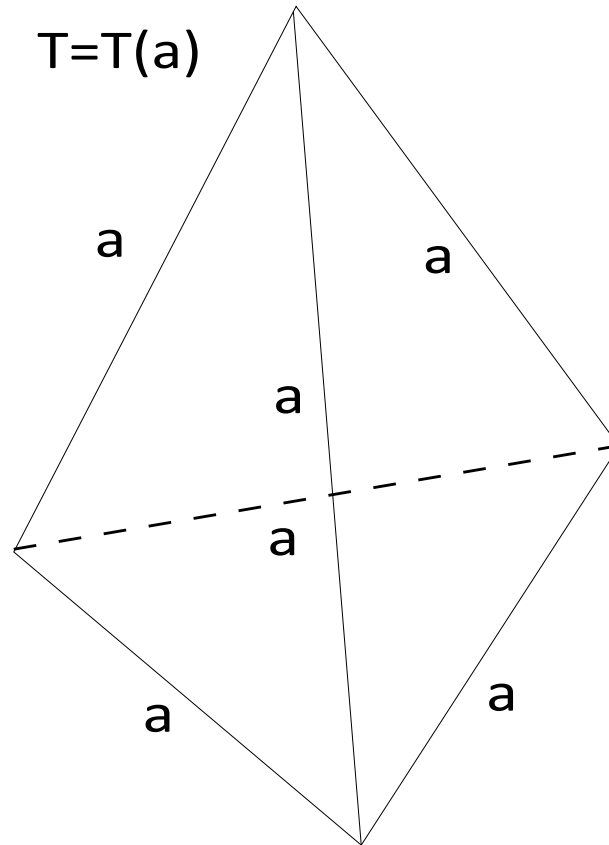


Рис. 1.7.3. Правильный тетраэдр  $T = T(a)$

**Замечание 1.7.1.** При  $a = c$  теорема 1.7.1 приводит нас к формуле для объема правильного тетраэдра  $T = T(a)$  (рис. 1.7.3):

$$V(T) = \int_0^a \frac{3a \operatorname{sh} ada}{(1 + 2 \operatorname{ch} a) \sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)(3 \operatorname{ch} a + 1)}},$$

которая также может быть получена из формулы Шлефли (см. [4, п. 2]).

### 1.8. ОБЪЕМ ПРОИЗВОЛЬНОГО НЕЕВКЛИДОВА ТЕТРАЭДРА

Как было отмечено во введении к настоящему обзору, проблема получения формул объема компактного гиперболического многогранника заданного комбинаторного типа полностью решена только для тетраэдра.

Проблема получения явных формул объема произвольного неевклидова тетраэдра активно исследовалась в работах отечественных и зарубежных математиков. В 1999 г. в работе Ю. Чо и Х. Кима [40] была получена формула объема произвольного гиперболического тетраэдра, несимметричная относительно перестановки аргументов (двугранных углов). Затем, в 2001 г., Дж. Мураками и У. Яно, используя квантовую теорию б $\jmath$ -символов, вывели уже симметричную формулу для объема произвольного неевклидова тетраэдра через линейную комбинацию значений дилогарифма Эйлера [59]. Наконец, в 2005 г. Д. А. Деревнин и А. Д. Медных [20] получили интегральную формулу для объема компактного гиперболического тетраэдра общего вида, выражающую объем одним интегралом по отрезку числовой прямой от вещественнозначной подынтегральной функции.

Однако формула, выражающая объем произвольного неевклидова тетраэдра через двугранные углы, впервые была получена еще в 1906 г. итальянским герцогом Г. Сфорца [62]. К сожалению,



выдающаяся работа Г. Сфорца [62] долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтезиносом на конференции в Испании в августе 2006 г.

Ниже будут изложены основные результаты об объемах произвольных неевклидовых тетраэдров в хронологическом порядке.

**1.8.1. Формула Сфорца объема произвольного неевклидова тетраэдра.** В настоящем подразделе будет изучена формула Сфорца объема произвольного неевклидова тетраэдра.

Справедлива следующая

**Теорема 1.8.1** (Sforza, 1906 г.). Пусть  $T$  — произвольный тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$  (рис. 1.2.1) с матрицей Грама (1.2.1). Будем рассматривать  $\det G = \det G(A)$  как функцию от двугранного угла  $A$ . Тогда объем тетраэдра  $V = V(T)$  задается формулой

$$V = \frac{1}{4} \int_{A_0}^A \ln \frac{c_{34} - \sqrt{-\det G(A)} \sin A}{c_{34} + \sqrt{-\det G(A)} \sin A} dA,$$

где  $A_0$  — подходящее решение уравнения  $\det G(A) = 0$ , а  $c_{34} = c_{34}(A)$  — алгебраическое дополнение к элементу  $(3, 4)$  матрицы  $G(A)$ .

Оригинальное доказательство формулы Сфорца, помимо использования дифференциального тождества Шлефли (1.2.3), основано на уравнении Паскаля для миноров матрицы Грама (см. [62]). В обзоре Н. В. Абросимова и А. Д. Медных [36] было получено более современное доказательство формулы Сфорца.

Предложенное доказательство (взятое нами из работы [36]) базируется на применении формулы Шлефли (1.2.3) к деформации, при которой меняется только один двугранный угол тетраэдра, а также вычислении ребра данного двугранного угла с помощью формулы Якоби (1.2.4).

*Доказательство (Абросимов, Медных, 2014 г.).* Обозначим  $\det G$  через  $\Delta$ , а длину ребра двугранного угла  $A$  через  $l_A$ . К матрице  $G$  применим теорему Якоби (теорема 1.2.3). При  $n = 4$  и  $k = 2$  имеем:

$$c_{33}c_{44} - c_{34}^2 = \Delta(1 - \cos^2 A).$$

Применяя формулу (iii) теоремы 1.2.1, получим  $\operatorname{ch} l_A = \frac{c_{34}}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}$ . Следовательно,

$$\operatorname{sh} l_A = \sqrt{\operatorname{ch}^2 l_A - 1} = \sqrt{\frac{c_{34}^2 - c_{33}c_{44}}{c_{33}c_{44}}} = \frac{\sqrt{-\Delta} \sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Так как  $\exp(\pm l_A) = \operatorname{ch} l_A \pm \operatorname{sh} l_A$ , то:

$$\exp(\pm l_A) = \frac{c_{34} \pm \sqrt{-\Delta} \sin A}{\sqrt{c_{33}c_{44}}}.$$

Таким образом,

$$\exp(2l_A) = \frac{\exp(l_A)}{\exp(-l_A)} = \frac{c_{34} + \Delta \sin A}{c_{34} - \Delta \sin A}$$

и

$$l_A = \frac{1}{2} \ln \frac{c_{34} - \sqrt{-\det G(A)} \sin A}{c_{34} + \sqrt{-\det G(A)} \sin A}.$$

Теперь запишем для тетраэдра  $T$  формулу Шлефли:

$$-dV = \frac{1}{2} l_A dA.$$

Учтем тот факт, что  $\Delta \rightarrow 0$  при  $A \rightarrow A_0$ . Следовательно,  $V \rightarrow 0$  при  $A \rightarrow A_0$ . Наконец, интегрируя обе части последнего уравнения, получим:

$$V = \int_{A_0}^A \left(-\frac{l_A}{2}\right) dA = \frac{1}{4} \int_{A_0}^A \ln \frac{c_{34} - \sqrt{-\det G(A)} \sin A}{c_{34} + \sqrt{-\det G(A)} \sin A} dA.$$

□

В свою очередь, следующая теорема представляет собой сферический вариант формулы Сфорца [62].

**Теорема 1.8.2** (Sforza, 1906 г.). *Объем произвольного сферического тетраэдра  $T$  (рис. 1.2.1) с матрицей Грама (1.2.1) может быть вычислен по формуле*

$$V = \frac{1}{4i} \int_{A_0}^A \ln \frac{c_{34} - i\sqrt{\det G(A)} \sin A}{c_{34} + i\sqrt{\det G(A)} \sin A} dA,$$

где  $A_0$  — подходящее решение уравнения  $\det G(A) = 0$ , а  $c_{34} = c_{34}(A)$  — алгебраическое дополнение к элементу  $(3, 4)$  матрицы  $G(A)$ .

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству для гиперболического случая.

Схема доказательство формулы Сфорца может быть использована для вывода формул, выражающих объемы ортосхемы и тетраэдра с группой симметрии  $S_4$  через двугранные углы.

а) *Применение схемы доказательства формулы Сфорца к вычислению объема гиперболической ортосхемы.* Поставим задачу получить альтернативные формулы, выражающие объем гиперболической ортосхемы (бипрямоугольного тетраэдра)  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$  (см. раздел 1.3).

Для этого рассмотрим сначала непрерывную деформацию  $T$ , при которой изменяется только один двугранный угол  $\alpha$  (в процессе такой деформации тетраэдр всегда остается бипрямоугольным). В этом случае формула Шлефли для объема  $V$  тетраэдра  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$  примет вид

$$dV = -\frac{1}{2} l_\alpha d\alpha, \tag{1.8.1}$$

где  $l_\alpha$  — длина ребра двугранного угла  $\alpha$ .

Используя формулу (iii) теоремы 1.2.1, выразим  $l_\alpha$  через двугранные углы тетраэдра. Имеем:

$$l_\alpha = \operatorname{arch} \frac{\cos \gamma \sin \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha}}. \tag{1.8.2}$$

Решим теперь относительно  $\alpha$  уравнение

$$\det G = 0,$$

где  $G$  — матрица Грама ортосхемы  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha & 0 & 0 \\ -\cos \alpha & 1 & -\cos \beta & 0 \\ 0 & -\cos \beta & 1 & -\cos \gamma \\ 0 & 0 & -\cos \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при фиксированных  $\beta$  и  $\gamma$  тетраэдр  $T$  будет оставаться ортосхемой тогда и только тогда, когда острый угол  $\alpha$  непрерывно изменяется в промежутке

$$\arcsin(\cos \beta) < \alpha < \arcsin\left(\frac{\cos \beta}{\sin \gamma}\right)$$

(это следует из критерия существования ортосхемы, приведенного в замечании 1.4.1).

Следовательно, в качестве «подходящего» корня уравнения  $\det G = 0$  нужно выбрать острый угол

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \right) \quad (1.8.3)$$

(при котором объем гиперболической ортосхемы обращается в нуль).

Подставив формулу (1.8.2) в (1.8.1) и проинтегрировав полученную формулу от (1.8.3) до  $A$ , мы получим, что объем  $V$  гиперболической ортосхемы  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$  может быть найден по формуле

$$V = -\frac{1}{2} \int_{\arcsin \left( \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \right)}^{\alpha} \operatorname{arch} \frac{\cos \gamma \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 t}} dt.$$

Если рассмотреть деформации ортосхемы  $T$ , при которых изменяется только двугранный угол  $\beta$  (или  $\gamma$ ), то, проделав аналогичные выкладки, мы получим следующие формулы для вычисления объема  $V$ :

$$V = -\frac{1}{2} \int_{\arccos(\sin \alpha \sin \gamma)}^{\beta} \operatorname{arch} \frac{\cos \alpha \cos \gamma \cos t}{\sqrt{(1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 t)(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 t)}} dt,$$

$$V = -\frac{1}{2} \int_{\arcsin \left( \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \right)}^{\gamma} \operatorname{arch} \frac{\cos \alpha \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 t}} dt.$$

Таким образом, нами доказана

**Теорема 1.8.3** (Краснов, 2019 г.). *Объем  $V = V(T)$  гиперболической ортосхемы  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$  может быть вычислен по одной из следующих трех формул:*

$$V(T) = -\frac{1}{2} \int_{\arcsin \left( \frac{\cos \beta}{\sin \gamma} \right)}^{\alpha} \operatorname{arch} \frac{\cos \gamma \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 t}} dt, \quad (1.8.4)$$

$$V(T) = -\frac{1}{2} \int_{\arccos(\sin \alpha \sin \gamma)}^{\beta} \operatorname{arch} \frac{\cos \alpha \cos \gamma \cos t}{\sqrt{(1 - \cos^2 \gamma - \cos^2 t)(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 t)}} dt, \quad (1.8.5)$$

$$V = -\frac{1}{2} \int_{\arcsin \left( \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \right)}^{\gamma} \operatorname{arch} \frac{\cos \alpha \sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta - \cos^2 t}} dt. \quad (1.8.6)$$

**Замечание 1.8.1.** Таким образом, формулы (1.8.4)–(1.8.6), в отличие от формулы Лобачевского (1.8.5), выражают объем гиперболической ортосхемы в виде *одного вещественного интеграла от вещественнозначной подынтегральной функции.*

**Пример 1.8.1.** Рассмотрим гиперболическую ортосхему  $T = T(\alpha, \beta, \gamma)$ , двугранные углы которой равны:

$$\alpha = \gamma = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = 1,0001 \cdot \frac{\pi}{3}.$$

Вычислив объем  $V = V(T)$  данного тетраэдра по формулам (1.8.4)–(1.8.6), а также по формуле из теоремы 1.4.2, мы получим одинаковый результат для  $V = V(T)$ :

$$V(T) = 0,253.$$

б) *Применение схемы доказательства формулы Сфорца к вычислению объема гиперболического тетраэдра с группой симметрии  $S_4$ .* Вычислим теперь объем гиперболического тетраэдра  $T = T(A, C)$  с группой симметрии  $S_4$  (заданного в векторной модели гиперболического пространства; см., например, с. 561 настоящего обзора) через *двугранные углы*.

Критерий существования  $T = T(A, C)$  в  $\mathbb{H}^3$  выражается следующей леммой.

**Лемма 1.8.1.** *Для существования компактного гиперболического тетраэдра  $T$  с группой симметрии  $S_4$ , заданного набором двугранных углов  $(A, B)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялась следующая система неравенств:*

$$\begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ 1 - 2 \cos C < \cos A < 1 - 2 \cos^2 C. \end{cases}$$

Доказательство леммы основано на применении критерия существования произвольного гиперболического тетраэдра, заданного набором двугранных углов (см. теорему 1.2.4), к тетраэдру  $T = T(A, C)$ .

**Замечание 1.8.2.** Доказательство леммы 1.8.1 содержится в работе [27]. Однако в данной работе соответствующая система содержит *три неравенства вместо двух*. Как удалось выяснить после дополнительной проверки, одно из неравенств критерия существования  $T = T(A, C)$  в работе [27] является избыточным.

Переходим теперь к вычислению объема гиперболического тетраэдра  $T$  с группой симметрии  $S_4$ . Объем такого тетраэдра может быть вычислен с помощью следующей теоремы.

**Теорема 1.8.4** (Краснов, 2019 г.). *Пусть  $T = T(A, C)$  — компактный тетраэдр с группой симметрии  $S_4$  в  $\mathbb{H}^3$  (рис. 1.7.1). Тогда его объем  $V = V(T)$  выражается формулой*

$$V(T) = -2 \int_{\arccos\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)}^C \operatorname{arch} \frac{(1 + \cos A)^2 \cos t}{1 - 2 \cos A \cos^2 t - 2 \cos^2 t - \cos^2 A} dt. \quad (1.8.7)$$

Приведенное ниже доказательство взято из работы автора [27].

*Доказательство.* Для доказательства теоремы 1.8.4 воспользуемся схемой доказательства формулы Сфорца (см. теорему 1.8.1 и ее доказательство).

Рассмотрим сначала непрерывную деформацию тетраэдра  $T = T(A, C)$ , при которой изменяется только один двугранный угол  $C$  (при этом угол  $A$  мы считаем фиксированным). В этом случае формула Шлефли для дифференциала объема  $V = V(C)$  тетраэдра  $T$  примет вид

$$dV = -2 \cdot l \cdot dC, \quad (1.8.8)$$

где  $l$  — длина ребра  $V_2V_4$  (рис. 1.7.1).

Вычислим теперь величину  $l$  с помощью формулы (iii) теоремы 1.2.1. Имеем:

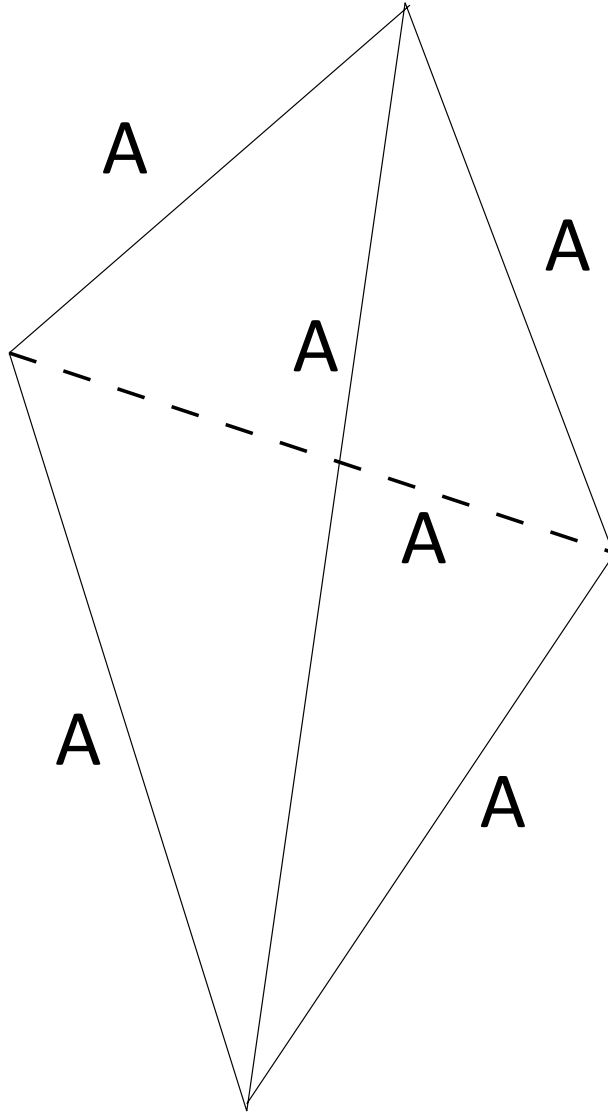
$$l = \operatorname{arch} \frac{(1 + \cos A)^2 \cos C}{1 - 2 \cos A \cos^2 C - 2 \cos^2 C - \cos^2 C}. \quad (1.8.9)$$

Также стоит заметить (см. теорему 1.2.4), что при фиксированном  $A$  тетраэдр с группой симметрии  $S_4$  будет реализуем в  $\mathbb{H}^3$  тогда и только тогда, когда его второй (острый) двугранный угол  $C$  непрерывно меняется в промежутке:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} < C < \frac{1 - \cos A}{2}.$$

Таким, решая уравнение  $\Delta = 0$  относительно  $C$ , мы получаем, что в качестве «подходящего» его решения (см. формулировку теоремы 1.8.1) нам нужно взять правый конец указанного промежутка:

$$C = \arccos\left(\frac{1 - \cos A}{2}\right).$$

Рис. 1.8.1. Правильный тетраэдр  $T = T(A)$ 

При таком  $C$  набор двугранных углов  $(A, C)$  соответствует евклидову тетраэдру с группой симметрии  $S_4$ , гиперболический объем которого равен нулю.

Таким образом, формула (1.8.7) получается после интегрирования выражения (1.8.8) (после подстановки в него формулы (1.8.9) в пределах от  $\arccos\left(\frac{1 - \cos A}{2}\right)$  до  $C$ .  $\square$

Очевидно, что правильный тетраэдр  $T = T(A)$  (т. е. тетраэдр, у которого все двугранные углы равны; см. рис. 1.8.1) является частным случаем тетраэдра с группой симметрии  $S_4$  (при  $A = B$ ). Формула объема гиперболического правильного тетраэдра, ранее полученная в работе [4], задается следующей теоремой.

**Теорема 1.8.5** (Абросимов, Вьонг Хью, 2017 г.). Объем  $V = V(T)$  правильного гиперболического тетраэдра  $T = T(A)$  находится по формуле

$$V = -3 \int_{\arccos \frac{1}{3}}^A \operatorname{arch} \left( \frac{\cos t}{1 - 2 \cos t} \right) dt. \quad (1.8.10)$$

В свою очередь, критерий существования гиперболического правильного тетраэдра выражается следующей теоремой (которая получается непосредственным применением утверждения теоремы 1.2.4 к компактному гиперболическому тетраэдру  $T = T(A, A, A, A, A, A)$ ).

**Теорема 1.8.6** (Краснов, 2019 г.). *Для существования компактного правильного гиперболического тетраэдра  $T = T(A)$  необходимо и достаточно, чтобы его двугранный угол  $A$  удовлетворял следующему двойному неравенству:*

$$\frac{1}{3} < \cos A < \frac{1}{2}. \tag{1.8.11}$$

Для численной проверки результата теоремы 1.8.4 вычислим сначала по формуле (1.8.7) объем правильного гиперболического тетраэдра (при  $A = C$ ), а затем сравним полученный результат с формулой (1.8.10).

**Пример 1.8.2.** Рассмотрим правильный гиперболический тетраэдр с двугранным углом  $A = \arccos \frac{8}{21}$ . Вычислив его объем  $V$  в среде MathCad по формуле (1.8.10), получим, что  $V = 0,012$ .

В свою очередь, при вычислении объема гиперболического тетраэдра с группой симметрии  $S_4$  по формуле (1.8.7) (если  $A = C = \arccos \frac{8}{21}$ ), мы получим тот же самый результат.

**1.8.2. Формула Чо—Кима объема произвольного гиперболического тетраэдра.** Рассмотрим теперь полученную в 1999 г. Ю. Чо и Х. Кимом формулу объема произвольного гиперболического тетраэдра [40].

Рассмотрим произвольный гиперболический тетраэдр  $T$  с двугранными углами  $A, B, C, D, E, F$  (рис. 1.2.1). Формула Чо—Кима объема произвольного гиперболического тетраэдра задается следующей теоремой.

**Теорема 1.8.7** (Cho, Kim, 1999 г.). *Объем  $V = V(T)$  произвольного гиперболического тетраэдра  $T = T(A, B, C, D, E, F)$  (см. рис. 1.2.1) может быть выражен следующей формулой:*

$$\begin{aligned} 2V(T) = & \Lambda(a) + \Lambda(b) + \Lambda(c) - \Lambda(d) - \Lambda\left(\frac{B - C - A + \pi}{2} - b\right) + \Lambda\left(\frac{D - B - F + \pi}{2} + b\right) + \\ & + \Lambda\left(\frac{E - C - D + \pi}{2} - c\right) - \Lambda\left(\frac{A - D - F + \pi}{2} + c\right) - \Lambda(a') + \Lambda(b') - \Lambda(c') + \Lambda(d') + \\ & + \Lambda\left(\frac{B - C - A + \pi}{2} - b'\right) - \Lambda\left(\frac{D - B - F + \pi}{2} + b'\right) - \\ & - \Lambda\left(\frac{E - C - D + \pi}{2} - c'\right) + \Lambda\left(\frac{A - E - F + \pi}{2} + c'\right), \end{aligned}$$

где  $\Lambda = \Lambda(x)$  — функция Лобачевского

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin t| dt,$$

а величины  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  находятся из уравнений:

$$\begin{aligned} a + b = B, \quad a' + b' = B, \quad c + d = E, \quad c' + d' = E, \quad b + c + e = F, \quad b' + c' + e' = F, \\ a + d + e = C, \quad a' + d' + e' = C, \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos D & -\cos a & \cos B & \cos C \\ -\cos D & 1 & \cos(c + e) & \cos F & \cos E \\ -\cos a & \cos(c + e) & 1 & -\cos b & \cos(d + e) \\ \cos B & \cos F & -\cos b & 1 & -\cos A \\ \cos C & \cos E & \cos(d + e) & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos D & -\cos a' & \cos B & \cos C \\ -\cos D & 1 & \cos(c' + e') & \cos F & \cos E \\ -\cos a' & \cos(c' + e') & 1 & -\cos b' & \cos(d' + e') \\ \cos B & \cos F & -\cos b' & 1 & -\cos A \\ \cos C & \cos E & \cos(d' + e') & -\cos A & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Идея доказательства теоремы 1.8.7 заключается в представлении объема гиперболического тетраэдра алгебраической суммой объемов идеальных тетраэдров и вычислении последних по формуле (1.4.1) (более подробно см. работу [40]).

**1.8.3. Формулы Мураками—Яно и Мураками—Ушиджимы.** В настоящем подразделе будут представлены формулы Мураками—Яно и Мураками—Ушиджимы, выражающие объем произвольного неевклидова тетраэдра через его двугранные углы и длины ребер соответственно, симметричные относительно перестановки аргументов.

Введем некоторые вспомогательные обозначения, которые понадобятся нам для формулировки основных теорем.

Пусть, как и прежде,  $T$  — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого суть  $A, B, C, D, E, F$ . Кроме того, будем полагать, что  $A, B, C$  — двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а  $D, E, F$  — противолежащие им двугранные углы (рис. 1.2.1).

Далее, пусть  $a = \exp(iA)$ ,  $b = \exp(iB)$ ,  $c = \exp(iC)$ ,  $d = \exp(iD)$ ,  $e = \exp(iE)$ ,  $f = \exp(iF)$ , а  $U(z, T)$  — эмпирическая функция Мураками—Яно:

$$\begin{aligned} U(z, T) = & \frac{1}{2} \{ \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(zabde) + \text{Li}_2(zacdf) + \text{Li}_2(zbcef) - \\ & - \text{Li}_2(-zabc) - \text{Li}_2(-zaef) - \text{Li}_2(-z bdf) - \text{Li}_2(-z cde) \}, \end{aligned} \quad (1.8.12)$$

где  $\text{Li}_2(z)$  — ветвь дилогарифма Эйлера

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [1; +\infty)),$$

отвечающая ветви логарифмической функции  $\ln \theta = \ln |\theta| + i \arg \theta$  ( $-\pi < \arg \theta < \pi$ ).

Исследуем уравнение  $dU/dz = 0$ . Вычислим  $dU/dz$ :

$$\begin{aligned} \frac{dU(z, T)}{dz} = & -\frac{1}{2z} (\ln(1-z) + \ln(1-abdez) + \ln(1-acdfz) + \ln(1-bcefz) - \\ & - \ln(1+abcz) - \ln(1+ae fz) - \ln(1+ bdfz) - \ln(1+cdez)). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение  $dU/dz = 0$  эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & (1-z)(1-abdez)(1-acdfz)(1-bcefz) - \\ & - (1+abcz)(1+ae fz)(1+ bdfz)(1+cdez) = 0. \end{aligned} \quad (1.8.13)$$

Как нетрудно видеть, свободный член уравнения (1.8.13) равен нулю. Следовательно, исходное уравнение  $dU/dz = 0$  эквивалентно квадратному уравнению:

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0, \quad (1.8.14)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= abcdef(abcdef + ad + be + cf + abf + ace + bcd + def), \\ \beta &= -abcdef \left\{ \left( a - \frac{1}{a} \right) \left( d - \frac{1}{d} \right) + \left( b - \frac{1}{b} \right) \left( e - \frac{1}{e} \right) + \left( c - \frac{1}{c} \right) \left( f - \frac{1}{f} \right) \right\}, \\ \gamma &= 1 + abde + acdf + bcef + abc + aef + bdf + cde. \end{aligned}$$

Легко видеть, что число  $\beta_1 = \frac{\beta}{abcdef}$  является вещественным, а также имеет место соотношение:

$$\alpha = (abcdef)^2 \bar{\gamma},$$

где  $\bar{\gamma}$  — есть комплексное число, сопряженное числу  $\gamma$ .

Обозначим через  $z_1$  и  $z_2$  решения (1.8.14). Сформулируем теперь лемму, которая понадобится нам для более глубокого понимания основного результата подраздела.

**Лемма 1.8.2** (J. Murakami, M. Yano, 2001 г.). Пусть  $T$  — гиперболический тетраэдр с двугранными углами  $A, B, C, D, E, F$  (рис. 1.2.1). Далее, пусть  $z_1$  и  $z_2$  — решения уравнения (1.8.14). Тогда

$$|z_1| = |z_2| = 1.$$

Далее, пусть  $V = V(T)$  — объем гиперболического тетраэдра  $T$ . Справедлива следующая формула Мураками—Яно, доказанная в работе [59].

**Теорема 1.8.8** (J. Murakami, M. Yano, 2001 г.). Объем гиперболического тетраэдра  $T = T(A, B, C, D, E, F)$  (см. рис. 1.2.1) может быть вычислен по формуле

$$V(T) = \text{Im} \left\{ \frac{U(z_1, T) - U(z_2, T)}{2} \right\}, \tag{1.8.15}$$

где функция  $U = U(z, T)$  имеет вид (1.8.12).

**Замечание 1.8.3.** В работе [59] вводятся в рассмотрение следующие величины:

$$V_1(T) = U(z_1, T) + \Delta(T),$$

$$V_2(T) = U(z_2, T) + \Delta(T),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}(a, b, c) = & -\frac{1}{4}(\text{Li}_2(-abc^{-1}) + \text{Li}_2(-ab^{-1}c) + \text{Li}_2(-a^{-1}bc) + \\ & + \text{Li}_2(-a^{-1}b^{-1}c^{-1}) + (\ln a)^2 + (\ln b)^2 + (\ln c)^2), \end{aligned}$$

$$\Delta(T) = \tilde{\Delta}(a, b, c) + \tilde{\Delta}(a, e, f) + \tilde{\Delta}(b, d, f) + \tilde{\Delta}(c, d, e) + \frac{1}{2}(\ln a \ln d + \ln b \ln e + \ln c \ln f).$$

Можно показать (см. [59]), что мнимые части  $V_1(T)$  и  $V_2(T)$  равны по абсолютной величине, а отличаются лишь знаком. Поэтому под  $z_1$  понимается такое решение, что соответствующая величина  $\text{Im } V_1(T) > 0$ .

Вывод формулы (1.8.15) можно найти в работе [59]. Он основан на теории квантовых 6j-символов [59] и, кроме того, опирается на полученную ранее формулу Чо—Кима [40].

**Замечание 1.8.4.** Используя метод аналитического продолжения для объемов неевклидовых тетраэдров (см., например, [16]), из формулы (1.8.15) можно получить формулу объема произвольного тетраэдра в сферическом пространстве. В этом случае формула для объема примет вид

$$V(T) = \frac{U(z_1, T) - U(z_2, T)}{2}$$

(более подробно см. в работе [59]).

Также отметим, что в работе [57] была предложена еще одна альтернативная формула для вычисления объема сферического тетраэдра через двугранные углы, а также формула, выражающая объем тетраэдра в сферическом пространстве через длины его ребер.

В заключение данного раздела мы представим формулу Мураками—Ушиджимы объема произвольного гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер.



**Теорема 1.8.9** (Мураками, Ушиджима, 2004 г.). Пусть  $T = T(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$  — компактный гиперболический тетраэдр с длинами ребер  $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$  и  $l_6$  (рис. 1.8.2). Тогда его объем  $V(T)$  может быть выражен формулой:

$$V(T) = V_l - \sum_{i=1}^6 l_i \frac{\partial V_l}{\partial l_i},$$

где

$$V_l = V(-\exp l_4, -\exp l_5, -\exp l_6, -\exp l_1, -\exp l_2, -\exp l_3),$$

$$V(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = \sqrt{\frac{-1}{4}} \left[ \left( U(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, z_-) - z_- \frac{\partial U}{\partial z}(z = z_-) \ln z_- \right) - \right. \\ \left. - \left( U(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, z_+) - z_+ \frac{\partial U}{\partial z}(z = z_+) \ln z_+ \right) \right],$$

$$U(a, b, c, d, e, f, z) = \frac{1}{2} \{ \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(z a b d e) + \text{Li}_2(z a c d f) + \text{Li}_2(z b c e f) - \\ - \text{Li}_2(-z a b c) - \text{Li}_2(-z a e f) - \text{Li}_2(-z b d f) - \text{Li}_2(-z c d e) \}$$

при этом  $\text{Li}_2(z)$  — по-прежнему ветвь дилогарифма Эйлера

$$\text{Li}_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt \quad (z \in \mathbb{C} \setminus [1; +\infty)),$$

отвечающая ветви логарифмической функции  $\ln \theta = \ln |\theta| + i \arg \theta$  ( $-\pi < \arg \theta < \pi$ ),

$$z_- = \frac{2}{q_l} \left( \text{sh } l_1 \text{ sh } l_4 + \text{sh } l_2 \text{ sh } l_5 + \text{sh } l_3 \text{ sh } l_6 - \sqrt{G_l} \right),$$

$$z_+ = \frac{2}{q_l} \left( \text{sh } l_1 \text{ sh } l_4 + \text{sh } l_2 \text{ sh } l_5 + \text{sh } l_3 \text{ sh } l_6 + \sqrt{G_l} \right),$$

$$q_l = \exp(l_1 + l_4) + \exp(l_2 + l_5) + \exp(l_3 + l_6) - \\ - \exp(l_1 + l_2 + l_3) - \exp(l_1 + l_5 + l_6) - \exp(l_2 + l_4 + l_6) - \\ - \exp(l_3 + l_4 + l_5) + \exp(l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6),$$

$$G_l = \begin{pmatrix} -1 & -\text{ch } l_4 & -\text{ch } l_5 & -\text{ch } l_3 \\ -\text{ch } l_4 & -1 & -\text{ch } l_6 & -\text{ch } l_2 \\ -\text{ch } l_5 & -\text{ch } l_6 & -1 & -\text{ch } l_1 \\ -\text{ch } l_3 & -\text{ch } l_2 & -\text{ch } l_1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство формулы Мураками—Ушиджимы основано на полученной ранее формуле Мураками—Яно и свойствах функции  $U = U(z, T)$ .

Подробное оригинальное доказательство теоремы 1.8.9 можно найти в работе [58].

**Замечание 1.8.5.** Приведенные выше формулы Мураками—Яно и Мураками—Ушиджимы являются довольно громоздкими по своей записи и, кроме того, выражают объем через многозначные комплекснозначные функции. Поэтому возникла потребность в получении формулы, выражающей объем неевклидова тетраэдра вещественными функциями (или их линейными комбинациями).

**1.8.4. Формула Деревнина—Медных объема гиперболического тетраэдра общего вида.** В 2005 г. Д. А. Деревнин и А. Д. Медных в работе [20] получили формулу для объема компактного гиперболического тетраэдра общего вида, с помощью которой объем выражается интегралом по отрезку вещественной прямой от вещественнозначной подынтегральной функции.

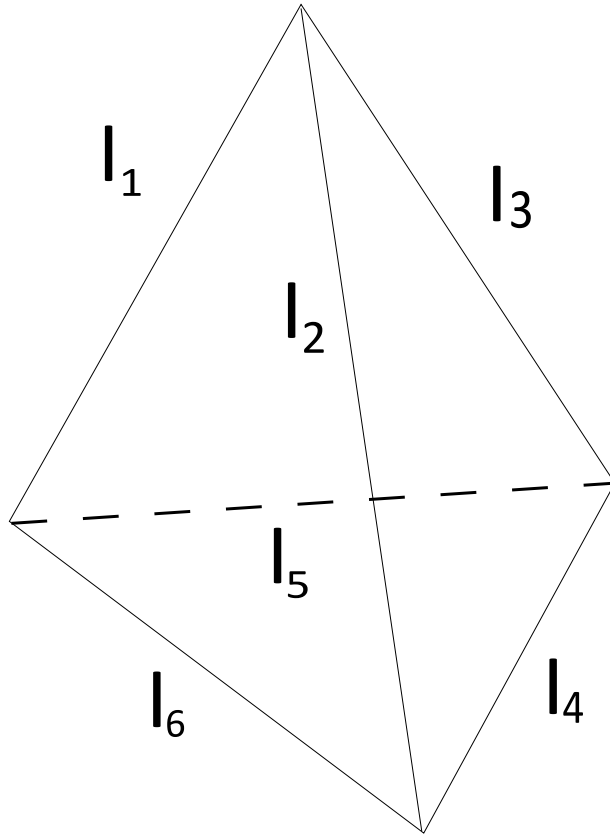


Рис. 1.8.2. Гиперболический тетраэдр  $T = T(l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)$

Формула Деревнина—Медных объема произвольного гиперболического тетраэдра выражается следующей теоремой.

**Теорема 1.8.10** (D. A. Derevnin, A. D. Mednykh, 2004 г.). Пусть  $T = T(A, B, C, D, E, F)$  — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого  $A, B, C$  лежат при одной вершине, а  $D, E, F$  — противоположные им двугранные углы. Далее, пусть  $z_1$  и  $z_2$  — решения уравнения (1.8.14) и  $Z_1 = \arg z_1$ ,  $Z_2 = \arg z_2$ . Тогда объем  $V = V(T)$  гиперболического тетраэдра выражается формулой

$$V(T) = -\frac{1}{4} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi+A+B+D+E}{2} \sin \frac{\xi+A+C+D+F}{2} \sin \frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos \frac{\xi+A+B+C}{2} \cos \frac{\xi+A+E+F}{2} \cos \frac{\xi+B+D+F}{2} \cos \frac{\xi+C+D+E}{2}} \right| d\xi, \quad (1.8.16)$$

где

$$Z_1 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

$$Z_2 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(A + B + C + D + E + F) + \cos(A + D) + \cos(B + E) + \cos(C + F) + \cos(D + E + F) + \cos(D + B + C) + \cos(A + E + C) + \cos(A + B + F)),$$

$$k_2 = \sin(A + B + C + D + E + F) + \sin(A + D) + \sin(B + E) + \sin(C + F) + \sin(D + E + F) + \sin(D + B + C) + \sin(A + E + C) + \sin(A + B + F),$$

$$k_3 = 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Оригинальное доказательство формулы (1.8.16) основано на проверке того, что функции объема  $V = V(A, B, C, D, E, F)$  удовлетворяет дифференциальному тождеству Шлефли (1.2.3) и начальному условию  $V\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 0$ , то есть являются единственным решением задачи Коши (подробное доказательство см. в работе [44]):

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial A} = -\frac{1}{2}l_A, \\ \frac{\partial V}{\partial B} = -\frac{1}{2}l_B, \\ \frac{\partial V}{\partial C} = -\frac{1}{2}l_C, \\ \frac{\partial V}{\partial D} = -\frac{1}{2}l_D, \\ \frac{\partial V}{\partial E} = -\frac{1}{2}l_E, \\ \frac{\partial V}{\partial F} = -\frac{1}{2}l_F, \\ V\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 0, \end{cases}$$

где  $l_A, l_B, l_C, l_D, l_E, l_F$  — длины ребер двугранных углов  $A, B, C, D, E$  и  $F$  соответственно.

Приведем оригинальное доказательство формулы Деревнина—Медных, следуя работе [44].

*Доказательство (Деревнин, Медных, 2005 г.).*

1. Сначала покажем, что если  $T$  — гиперболический тетраэдр с двугранными углами  $A, B, C, D, E, F$ , то числа

$$Z_1 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3}$$

и

$$Z_2 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= -(\cos(A+B+C+D+E+F) + \cos(A+D) + \cos(B+E) + \cos(C+F) + \\ &\quad + \cos(D+E+F) + \cos(D+B+C) + \cos(A+E+C) + \cos(A+B+F)), \\ k_2 &= \sin(A+B+C+D+E+F) + \sin(A+D) + \sin(B+E) + \sin(C+F) + \\ &\quad + \sin(D+E+F) + \sin(D+B+C) + \sin(A+E+C) + \sin(A+B+F), \\ k_3 &= 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F), \end{aligned}$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

являются корнями уравнения

$$\frac{\cos \frac{\xi+A+B+C}{2} \cos \frac{\xi+A+E+F}{2} \cos \frac{\xi+B+D+F}{2} \cos \frac{\xi+C+D+E}{2}}{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi+A+B+D+E}{2} \sin \frac{\xi+A+C+D+F}{2} \sin \frac{\xi+B+C+E+F}{2}} = 0.$$

Прямые вычисления можно показать, что наше уравнение эквивалентно следующему:

$$k_1 \cos z + k_2 \sin z = k_3. \quad (1.8.17)$$

Двугранные углы гиперболического тетраэдра меньше  $\pi$  и, следовательно,

$$k_3 > 0.$$

Заметим также, что имеет место тождество

$$k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 = -4 \det G, \quad (1.8.18)$$

где  $G$  — матрица Грама тетраэдра  $T = T(A, B, C, D, E, F)$ .

Так как для компактного гиперболического тетраэдра выполнено  $\det G < 0$ , то мы получаем следующие оценки на  $k_1, k_2, k_3, k_4$ :

$$k_1^2 + k_2^2 > 0, \quad (1.8.19)$$

$$0 < k_3, k_4 < \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (1.8.20)$$

Следовательно, уравнение (1.8.17) эквивалентно

$$\sin(z + x) = \sin \alpha, \quad (1.8.21)$$

где

$$\sin x = \frac{k_1}{k_1^2 + k_2^2}, \quad \cos x = \frac{k_2}{k_1^2 + k_2^2}, \quad (1.8.22)$$

а

$$\sin \alpha = \frac{k_3}{k_1^2 + k_2^2} > 0. \quad (1.8.23)$$

Наконец, нам осталось заметить, что

$$Z_1 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3} \quad (1.8.24)$$

и

$$Z_2 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3} \quad (1.8.25)$$

являются решениями (1.8.21), а значит, и (1.8.17).

2. Теперь введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z) = -\frac{1}{4} \ln \frac{\cos \frac{V_1+z}{2} \cos \frac{V_2+z}{2} \cos \frac{V_3+z}{2} \cos \frac{V_4+z}{2}}{\sin \frac{H_1+z}{2} \sin \frac{H_2+z}{2} \sin \frac{H_3+z}{2} \sin \frac{z}{2}},$$

где

$$V_1 = A + B + C, \quad V_2 = A + E + F, \quad V_3 = B + D + F, \quad V_4 = C + D + E,$$

$$H_1 = A + B + D + E, \quad H_2 = A + C + D + F, \quad H_3 = B + C + E + F.$$

Покажем, что

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial A} dz = -\frac{a}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial B} dz = -\frac{b}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial C} dz = -\frac{c}{2},$$

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial D} dz = -\frac{d}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial E} dz = -\frac{e}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial F} dz = -\frac{f}{2},$$

при этом  $a, b, c, d, e, f$  — длины ребер двугранных углов  $A, B, C, D, E, F$  соответственно.

Так как

$$\frac{\partial \Phi}{\partial A} = -\frac{1}{8} \left( \operatorname{tg} \frac{V_1 + Z}{2} + \operatorname{tg} \frac{V_2 + Z}{2} + \operatorname{ctg} \frac{H_1 + Z}{2} + \operatorname{ctg} \frac{H_2 + Z}{2} \right),$$

то

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial A} dz = -\frac{1}{4} \ln \frac{\cos \frac{V_1+Z_2}{2} \cos \frac{V_2+Z_2}{2} \sin \frac{H_1+Z_1}{2} \sin \frac{H_2+Z_1}{2}}{\cos \frac{V_1+Z_1}{2} \cos \frac{V_2+Z_1}{2} \sin \frac{H_1+Z_2}{2} \sin \frac{H_2+Z_2}{2}}.$$

Рассмотрим теперь отдельно числитель  $Q_1$  дроби

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\cos \frac{V_1+z_2}{2} \cos \frac{V_2+z_2}{2} \sin \frac{H_1+z_1}{2} \sin \frac{H_2+z_1}{2}}{\cos \frac{V_1+z_1}{2} \cos \frac{V_2+z_1}{2} \sin \frac{H_1+z_2}{2} \sin \frac{H_2+z_2}{2}}.$$

Используя формулы для произведения тригонометрических функций, прямыми вычислениями получается следующее выражение для  $Q_1$ :

$$Q_1 = \frac{1}{4} \left( q_{11} \cos^2 \frac{Z_1 + Z_2}{2} + q_{22} \sin^2 \frac{Z_1 + Z_2}{2} + q_{33} \cos^2 \frac{Z_1 - Z_2}{2} + q_{44} \sin^2 \frac{Z_1 - Z_2}{2} + \right. \\ \left. + q_{12} \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2} \sin \frac{Z_1 + Z_2}{2} + q_{13} \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2} \cos \frac{Z_1 - Z_2}{2} + q_{14} \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2} \sin \frac{Z_1 - Z_2}{2} + \right. \\ \left. + q_{23} \cos \frac{Z_1 + Z_2}{2} \cos \frac{Z_1 - Z_2}{2} + q_{24} \sin \frac{Z_1 + Z_2}{2} \sin \frac{Z_1 - Z_2}{2} + q_{34} \cos \frac{Z_1 - Z_2}{2} \sin \frac{Z_1 - Z_2}{2} \right),$$

где

$$q_{ii} = f_i(H_1, V_1) f_i(H_2, V_2), \quad q_{ij} = f_i(H_1, V_1) f_j(H_2, V_2) + f_j(H_1, V_1) f_i(H_2, V_2), \quad i \neq j,$$

$$f_1 = \cos \frac{x+y}{2}, \quad f_2 = \sin \frac{x+y}{2}, \quad f_3 = \cos \frac{x-y}{2}, \quad f_4 = \sin \frac{x-y}{2}.$$

Используя формулы (1.8.22)–(1.8.25) и заменяя  $k_1, k_2$  и  $k_3$  их выражениями через двугранные углы, окончательно получаем

$$Q_1 = \frac{-2}{k_1^2 + k_2^2} (\cos D + \cos(C - E)) (\cos D + \cos(B - F)) (2c_{34} + k_4 \sin A).$$

Применяя аналогичные рассуждения, можно получить следующую формулу для  $Q_2$ :

$$Q_2 = \frac{-2}{k_1^2 + k_2^2} (\cos D + \cos(C - E)) (\cos D + \cos(B - F)) (2c_{34} - k_4 \sin A).$$

Таким образом,

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial A} dz = -\frac{1}{4} \ln \frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\det G} \sin A}{c_{34}}.$$

Наконец, применяя формулу (iii) теоремы 1.2.1, прямыми вычислениями нетрудно установить соотношение

$$\operatorname{tg}^2 a = -\det(G) \frac{\sin^2 A}{c_{34}^2},$$

которое и доказывает формулу

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial A} dz = -\frac{a}{2}.$$

Остальные формулы

$$\int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial B} dz = -\frac{b}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial C} dz = -\frac{c}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial D} dz = -\frac{d}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial E} dz = -\frac{e}{2}, \quad \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial F} dz = -\frac{f}{2}$$

выводятся аналогично.

3. Пусть функция  $\tilde{V}$  задается формулой

$$\tilde{V}(A, B, C, D, E, F) = \int_{Z_1}^{Z_2} \Phi(A, B, C, D, E, F, z) dz,$$

где

$$\Phi(A, B, C, D, E, F, z) = -\frac{1}{4} \ln \frac{\cos \frac{V_1+z}{2} \cos \frac{V_2+z}{2} \cos \frac{V_3+z}{2} \cos \frac{V_4+z}{2}}{\sin \frac{H_1+z}{2} \sin \frac{H_2+z}{2} \sin \frac{H_3+z}{2} \sin \frac{z}{2}}.$$

Покажем, что данная функция  $\tilde{V}$  задает объем тетраэдра  $T = T(A, B, C, D, E, F)$ , то есть является единственным решением задачи Коши

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial A} = -\frac{1}{2}a, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial B} = -\frac{1}{2}b, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial C} = -\frac{1}{2}c, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial D} = -\frac{1}{2}d, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial E} = -\frac{1}{2}e, \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial F} = -\frac{1}{2}f, \\ \tilde{V}\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Применяя правило Лейбница дифференцирования по параметру, получаем:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial A} = \Phi(A, B, C, D, E, F, Z_2) \frac{\partial Z_2}{\partial A} - \Phi(A, B, C, D, E, F, Z_1) \frac{\partial Z_1}{\partial A} + \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{\partial \Phi}{\partial A} dz.$$

Так как  $Z_1$  и  $Z_2$  являются решениями уравнения  $\Phi = 0$ , то, в силу результата пункта 2 настоящего доказательства, получаем

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial A} = -\frac{1}{2}a.$$

Аналогично устанавливаются остальные равенства

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial B} = -\frac{1}{2}b, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial C} = -\frac{1}{2}c, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial D} = -\frac{1}{2}d, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial E} = -\frac{1}{2}e, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial F} = -\frac{1}{2}f.$$

Наконец, при  $A, B, C, D, E, F \rightarrow 0$  функция  $\Phi \rightarrow 0$ , а значит  $\tilde{V} \rightarrow 0$ .

Теорема доказана. □

Однако эта же формула может быть выведена из формулы Мураками—Яно и формулы связи между дилогарифмом Эйлера и функции Лобачевского (см., например, [16]):

$$\text{Li}_2(\exp 2iz) = \frac{\pi^2}{6} - z(\pi - z) + 2i\Lambda(z).$$

Приведем теперь доказательство теоремы Деревнина—Медных из формулы Мураками—Яно, основанное на работе автора [23].

*Доказательство (Краснов, 2013 г.).* Для вывода формулы Деревнина—Медных мы сначала, используя формулу Мураками—Яно и указанное выше свойство функции Лобачевского, выразим объем произвольного гиперболического тетраэдра в терминах специальной функции Лобачевского.

Таким образом, согласно формуле (1.8.15):

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) = \frac{\text{Im}\{U(z_1, T) - U(z_2, T)\}}{2} = \frac{1}{2} & \left( \Lambda\left(\frac{Z_1}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_2}{2}\right) + \right. \\ & + \Lambda\left(\frac{Z_1 + A + B + D + E}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_2 + A + B + D + E}{2}\right) + \\ & + \Lambda\left(\frac{Z_1 + A + C + D + F}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_2 + A + C + D + F}{2}\right) + \\ & + \Lambda\left(\frac{Z_1 + B + C + E + F}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_2 + B + C + E + F}{2}\right) + \\ & + \Lambda\left(\frac{Z_2 + \pi + A + B + C}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_1 + \pi + A + B + C}{2}\right) + \\ & + \Lambda\left(\frac{Z_2 + \pi + A + E + F}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_1 + \pi + A + E + F}{2}\right) + \\ & + \Lambda\left(\frac{Z_2 + \pi + B + D + F}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_1 + \pi + B + D + F}{2}\right) + \\ & \left. + \Lambda\left(\frac{Z_2 + \pi + C + D + E}{2}\right) - \Lambda\left(\frac{Z_1 + \pi + C + D + E}{2}\right) \right), \quad (1.8.26) \end{aligned}$$

где  $Z_1 = \arg z_1$ ,  $Z_2 = \arg z_2$ .

Следовательно, объем гиперболического тетраэдра представляется в виде алгебраической суммы шестнадцати значений функции Лобачевского.

С помощью определения функции Лобачевского формулу (1.8.26) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) = -\frac{1}{2} & \left\{ \int_{\frac{Z_2}{2}}^{\frac{Z_1}{2}} \ln |\sin t| dt + \int_{\frac{Z_2 + A + B + D + E}{2}}^{\frac{Z_1 + A + B + D + E}{2}} \ln |\sin t| dt + \int_{\frac{Z_2 + A + C + D + F}{2}}^{\frac{Z_1 + A + C + D + F}{2}} \ln |\sin t| dt + \right. \\ & + \int_{\frac{Z_2 + B + C + E + F}{2}}^{\frac{Z_1 + B + C + E + F}{2}} \ln |\sin t| dt + \int_{\frac{Z_1 + \pi + A + B + C}{2}}^{\frac{Z_2 + \pi + A + B + C}{2}} \ln |\sin t| dt + \int_{\frac{Z_1 + \pi + A + E + F}{2}}^{\frac{Z_2 + \pi + A + E + F}{2}} \ln |\sin t| dt + \\ & \left. + \int_{\frac{Z_1 + \pi + B + D + F}{2}}^{\frac{Z_2 + \pi + B + D + F}{2}} \ln |\sin t| dt + \int_{\frac{Z_1 + \pi + C + D + E}{2}}^{\frac{Z_2 + \pi + C + D + E}{2}} \ln |\sin t| dt \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, добьемся того, чтобы нижний и верхний пределы интегрирования в каждом интеграле были равны  $Z_2$  и  $Z_1$  соответственно. Для этого выполним подходящие замены переменных в каждом из 8 получившихся интегральных слагаемых, а именно:

- 1)  $t \rightarrow \frac{\xi}{2}$ ;
- 2)  $t \rightarrow \frac{\xi + A + B + C + D}{2}$ ;

- 3)  $t \rightarrow \frac{\xi + A + C + D + F}{2}$ ;
- 4)  $t \rightarrow \frac{\xi + B + C + E + F}{2}$ ;
- 5)  $t \rightarrow \frac{\xi + \pi + A + B + C}{2}$ ;
- 6)  $t \rightarrow \frac{\xi + \pi + A + E + F}{2}$ ;
- 7)  $t \rightarrow \frac{\xi + \pi + B + D + F}{2}$ ;
- 8)  $t \rightarrow \frac{\xi + \pi + C + D + E}{2}$ .

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \text{Vol}(T) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \sin \frac{\xi}{2} \right| d\xi + \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \sin \frac{\xi + A + B + D + E}{2} \right| d\xi + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \sin \frac{\xi + A + C + D + F}{2} \right| d\xi + \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \sin \frac{\xi + B + C + E + F}{2} \right| d\xi - \\ &- \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \cos \frac{\xi + A + B + C}{2} \right| d\xi - \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \cos \frac{\xi + A + E + F}{2} \right| d\xi - \\ &- \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \cos \frac{\xi + B + D + F}{2} \right| d\xi - \left. \frac{1}{2} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \cos \frac{\xi + C + D + E}{2} \right| d\xi \right) = \\ &= -\frac{1}{4} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi + A + B + D + E}{2} \sin \frac{\xi + A + C + D + F}{2} \sin \frac{\xi + B + C + E + F}{2}}{\cos \frac{\xi + A + B + C}{2} \cos \frac{\xi + A + E + F}{2} \cos \frac{\xi + B + D + F}{2} \cos \frac{\xi + C + D + E}{2}} \right| d\xi. \end{aligned}$$

А теперь покажем, что  $Z_1$  и  $Z_2$  в теореме совпадают с выражениями для пределов интегрирования, полученными Д. А. Деревниным и А. Д. Медных в [20]. В их работе пределы интегрирования выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \text{arctg} \frac{k_2}{k_1} - \text{arctg} \frac{k_4}{k_3}, \\ Z_2 &= \text{arctg} \frac{k_2}{k_1} + \text{arctg} \frac{k_4}{k_3}, \end{aligned}$$

где вещественные числа  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$  имеют вид:

$$\begin{aligned} k_1 &= -(\cos(A + B + C + D + E + F) + \cos(A + D) + \cos(B + E) + \cos(C + F) + \\ &+ \cos(D + E + F) + \cos(D + B + C) + \cos(A + E + C) + \cos(A + B + F)), \\ k_2 &= \sin(A + B + C + D + E + F) + \sin(A + D) + \sin(B + E) + \sin(C + F) + \\ &+ \sin(D + E + F) + \sin(D + B + C) + \sin(A + E + C) + \sin(A + B + F)), \\ k_3 &= 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F), \end{aligned}$$



$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Действительно, учитывая равенство

$$\frac{D}{16(abcdef)^2} = \det G(T),$$

выразим решения  $z_1$  и  $z_2$  уравнения (1.8.14) через величины двугранных углов тетраэдра и определитель его матрицы Грама [64]:

$$z_1 = -2 \frac{\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F - \sqrt{\det G}}{ad + be + cf + abf + ace + bcd + def + abcdef},$$

$$z_2 = -2 \frac{\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F + \sqrt{\det G}}{ad + be + cf + abf + ace + bcd + def + abcdef}.$$

Используя принятые выше обозначения, получим:

$$z_1 = \frac{k_3 - 2\sqrt{\det G}}{k_1 - ik_2},$$

$$z_2 = \frac{k_3 + 2\sqrt{\det G}}{k_1 - ik_2}.$$

Далее, так как (см. [20])

$$k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 = k_4^2 = -4 \det G,$$

то

$$z_1 = \frac{k_3 - ik_4}{k_1 - ik_2},$$

$$z_2 = \frac{k_3 + ik_4}{k_1 - ik_2}.$$

Теперь запишем комплексные числа  $z_1$  и  $z_2$  в алгебраической форме. Окончательно имеем:

$$z_1 = \frac{k_1 k_3 + k_2 k_4}{k_1^2 + k_2^2} + i \frac{k_2 k_3 - k_1 k_4}{k_1^2 + k_2^2},$$

$$z_2 = \frac{k_1 k_3 - k_2 k_4}{k_1^2 + k_2^2} + i \frac{k_2 k_3 + k_1 k_4}{k_1^2 + k_2^2}.$$

Попутно заметим, что пределы интегрирования в формуле (1.8.16)  $Z_1 = \arg z_1$ ,  $Z_2 = \arg z_2$  обязаны также удовлетворять дифференциальной формуле Шлефли [61]. В связи с этим получаем следующие оценки для  $k_1, k_2, k_3$  и  $k_4$ :

$$k_1 k_3 + k_2 k_4 > 0, \quad k_1 k_3 - k_2 k_4 > 0, \quad \frac{k_2 k_4}{k_1 k_3} < 1.$$

Наконец, учитывая известные тригонометрические формулы

$$\operatorname{arctg} a \pm \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a \pm b}{1 \mp ab} \quad (ab < 1),$$

получим требуемые выражения для пределов интегрирования. □

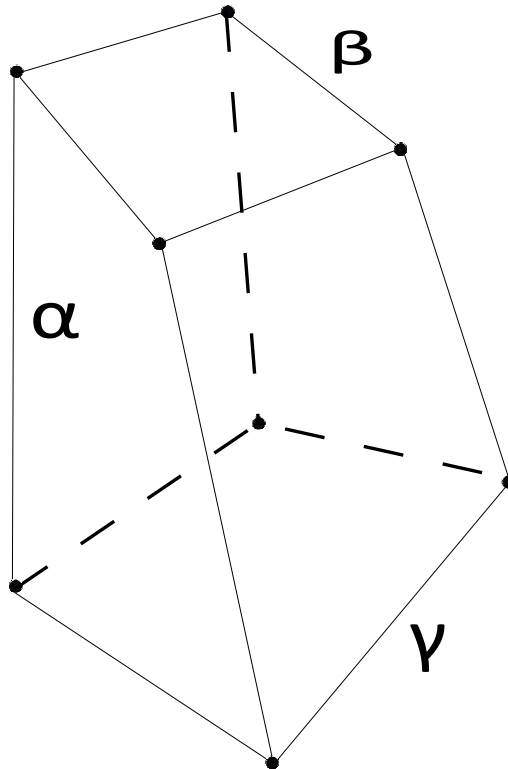


Рис. 2.1.1. Куб Ламберта  $Q = Q(\alpha, \beta, \gamma)$

## ГЛАВА 2

### ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ, ИМЕЮЩИХ БОЛЕЕ СЛОЖНОЕ КОМБИНАТОРНОЕ СТРОЕНИЕ, НЕЖЕЛИ ТЕТРАЭДР

В данном разделе мы рассмотрим формулы объемов более сложных многогранников. Вначале будут представлены результаты об объеме неевклидова куба Ламберта. В последующих разделах мы изучим гиперболические и сферические октаэдры и гексаэдры с некоторыми типами нетривиальных симметрий. В завершении главы 2 обзора мы изложим результаты А. Ю. Веснина об объеме многогранника Лебелля [15], который является примером ограниченного прямоугольного многогранника.

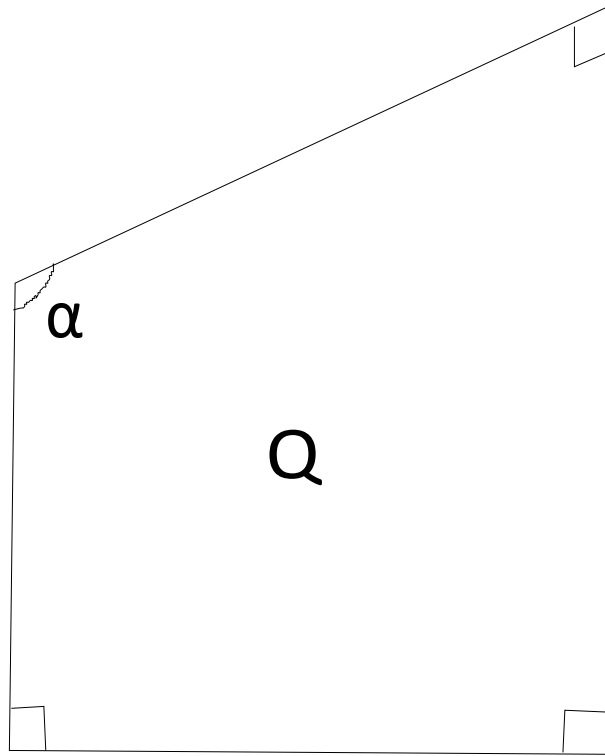
#### 2.1. ОБЪЕМ КУБА ЛАМБЕРТА

В настоящем подразделе мы рассмотрим формулы для вычисления объема неевклидова куба Ламберта, полученные Р. Келлерхальц для случая  $\mathbb{H}^3$  (см. [51]) и Д. А. Деревниным и А. Д. Медных для  $\mathbb{S}^3$  (см. [20]).

**Определение 2.1.1.** *Кубом Ламберта* называется выпуклый многогранник  $Q = Q(\alpha, \beta, \gamma)$ , имеющий комбинаторный тип евклидова куба, двугранные углы которого при трех некопланарных ребрах равны  $\alpha, \beta, \gamma$  (*существенные* двугранные углы), а все остальные двугранные углы прямые (см. рис. 2.1.1).

Куб Ламберта является трехмерным аналогом *четырёхугольника Ламберта*  $Q = Q(\alpha)$  (рис. 2.1.2), имеющего важное значение в основаниях неевклидовых геометрий.

**Замечание 2.1.1.** Куб Ламберта может быть реализован в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$  при  $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$  и в сферическом пространстве  $\mathbb{S}^3$  при  $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \pi$  (см., например, [45, 51]).

Рис. 2.1.2. Четырехугольник Ламберта  $Q = Q(\alpha)$ 

Объем куба Ламберта в гиперболическом и сферическом пространствах выражается следующими теоремами (см. работы [20, 51]).

**Теорема 2.1.1** (Kellerhals, 1989 г.). Объем гиперболического куба Ламберта  $Q = Q(\alpha, \beta, \gamma)$  выражается формулой

$$V(Q) = \frac{1}{4}(\Delta(\alpha, \theta) + \Delta(\beta, \theta) + \Delta(\gamma, \theta) - 2\Delta(\frac{\pi}{2}, \theta) - \Delta(0, \theta)),$$

где  $\Delta(x, y) = \Lambda(x + y) - \Lambda(x - y)$ ,  $\Lambda(x) = -\int_0^x \ln |2 \sin t| dt$ ,  $x \in \mathbb{R}$  — функция Лобачевского, а  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  — острый угол, определяемый из уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \theta = K + \sqrt{K^2 + A^2 B^2 C^2},$$

где

$$K = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 1}{2}, \quad A = \operatorname{tg} \alpha, \quad B = \operatorname{tg} \beta, \quad C = \operatorname{tg} \gamma.$$

**Теорема 2.1.2** (Деревнин, Медных, 2009 г.). Объем сферического куба Ламберта  $Q = Q(\alpha, \beta, \gamma)$  задается формулой

$$V(Q) = \frac{1}{4} \left( \delta(\alpha, \theta) + \delta(\beta, \theta) + \delta(\gamma, \theta) - 2\delta(\frac{\pi}{2}, \theta) - \delta(0, \theta) \right),$$

где

$$\delta(\alpha, \theta) = \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 - \cos 2\alpha \cos 2\tau) \frac{d\tau}{\cos 2\tau},$$

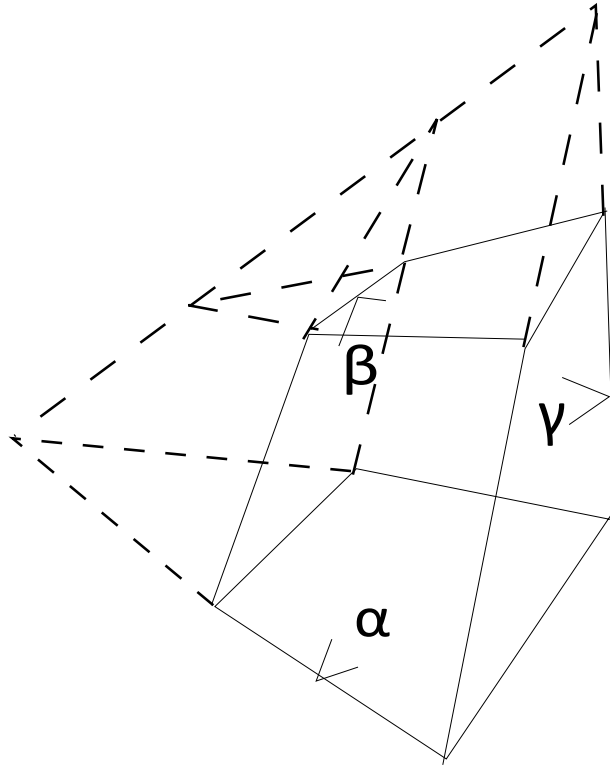


Рис. 2.1.3. Куб Ламберта  $Q = Q(\alpha, \beta, \gamma)$  в гиперболическом пространстве

$\alpha$  — параметр, определяемый из уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \theta = -K + \sqrt{K^2 + A^2 B^2 C^2},$$

$$K = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 1}{2}, \quad A = \operatorname{tg} \alpha, \quad B = \operatorname{tg} \beta, \quad C = A = \operatorname{tg} \gamma.$$

**Замечание 2.1.2.** В работах [20, 51] показано, что существенные двугранные углы куба Ламберта в гиперболическом пространстве острые, а в случае  $\mathbb{S}^3$  выполняются условия  $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta, \gamma < \pi$ .

Идея доказательства теоремы 2.1.1 заключается в применении формулы для объема гиперболической ортосхемы (см. теорему 1.4.2) к ситуации, когда одно из ребер многогранника уходит за абсолют. В этом случае срезы соответствующих вершин перекрываются и образуют новое ребро. Получающийся таким образом ограниченный многогранник представляет собой куб Ламберта (рис. 2.1.3).

Подробное доказательство формулы объема куба Ламберта содержится в работе Р. Келлерхальц [51].

Что касается формулы из теоремы 2.1.2, то она может быть доказана непосредственной проверкой того, что функция  $V(Q) = V(\alpha, \beta, \gamma)$  является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} l_\alpha, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{1}{2} l_\beta, \\ \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} l_\gamma, \\ V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

где  $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$  — длины ребер двугранных углов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  соответственно.

Приведем схему доказательства указанной теоремы, основанное на работе [20].

*Схема доказательства теоремы 2.1.1.* Рассмотрим сферический куб Ламберта  $Q = Q(\alpha, \beta, \gamma)$  (рис. 2.1.1) с длинами ребер  $l_\alpha, l_\beta, l_\gamma$  двугранных углов  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ .

1. Для доказательства теоремы нам понадобятся *правила тангенсов и синусов* для сферического куба Ламберта (более подробно см. теорему 1.2.2 работы [20]):

а) *правило тангенсов:*

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} l_\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} l_\beta} = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} l_\gamma} = T;$$

б) *правило синусов:*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin l_\alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin l_\beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin l_\gamma} = -T,$$

где  $T$  — отрицательный корень биквадратного уравнения

$$T^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)T^2 - A^2B^2C^2 = 0,$$

при этом

$$A = \operatorname{tg} \alpha, \quad B = \operatorname{tg} \beta, \quad C = \operatorname{tg} \gamma.$$

Из данных формул прямыми вычислениями можно вывести следующее полезное тождество (см. [20, с. 195]):

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 l_\alpha} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 l_\beta} \cdot \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 l_\gamma} = \frac{T^2 + A^2}{1 + A^2} \frac{T^2 + B^2}{1 + B^2} \frac{T^2 + C^2}{1 + C^2} = T^2,$$

которое эквивалентно уравнению

$$(T^2 - 1)(T^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)T^2 - A^2B^2C^2) = 0.$$

2. Докажем теперь, что объем многогранника  $Q = Q(\alpha, \beta, \gamma)$  можно вычислить по формуле

$$V(Q) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^T \ln \frac{(t^2 + A^2)(t^2 + B^2)(t^2 + C^2)}{(1 + A^2)(1 + B^2)(1 + C^2)t^2} \frac{dt}{t^2 - 1},$$

где  $T$  — отрицательный корень уравнения

$$T^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)T^2 - A^2B^2C^2 = 0,$$

$$A = \operatorname{tg} \alpha, \quad B = \operatorname{tg} \beta, \quad C = \operatorname{tg} \gamma.$$

Для этого достаточно показать, что  $V(Q) = V(\alpha, \beta, \gamma)$  является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} l_\alpha, \\ \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{1}{2} l_\beta, \\ \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} l_\gamma, \\ V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Положим

$$\tilde{V} = \int_{-\infty}^T F(t, A, B, C) dt,$$

где

$$F(t, A, B, C) = \frac{1}{4(t^2 - 1)} \ln \frac{(t^2 + A^2)(t^2 + B^2)(t^2 + C^2)}{(1 + A^2)(1 + B^2)(1 + C^2)t^2}.$$

Используя формулу Лейбница, находим

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \alpha} = F(T, A, B, C) \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \int_{-\infty}^T \frac{\partial F(t, A, B, C)}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \alpha}.$$

Из формул, приведенных в пункте 1 доказательства, следует, что

$$F(T, A, B, C) = 0.$$

Кроме того, так как  $\alpha = \operatorname{arctg} A$ , мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= 1 + A^2, \\ \frac{\partial F(t, A, B, C)}{\partial A} \cdot \frac{\partial A}{\partial \alpha} &= -\frac{A}{2(t^2 + A^2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \alpha} = \int_{-\infty}^T \frac{-A dt}{2(t^2 + A^2)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{A}{T} = \frac{1}{2} l_\alpha.$$

В свою очередь, равенства

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \beta} = \frac{1}{2} l_\beta, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} l_\gamma$$

выводятся аналогично.

Наконец, для проверки начального условия заметим, что при  $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$  величины  $A, B, C \rightarrow +\infty$ . Отсюда  $T \rightarrow -\infty$ .

Из сходимости интеграла заключаем, что  $\tilde{V} \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow -\infty$ .

3. Из пункта 2 схемы доказательства получаем

$$\begin{aligned} V(Q) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^T \ln \left( \frac{t^2 + A^2}{1 + A^2} \frac{t^2 + B^2}{1 + B^2} \frac{t^2 + C^2}{1 + C^2} \div \frac{t^2 + 0^2}{1 + 0^2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} (I(A, T) + I(B, T) + I(C, T) - I(0, T)), \end{aligned}$$

где

$$I(A, T) = \int_{-\infty}^T \ln \left( \frac{t^2 + A^2}{1 + A^2} \right) \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

Пусть  $T = \operatorname{tg} \theta$ ,  $A = \operatorname{tg} \alpha$ ,  $B = \operatorname{tg} \beta$ ,  $C = \operatorname{tg} \gamma$ . Делая замену переменных  $t = \operatorname{tg} \tau$ , получаем

$$\begin{aligned} I(A, T) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \ln \left( \frac{\operatorname{tg}^2 \tau + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \frac{d\tau}{\cos^2 \tau (\operatorname{tg}^2 \tau - 1)} = \\ &= \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 - \cos 2\tau \cos 2\alpha) d\tau}{\cos 2\tau} - \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos 2\tau) d\tau}{\cos 2\tau} = \delta(\alpha, \theta) - \delta\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right). \end{aligned}$$

Таким образом, формула объема сферического куба Ламберта примет вид

$$V(Q) = \frac{1}{4} \left( \delta(\alpha, \theta) + \delta(\beta, \theta) + \delta(\gamma, \theta) - 2\delta\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) - \delta(0, \theta) \right).$$

Теорема доказана. □

## 2.2. ОБЪЕМЫ НЕЕВКЛИДОВЫХ МНОГОГРАННИКОВ С СИММЕТРИЯМИ

В данном разделе мы представим основные результаты об объемах неевклидовых октаэдров и двойственных к ним гексаэдров с определенными типами симметрий.

Интерес к получению точных формул для объемов симметричных многогранников в  $\mathbb{H}^3$  и  $\mathbb{S}^3$  во многом обусловлен знаменитой теоремой Сабитова—Коннели—Вальца о многочлене объема (см. теорему 1.1.2 и работу [31]) и работой Р. В. Галиулина, С. Н. Михалева и И. Х. Сабитова [19], в которой были явно выписаны многочлены для объемов евклидовых октаэдров с симметриями.

**2.2.1. Объем неевклидова октаэдра с mmm-симметрией.** Начнем обзор результатов по объемам многогранников с симметриями с октаэдров, допускающих mmm-симметрию.

Рассмотрим *октаэдр  $O$ , обладающий mmm-симметрией* (или *mmm-октаэдр*), то есть выпуклый многогранник с комбинаторным типом октаэдра, остающийся инвариантным при отражениях от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих  $O$  по его реберным циклам (рис. 2.2.1).

Заметим, что у такого октаэдра все восемь граней попарно конгруэнтны между собой. Обозначим через  $a, b, c$  длины ребер mmm-октаэдра, а через  $A, B, C$  величины его двугранных углов.

Можно показать, что в случае неевклидова mmm-октаэдра длины ребер могут быть выражены через двугранные углы по правилу синусов—тангенсов (см. [11] для  $\mathbb{H}^3$  и [5] для  $\mathbb{S}^3$ ). Справедлива

**Теорема 2.2.1.** (Байгонакова, Годой-Молина, Медных, 2011 г.; Абросимов, Годой-Молина, Медных, 2008 г.). Пусть  $O = O(a, b, c, A, B, C)$  — неевклидов октаэдр, обладающий mmm-симметрией. Тогда:

1. для  $\mathbb{S}^3$ :

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{tg} c} = \bar{T}, \quad (2.2.1)$$

где  $\bar{T}$  — положительное число, удовлетворяющее уравнению

$$\bar{T}^2 + \frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C} = 0;$$

2. для  $\mathbb{H}^3$ :

$$\frac{\sin A}{\operatorname{th} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{th} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{th} c} = \bar{T}, \quad (2.2.2)$$

где  $\bar{T}$  — положительное число, удовлетворяющее уравнению

$$\bar{T}^2 - \frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C} = 0.$$

Таким образом, формулы (2.2.1) и (2.2.2) показывают, что неевклидов октаэдр, обладающий mmm-симметрией, однозначно с точностью до движения пространства определяется набором двугранных углов, то есть  $O = O(A, B, C)$ .

Для сферического пространства задача вычисления объема октаэдра, обладающего mmm-симметрией, полностью решена Н. В. Абросимовым, М. Годой-Молина и А. Д. Медных в работе [5]. Имеет место

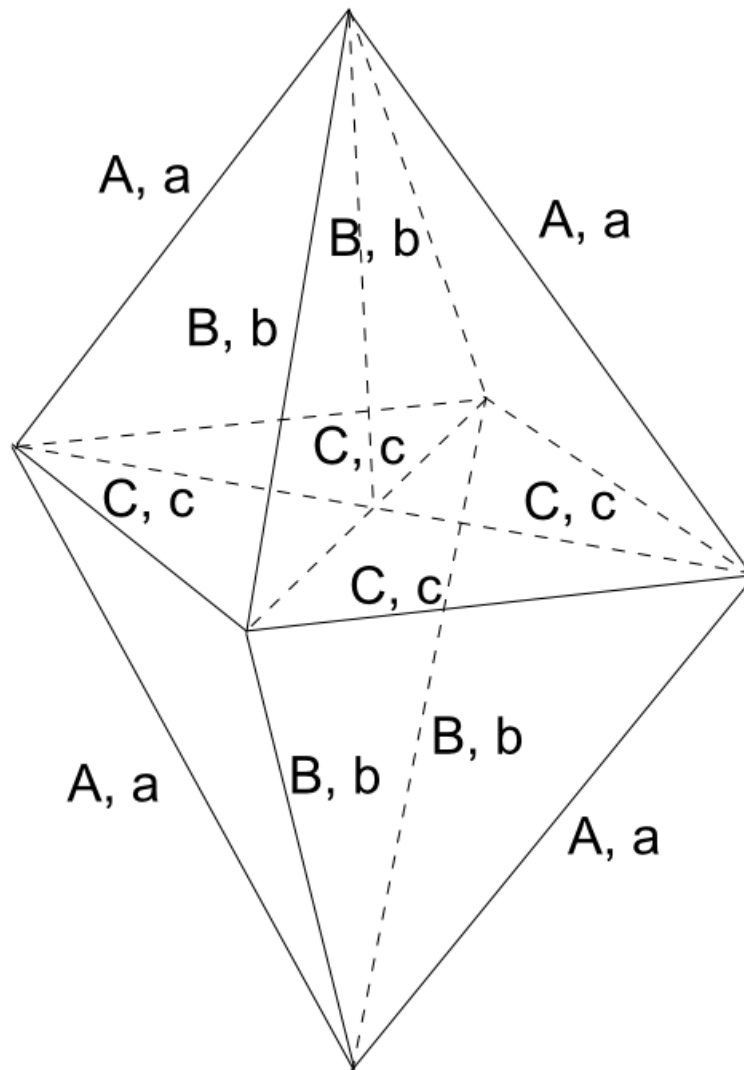


Рис. 2.2.1. Октаэдр, допускающих  $mmm$ -симметрию

**Теорема 2.2.2** (Абросимов, Годой-Молина, Медных, 2008 г.). Пусть  $O = O(A, B, C)$  — сферический октаэдр, обладающий  $mmm$ -симметрией. Тогда его объем  $V = V(O)$  задается следующим выражением:

$$V(O) = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} (\operatorname{arth}(\cos A \cos t) + \operatorname{arth}(\cos B \cos t) + \operatorname{arth}(\cos C \cos t) + \operatorname{arth}(\cos t)) \frac{dt}{\cos t},$$

где  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  — корень уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \theta + \frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C} = 0.$$

Кроме того,  $\theta$  может быть найдено из правила синусов—тангенсов

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{tg} c} = \operatorname{tg} \theta.$$



Что касается случая  $\mathbb{H}^3$ , то объем гиперболического mmm-октаэдра был параллельно и независимо вычислен в работах [3, 24]. Формулы для объема такого октаэдра задаются следующими теоремами (см. [3, 24]).

**Теорема 2.2.3** (Краснов, 2013 г.). Пусть  $O = O(A, B, C)$  — гиперболический октаэдр, обладающий mmm-симметрией (см. рис. 2.2.1). Тогда его объем  $V = V(O)$  выражается формулой

$$V(O) = -2 \int_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{2\xi+A+B}{4} \cos \frac{2\xi+A+C}{4} \cos \frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos \frac{2\xi+A+B+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+A+C+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+B+C+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+3\pi}{4}} \right| d\xi,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1 &= \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3}, \\ \tilde{Z}_2 &= \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} + \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3}, \\ \tilde{k}_1 &= \sqrt{2} \left( \sin \left( \frac{2A+\pi}{4} \right) + \sin \left( \frac{2B+\pi}{4} \right) + \sin \left( \frac{2C+\pi}{4} \right) - \sin \left( \frac{2A+2B+2C+\pi}{4} \right) \right), \\ \tilde{k}_2 &= -\sqrt{2} \left( \sin \left( \frac{2A-\pi}{4} \right) + \sin \left( \frac{2B-\pi}{4} \right) + \sin \left( \frac{2C-\pi}{4} \right) - \sin \left( \frac{2A+2B+2C-\pi}{4} \right) \right), \\ \tilde{k}_3 &= 2 \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right), \\ \tilde{k}_4 &= \sqrt{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_3^2}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.2.3 следует из того, что гиперболический октаэдр, обладающий mmm-симметрией, можно плоскостями симметрии разрезать на 8 тетраэдров, конгруэнтных  $T = T \left( \frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$  (рис. 2.2.2). В свою очередь, объем каждого такого тетраэдра разбиения нетрудно вычислить по формуле Деревнина—Медных.

**Теорема 2.2.4** (Абросимов, Байгонакова, 2013 г.). Пусть  $O = O(A, B, C)$  — гиперболический октаэдр с mmm-симметрией (рис. 2.2.1). Тогда его объем  $V = V(O)$  отыскивается по формулам:

1. если  $0 \leq T \leq 1$ , то

$$V = - \int_0^\tau \ln \left| \frac{(1 - \cos A)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1 + \cos A)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)} \right| dt,$$

где острый угол  $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$  находится из уравнения  $\sin \tau = T$ ;

2. если  $T > 1$ , то

$$V = 2 \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\operatorname{tg} \eta} + \operatorname{arctg} \frac{\cos A}{\operatorname{tg} \eta} + \operatorname{arctg} \frac{\cos B}{\operatorname{tg} \eta} + \operatorname{arctg} \frac{\cos C}{\operatorname{tg} \eta} \right) \frac{d\eta}{\cos \eta},$$

где величина  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  находится из уравнения  $\frac{1}{\cos \theta} = T$ ;

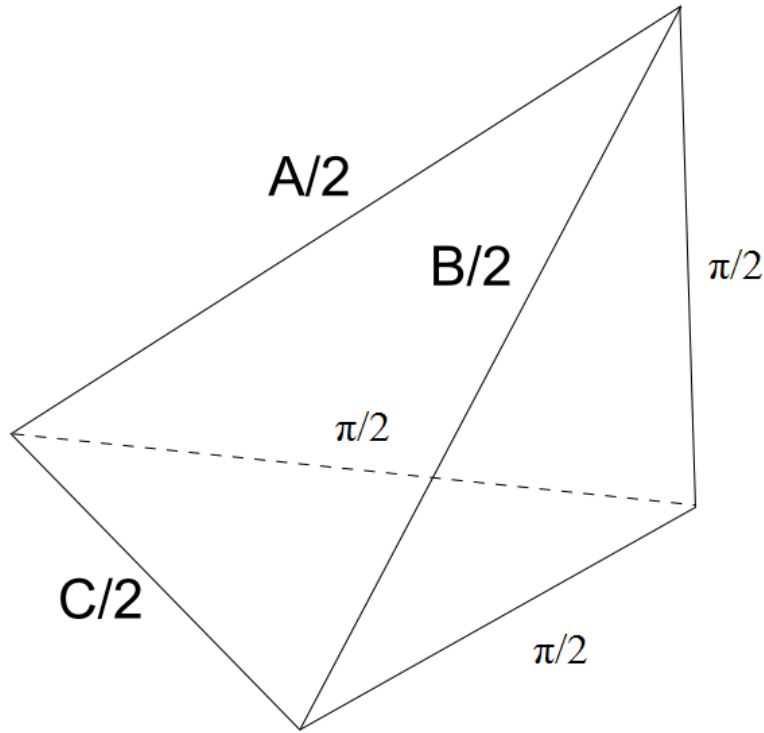


Рис. 2.2.2. Тетраэдр  $T = T\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

3. если  $T = 1$ , то

$$V = 2 \left( \int_0^{\operatorname{arth}(\sin A)} \frac{x dx}{\operatorname{ch} x} + \int_0^{\operatorname{arth}(\sin B)} \frac{x dx}{\operatorname{ch} x} - \int_0^{\operatorname{arth}(\sin C)} \frac{x dx}{\operatorname{ch} x} \right),$$

при этом

$$T = \sqrt{\frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C}}.$$

**Замечание 2.2.1.** Для доказательства справедливости формул теоремы 2.2.4 в работе [3] проверяется, что соответствующие функции объема удовлетворяют дифференциальной формуле Шлефли (1.2.3) и некоторым начальным условиям (то есть функции объема октаэдров с  $mmm$ -симметриями суть единственные решения некоторых задач Коши). Несмотря на то, что рассмотренные формулы существенно отличаются по своей записи, на конкретных примерах они приводят к одинаковым результатам.

**Пример 2.2.1.** Рассмотрим гиперболический  $mmm$ -октаэдр  $O = O(A, B, C)$ , где

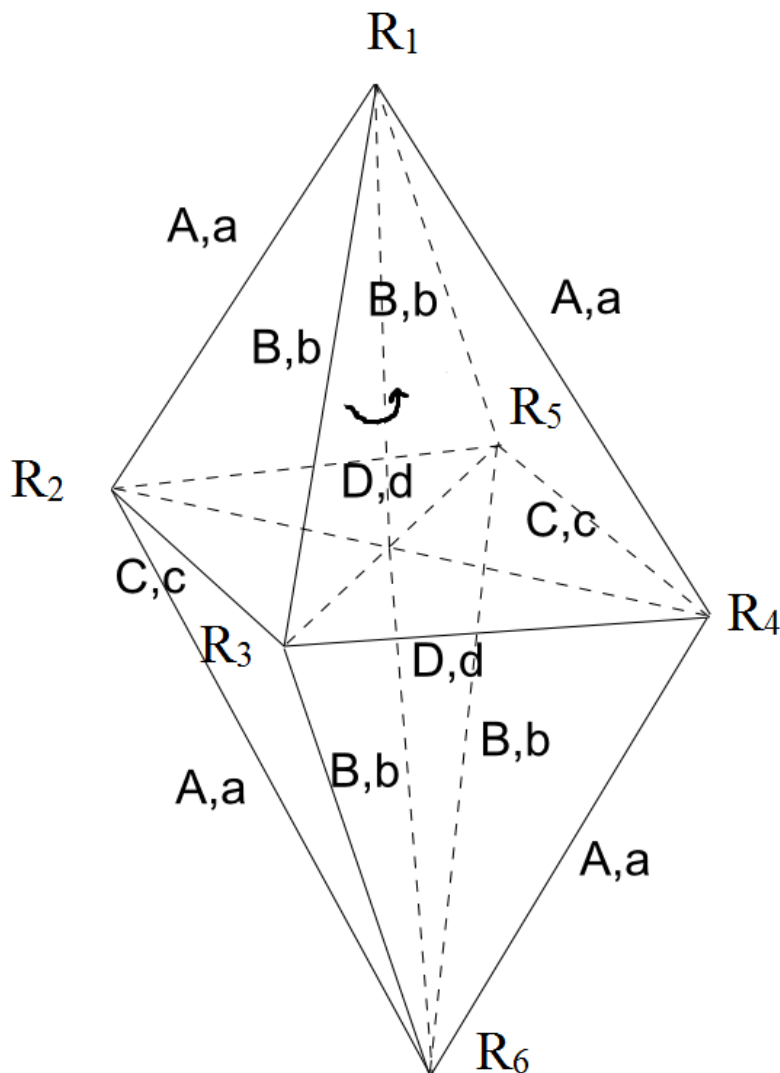
$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos \frac{2}{5}.$$

Тогда по теореме 2.2.3 имеем  $V(O) \approx 0,948$ .

**Пример 2.2.2.** Пусть  $O = O(A, B, C)$  — гиперболический октаэдр с  $mmm$ -симметрией, при этом пусть

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos \frac{1}{3}.$$

Согласно формуле из теоремы (1.8.19) получим  $V(O) \approx 0,661$ .

Рис. 2.2.3. Октаэдр, допускающих  $2|m$ -симметрию

**Пример 2.2.3.** Рассмотрим гиперболический  $mmm$ -октаэдр  $O = O(A, B, C)$ . Пусть

$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos \frac{1}{4}.$$

Тогда, применяя результат теоремы (1.8.19), получаем  $V(O) \approx 0,394$ .

Можно убедиться, что, вычислив объемы данных октаэдров по формулам теоремы 2.2.4, мы получим те же результаты [3].

**2.2.2. Объем октаэдра с  $2|m$ -симметрией.** Рассмотрим октаэдр  $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ , допускающий  $2|m$ -симметрию, то есть вращение вокруг оси на угол  $\pi$  и отражение относительно перпендикулярной ей плоскости (см. рис. 2.2.3).

Объем сферического  $2|m$ -октаэдра был вычислен в работе [3]. Попутно в [3] показано, что длины ребер сферического октаэдра, обладающего  $2|m$ -симметрией, равно как и  $mmm$ -октаэдра, могут быть выражены через двугранные углы. Таким образом,  $O = O(A, B, C, D)$ . Для объема сферического  $2|m$ -октаэдра справедлива следующая теорема, подробное доказательство которой содержится в работе [3].

**Теорема 2.2.5** (Абросимов, Годой-Молина, Медных, 2008 г.). Пусть  $O = O(A, B, C, D)$  – сферический октаэдр, обладающий  $2|m$ -симметрией (см. рис. 2.2.3). Тогда его объем  $V = V(O)$

задается следующим выражением:

$$V(O) = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left( \operatorname{arth}(\cos A \cos t) + \operatorname{arth}(\cos B \cos t) + \right. \\ \left. + \operatorname{arth}\left(\cos \frac{C+D}{2} \cos t\right) + \operatorname{arth}\left(\cos \frac{C-D}{2} \cos t\right) \right) \frac{dt}{\cos t},$$

где  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  находится из правила синусов–тангенсов для сферического  $2|m$ -октаэдра

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin \frac{C+D}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c+d}{2}} = \frac{\sin \frac{C-D}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c-d}{2}} = \operatorname{tg} \theta.$$

Что касается гиперболического октаэдра с  $2|m$ -симметрией, то проблема получения точной формулы для вычисления его объема была решена в работе автора [24].

**Теорема 2.2.6** (Краснов, 2013 г.). Пусть  $O = O(A, B, C, D)$  – гиперболический октаэдр, обладающий  $2|m$ -симметрией (рис. 2.2.3). Тогда его объем  $V = V(O)$  выражается интегралом по отрезку вещественной прямой от вещественнозначной подынтегральной функции

$$V(O) = \int_{z_1}^{z_2} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos \frac{\xi+A+B}{2} \cos \frac{2\xi+2B+C+D}{4} \cos \frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}} \right| d\xi,$$

где

$$z_1 = \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} - \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3}, \\ z_2 = \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3}, \\ \lambda = \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\cos \frac{C}{2} \sin A},$$

а вещественные числа  $p_1, p_2, p_3$  и  $p_4$  имеют вид:

$$p_1 = \sin A + \sin B + \sin \left( \frac{2A + 2B + C + D}{2} \right) + \sin \left( \frac{C + D}{2} \right) - \\ - \cos \left( \frac{D + 2\lambda}{2} \right) - \cos \left( \frac{2A + C - 2\lambda}{2} \right) - \\ - \cos \left( \frac{2A + 2B + D - 2\lambda}{2} \right) - \cos \left( \frac{2B + C + 2\lambda}{2} \right), \\ p_2 = \sin \left( \frac{2A + C - 2\lambda}{2} \right) + \sin \left( \frac{D + 2\lambda}{2} \right) + \sin \left( \frac{2B + C + 2\lambda}{2} \right) + \\ + \sin \left( \frac{2A + 2B + D - 2\lambda}{2} \right) + \cos \left( \frac{2A + 2B + C + D}{2} \right) + \cos \left( \frac{C + D}{2} \right) + \cos A + \cos B, \\ p_3 = 2 \left( \sin B + \sin \frac{D}{2} \sin \lambda + \sin \frac{C}{2} \sin(A - \lambda) \right), \\ p_4 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}.$$

Доказательство теоремы 2.2.5 основано на применении к функции  $V(O) = V(A, B, C, D)$  дифференциального тождества Шлефли (1.2.3). Подробное доказательство данной теоремы можно найти в работе [3].

В свою очередь, теорема 2.2.6 может быть доказана с помощью подходящей триангуляции многогранника, выражения (возникающих в процессе разбиения) вспомогательных параметров через двугранные углы исходного октаэдра с помощью формул сферической тригонометрии, и последующего вычисления объемов тетраэдров триангуляции по формуле Деревнина—Медных.

*Доказательство.* Для вычисления объема  $2|m$ -октаэдра  $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$  в гиперболическом случае разобьем  $O$  в силу  $2|m$ -симметрии на две конгруэнтные пирамиды  $R_1R_2R_3R_4R_5$  и  $R_6R_2R_3R_4R_5$ , «разрежем» исходный многогранник плоскостью симметрии  $R_2R_3R_4R_5$ .

В свою очередь, каждую из пирамид можно разбить на два равных тетраэдра, проведя диагональ основания пирамиды. Например, объем пирамиды  $R_1R_2R_3R_4R_5$  можно представить в виде суммы объемов тетраэдров  $R_1R_2R_3R_4$  и  $R_1R_2R_4R_5$ , которые, как видно из рис. 2.2.4, конгруэнтны между собой.

Следовательно,

$$V(O) = 4V(R_1R_2R_3R_4). \quad (2.2.3)$$

Таким образом, вычисление объема октаэдра  $O$  сводится к нахождению двугранного угла  $x$  при ребре  $R_1R_2$ .

Для нахождения двугранного угла  $x$  будем использовать технику, которая применялась еще Н. И. Лобачевским в [28], а позднее была использована в работах [3, 11]. Обозначим плоский угол при вершине  $R_2$  грани  $R_1R_2R_3$  через  $\alpha$  и рассмотрим пересечение тетраэдра  $R_1R_2R_4R_5$  со сферой достаточно малого радиуса с центром в вершине  $R_2$ . Не нарушая общности, предположим, что полученное пересечение — сферический прямоугольный треугольник с гипотенузой  $\alpha$  и внутренними непрямыми углами  $\frac{C}{2}$  и  $x$  (рис. 2.2.5).

Применяя формулу котангенсов для данного сферического прямоугольного треугольника, получаем

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \operatorname{ctg} x,$$

откуда

$$x = \operatorname{arcctg} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}. \quad (2.2.4)$$

Наконец, чтобы выразить  $\cos \alpha$  через двугранные углы исходного октаэдра  $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ , рассмотрим пересечение тетраэдра  $R_1R_2R_3R_5$  со сферой бесконечно малого радиуса. Аналогично, не нарушая общности, предположим, что рассматриваемое пересечение представляет собой сферический треугольник с углами  $\frac{C}{2}$ ,  $\frac{D}{2}$ ,  $A$  и стороной  $\alpha$ , лежащей против угла  $\frac{D}{2}$  (рис. 2.2.6).

Применим к полученному сферическому треугольнику вторую теорему косинусов. Имеем:

$$\cos \frac{D}{2} = -\cos \frac{C}{2} \cos A + \sin \frac{C}{2} \sin A \cos \alpha,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\sin \frac{C}{2} \sin A}. \quad (2.2.5)$$

Наконец, из (2.2.4) и (2.2.5) получаем, что

$$x = \operatorname{arcctg} \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\cos \frac{C}{2} \sin A}. \quad (2.2.6)$$

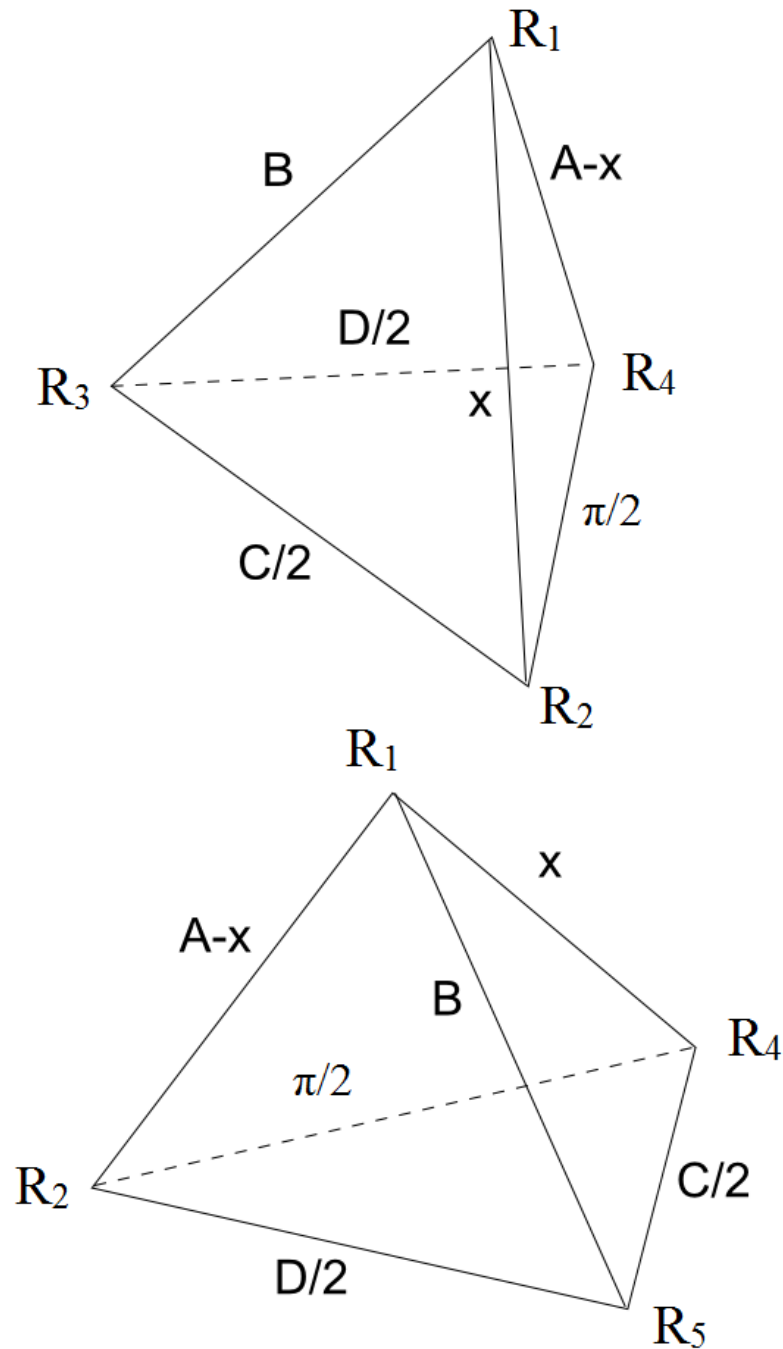


Рис. 2.2.4

Таким образом, в силу формулы Деревнина—Медных (1.8.16), объем тетраэдра  $R_1R_2R_3R_4$  равен:

$$V(R_1R_2R_3R_4) = -\frac{1}{4} \int_{z_2}^{z_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos \frac{\xi+A+B}{2} \cos \frac{2\xi+2B+C+D}{4} \cos \frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}} \right| d\xi, \quad (2.2.7)$$

где

$$z_1 = \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} - \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3},$$

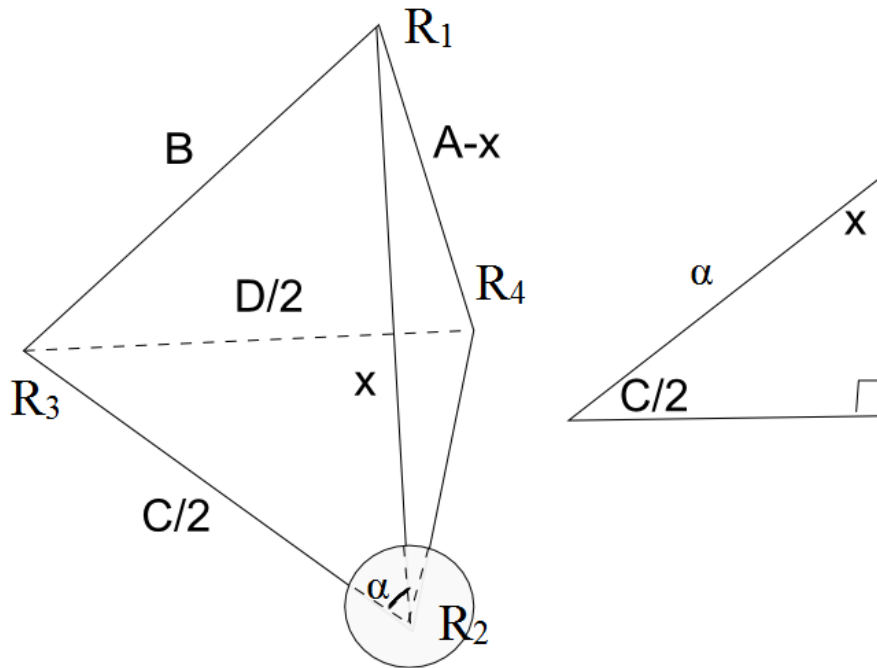


Рис. 2.2.5

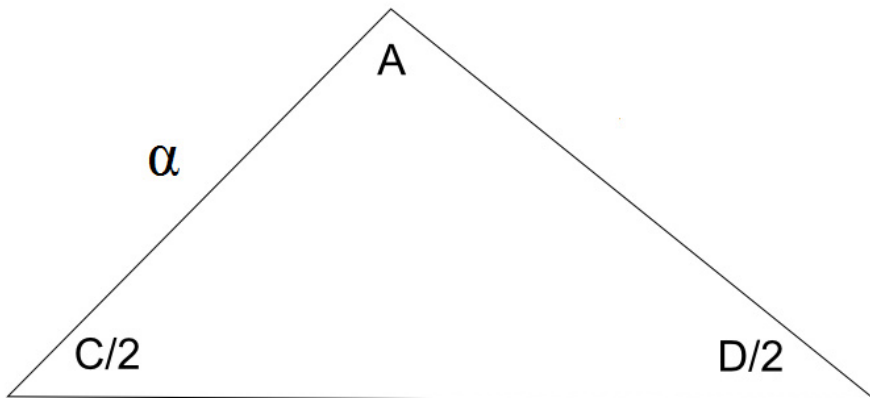


Рис. 2.2.6

$$z_2 = \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3},$$

$$\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\cos \frac{C}{2} \sin A},$$

а вещественные числа  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  и  $p_4$  имеют вид:

$$p_1 = \sin A + \sin B + \sin \left( \frac{2A + 2B + C + D}{2} \right) + \sin \left( \frac{C + D}{2} \right) -$$

$$- \cos \left( \frac{D + 2\lambda}{2} \right) - \cos \left( \frac{2A + C - 2\lambda}{2} \right) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\cos\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right), \\
 p_2 &= \sin\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) + \\
 & + \sin\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) + \\
 & + \cos\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) + \cos A + \cos B, \\
 p_3 &= 2\left(\sin B + \sin\frac{D}{2}\sin\lambda + \sin\frac{C}{2}\sin(A-\lambda)\right), \\
 p_4 &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}.
 \end{aligned}$$

Окончательно, подставив (2.2.7) в (2.2.3), мы завершаем доказательство теоремы. □

**Пример 2.2.4.** Рассмотрим гиперболический  $2|m$ -октаэдр  $O = O(A, B, C, D)$ , где

$$A = \frac{5\pi}{6}, \quad B = \frac{10\pi}{19}, \quad C = \frac{\pi}{2}, \quad D = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,  $l \approx 1,309$ . Тогда, согласно теореме 1.2.4,  $2|m$ -октаэдр с таким набором двугранных углов реализуем в  $\mathbb{H}^3$ .

Вычисляя его объем по формуле из теоремы 2.2.6, получаем, что  $V(O) \approx 0,049$ .

Заметим, что всякий  $mm$ -октаэдр является октаэдром, обладающим  $2|m$ -симметрией. Следовательно, теорему 2.2.6 можно использовать и для вычисления объема произвольного  $mm$ -октаэдра. Если мы вычислим объемы многогранников из примеров 2.2.1–2.2.3 по формуле из теоремы 2.2.6 в среде MathCad, то получатся те же самые значения для объемов.

**2.2.3. Объем октаэдра, обладающего  $mm2$ -симметрией.** В настоящем пункте мы рассмотрим гиперболический октаэдр  $O$ , обладающий  $mm2$ -симметрией, то есть октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих  $O$  по его реберным циклам (см. рис. 2.2.7). Обозначим через  $A, B, C, D, E$  величины его двугранных углов.

Объем такого октаэдра может быть вычислен с помощью следующей теоремы [24].

**Теорема 2.2.7** (Краснов, 2016 г.). Пусть  $O = O(A, B, C, D, E)$  — гиперболический октаэдр, обладающий  $mm2$ -симметрией. Тогда его объем  $V = V(O)$  выражается формулой

$$V(O) = 2V\left(\frac{A}{2}, B, \frac{A}{2}, \lambda, \frac{\pi}{2}, \lambda\right) + 2V\left(\frac{C}{2}, D, \frac{C}{2}, E - \lambda, \frac{\pi}{2}, E - \lambda\right),$$

где

$$\lambda = \operatorname{arcctg} \frac{\cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos E}{\cos \frac{A}{2} \sin E},$$

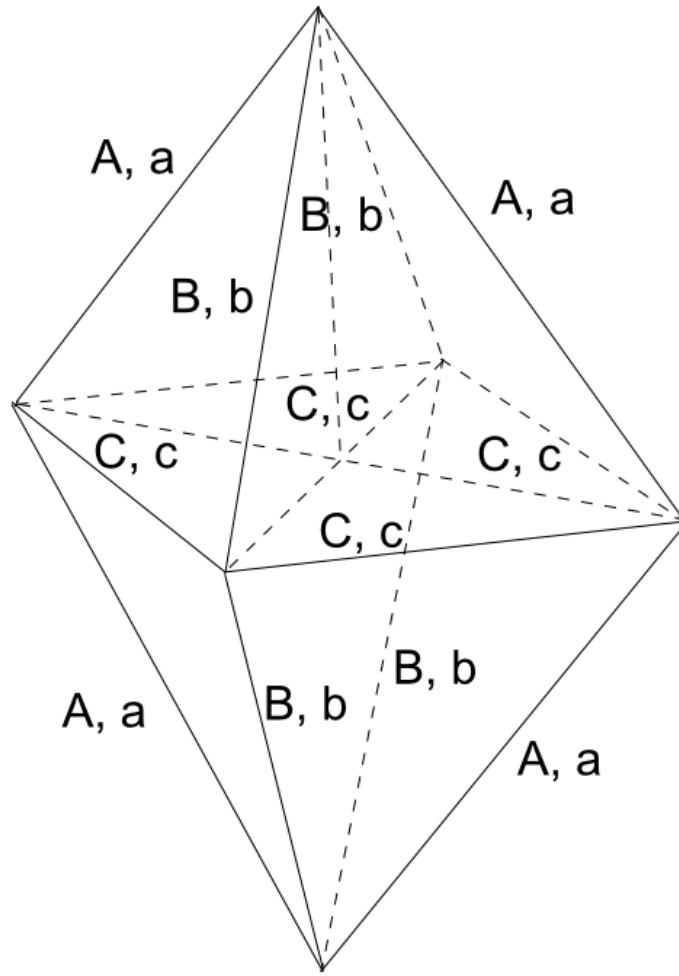
$$V(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta) = -\frac{1}{4} \int_{z_2}^{z_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi+\alpha+\beta+\delta+\varepsilon}{2} \sin \frac{\xi+\alpha+\gamma+\delta+\zeta}{2} \sin \frac{\xi+\beta+\gamma+\varepsilon+\zeta}{2}}{\cos \frac{\xi+\alpha+\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\xi+\alpha+\varepsilon+\zeta}{2} \cos \frac{\xi+\beta+\delta+\zeta}{2} \cos \frac{\xi+\gamma+\delta+\varepsilon}{2}} \right| d\xi,$$

$$z_1 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

$$z_2 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \cos(\alpha + \delta) + \cos(\beta + \varepsilon) + \cos(\gamma + \zeta) +$$



Рис. 2.2.7. Гиперболический октаэдр с  $mm2$ -симметрией

$$\begin{aligned}
 & + \cos(\delta + \varepsilon + \zeta) + \cos(\delta + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \varepsilon + \gamma) + \cos(\alpha + \beta + \zeta)), \\
 k_2 & = \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) + \sin(\alpha + \delta) + \sin(\beta + \varepsilon) + \sin(\gamma + \zeta) + \\
 & + \sin(\delta + \varepsilon + \zeta) + \sin(\delta + \beta + \gamma) + \sin(\alpha + \varepsilon + \gamma) + \sin(\alpha + \beta + \zeta)), \\
 k_3 & = 2(\sin \alpha \sin \delta + \sin \beta \sin \varepsilon + \sin \gamma \sin \zeta), \\
 k_4 & = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.
 \end{aligned}$$

Приведем полученное в работе [25] подробное доказательство данной теоремы.

*Доказательство.* Для вычисления объема гиперболического октаэдра  $O$ , допускающего  $mm2$ -симметрию, рассмотрим его разбиение на тетраэдры  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  и  $T_4$  с вершинами (1234), (1245), (2346) и (2456) соответственно (рис. 2.2.8).

Так как плоскость (1264) является плоскостью симметрии нашего октаэдра, то тетраэдры  $T_1$  и  $T_2$ , а также  $T_3$  и  $T_4$  попарно конгруэнтны. Следовательно, вычисление объема октаэдра  $V = V(O)$  в нашем случае сводится к вычислению объемов тетраэдров  $T_1$  и  $T_3$ :

$$V(O) = 2 \cdot V(T_1) + 2 \cdot V(T_3). \quad (2.2.8)$$

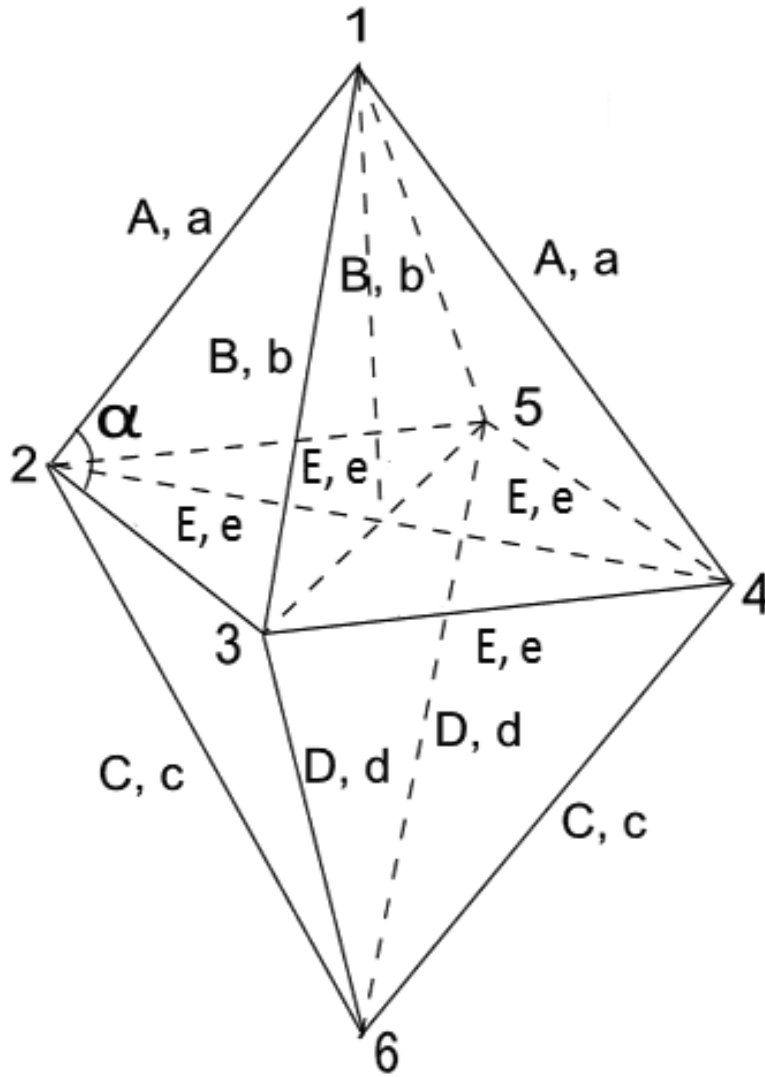


Рис. 2.2.8. Разбиение гиперболического октаэдра  $O = O(A, B, C, D, E)$  с  $mm_2$ -симметрией на тетраэдры

В свою очередь, для вычисления объемов тетраэдров триангуляции нам достаточно найти двугранный угол  $x$  при основании четырехугольной гиперболической пирамиды (12345). Для нахождения  $x$  мы, как и в случае октаэдров с  $mmm$ - и  $2|_m$ -симметриями (см. [3, 11, 25]), будем использовать технику, заключающуюся в описании сферы бесконечно малого радиуса, центр которой совпадает с некоторой вершиной многогранника, и последующим применением сферической теоремы косинусов [28].

Вначале опишем сферу бесконечно малого радиуса с центром в вершине 2 и найдем ее пересечение с тетраэдром (1234). Далее, обозначим плоский угол грани (123) при вершине 2 через  $\alpha$ . Не нарушая общности, предположим, что ее пересечение с тетраэдром триангуляции (1234) есть сферический прямоугольный треугольник с внутренними углами  $x$ ,  $\frac{A}{2}$  и  $\frac{\pi}{2}$  и гипотенузой  $\alpha$  (см. [28]). Запишем сферическую теорему Пифагора для этого треугольника:

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2},$$

откуда

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \frac{A}{2}}. \tag{2.2.9}$$

Найдем плоский угол  $\alpha$ , предварительно рассмотрев четырехугольную пирамиду (12643) и описав сферу бесконечного малого радиуса с центром в вершине 2. Как и ранее, предположим, что полученное пересечение сферы и многогранника представляет собой сферический треугольник с углами  $E$ ,  $\frac{A}{2}$  и  $\frac{C}{2}$  и стороной  $\alpha$ , лежащей против угла  $\frac{C}{2}$  (см. [28]).

Применим теперь к полученному треугольнику вторую теорему косинусов и выразим  $\cos \alpha$ . Окончательно имеем:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos E}{\sin \frac{A}{2} \sin E}. \quad (2.2.10)$$

Наконец, подставив (2.2.10) в (2.2.9), получим выражение неизвестного двугранного угла  $x$  через двугранные углы исходного октаэдра:

$$x = \operatorname{arctg} \frac{\cos \frac{C}{2} + \cos \frac{A}{2} \cos E}{\cos \frac{A}{2} \sin E}. \quad (2.2.11)$$

Таким образом, гиперболический октаэдр, обладающий  $\operatorname{mm}2$ -симметрией, однозначно с точностью до движения определяется своими двугранными углами  $A, B, C, D$  и  $E$ , то есть  $O = O(A, B, C, D, E)$ .

Вычислив теперь объемы тетраэдров триангуляции  $T_1$  и  $T_3$  по формуле Деревнина—Медных (1.8.16) и воспользовавшись формулой (2.2.8), мы завершаем доказательство теоремы 2.2.7.  $\square$

**2.2.4. Объем октаэдра, обладающего  $4|m$ -симметрией.** В данном подразделе мы рассмотрим применение схемы доказательства формулы Сфорца (см. теорему 1.8.1 и доказательство к ней) к вычислению объема гиперболического и сферического октаэдров, обладающих  $4|m$ -симметрией.

**Определение 2.2.1.** Октаэдром, допускающим  $4|m$ -симметрию (или  $4|m$ -октаэдром), называется выпуклый многогранник  $O$ , имеющий комбинаторный тип октаэдра и остающийся инвариантным относительно вращения вокруг оси на угол  $\frac{\pi}{2}$  и отражения относительно перпендикулярной ей плоскости.

Из определения 2.2.1 следует, что неевклидов  $4|m$ -октаэдр  $O$  однозначно с точностью до движения пространства определяется двумя независимыми параметрами (двугранными углами)  $A$  и  $B$ , т. е.  $O = O(A, B)$  (рис. 2.2.9).

Очевидно, что  $4|m$ -октаэдр является частным случаем октаэдра с  $2|m$ -симметрией  $O = O(A, B, C, D)$  (рис. 2.2.3), инвариантного относительно вращения вокруг оси на угол  $\pi$  и отражения относительно перпендикулярной ей плоскости, при условии, что  $A = B, C = D$ .

Таким образом, формулу объема неевклидова октаэдра  $O$  с  $4|m$ -симметрией можно получить, если положить в теоремах (1.8.21) и (1.8.22)  $A = B$  и  $C = D$ .

Однако мы используем другой метод, основанный на схеме доказательства формулы Сфорца. В дальнейшем мы увидим, что такой подход приведет нас к гораздо более простым формулам для объемов.

Прежде чем мы перейдем к вычислению объемов, исследуем проблему существования  $O = O(A, B, C, D)$  в  $\mathbb{S}^3$  и  $\mathbb{H}^3$ .

Из определения 2.2.1 следует, что октаэдр  $O = O(A, B)$  можно разбить на 8 конгруэнтных между собой тетраэдров  $\hat{T} = \hat{T} \left( \frac{A}{2}, \frac{A}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{B}{2} \right)$  (см. рис. 2.2.10).

Следовательно, существование октаэдра  $O = O(A, B)$  равносильно существованию тетраэдра  $\hat{T} = \hat{T} \left( \frac{A}{2}, \frac{A}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{B}{2} \right)$ .

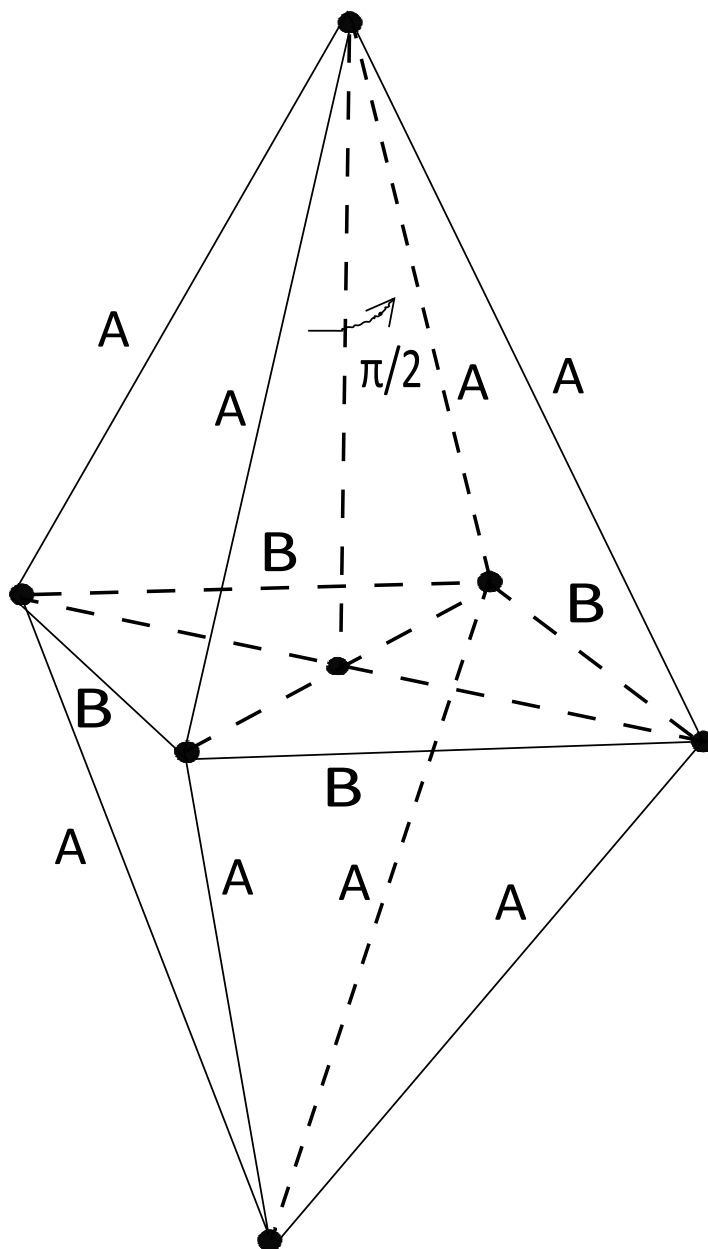


Рис. 2.2.9. Октаэдр  $O = O(A, B)$ , обладающий  $4|m$ -симметрией

Нетрудно видеть, что матрица Грама  $G(\hat{T})$  тетраэдра  $\hat{T}$  имеет вид:

$$G(\hat{T}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{A}{2} & -\cos \frac{A}{2} & -\cos \frac{B}{2} \\ -\cos \frac{A}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\cos \frac{A}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\cos \frac{B}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.12)$$

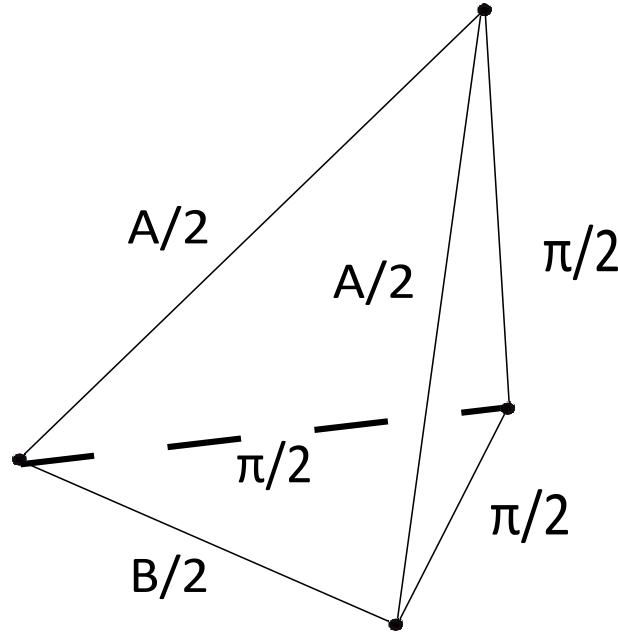


Рис. 2.2.10. Тетраэдр  $\hat{T} = \hat{T} \left( \frac{A}{2}, \frac{A}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{B}{2} \right)$

Прямыми вычислениями находим алгебраические дополнения к элементам матрицы (2.2.12).  
Имеем:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= 1, & c_{22} = c_{33} &= 1 - \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 \frac{B}{2}, & c_{44} &= -\cos A, & c_{12} = c_{21} &= \cos \frac{A}{2}, \\
 c_{23} = c_{32} &= \cos^2 \frac{A}{2}, & c_{34} = c_{43} = c_{24} = c_{42} &= \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}, & & & & (2.2.13) \\
 c_{12} = c_{21} = c_{13} = c_{31} &= \cos \frac{A}{2}.
 \end{aligned}$$

В свою очередь, выражения для собственных значений  $\lambda_i$  и определителя матрицы  $G(\hat{T})$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1,2} &= 1, & \lambda_3 &= 1 + \sqrt{2 \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}}, & \lambda_4 &= 1 - \sqrt{2 \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2}}, \\
 \det(G(\hat{T})) &= 1 - 2 \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 \frac{B}{2}. & & & & & & (2.2.14)
 \end{aligned}$$

Критерии существования гиперболического и сферического октаэдров  $O = O(A, B)$ , обладающих  $4|m$ -симметрией, задаются теоремами.

**Теорема 2.2.8.** Для существования компактного гиперболического октаэдра  $O = O(A, B)$  с  $4|m$ -симметрией необходимо и достаточно выполнение следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < A < \pi, \\ 2 \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} > 1, \\ \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} < 1. \end{cases} \quad (2.2.15)$$

**Теорема 2.2.9.** Для существования сферического  $4|m$ -октаэдра  $O = O(A, B)$  необходимо и достаточно выполнение системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} < A < \pi, \\ 2 \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} < 1. \end{cases} \quad (2.2.16)$$

*Доказательство.* Доказательство систем (2.2.15) и (2.2.16) основано на применении утверждений теорем 1.2.4 и 1.2.3 к формулам (2.2.13) и (2.2.14).  $\square$

Переходим теперь к вычислению объема октаэдра  $O = O(A, B)$  с  $4|m$ -симметрией. Для вычисления объема заметим, что

$$V(O) = 8V(\hat{T}). \quad (2.2.17)$$

Вычислим теперь объем тетраэдра  $\hat{T}$ , используя теорему Сфорца (теорема 1.8.1) и схему ее доказательства.

Для этого мы рассмотрим непрерывную деформацию  $\hat{T}$ , при которой изменяется только двугранный угол  $\frac{B}{2}$  (при этом все остальные двугранные углы тетраэдра остаются неизменными).

Используя формулу (iii) теоремы 1.2.1, вычислим длину  $l_{\frac{B}{2}}$  ребра двугранного угла  $\frac{B}{2}$ . Прямыми вычислениями нетрудно установить:

$$l_{\frac{B}{2}} = \operatorname{arch} \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{1 - \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}. \quad (2.2.18)$$

Запишем теперь формулу Шлефли для тетраэдра  $\hat{T}$ . Имеем:

$$-dV = \frac{1}{2} l_{\frac{B}{2}} d\left(\frac{B}{2}\right). \quad (2.2.19)$$

Заметим также (решая уравнение  $\det(G(\hat{T})) = 0$ ), что  $\det(G(\hat{T})) \rightarrow 0$  при  $\frac{B}{2} \rightarrow \arccos \sqrt{-\cos A}$ .

Таким образом, интегрируя уравнение (2.2.19) от  $\arccos \sqrt{-\cos A}$  до  $\frac{B}{2}$ , предварительно подставив в него формулу (2.2.18), получаем, что объем тетраэдра  $\hat{T}$  может быть вычислен по формуле:

$$V(\hat{T}) = -\frac{1}{2} \int_{\arccos \sqrt{-\cos A}}^{\frac{B}{2}} \operatorname{arch} \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{1 - \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}} dx. \quad (2.2.20)$$

Наконец, подставляя (2.2.20) в (2.2.17), мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 2.2.10.** Пусть  $O = O(A, B)$  — компактный гиперболический октаэдр, обладающий  $4|m$ -симметрией, двугранные углы которого  $A$  и  $B$  удовлетворяют системе (1.2.1). Тогда его объем  $V = V(O)$  может быть вычислен по формуле

$$V(O) = -4 \int_{\arccos \sqrt{-\cos A}}^{\frac{B}{2}} \operatorname{arch} \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{1 - \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 x} dx. \quad (2.2.21)$$

Таким образом, формула (2.2.21) представляет собой интегральную формулу, выражающую объем произвольного компактного гиперболического октаэдра  $O = O(A, B)$ , обладающего  $4|m$ -симметрией, в терминах определяющих его (с точностью до движения) двугранных углов  $A$  и  $B$ .

**Замечание 2.2.2.** В качестве «подходящего решения» уравнения  $\det(G(\hat{T})) = 0$  (см. формулировку теоремы 1.8.1) нужно взять положительный корень, принадлежащий промежутку  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ,

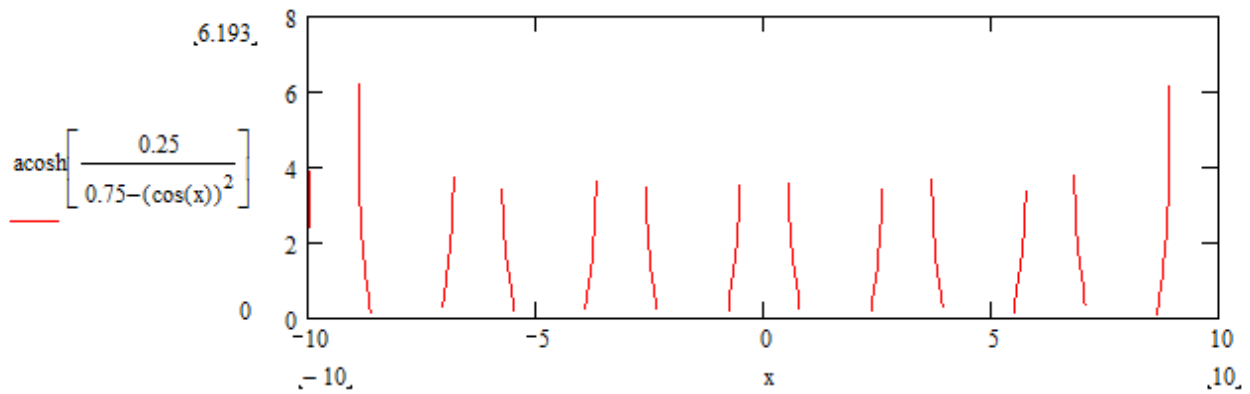


Рис. 2.2.11. График функции  $f = f(x)$  при  $A = \frac{2\pi}{3}$

так как из системы (2.2.15) теоремы 2.2.8 следует, что при фиксированном двугранном угле  $A$  угол непрерывной деформации  $\frac{B}{2}$  может изменяться в промежутке

$$\arccos\left(\sin\frac{A}{2}\right) < \frac{B}{2} < \arccos\sqrt{-\cos A},$$

одной из предельных точек которого является выбранный нами корень  $\frac{B}{2} = \arccos\sqrt{-\cos A}$  (в указанной точке гиперболический объем тетраэдра  $\hat{T}$  будет равен нулю).

Также правильность выбора корня уравнения  $\det(G(\hat{T})) = 0$  иллюстрирует график подынтегральной функции  $f(x) = \operatorname{arch} \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{1 - \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 x}$  (на рис. 2.2.11 изображен график функции  $f = f(x)$  при  $A = \frac{2\pi}{3}$ ).

Рассмотрим теперь сферический 4|m-октаэдр  $O = O(A, B)$ . Используя аналогичные гиперболическому случаю рассуждения, получаем следующую теорему.

**Теорема 2.2.11.** Пусть  $O = O(A, B)$  — сферический октаэдр, обладающий 4|m-симметрией. Тогда его объем  $V = V(O)$  задается формулой

$$V(O) = 4 \int_{\arccos\sqrt{-\cos A}}^{\frac{B}{2}} \arccos \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{1 - \cos^2 \frac{A}{2} - \cos^2 x} dx. \quad (2.2.22)$$

**Пример 2.2.5.** Для численной проверки полученных формул рассмотрим сферический октаэдр  $O_1 = O_1\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  и гиперболический октаэдр  $O_2 = O_2\left(\frac{2\pi}{3}, 2\arccos\frac{4}{5}\right)$ , обладающие 4|m-симметрией. Используя программу MathCad, вычислим объемы данных многогранников по формулам (2.2.22) и (2.2.21) соответственно. Имеем:

$$V(O_1) = 0,822, \quad V(O_2) = 0,481.$$

Как было сказано в подразделе 2.2.4, 4|m-симметрия является частным случаем 2|m-симметрии. Поэтому объемы произвольных гиперболических и сферических 4|m-октаэдров можно находить и с помощью теорем 2.2.5 и 2.2.6 (при условии, что  $A = B$  и  $C = D$ ). Вычисляя объемы октаэдров  $O_1$  и  $O_2$  в программе MathCad по формулам из теорем 2.2.5 и 2.2.6, можно убедиться, что доказанные выше теоремы 2.2.11 и 2.2.10 приводят нас к одинаковым результатам.

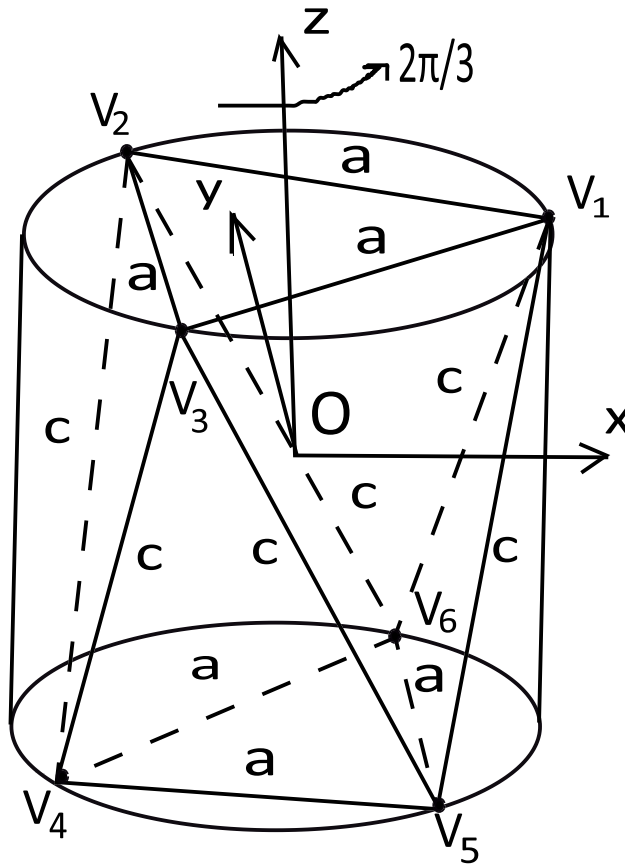


Рис. 2.2.12. Октаэдр  $O = O(a, c)$ , допускающий  $\bar{3}$ -симметрию

**2.2.5. Объем гиперболического октаэдра и гексаэдра с  $\bar{3}$ -симметрией.** В настоящем подразделе мы изложим результаты об объеме гиперболического октаэдра с  $\bar{3}$ -симметрией, а также аналогичные формулы для объема двойственного к нему многогранника, называемого гексаэдром.

**Определение 2.2.2.** Говорят, что октаэдр имеет  $\bar{3}$ -симметрию, если он допускает центральную симметрию и поворот на угол  $\frac{2\pi}{3}$  (см. рис. 2.2.12).

**Замечание 2.2.3.** Можно показать, что гиперболический октаэдр  $O$  с  $\bar{3}$ -симметрией однозначно с точностью до движения определяется длинами ребер, то есть  $O = O(a, c)$  (см. [6]). Также стоит отметить, что на рис. 2.2.12 центром симметрии октаэдра  $O = O(a, c)$  является начало координат  $O$ , а осью симметрии — ось  $Oz$ .

Пусть одна из вершин  $V_1$  евклидова октаэдра  $O$  с  $\bar{3}$ -симметрией имеет координаты  $v_1 = (r, 0, h)$ ,  $r, h > 0$  (рис. 2.2.12). Тогда, используя определение 2.2.2, нетрудно найти координаты всех других вершин октаэдра:

$$V_1 = (r, 0, h), \quad V_2 = \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, h\right), \quad V_3 = \left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, h\right),$$

$$V_4 = (-r, 0, -h), \quad V_5 = \left(\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -h\right), \quad V_6 = \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -h\right).$$



Объем гиперболического октаэдра  $O = O(a, c)$  с  $\bar{3}$ -симметрией, аналогично гиперболическому тетраэдру с  $\bar{3}$ -симметрией, нетрудно эффективно вычисляется, если многогранник поместить в модель Кэли—Клейна, приписав его вершинам четвертые координаты, равные единице (см. подраздел 1.7):

$$V_1 = (r, 0, h, 1), \quad V_2 = \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, h, 1\right), \quad V_3 = \left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, h, 1\right),$$

$$V_4 = (-r, 0, -h, 1), \quad V_5 = \left(\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -h, 1\right), \quad V_6 = \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -h, 1\right).$$

В модели Кэли—Клейна, в отличие от евклидова случая, положительные числа  $r$  и  $h$  не могут быть выбраны произвольно. Они должны удовлетворять условию

$$r^2 + 4h^2 < 1,$$

что равносильно тому, что вершины  $V_i, i = \bar{1}, \bar{6}$  принадлежат модели Кэли—Клейна  $K$  (см. определение 1.7.2).

Кроме того, используя формулы, выражающие длины ребер в модели Кэли—Клейна (см. подраздел 1.7), мы получаем формулы (подробные выкладки приведены в работе [6]):

$$r^2 = \frac{4(\operatorname{ch} a - 1)}{3(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} c)}, \quad h^2 = \frac{3 \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a - 2}{3(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} c)},$$

которые дают нам область  $\Omega$  существования гиперболического октаэдра  $O = O(a, c)$  с  $\bar{3}$ -симметрией в системе координат  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c)$  (рис. 2.2.13):

$$\Omega = \{(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c) \mid \operatorname{ch} a > 1, \operatorname{ch} c > 1, 3 \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a - 2 > 0\}.$$

Объем гиперболического октаэдра  $O = O(a, c)$  с  $\bar{3}$ -симметрией может быть вычислен с помощью следующей теоремы [6].

**Теорема 2.2.12** (Абросимов, Кудина, Медных, 2015 г.). *Объем  $V$  гиперболического октаэдра  $O = O(a, c)$ , допускающего  $\bar{3}$ -симметрию, выражается любой из следующих формул:*

$$V = \int_0^a f(a, c) da,$$

$$V = \int_{\operatorname{arch}((\operatorname{ch} a + 2)/3)}^c g(a, c) dc,$$

где

$$f(a, c) = \frac{3(aF + (1 + 2 \operatorname{ch} a)cG)}{(1 + 2 \operatorname{ch} a)\Delta}, \quad g(a, c) = \frac{3(aG + cH)}{\Delta},$$

а

$$F = 1 + 2 \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{ch}^3 a - 2 \operatorname{ch} c - \operatorname{ch}^2 c - 2 \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch}^2 c +$$

$$+ \operatorname{ch}^2 a \cdot \operatorname{ch} c - 4 \operatorname{ch}^2 a \cdot \operatorname{ch}^2 c + 3 \operatorname{ch}^3 c,$$

$$G = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} c \cdot (2 \operatorname{ch} a - 1),$$

$$H = (1 - \operatorname{ch} a)(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch} c \cdot (\operatorname{ch} c - 1)),$$

$$\Delta = (\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{(-2 - \operatorname{ch} a + 3 \operatorname{ch} c)(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} c)}.$$

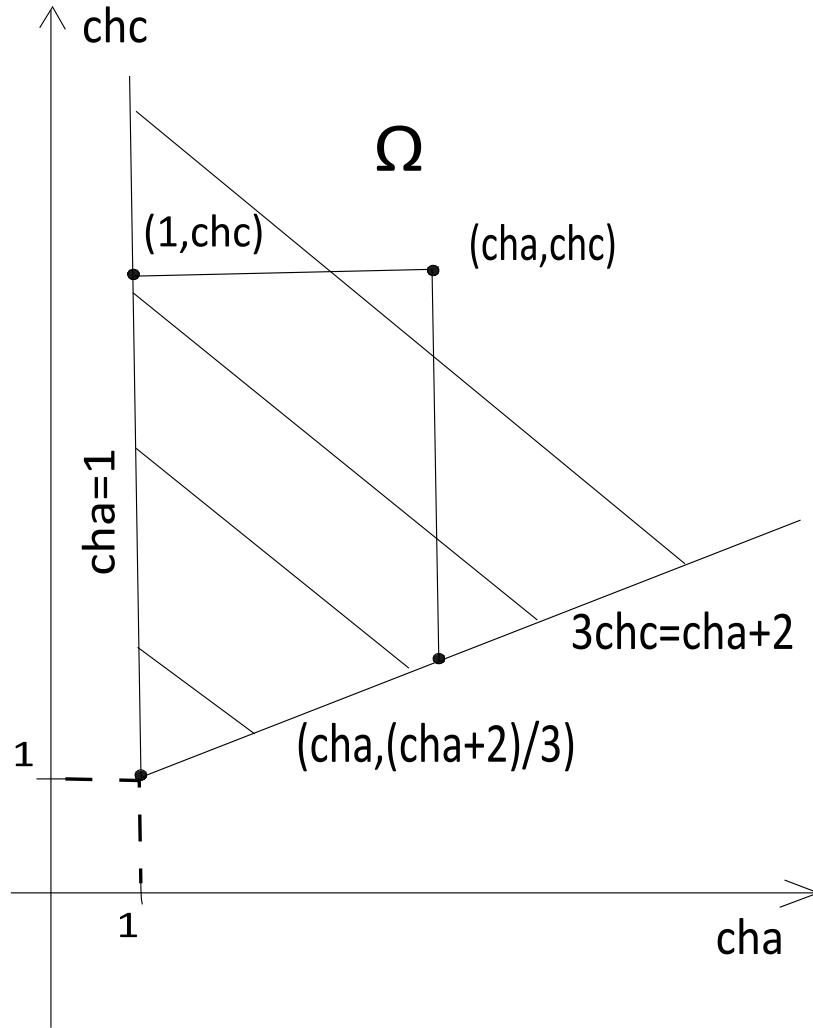


Рис. 2.2.13. Область существования  $\Omega$  октаэдра  $O = O(a, c)$

Схема доказательства теоремы 2.2.12. Рассматривая объем  $V$  октаэдра  $O = O(a, c)$  как функцию длин ребер, будем иметь

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial a},$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial c}.$$

В силу формулы Шлефли для  $dV$

$$dV = -3adA - 3cdC,$$

откуда находим

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -3a, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -3c.$$

Используя формулы связи между двугранными углами и длинами ребер  $O = O(a, c)$  (см. [6]), прямыми вычислениями находим (подробные выкладки можно найти в [6]):

$$\frac{\partial V}{\partial a} = f(a, c) = \frac{3(aF + (1 + 2 \operatorname{ch} a)cG)}{(1 + 2 \operatorname{ch} a)\Delta},$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = g(a, c) = \frac{3(aG + cH)}{\Delta}.$$

Интеграл от дифференциальной формы

$$dV = f(a, c)da + g(a, c)dc$$

не зависит от пути интегрирования, а зависит только от выбора начальной и конечной точек. Так как  $V = 0$  на границе  $\Omega$ , то объем  $V$  будет представлять собой интеграл от данной формы по любой кусочно-гладкой кривой с началом на границе области  $\Omega$  и концом в точке с координатами  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} b)$ . Подставляя выражения для функций  $f = f(a, c)$  и  $g = g(a, c)$  в нашу дифференциальную форму и интегрируя ее по горизонтальному или вертикальному отрезку (рис. 2.2.13), соединяющему границу  $\Omega$  с точкой  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} b)$ , мы завершаем доказательство теоремы 2.2.12.  $\square$

**Замечание 2.2.4.** При  $a = c$  теорема 2.2.12 приводит нас к формуле для объема  $V$  правильного гиперболического октаэдра  $O = O(a)$  (у такого тетраэдра длины всех ребер и величины двугранных углов попарно равны) (рис. 2.2.14):

$$V = \int_0^a \frac{6a \operatorname{sh} ada}{(1 + 2 \operatorname{ch} a) \sqrt{\operatorname{ch} a(1 + \operatorname{ch} a)}},$$

которая также может быть получена независимо из формулы Шлефли для дифференциала объема  $dV$  правильного октаэдра (см. [6, раздел 4.2]):

$$dV = -6adA.$$

В свою очередь, формула объема правильного гиперболического октаэдра  $O = O(A)$  через двугранный угол может быть выражена интегралом:

$$V = -6 \int_{\arccos -\frac{1}{3}}^A \operatorname{arch} \left( -\frac{1 + \cos A}{2 \cos A} dA \right).$$

Вывод данной формулы, также основанный на формуле Шлефли, можно найти в [6, раздел 4.2].

Рассмотрим теперь двойственный к гиперболическому октаэдру  $O$  многогранник  $\mathcal{H}$ , называемый гексаэдром.

**Определение 2.2.3.** Говорят, что гексаэдр  $\mathcal{H}$  имеет  $\bar{3}$ -симметрию, если он допускает центральную симметрию и поворот на угол  $\frac{2\pi}{3}$  (см. рис. 2.2.15).

Аналогично, на рис. 2.2.15 центром симметрии гексаэдра  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$  является начало координат  $O$ , а осью симметрии — ось  $Oz$ . Таким образом, если рассмотреть евклидов гексаэдр  $\mathcal{H}$ , то координаты его вершин  $V_i, i = \overline{1, 8}$  (рис. 2.2.15) имеют вид:

$$\begin{aligned} V_1 &= (r, 0, h), & V_2 &= \left( -\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}, h \right), \\ V_3 &= \left( -\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}r}{2}, h \right), & V_4 &= (0, 0, 3h), \\ V_5 &= (-r, 0, -h), & V_6 &= \left( \frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}r}{2}, -h \right), \\ V_7 &= \left( \frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}, -h \right), & V_8 &= (0, 0, -3h), \end{aligned}$$

где  $r, h > 0$ .

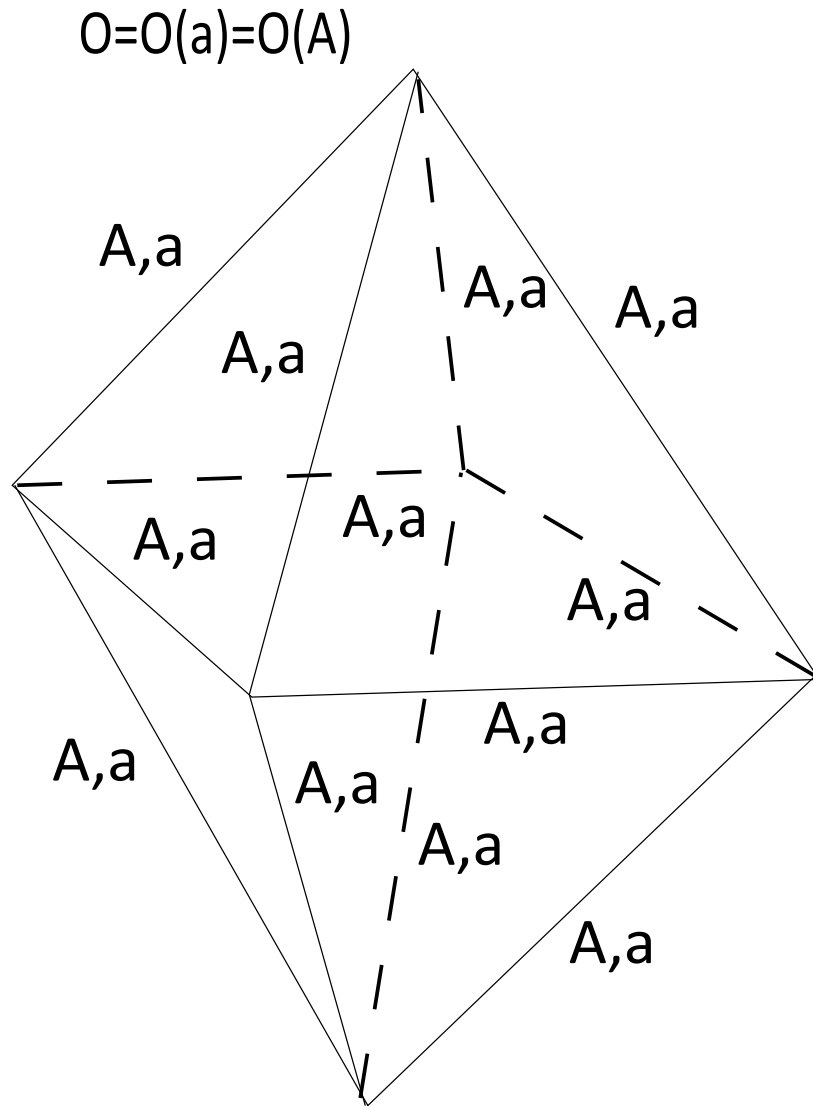


Рис. 2.2.14. Правильный гиперболический октаэдр  $O = O(a) = O(A)$

В отличие от гиперболического октаэдра  $O = O(a, c)$  с  $\bar{3}$ -симметрией, для вычисления объема гексаэдра  $\mathcal{H}$  вместо длин ребер  $a, c$  удобнее использовать двугранные углы  $A, C$  (которые определяют данный многогранник однозначно с точностью до движения пространства [7]), то есть  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$ .

Объем гексаэдра  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$  выражается следующей теоремой [7].

**Теорема 2.2.13** (Абросимов, Кутина, Медных, 2016 г.). *Объем  $V$  гиперболического гексаэдра  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$ , допускающего  $\bar{3}$ -симметрию, выражается по любой из следующих формул:*

$$V = \int_{\pi-A}^C f(A, t) dt,$$

$$V = \int_{\pi-C}^A g(t, C) dt,$$

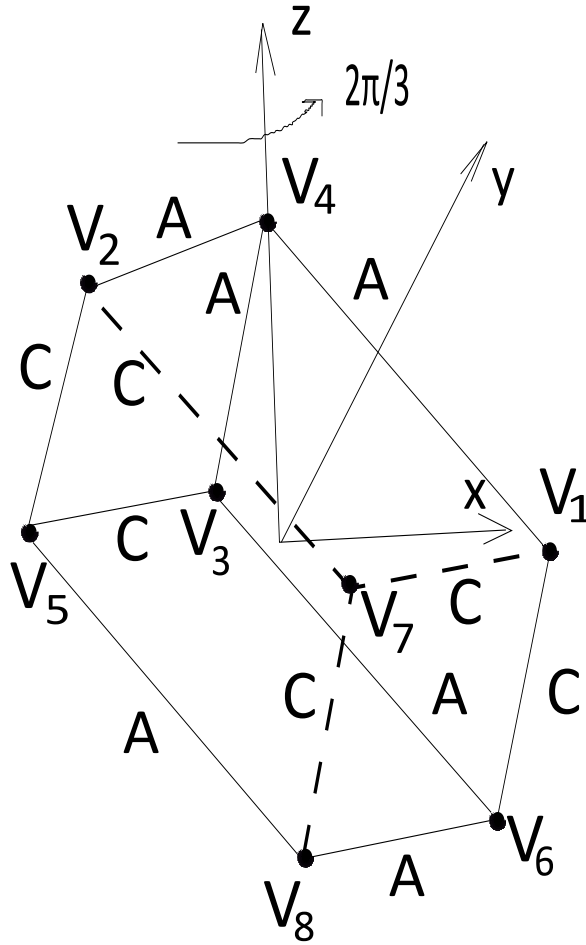


Рис. 2.2.15. Гексаэдр  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$ , допускающий  $\bar{3}$ -симметрию

где функции  $f(A, C)$  и  $g(A, C)$  определяются формулами

$$f(A, C) = -3 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{(1 + \cos A)(1 - \cos A + \cos C)^2}{(1 - 2 \cos A)(1 - \cos A - 2 \cos^2 C)}},$$

$$g(A, C) = -3 \operatorname{arch} \frac{1 + \cos C + \cos A \cos C - \cos^2 C}{1 - \cos A - 2 \cos^2 C}.$$

Схема доказательства теоремы 2.2.13. Аналогично гиперболическому октаэдру  $O = O(a, c)$  с  $\bar{3}$ -симметрией, поместим гексаэдр  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(a, c) = \mathcal{H}(A, C)$  в модель Кэли–Клейна  $K$ . В этом случае его вершины будут иметь координаты:

$$V_1 = (r, 0, h, 1), \quad V_2 = \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}, h, 1\right),$$

$$V_3 = \left(-\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}r}{2}, h, 1\right), \quad V_4 = (0, 0, 3h, 1),$$

$$V_5 = (-r, 0, -h, 1), \quad V_6 = \left(\frac{r}{2}, -\frac{\sqrt{3}r}{2}, -h, 1\right),$$

$$V_7 = \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}r}{2}, -h, 1\right), \quad V_8 = (0, 0, -3h, 1).$$

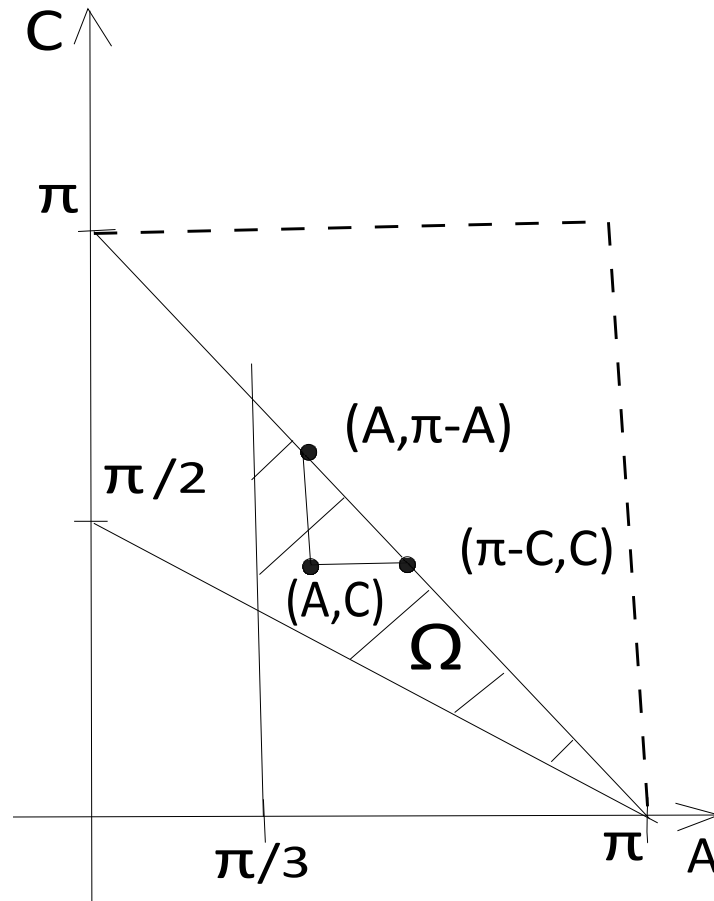


Рис. 2.2.16. Область существования  $\Omega$  гексаэдра  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$

Используя соотношения между длинами ребер и двугранными углами в модели Кэли—Клейна  $K$ , можно получить условия на двугранные углы, необходимые и достаточные для существования гиперболического гексаэдра  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$  (см. [7, п. 6]):

$$A > \frac{\pi}{3}, \quad A + C < \pi, \quad A + 2C > \pi.$$

Таким образом, нетрудно построить в системе координат  $(A, C)$  область существования  $\Omega$  гексаэдра  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$  (рис. 2.2.16):

$$\Omega = \{(A, C) \in [0, \pi]^2 \mid A > \frac{\pi}{3}, A + C < \pi, A + 2C > \pi\}.$$

Запишем формулу Шлефли для  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A, C)$ :

$$dV = -3adA - 3cdC = f(A, C)dA + g(A, C)dC.$$

Используя формулы связи между двугранными углами  $A, C$  и длинами ребер  $a, c$  гексаэдра  $\mathcal{H}$ , прямыми вычислениями находим

$$f(A, C) = -3 \operatorname{arch} \sqrt{\frac{(1 + \cos A)(1 - \cos A + \cos C)^2}{(1 - 2 \cos A)(1 - \cos A - 2 \cos^2 C)}},$$

$$g(A, C) = -3 \operatorname{arch} \frac{1 + \cos C + \cos A \cos C - \cos^2 C}{1 - \cos A - 2 \cos^2 C}.$$

Рассмотрим одну из сторон  $L$  треугольника  $\Omega$ :

$$L = \{A + C = \pi, \frac{\pi}{3} < A < \pi\}.$$

Если некоторая последовательность точек сходится к  $L$  изнутри области  $\Omega$ , то координаты  $r, h \rightarrow 0$ , сам гексаэдр стягивается в точку, а его объем  $V \rightarrow 0$ .

Наконец, интегрируя дифференциальную форму

$$dV = f(A, C)dA + g(A, C)dC$$

по горизонтальному и вертикальному отрезкам, соединяющих  $L$  с точкой  $(A, C) \in \Omega$ , получим требуемые формулы.  $\square$

### 2.3. ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ ЛЕБЕЛЛЯ

В данном разделе речь пойдет о формуле объема гиперболических многогранников Лебелля, являющихся примерами прямоугольных многогранников (то есть многогранников, все двугранные углы которых являются прямыми). Прямоугольные гиперболические многогранники интересны в первую очередь тем, что с их помощью можно конструировать и распознавать трехмерные гиперболические многообразия (более подробно см. в обзоре [12]).

Переходим теперь к описанию многогранников Лебелля.

Пусть  $n \geq 5$ . Рассмотрим в  $\mathbb{H}^3$  прямоугольный  $(2n + 2)$ -гранник  $R(n)$ , у которого верхнее и нижнее основания суть  $n$ -угольники, а боковая поверхность состоит из двух циклов пятиугольников (смежных соответственно с верхним и нижним основанием). Примеры таких многогранников для  $n = 5$  и  $n = 6$  изображены на рис. 2.3.1. Следуя терминологии из обзора [15], будем называть многогранники  $R(n)$  *многогранниками Лебелля*.

Формула, выражающая объемы многогранников Лебелля, задается следующей теоремой.

**Теорема 2.3.1** (Веснин, 1998 г.). *Объемы  $V = V(R(n))$  многогранников Лебелля  $R(n)$  могут быть вычислены по формуле*

$$V(R(n)) = \frac{n}{2} \left[ 2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_n\right) \right],$$

где  $\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right)$ , а через  $\Lambda = \Lambda(\theta)$  обозначена спецфункция Лобачевского:

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \ln |2 \sin t| dt.$$

Подробное доказательство теоремы 2.3.1 можно найти в работе [14]. Оно основано на представлении объема многогранника Лебелля в виде суммы объемов гиперболических усеченных бипрямоугольных тетраэдров. В свою очередь, объемы последних могут быть вычислены с помощью теоремы 1.4.2 (см. [51]).

Приведем набросок доказательства теоремы 2.3.1, основанного на упомянутой выше работе [14].

*Схема доказательства теоремы 2.3.1.*

1. Рассмотрим сначала комбинаторную треугольную призму  $ABCA'B'C'$ . Дополним его ребра  $BB'$  и  $CC'$  новыми вершинами  $D$  и  $E$ . В результате получаем комбинаторный шестигранник  $ABCA'B'C'DE$ .

Следуя работам Е. М. Андреева [8, 9], заметим, что при  $n \geq 5$  шестигранник  $ABCA'B'C'DE$  можно реализовать в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$ , если его двугранные углы при ребрах  $AA'$ ,  $BD$  и  $EC'$  равны соответственно  $\frac{\pi}{n}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  и  $\frac{\pi}{4}$ , а все остальные двугранные углы прямые. Обозначим такой шестигранник  $P(n)$ .

Пусть  $G$  — группа, порожденная отражениями в гранях шестигранника  $P(n)$ . Нетрудно заметить, что элементы этой группы, оставляющие инвариантным ребро  $AA'$ , образуют группу диэдра

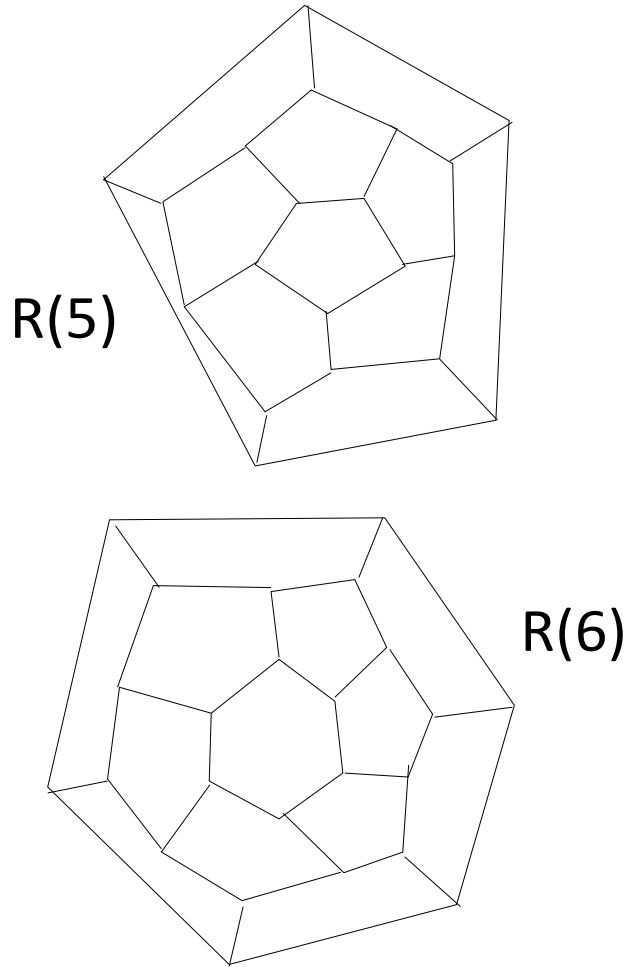


Рис. 2.3.1. Многогранники  $R(5)$  и  $R(6)$

$D_n$  порядка  $2n$ . Под действием этой группы из  $2n$  экземпляров многогранника  $P(n)$  мы и получим нужный нам многогранник Лебелля  $R(n)$ .

Таким образом, по построению, объем многогранника Лебелля  $R(n)$  может быть выражен через объем шестигранника  $P(n)$  по формуле:

$$V(R(n)) = 2n \cdot V(P(n)). \tag{2.3.1}$$

Таким образом, задача вычисления объема многогранника Лебелля сводится к вычислению объема шестигранника  $P(n)$ .

2. Для вычисления объема шестигранника  $P(n)$  продолжим его ребра  $AA'$ ,  $DB$  и  $EC$  до их пересечения в вершине  $K$ , лежащей за абсолютом. Аналогично можно продолжить ребра  $AA'$ ,  $DB'$  и  $EC'$  до их пересечения в (лежащей вне абсолюта) вершине  $L$ .

Таким образом, шестигранник  $P(n)$  можно считать дважды усеченной ортосхемой  $LDEK$ , для вычисления объема которой можно также использовать формулу Лобачевского (теорема 1.4.2) без всяких изменений. Доказательство данного утверждения содержится в работе Р. Келлерхальц [51].

Вычисляя объем  $P(n)$  как объем дважды усеченной ортосхемы с существенными двугранными углами  $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{4}$  и  $\beta = \frac{\pi}{n}$ , получаем

$$V(P(n)) = \frac{1}{4} \left[ 2\Lambda \left( \delta + \frac{\pi}{4} \right) + 2\Lambda \left( \delta - \frac{\pi}{4} \right) + \Lambda \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n} - \delta \right) + \Lambda \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} - \delta \right) + 2\Lambda \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) \right],$$

$$\delta = \arctg \sqrt{4 \cos^2 \frac{\pi}{n} - 1}.$$



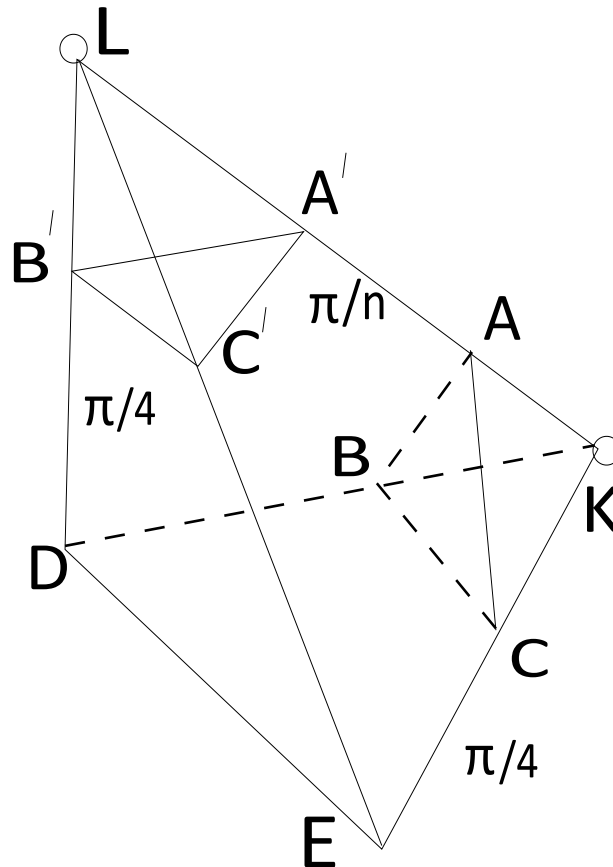


Рис. 2.3.2. Шестигранник  $P(n)$  как дважды усеченная ортосхема

Применяя формулу удвоения для функции Лобачевского (см., например, [16]), получим

$$\Lambda(2x) = 2\Lambda(x) + 2\Lambda\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

для случая

$$x = \delta - \frac{\pi}{4},$$

а также используя формулы тригонометрии, связывающие обратные тригонометрические функции, получаем после применения соотношения (2.3.1) требуемую формулу для объема многогранника Лебелля  $R(n)$ .

Теорема 2.3.1 доказана. □

## ГЛАВА 3

### ПРОБЛЕМА ЗЕЙДЕЛЯ

#### 3.1. ФОРМУЛИРОВКА ГИПОТЕЗЫ ЗЕЙДЕЛЯ

В предыдущих разделах настоящего обзора в центре внимания находилась проблема получения точных формул объемов многогранников в терминах двугранных углов (иногда, длин ребер).

В 1986 г. Дж. Зейделем была сформулирована гипотеза о том, что объем идеального гиперболического тетраэдра можно выразить в виде функции от *перманента* и определителя его матрицы Грама. Несмотря на то, что точная формула объема такого многогранника была известна еще Н. И. Лобачевскому, данная проблема долго оставалась открытой.

В 1996 г. И. Ривиним и Ф. Лю был предложен усиленный вариант гипотезы Зейделя, согласно которой объем симметричного тетраэдра (в  $\mathbb{H}^3$  или  $\mathbb{S}^3$ ) можно выразить только лишь через детерминант матрицы Грама.

В текущем разделе данного обзора мы приведем результаты Н. В. Абросимова, дающие решения исходной и усиленной гипотезы Зейделя.

Пусть, как и прежде,  $T$  — гиперболический (или сферический) тетраэдр, двугранные углы которого суть  $A, B, C, D, E, F$  (рис. 1.2.1), а

$$G = \langle -\cos \alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

— матрица Грама тетраэдра  $T$ , которая определяет тетраэдр однозначно с точностью до движения пространства.

Как известно из курса общей алгебры, *перманент* матрицы  $M = (m_{ij}), i, j \in \overline{1, n}$  определяется формулой

$$\text{per } M = \sum_{i=1}^n m_{ij} \text{ per } M_{ij},$$

где  $M_{ij}$  — матрица, полученная из  $M$  вычеркиванием ее  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

### 3.2. УСИЛЕННАЯ ГИПОТЕЗА ЗЕЙДЕЛЯ

В сферическом пространстве отрицательный ответ на усиленную гипотезу Зейделя дает следующая теорема.

**Теорема 3.2.1** (Абросимов, 2009 г.). *Существует однопараметрическое семейство симметричных сферических тетраэдров с одним и тем же значением определителя матрицы Грама, объем которых представляет собой функцию от параметра.*

*Доказательство.* Рассмотрим тетраэдр  $T = T(A, D)$ , у которого двугранные углы при скрещивающихся ребрах равны соответственно  $A$  и  $D$ , а все остальные углы прямые (рис. 3.2.1)

Нетрудно найти объем такого тетраэдра и определитель его матрицы Грама:

$$V = \frac{AD}{2}, \quad \det G = \sin^2 A \sin^2 D.$$

Среди тетраэдров данного типа выберем семейство  $T_c(A, D) = T\left(A, \frac{c}{\sin A}\right)$  с постоянным значением детерминанта матрицы Грама

$$\det G = c^2,$$

где  $c = \text{const}$ , удовлетворяющая условию

$$0 < c < \min\{\sin A \sin D\}.$$

Объем таких тетраэдров выражается по формуле

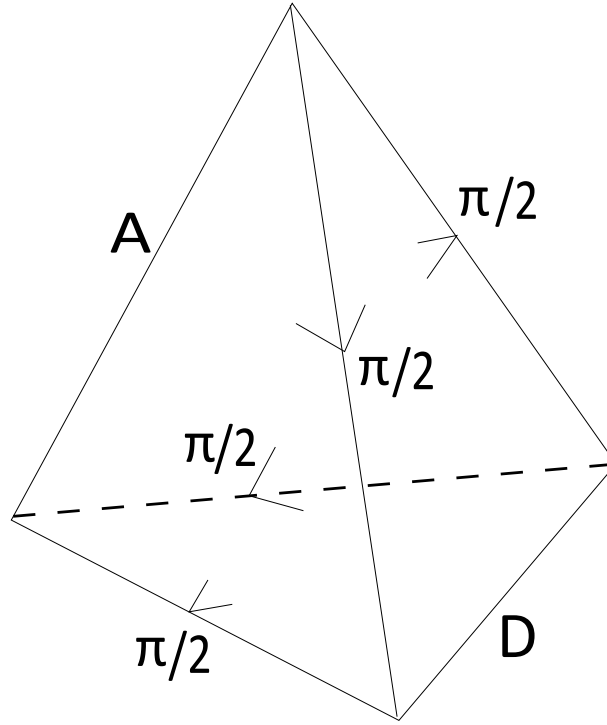
$$V(T_c) = \frac{A}{2} \arcsin \frac{c}{\sin A},$$

то есть зависит не только от постоянной  $c$ , но и от значения свободного параметра  $A$ . □

В гиперболическом случае справедлива аналогичная теорема.

**Теорема 3.2.2** (Абросимов, 2009 г.). *Существует однопараметрическое семейство симметричных гиперболических тетраэдров с постоянным значением определителя матрицы Грама, объем которых меняется со значением параметра.*

Приведем доказательство данной теоремы, основанное на работе [1].

Рис. 3.2.1. Тетраэдр  $T = T(A, D)$ 

*Доказательство.* Рассмотрим гиперболический тетраэдр  $T = T(A, B, C, D, E, F)$  (см. рис. 1.2.1) и зафиксируем все двугранные углы, кроме двух противоположных, например,  $A$  и  $D$ . Поскольку множество гиперболических тетраэдров открыто (см., например, [64]), то, производя малые «шевеления» двугранных углов  $A$  и  $D$ , мы снова будем получать гиперболические тетраэдры.

Среди множества таких тетраэдров выделим семейство  $T_c(A, D)$  с постоянным значением  $\det G(T) = -c^2 = \text{const}$ . Будем рассматривать  $\det G$  как функцию двугранных углов, то есть  $\det G = \det G(A, D)$ . Таким образом

$$-d(\det G) = 2c_{12} \sin A dA + 2c_{34} \sin D dD = 0,$$

где  $c_{ij}$  — алгебраическое дополнение к  $ij$ -му элементу матрицы Грама  $G$ , откуда

$$\frac{dD}{dA} = -\frac{c_{12} \sin A}{c_{34} \sin D}.$$

Производная от объема (как сложной функции от угла  $A$ ) равна

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial D} \frac{dD}{dA}.$$

В силу формулы Шлефли имеем

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -\frac{1}{2}l_A, \quad \frac{\partial V}{\partial D} = -\frac{1}{2}l_D,$$

(здесь  $l_A$  и  $l_D$  обозначают длины ребер двугранных углов  $A$  и  $D$  соответственно). Отсюда

$$\frac{dV}{dA} = -\frac{1}{2} \left( l_A - l_D \frac{c_{12} \sin A}{c_{34} \sin D} \right).$$

Используя формулу (iii) теоремы 1.2.1, прямыми вычислениями выражаем длины ребер  $l_A$  и  $l_D$  через двугранные углы  $A$  и  $D$ :

$$l_A = \operatorname{arth} \frac{\sqrt{-G} \sin A}{c_{34}},$$

$$l_D = \operatorname{arth} \frac{\sqrt{-G} \sin D}{c_{12}},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{th} l_A}{\operatorname{th} l_D} = \frac{c_{12} \sin A}{c_{34} \sin D}.$$

Окончательно:

$$\frac{dV}{dA} = -\frac{\operatorname{th} l_A}{2} \left( \frac{l_A}{\operatorname{th} l_A} - \frac{l_D}{\operatorname{th} l_D} \right).$$

Для выполнения условий теоремы необходимо, чтобы объем имел переменное значение, то есть

$$\frac{dV}{dA} \neq 0.$$

Последнее, в свою очередь, эквивалентно неравенству

$$l_A \neq l_D,$$

что следует из строгой монотонности функции (см. [1, лемма 2])

$$f(x) = \frac{\operatorname{th} x}{x}.$$

Таким образом, семейство тетраэдров  $T_c(A, D)$  с постоянным значением определителя матрицы Грама имеет переменный объем при  $A \neq D$ .

Теперь нетрудно указать бесконечное семейство тетраэдров, удовлетворяющих последнему условию при  $A \neq D$ .

Такому условию удовлетворяют, например, «почти симметричные» тетраэдры с углами  $A \neq D$ ,  $B = E$ ,  $C = F$  (см. рис. 3.2.2).  $\square$

### 3.3. ИСХОДНАЯ ГИПОТЕЗА ЗЕЙДЕЛЯ

Положительное решение исходной гипотезы Зейделя дает следующая теорема Н. В. Абросимова. Мы приводим формулировку и доказательство данной теоремы, основанное на работе [2].

**Теорема 3.3.1** (Абросимов, 2010 г.). *Объем идеального гиперболического тетраэдра можно выразить как функцию от определителя и перманента его матрицы Грама при условии, что известно, является ли он остроугольным или тупоугольным.*

**Замечание 3.3.1.** Тетраэдр называется *остроугольным*, если все его двугранные углы суть острые. Если, в свою очередь, хотя бы один из двугранных углов рассматриваемого тетраэдра тупой, то тетраэдр называется *тупоугольным*.

*Доказательство.* Рассмотрим идеальный гиперболический тетраэдр  $T = T(A, B, C)$ .

Напомним (см. раздел 1.4), что противоположащие двугранные углы идеального тетраэдра попарно равны, а сумма двугранных углов при любой вершине равна

$$A + B + C = \pi,$$

то есть  $T = T(A, B, \pi - A - B)$  (рис. 3.3.1).

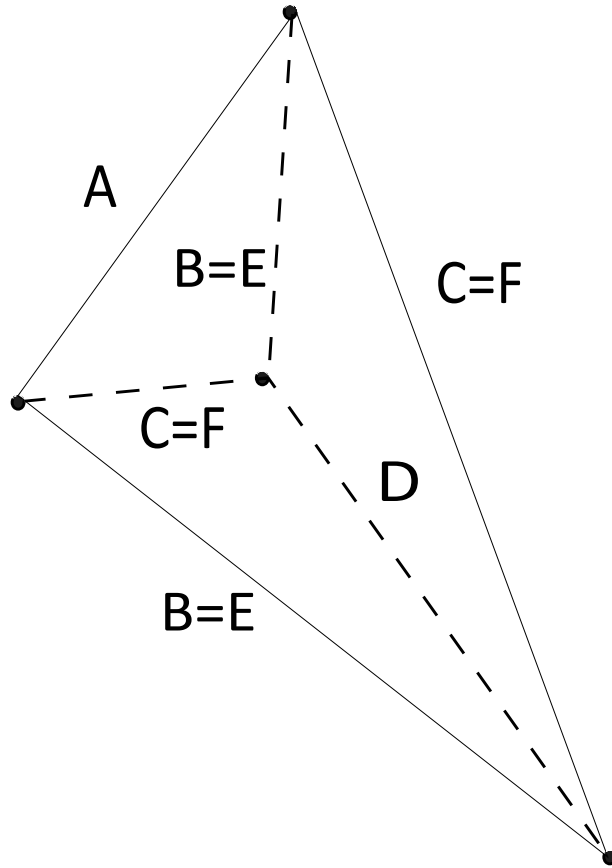


Рис. 3.2.2. «Почти симметричный» тетраэдр  $T = T(A, B, C, D)$

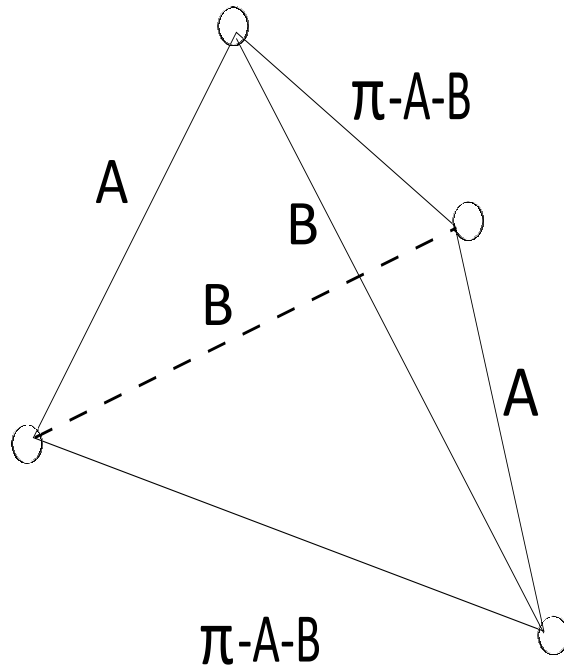


Рис. 3.3.1. Идеальный гиперболический тетраэдр  $T = T(A, B, \pi - A - B)$

Матрица Грама такого тетраэдра имеет вид:

$$G = \langle -\cos \alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & \cos(A+B) \\ -\cos A & 1 & \cos(A+B) & -\cos B \\ -\cos B & \cos(A+B) & 1 & -\cos A \\ \cos A+B & -\cos B & -\cos A & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя ее определитель и перманент, получаем:

$$\det G = -4 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2(A+B),$$

$$\text{per } G = 4 + 4 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2(A+B).$$

Для доказательства теоремы 3.3.1 достаточно показать, что двугранные углы идеального тетраэдра однозначно (с точностью до перестановки) определяются по значениям  $\det G$  и  $\text{per } G$  при условии, что известно, является ли он остроугольным или тупоугольным.

Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

Предположим, не нарушая общности, что

$$0 < A \leq B \leq C = \pi - A - B.$$

Таким образом, два из трех двугранных углов  $A$  и  $B$  должны быть обязательно острыми, а третий угол  $C$  может быть как острым, так и тупым. В первом случае рассматриваемый тетраэдр остроугольный, во втором — тупоугольный.

Сделаем замену переменных

$$x = \sin A \sin B, \quad y = \cos A \cos B.$$

Нам достаточно показать, что при фиксированном определителе и перманенте решения системы

$$\begin{cases} -\frac{1}{4} \det G = x^2(1 - (y - x)^2), \\ -\frac{1}{4} \text{per } G = y^2(y - x)^2 + 1. \end{cases}$$

отвечают одному тетраэдру (с точностью до конгруэнтности) в каждом из двух рассматриваемых случаев.

Допустим, что найдется пара различных решений  $(a, b)$  и  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе. В таком случае будут справедливы равенства:

$$\begin{cases} a^2(1 - (b - a)^2) = x^2(1 - (y - x)^2), \\ b^2(b - a)^2 = y^2(y - x)^2. \end{cases}$$

Условие, что угол  $C$  острый, означает, что

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = -\cos C < 0,$$

то есть оба решения удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} b(b - a) < 0, \\ x(x - y) < 0. \end{cases}$$

Заметим, что в случае, когда угол  $C$  тупой, имеют место обратные неравенства. Этот факт позволяет избавиться от квадратов во втором уравнении, не потеряв при этом решений:

$$\begin{cases} a^2(1 - (b - a)^2) = x^2(1 - (y - x)^2), \\ b(b - a) = y(y - x). \end{cases}$$

Выразив  $x$  из второго уравнения и подставив в первое, получим многочлен шестой степени от  $y$ , который раскладывается на линейные множители  $(b - y)$ ,  $(b + y)$  и биквадратный многочлен

$$y^4 - (a^2 + a^4 + 2ab - 2a^3b - b^2 + 2ab^3 - b^4)y^2 + (a^4b^2 - 4a^3b^3 + 6a^2b^4 - 4ab^5 + b^6).$$

Таким образом, все решения могут быть найдены в радикалах.

Подставляя выражения  $x, y$  через двугранные углы  $A, B$ , нетрудно убедиться, что различные решения системы соответствуют одному идеальному тетраэдру  $T = T(A, B, C)$  с точностью до переобозначения его двугранных углов.  $\square$

**Замечание 3.3.2.** Если пренебречь в формулировке теоремы 3.3.1 условием, что тетраэдр является остроугольным или тупоугольным, то данная теорема в общем случае будет неверна. Рассмотрим следующий пример, предложенный в работе [2].

Рассмотрим пару идеальных тетраэдров — тупоугольный  $T_1 = T_1(s, s, \pi - 2s)$  и остроугольный  $T_2 = T_2\left(t, \frac{\pi - t}{2}, \frac{\pi - t}{2}\right)$ , где

$$s = \arccos \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{170\sqrt{17} - 698}}}}{2\sqrt{2}},$$

$$t = \arccos \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{-26 + 10\sqrt{17}}}{8}.$$

Прямыми вычислениями нетрудно убедиться, что определители и перманенты матриц Грама для указанных тетраэдров равны

$$\det G(T_1) = \det G(T_2) = \frac{107 - 51\sqrt{17}}{128},$$

$$\text{per } G(T_1) = \text{per } G(T_2) = \frac{163 + 85\sqrt{17}}{128}.$$

Однако значения объемов данных тетраэдров различны и равны

$$V(T_1) = 0,847365, \quad V(T_2) = 1,01483.$$

## ГЛАВА 4

### ОБЪЕМЫ МНОГОГРАННИКОВ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАДАННОМ МОДЕЛЬЮ ПУАНКАРЕ В ВЕРХНЕМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В главе 4 мы рассмотрим современный метод вычисления объемов многогранников в гиперболическом пространстве, заданном моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве. Данный подход, предложенный И. Х. Сабитовым в работах [33, 34], позволяет найти объем многогранника произвольной размерности через некоторый интеграл по его граничной поверхности, являющейся объединением многогранников меньшей размерности.

В данном разделе мы, используя указанный метод, проведем подробное вычисление объема произвольного гиперболического симплекса в размерности 4, а также опишем структуру формул объема симплексов в размерностях 4 и 5.

#### 4.1. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим задачу вычисления объема многогранников в  $n$ -мерном гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^n$  постоянной отрицательной кривизны  $K$ , заданном моделью Пуанкаре в верхнем полупространстве  $x_n > 0$ .

Метрика в таком случае имеет вид:

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{(-K)x_n^2}. \quad (4.1.1)$$

Приведем теперь некоторые предварительные результаты, которые понадобятся нам для вывода основных результатов главы 4 (подробные доказательства и обоснования данных результатов приведены в работе [33]).

Одним из основных инструментов для вычисления объемов тел в модели гиперболического пространства в верхнем полупространстве с метрикой (4.1.1) является следующая теорема.

**Теорема 4.1.1** (Сабитов, 2013 г.). Пусть  $D$  — компактное тело с кусочно-гладкой границей  $\partial D$ , расположенное в верхнем полупространстве  $x_n > 0$  пространства  $\mathbb{H}^n$ . Тогда объем  $V = V(D)$  такого тела в метрике (4.1.1) может быть вычислен по формуле

$$V = \frac{1}{(-K)^{\frac{n}{2}}} \int_D \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{x_n^n} = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{\frac{n}{2}}} \int_{\partial D} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}. \quad (4.1.2)$$

Доказательство теоремы 4.1.1 основано на применении формулы Стокса к правому интегралу и формуле, выражающей объем тела в римановой геометрии с метрикой, заданной с помощью коэффициентов первой квадратичной формы  $g_{ij}$ :

$$V = \int_D \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad (4.1.3)$$

Для вычисления объема гиперболического симплекса в дальнейшем мы будем использовать правый интеграл в формуле (4.1.3):

$$V_S = \frac{(-1)^n}{(n-1)(-K)^{\frac{n}{2}}} \int_S \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}}. \quad (4.1.4)$$

В формуле (4.1.4)  $S$  — произвольная компактная гиперповерхность в  $\mathbb{H}^n$ , а  $V_S$  — алгебраический объем тела, ограниченного этой гиперповерхностью.

Если  $S$  представляет собой многогранник (не обязательно выпуклый), то интеграл (4.1.4) определен на гипергранях  $S_i$ , каждая из которых принадлежит  $(n-1)$ -мерной полусфере

$$\widehat{S}_i : (x_1 - a_{i1})^2 + \dots + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2 + x_n^2 = R_i^2. \quad (4.1.5)$$

**Замечание 4.1.1.** Заметим, что если некоторая гипергрань лежит в гиперплоскости, ортогональной к гиперплоскости  $x_n = 0$ , тогда интеграл по этой гипергранни равен нулю.

Обозначим через  $\Omega_i$  ортогональную проекцию гипергранни  $S_i$  на плоскость  $x_n = 0$ . Если гиперсфера  $\widehat{S}_i$  ориентирована своей внешней нормалью, то в силу формул (4.1.4) и (4.1.5) получаем

$$\int_{S_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{x_n^{n-1}} = \int_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{(R_i^2 - r_i^2)^{(n-1)/2}}, \quad (4.1.6)$$

где  $r_i^2 = (x_1 - a_{i1})^2 + \dots + (x_{n-1} - a_{i,n-1})^2$ .

Рассмотрим теперь другой класс метрик пространств постоянной кривизны вида

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + ar^2)^2} (dx_1^2 + \dots + dx_n^2), \quad (4.1.7)$$

где  $a = \text{const}$ , а  $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

**Замечание 4.1.2.** Легко видеть, что, если положить в формуле (4.1.7)  $a = 0$ , то мы получим евклидову метрику. Значения  $a > 0$  соответствуют случаю сферической метрики с постоянной положительной кривизной  $K = 4a$ . Наконец, при  $a < 0$  имеем метрику  $n$ -мерного гиперболического пространства постоянной отрицательной кривизны  $K = 4a$ .



Если в пространстве постоянной отрицательной кривизны задано некоторое компактное тело  $D$ , то формула для вычисления объема задается следующей теоремой.

**Теорема 4.1.2** (И. Х. Сабитов, 2013 г.). Пусть в случае метрики (4.1.7) задано компактное тело  $D$  с кусочно-гладкой границей  $\partial D$ . Тогда объем  $V = V(D)$  такого тела можно вычислить по формуле

$$V = \int_{\partial D} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1} x_i F_n(r)}{r^n} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n, \quad (4.1.8)$$

где функция

$$F_n(r) = \int_0^r \frac{x^{n-1}}{(1+ax^2)^n} dx,$$

а запись  $\widehat{dx}_i$  означает, что соответствующий дифференциал отсутствует.

Идея доказательства теоремы 4.1.2 заключается в применении формулы Стокса к правой части формулы (4.1.8) и элементарных преобразований с учетом формулы (4.1.7).

Вернемся к правому интегралу в формуле (4.1.4). Используя формулу (4.1.3) и схему доказательства теоремы 4.1.2, нетрудно получить следующее представление:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{(R_i^2 - r_i^2)^{(n-1)/2}} &= \frac{1}{R_i^{n-1}} \int_{\Omega_i} \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}}{(1 - (\frac{r_i}{R_i})^2)^{(n-1)/2}} = \\ &= \int_{\partial\Omega_i} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j-1} (x_j - a_{ij}) F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^{n-1}} dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_{n-1}, \quad (4.1.9) \end{aligned}$$

где

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \int_0^{\frac{r_i}{R_i}} \frac{x^{n-2}}{(1-x^2)^{(n-1)/2}} dx.$$

#### 4.2. ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА

Конечной целью настоящего раздела является получение формулы объема гиперболического четырехмерного симплекса через координаты вершин.

**Определение 4.2.1.** Будем говорить, что  $n$ -симплекс в модели гиперболического пространства  $\mathbb{H}^n$  в верхнем полупространстве расположен в стандартной позиции, если его вершины могут быть пронумерованы в таком порядке  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ , чтобы они имели следующие координаты:

$$A_0(0, 0, 0, \dots, 0, 1), \quad A_1(0, 0, 0, \dots, 0, q), \quad A_2(x_{21}, 0, 0, \dots, 0, x_{2n}), \quad x_{21} > 0,$$

$$A_3(x_{31}, x_{32}, 0, \dots, 0, x_{3n}), \quad x_{32} > 0,$$

...

$$A_k(x_{k1}, \dots, x_{k,k-1}, 0, \dots, 0, x_{kn}), \quad x_{k,k-1} > 0,$$

...

$$A_{n-1}(x_{n-1,1}, \dots, x_{n-1,n-2}, 0, x_{n-1,n}), \quad x_{n-1,n-2} > 0,$$

$$A_n(x_{n1}, \dots, x_{n,n-1}, x_{nn}), \quad x_{n,n-1} > 0.$$

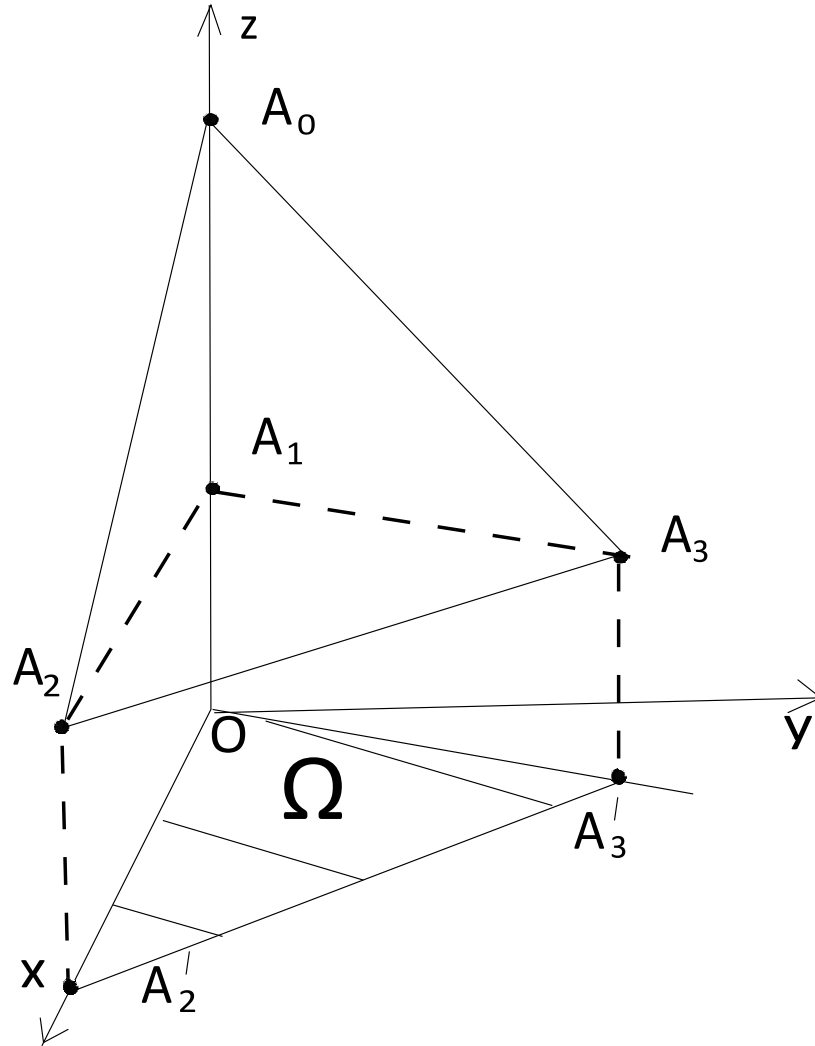


Рис. 4.2.1. Тетраэдр в стандартной позиции

Так как любой симплекс можно некоторым движением перевести в симплекс, расположенный в стандартной позиции [33], то мы будем, не нарушая общности, рассматривать симплексы в стандартной позиции.

Рассмотрим сначала гиперболический тетраэдр  $T = A_0A_1A_2A_3$ , расположенный в стандартной позиции (рис. 4.2.1), вершины которого имеют координаты:

$$A_0(0, 0, p_0); \quad A_1(0, 0, p_1); \quad A_2(x_2, 0, z_2), x_2 > 0; \quad A_3(x_3, y_3, z_3), y_3 > 0.$$

Формула объема гиперболического тетраэдра в стандартной позиции, полученная в работе [34], задается следующей теоремой.

**Теорема 4.2.1** (Сабитов, 2013). *Объем  $V = V(T)$  гиперболического тетраэдра  $T = A_0A_1A_2A_3$  с вершинами  $A_0(0, 0, p_0)$ ,  $A_1(0, 0, p_1)$ ,  $A_2(x_2, 0, z_2)$  ( $x_2 > 0$ ) и  $A_3(x_3, y_3, z_3)$  ( $y_3 > 0$ ) вычисляется по формуле*

$$V(T) = \frac{1}{4(-K)^{3/2}} \int_0^{y_3} \sum_{i=0}^1 \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{A_i}} \ln \frac{(y_3^2 A_i - B_i) + C_i}{(y_3^2 A_i - B_i) - C_i} dy,$$

где для  $i = 0$  и  $i = 1$

$$A_i = R_i^2 - (y - b_i)^2, \quad B_i = (x_3 y - a_i y_3)((x_3 - x_2)y + (x_2 - a_i)y_3), \quad C_i = x_2 y_3 (y_3 - y) \sqrt{A_i},$$

$$a_0 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - p_0^2}{2x_2}, \quad b_0 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - p_0^2}{2y_3} - \frac{x_3(x_2^2 + z_2^2 - p_0^2)}{2x_2y_3},$$

$$a_1 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - p_1^2}{2x_2}, \quad b_1 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - p_1^2}{2y_3} - \frac{x_3(x_2^2 + z_2^2 - p_1^2)}{2x_2y_3},$$

$$R_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + p_0^2, \quad R_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + p_1^2.$$

*Доказательство.* Выпишем сначала общую формулу объема многогранника  $P$  для трехмерного случая. Полагая в формулах (4.1.4) и (4.1.5)  $n = 3$ , получаем:

$$V(P) = - \sum_i \frac{1}{2(-K)^{\frac{3}{2}}} \int_{\Omega_i} \frac{dx \wedge dy}{R_i^2 - (x - a_i)^2 - (y - b_i)^2},$$

где интегрирование в правой части ведется по всем неvertикальным граням  $S_i$  многогранника  $P$ , лежащим на полусферах

$$(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + z^2 = R_i^2$$

с проекциями  $\Omega_i$  на плоскость  $Oxy$ .

Легко видеть, что две из четырех граней тетраэдра  $T$  расположены в двух вертикальных плоскостях

$$y = 0, \quad y_3x - x_3y = 0,$$

следовательно, интегралы по этим граням вносят нулевой вклад в формулу для объема.

Две другие грани  $\omega_0 = A_0A_2A_3$  и  $\omega_1 = A_1A_2A_3$  лежат на полусферах

$$(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + z^2 = R_0^2,$$

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + z^2 = R_1^2,$$

и имеют одинаковую проекцию  $\Omega$  на плоскость  $Oxy$ :

$$\Omega = OA'_2A'_3 \mid O(0, 0, 0), \quad A'_2(x_2, 0, 0), \quad A'_3(x_3, y_3, 0).$$

Прямыми вычислениями найдем координаты центра и радиусы указанных полусфер:

$$A_i = R_i^2 - (y - b_i)^2, \quad B_i = (x_3y - a_iy_3)((x_3 - x_2)y + (x_2 - a_i)y_3), \quad C_i = x_2y_3(y_3 - y)\sqrt{A_i},$$

$$a_0 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - p_0^2}{2x_2}, \quad b_0 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - p_0^2}{2y_3} - \frac{x_3(x_2^2 + z_2^2 - p_0^2)}{2x_2y_3},$$

$$a_1 = \frac{x_2^2 + z_2^2 - p_1^2}{2x_2}, \quad b_1 = \frac{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - p_1^2}{2y_3} - \frac{x_3(x_2^2 + z_2^2 - p_1^2)}{2x_2y_3},$$

$$R_0^2 = a_0^2 + b_0^2 + p_0^2, \quad R_1^2 = a_1^2 + b_1^2 + p_1^2.$$

Таким образом, объем тетраэдра  $T$  мы можем найти как двойной интеграл по треугольнику  $\Omega = OA'_2A'_3$  (рис. 4.2.2):

$$V(T) = \frac{1}{2(-K)^{\frac{3}{2}}} \left[ \int_0^{y_3} \int_{\frac{x_3}{y_3}y}^{x_2 + \frac{x_3 - x_2}{y_3}y} \frac{dx}{R_1 - (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} - \int_0^{y_3} \int_{\frac{x_3}{y_3}y}^{x_2 + \frac{x_3 - x_2}{y_3}y} \frac{dx}{R_0 - (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2} \right].$$

Вычисляя внутренние интегралы по  $x$ , получаем формулу

$$V(T) = \frac{1}{4(-K)^{3/2}} \int_0^{y_3} \sum_{i=0}^1 \frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{A_i}} \ln \frac{(y_3^2 A_i - B_i) + C_i}{(y_3^2 A_i - B_i) - C_i} dy,$$

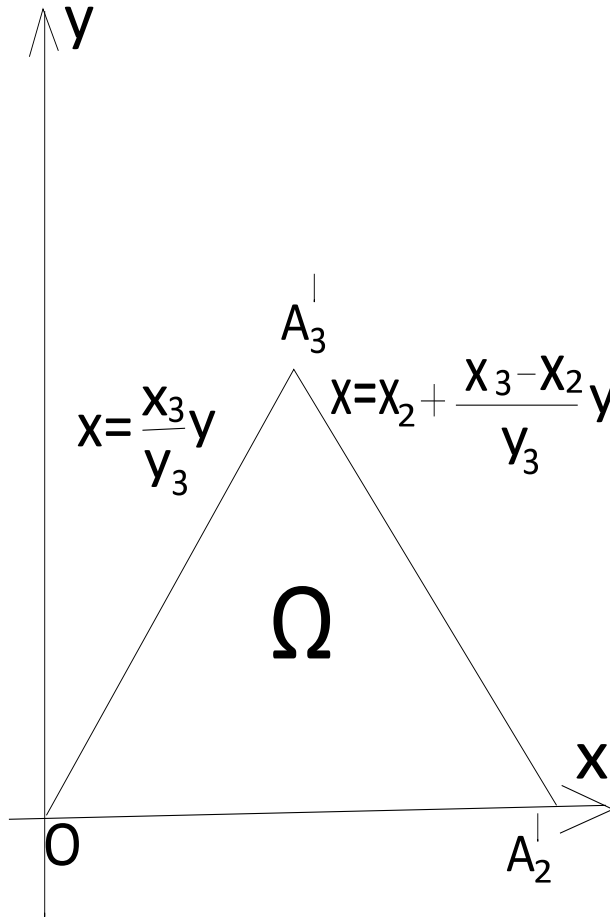


Рис. 4.2.2. Треугольник  $\Omega = OA_2A_3$

где при  $i = 0$  и  $i = 1$

$$A_i = R_i^2 - (y - b_i)^2, \quad B_i = (x_3y - a_iy_3)((x_3 - x_2)y + (x_2 - a_i)y_3),$$

$$C_i = x_2y_3(y_3 - y)\sqrt{A_i}.$$

Подставляя найденные значения  $a_0, b_0, a_1, b_1, R_0, R_1$ , мы получим требуемую формулу для объема.  $\square$

### 4.3. ОБЪЕМ ЦИКЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В настоящем разделе мы проведем реализацию метода Сабитова для так называемых *циклических* многогранников в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$ .

Введем сначала некоторые базовые определения.

**Определение 4.3.1.** Определим *кривую моментов* в  $\mathbb{R}^n$  как образ отображения

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \rightarrow x(t) = (t, t^2, \dots, t^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Для каждого  $m > n$  определим *циклический многогранник*  $C^m(t_1, \dots, t_m)$  как выпуклую оболочку  $m$  различных точек  $x(t_i), t_1 < t_2 < \dots < t_m$  на кривой моментов (рис. 4.3.1).

Изучение объемов циклических многогранников в  $\mathbb{H}^3$  мы начнем с наиболее простого случая тетраэдра.

Пусть нам задан циклический тетраэдр  $T$  в пространстве Лобачевского  $\mathbb{H}^3$  (рис. 4.3.2; в этом случае чертеж носит условный характер), вершины которого имеют следующие координаты:

$$V_i(t_i, t_i^2, t_i^3), \quad t_i > 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

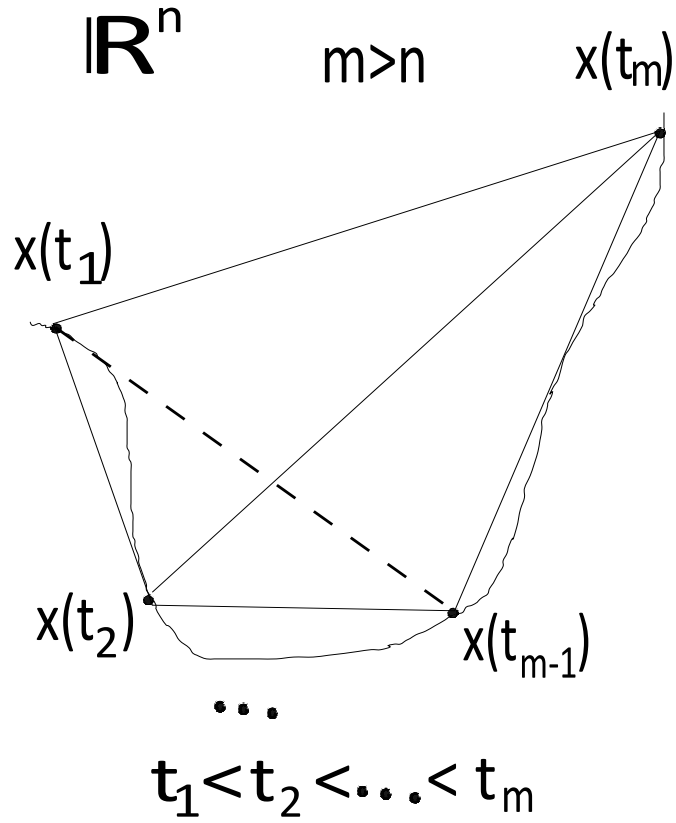


Рис. 4.3.1. Циклический многогранник  $C^n(t_1, \dots, t_m)$  как выпуклая оболочка точек на кривой моментов

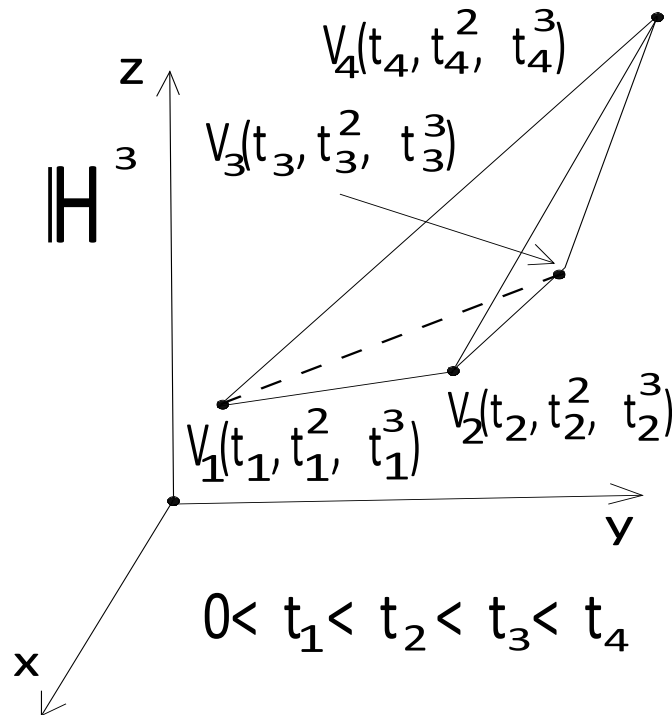


Рис. 4.3.2. Циклический тетраэдр  $T$  в  $\mathbb{H}^3$

В свою очередь, каждая грань  $V_i V_j V_k$  такого тетраэдра лежит на полусфере:

$$(x - a_{ijk})^2 + (y - b_{ijk})^2 + z^2 = R_{ijk}^2.$$

**Замечание 4.3.1.** Координаты центра каждой такой полусферы  $(a_{ijk}, b_{ijk}, 0)$  и ее радиус  $R_{ijk}$  нетрудно найти, решая соответствующую систему (мы не будем указывать их явный вид ввиду громоздкости соответствующих формул).

Вычислим объем циклического тетраэдра по формуле (4.1.4) (здесь, как и в предыдущем разделе, мы полагаем  $n = 3$ ). Имеем:

$$V(T) = -\frac{1}{2(-K)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i \neq j \neq k \in \overline{1,4}} \int_{\Omega_{ijk}} \frac{dx \wedge dy}{R_{ijk}^2 - r_{ijk}^2}, \quad (4.3.1)$$

где двойные интегралы в правой части формулы (4.3.1) берутся по треугольникам  $\Omega_{ijk}$  с вершинами  $(t_i, t_i^2), (t_j, t_j^2), (t_k, t_k^2)$ , а

$$r_{ijk}^2 = (x - a_{ijk})^2 + (y - b_{ijk})^2.$$

Интегрируя выражения в правых частях (4.3.1), прямыми вычислениями приходим к следующей теореме.

**Теорема 4.3.1** (Краснов, 2020 г.). *Ориентированный объем  $V$  циклического тетраэдра в пространстве Лобачевского с вершинами  $V_i(t_i, t_i^2, t_i^3), t_i > 0, i = \overline{1,4}$  выражается формулой*

$$V = -\frac{1}{2(-K)^{\frac{3}{2}}} \sum_{i \neq j \neq k \in \overline{1,4}} \left[ \text{Sab}(t_i, t_k, b_{ijk}, R_{ijk}^2, a_{ijk}) - \text{Sab}(t_i, t_j, b_{ijk}, R_{ijk}^2, a_{ijk}) \right], \quad (4.3.2)$$

где функция  $\text{Sab} = \text{Sab}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  (которую мы назовем функцией Сабитова) имеет аналитическое выражение

$$\text{Sab}(A, B, C, D, E) = \frac{1}{2} \int_A^B \frac{\ln[(A+B)x - AB - C + \sqrt{D - (x-E)^2}]}{\sqrt{D - (x-E)^2}} dx. \quad (4.3.3)$$

**Замечание 4.3.2.** Особый интерес представляет исследование геометрических и комбинаторных свойств циклического многогранника в пространстве Лобачевского. Если такой многогранник является выпуклым, то из формулы (4.3.2) нетрудно установить, что его ориентированный объем выражается алгебраической суммой функций Сабитова (4.3.3). При этом сама формула объема будет иметь ту же структуру, что и формула объема циклического тетраэдра (4.3.2). Кроме того, получение гиперболического аналога условия четности Гейла (см., например, [13]) позволит выписать явную формулу для объема произвольного циклического многогранника в гиперболическом пространстве. Также было бы интересно изучить свойства функции Сабитова (4.3.3), в частности, вывести формулы связи данной функции с функцией Лобачевского (и дилогарифмом Эйлера).

#### 4.4. ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СИМПЛЕКСА В РАЗМЕРНОСТИ $n = 4$

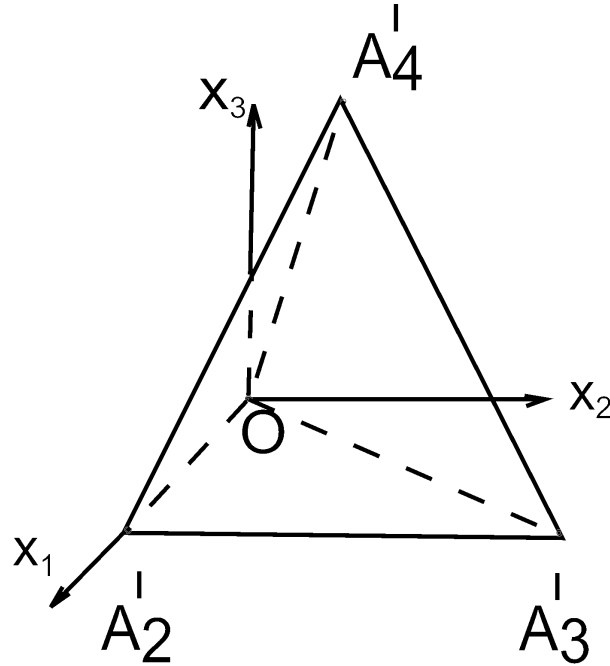
Переходим теперь к рассмотрению 4-симплекса  $A_0A_1A_2A_3A_4$ , расположенного в стандартной позиции в пространстве  $\mathbb{H}^4$ , с вершинами

$$A_0(0, 0, 0, 1), \quad A_1(0, 0, 0, q), \quad A_2(x_{21}, 0, 0, x_{24}), \quad A_3(x_{31}, x_{32}, 0, x_{34}), \quad A_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44}).$$

Нетрудно видеть, что все гиперграни нашего симплекса, за исключением  $A_1A_2A_3A_4$  и  $A_0A_2A_3A_4$ , расположены в плоскостях, ортогональных плоскости  $x_4 = 0$ , то есть имеют уравнения  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ . Таким образом, только два интеграла (по гиперграням  $A_1A_2A_3A_4$  и  $A_0A_2A_3A_4$ ) в формуле (4.1.4) могут быть отличными от нуля.

Эти грани являются частью полусфер с уравнениями

$$\begin{aligned} A_0A_2A_3A_4 : (x_1 - a_{10})^2 + (x_2 - a_{20})^2 + (x_3 - a_{30})^2 + x_4^2 &= R_0^2, \\ A_1A_2A_3A_4 : (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{21})^2 + (x_3 - a_{31})^2 + x_4^2 &= R_1^2. \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

Рис. 4.4.1. Ортогональная проекция  $\Omega = OA'_2A'_3A'_4$ 

Заметим также, что  $A_1A_2A_3A_4$  и  $A_0A_2A_3A_4$  имеют одну и ту же ортогональную проекцию  $\Omega$  на плоскость  $x_4 = 0$ , которая является тетраэдром (рис. 4.4.1) с вершинами

$$O(0, 0, 0), A'_2(x_{21}, 0, 0), A'_3(x_{31}, x_{32}, 0), A'_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}).$$

Грани ортогональной проекции  $\Omega$  имеют уравнения:

$$OA'_2A'_3 : x_3 = 0,$$

$$OA'_2A'_4 : x_{43}x_2 - x_{42}x_3 = 0,$$

$$OA'_3A'_4 : (x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 = 0,$$

$$A'_2A'_3A'_4 : x_{32}x_{43}(x_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31}) = 0.$$

Отметим также, что в случае пространства  $\mathbb{H}^4$  функция  $F = F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)$  имеет вид

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \int_0^{\frac{r_i}{R_i}} \frac{x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Вычисляя указанный интеграл, получаем:

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \frac{r_i}{\sqrt{R_i^2 - r_i^2}} - \arcsin \frac{r_i}{R_i}.$$

Найдем теперь координаты центров и квадраты радиусов гипербол (4.4.1). Решая соответствующие системы, получаем:

$$\begin{aligned}
 a_{10} &= \frac{x_{21}^2 + x_{24}^2 - 1}{2x_{21}}, & a_{20} &= \frac{x_{32}^2 + x_{34}^2 - x_{24}^2 + x_{31}^2 - x_{21}^2 - 2a_{10}(x_{21} - x_{31})}{2x_{32}}, \\
 a_{30} &= \frac{x_{43}^2 + x_{41}^2 + x_{44}^2 + x_{42}^2 - x_{31}^2 - x_{34}^2 - x_{32}^2 + 2a_{10}(x_{31} - x_{41}) + 2a_{20}(x_{32} - x_{42})}{2x_{43}}, \\
 R_0^2 &= 1 + a_{10}^2 + a_{20}^2 + a_{30}^2, & a_{11} &= \frac{x_{21}^2 + x_{24}^2 - q^2}{2x_{21}}, \\
 a_{21} &= \frac{x_{32}^2 + x_{34}^2 - x_{24}^2 + x_{31}^2 - x_{21}^2 - 2a_{11}(x_{21} - x_{31})}{2x_{32}}, \\
 a_{31} &= \frac{x_{43}^2 + x_{41}^2 + x_{44}^2 + x_{42}^2 - x_{31}^2 - x_{34}^2 - x_{32}^2 + 2a_{11}(x_{31} - x_{41}) + 2a_{21}(x_{32} - x_{42})}{2x_{43}}, \\
 R_1^2 &= 1 + a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2. \tag{4.4.2}
 \end{aligned}$$

Переходим непосредственно к вычислению объема симплекса  $T_4 = A_0A_1A_2A_3A_4$ . Вывод формулы для объема гиперболического 4-симплекса базируется на недавней работе автора [26].

Согласно формуле (4.1.6), объем данного многогранника можно свести к вычислению разности следующих интегралов по ортогональной проекции  $\Omega = OA_2'A_3'A_4$  гиперграней  $A_1A_2A_3A_4$  и  $A_0A_2A_3A_4$  на плоскость  $x_4 = 0$ :

$$V(T_4) = -\frac{1}{3(-K)^{\frac{3}{2}}} \left( \int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_0^2 - r_0^2)^{3/2}} - \int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_1^2 - r_1^2)^{3/2}} \right), \tag{4.4.3}$$

где

$$\begin{aligned}
 r_0^2 &= (x_1 - a_{10})^2 + (x_2 - a_{20})^2 + (x_3 - a_{30})^2, \\
 r_1^2 &= (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{21})^2 + (x_3 - a_{31})^2,
 \end{aligned}$$

а величины  $a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{11}, a_{21}, a_{31}, R_0$  и  $R_1$  вычисляются по формулам (1.8.12).

**Замечание 4.4.1.** Уменьшаемое и вычитаемое в формуле (4.1.6) выбираются в соответствие с ориентацией симплекса.

Каждый из интегралов в формуле (4.4.3) в силу (4.1.9) можно свести к алгебраической сумме интегралов по граням тетраэдра  $\Omega = OA_2'A_3'A_4$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_0^2 - r_0^2)^{3/2}} = \frac{1}{R_0^3} \int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(1 - (\frac{r_0}{R_0})^2)^{3/2}} = \\
 &= \int_{\partial\Omega} \frac{(x_1 - a_{01})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{02})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{03})F(\frac{r_0}{R_0})}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2, \tag{4.4.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(R_1^2 - r_1^2)^{3/2}} = \frac{1}{R_1^3} \int_{\Omega} \frac{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3}{(1 - (\frac{r_1}{R_1})^2)^{3/2}} = \\
 &= \int_{\partial\Omega} \frac{(x_1 - a_{11})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{12})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{13})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2. \tag{4.4.5}
 \end{aligned}$$

Таким образом, вычисление правых интегралов в формулах (4.4.4) и (4.4.5) сводится к вычислению двойных интегралов на гранях  $OA_2'A_3', OA_2'A_4', OA_3'A_4'$  и  $A_2'A_3'A_4'$  тетраэдра  $\Omega = OA_2'A_3'A_4'$ .



Предположим, не нарушая общности, что тетраэдр  $\Omega$  расположен в первом октанте системы координат  $Ox_1x_2x_3$ .

Вычислим для начала интеграл по первой грани  $OA'_2A'_3$ . Заметим, что для данной грани  $x_3 = 0$ . Следовательно, первые два слагаемых в правых интегралах (4.4.4) и (4.4.5) равны нулю. Значит, нам требуется вычислить лишь интегралы

$$\int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{03})F\left(\frac{r_0}{R_0}\right)}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2$$

и

$$\int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{13})F\left(\frac{r_1}{R_1}\right)}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2.$$

Очевидно, что пределы интегрирования в указанных интегралах имеют следующий вид:

$$0 \leq x_2 \leq x_{32}, \quad \frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 \leq x_1 \leq \frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21}.$$

Таким образом, полагая

$$a = \frac{x_{31}}{x_{32}}x_2, \quad b = \frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21}, \quad c = \frac{x_{31}}{x_{32}}x_2, \quad d = \frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21},$$

получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{03})F\left(\frac{r_0}{R_0}\right)}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\ & = -a_{03} \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_a^b \left( \frac{1}{\left[ (x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + a_{03}^2 \right] \sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\arcsin \left( \frac{(x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + a_{03}^2}{R_0} \right)}{(a_{03}^2 + (x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx_1 = \\ & = -a_{03} \int_0^{x_{32}} dx_2 \left( \frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{x_1 - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{x_1 - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2) \sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (x_1 - a_{01})^2}} \right. \\ & \quad \left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (x_1 - a_{01})^2}}{R_0} \right) \Big|_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21}} = \\ & = -a_{03} \int_0^{x_{32}} \left( \frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{\frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2) \sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left( \frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01} \right)^2}} \right) \times \\ & \quad \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left( \frac{(x_{31} - x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01} \right)^2}}{R_0} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} + \\
 & + \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2)\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01})^2}} \times \\
 & \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01})^2}}{R_0} \Big) dx_2, \\
 & \int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{13})F(\frac{r_1}{R_1})}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\
 = & -a_{13} \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_c^d \left( \frac{1}{[(x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2 + a_{13}^2] \sqrt{R_0^2 - a_{13}^2 - (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{\arcsin \left( \frac{(x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2 + a_{13}^2}{R_1} \right)}{(a_{13}^2 + (x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2)^{\frac{3}{2}}} \right) dx_1 = \\
 = & -a_{13} \int_0^{x_{32}} dx_2 \left( \frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{x_1 - a_{11}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} - \right. \\
 & - \frac{x_1 - a_{11}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (x_1 - a_{11})^2}} \times \\
 & \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (x_1 - a_{11})^2}}{R_1} \Big) \Big|_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21}}{x_{32}}} = \\
 = & -a_{13} \int_0^{x_{32}} \left( \frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21}}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{11}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} - \right. \\
 & - \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21} - a_{11}}{x_{32}}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21}}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{11})^2}} \times \\
 & \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (\frac{(x_{31}-x_{21})x_2 + x_{21}}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{11})^2}}{R_1} - \\
 & - \frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} + \\
 & + \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11})^2}} \times \\
 & \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11})^2}}{R_1} \Big) dx_2.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
I_{10} &= \int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{03})F\left(\frac{r_0}{R_0}\right)}{r_0^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\
&= -a_{03} \int_0^{x_{32}} \left( \frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} - \right. \\
&\quad - \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2)\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}\right)^2}} \times \\
&\quad \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{01}\right)^2}}{R_0} - \\
&\quad - \frac{1}{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2} \arcsin \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}}{\sqrt{R_0^2 - a_{03}^2 - (x_2 - a_{02})^2}} + \\
&\quad + \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}}{(a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2)\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}\right)^2}} \times \\
&\quad \left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{03}^2 + (x_2 - a_{02})^2 + \left(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{01}\right)^2}}{R_0} \right) dx_2, \quad (4.4.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{11} &= \int_{OA'_2A'_3} \frac{(-a_{13})F\left(\frac{r_1}{R_1}\right)}{r_1^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\
&= -a_{13} \int_0^{x_{32}} \left( \frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{11}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} - \right. \\
&\quad - \frac{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{11}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{11}\right)^2}} \times \\
&\quad \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2 + x_{21} - a_{11}\right)^2}}{R_1} - \\
&\quad - \frac{1}{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2} \arcsin \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11}}{\sqrt{R_1^2 - a_{13}^2 - (x_2 - a_{12})^2}} + \\
&\quad + \frac{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11}}{(a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2)\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11}\right)^2}} \times \\
&\quad \left. \times \arcsin \frac{\sqrt{a_{13}^2 + (x_2 - a_{12})^2 + \left(\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2 - a_{11}\right)^2}}{R_1} \right) dx_2. \quad (4.4.7)
\end{aligned}$$

Для вычисления объема 4-симплекса  $T_4 = A_0A_1A_2A_3A_4$  нам необходимо теперь проинтегрировать выражения (при  $i = 0, 1$ )

$$\frac{(x_1 - a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2 \quad (4.4.8)$$

по трем остальным граням  $OA'_2A'_4$ ,  $OA'_3A'_4$  и  $A'_2A'_3A'_4$ .

Для начала найдем пределы интегрирования для проекций этих граней тетраэдра  $\Omega = OA'_2A'_3A'_4$  на координатные плоскости  $dx_k \wedge dx_s$ . Имеем

$$\begin{aligned} (OA'_2A'_4) : 1) dx_1 \wedge dx_2 : 0 \leq x_2 \leq x_{42}, \frac{x_{41}}{x_{42}}x_2 \leq x_1 \leq \frac{(x_{41} - x_{21})}{x_{42}}x_2 + x_{21}x_{42}; \\ 2) dx_1 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \frac{x_{41}}{x_{43}}x_3 \leq x_1 \leq \frac{(x_{41} - x_{21})}{x_{43}}x_3 + x_{21}x_{43}; \\ (OA'_3A'_4) : 1) dx_1 \wedge dx_2 : 0 \leq x_2 \leq x_{31} (x_{31} > x_{41}), \\ \frac{x_{41}}{x_{42}}x_2 \leq x_1 \leq \frac{x_{41} - x_{31}}{x_{42} - x_{32}}x_2 - \frac{x_{32}(x_{41} - x_{31})}{x_{42} - x_{32}} \\ 2) dx_1 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \frac{x_{41}}{x_{43}}x_3 \leq x_1 \leq \frac{(x_{41} - x_{31})}{x_{43}}x_3 + x_{31}; \\ 3) dx_2 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \frac{x_{42}}{x_{43}}x_3 \leq x_2 \leq \frac{(x_{42} - x_{31})}{x_{43}}x_3 + x_{31}; \\ (A'_2A'_3A'_4) : 1) dx_1 \wedge dx_2 : 0 \leq x_2 \leq x_{32}, \frac{x_{41} - x_{21}}{x_{42}}x_2 + x_{21} \leq x_1 \leq \frac{x_{31} - x_{21}}{x_{32}}x_2 + x_{21} \vee \\ \vee x_{32} \leq x_2 \leq x_{42}, \\ \frac{x_{41} - x_{21}}{x_{42}}x_2 + x_{21} \leq x_1 \leq \frac{x_{41} - x_{31}}{x_{42} - x_{32}}x_2 + \frac{x_{31}(x_{42} - x_{32}) - x_{32}(x_{41} - x_{31})}{x_{42} - x_{32}} \\ 2) dx_1 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \frac{x_{41} - x_{31}}{x_{43}}x_1 + x_{31} \leq x_1 \leq \frac{x_{41} - x_{21}}{x_{41}}x_1 + x_{21}; \\ 3) dx_2 \wedge dx_3 : 0 \leq x_3 \leq x_{43}, \frac{x_{42}}{x_{43}}x_3 \leq x_2 \leq \frac{(x_{42} - x_{32})}{x_{43}}x_3 + x_{32}. \end{aligned}$$

Переходим к вычислению интегралов от выражений (4.4.8) по граням  $OA'_2A'_4$ ,  $OA'_3A'_4$  и  $A'_2A'_3A'_4$ . Получаем:

$$\begin{aligned} I_{i2} &= \int_{OA'_2A'_4} \frac{(x_1 - a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\ &= \int_0^{x_{42}} dx_2 \int_{\frac{x_{41}}{x_{42}}x_2}^{\frac{(x_{41} - x_{21})}{x_{42}}x_2 + x_{21}x_{42}} \frac{(\frac{x_{43}x_2}{x_{42}} - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (\frac{x_{43}x_2}{x_{42}} - a_{03})^2}}{R_i})}{((x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (\frac{x_{43}x_2}{x_{42}} - a_{03})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 - \\ &\quad - \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{41}}{x_{43}}x_3}^{\frac{(x_{41} - x_{21})}{x_{43}}x_3 + x_{21}x_{43}} \frac{(\frac{x_{42}x_3}{x_{43}} - a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1 - a_{i1})^2 + (\frac{x_{42}x_3}{x_{43}} - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1 - a_{i1})^2 + (\frac{x_{42}x_3}{x_{43}} - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1, \quad (4.4.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i3} &= \int_{OA'_3A'_4} \frac{(x_1 - a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\
&= \int_0^{x_{31}} dx_2 \int_{\frac{x_{41}x_2}{x_{42}}}^{\frac{(x_{41}-x_{31})x_2 - x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}}} \frac{(\tilde{x}_3 - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{01})^2+(x_2-a_{02})^2+(\tilde{x}_3-a_{03})^2}}{R_i})}{((x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (\tilde{x}_3 - a_{03})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 - \\
&\quad - \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{41}x_3}{x_{43}}}^{\frac{(x_{41}-x_{31})x_3+x_{31}}{x_{43}}} \frac{(\tilde{x}_2 - a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\tilde{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1 - a_{i1})^2 + (\tilde{x}_2 - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 + \\
&\quad + \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{42}x_3}{x_{43}}}^{\frac{(x_{42}-x_{32})x_3+x_{32}}{x_{43}}} \frac{(\tilde{x}_1 - a_{i1})F(\frac{\sqrt{(\tilde{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((\tilde{x}_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_2, \quad (4.4.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i4} &= \int_{A'_2A'_3A'_4} \frac{(x_1 - a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{(x_2 - a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{(x_3 - a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_1 \wedge dx_2 = \\
&= \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_{\frac{x_{41}-x_{21}}{x_{42}}}^{\frac{x_{31}-x_{21}}{x_{32}}x_2+x_{21}} \frac{(\hat{x}_3 - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2 + (\hat{x}_3 - a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 + \\
&\quad + \int_0^{x_{32}} dx_2 \int_{\frac{x_{31}-x_{21}}{x_{32}}x_2+x_{21}}^{\frac{x_{41}-x_{31}}{x_{42}-x_{32}}x_2 - \frac{x_{32}(x_{41}-x_{31})}{x_{42}-x_{32}} + x_{31}} \frac{(\hat{x}_3 - a_{i3})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(\hat{x}_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2 + (\hat{x}_3 - a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 - \\
&\quad - \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{(x_{41}-x_{31})x_3+x_{31}}{x_{43}}}^{\frac{(x_{41}-x_{21})x_3+x_{21}}{x_{43}}} \frac{(\hat{x}_2 - a_{i2})F(\frac{\sqrt{(x_1-a_{i1})^2+(\hat{x}_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((x_1 - a_{i1})^2 + (\hat{x}_2 - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_1 + \\
&\quad + \int_0^{x_{43}} dx_3 \int_{\frac{x_{42}x_3}{x_{43}}}^{\frac{(x_{42}-x_{32})x_3+x_{32}}{x_{43}}} \frac{(\hat{x}_1 - a_{i1})F(\frac{\sqrt{(\hat{x}_1-a_{i1})^2+(x_2-a_{i2})^2+(x_3-a_{i3})^2}}{R_i})}{((\hat{x}_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2)^{\frac{3}{2}}} dx_2, \quad (4.4.11)
\end{aligned}$$

где

$$i \in \{0, 1\}, F(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \arcsin t,$$

а  $\tilde{x}_1(\hat{x}_1), \tilde{x}_2(\hat{x}_2), \tilde{x}_3(\hat{x}_3)$  выражаются соответственно через  $x_2, x_3; x_1, x_3; x_1, x_2$  с помощью уравнений

$$(x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})\tilde{x}_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 = 0,$$

$$(x_{32}x_{43}(\hat{x}_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31})) = 0,$$

$$(x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})\tilde{x}_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})x_3 = 0,$$

$$\begin{aligned} x_{32}x_{43}(x_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(\hat{x}_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(x_3 - x_{31}) &= 0, \\ (x_{33}x_{42} - x_{43}x_{32})x_1 + (x_{31}x_{43} - x_{33}x_{41})x_2 + (x_{32}x_{41} - x_{31}x_{42})\tilde{x}_3 &= 0, \\ x_{32}x_{43}(x_1 - x_{41}) + x_{43}(x_{21} - x_{31})(x_2 - x_{41}) + (x_{32}(x_{21} - x_{41}) - x_{42}(x_{21} - x_{31}))(\hat{x}_3 - x_{31}) &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, нами доказана следующая

**Теорема 4.4.1** (Краснов, 2017 г.). Пусть в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^4$  с метрикой (4.1.1) задан ограниченный симплекс  $T_4 = A_0A_1A_2A_3A_4$  в стандартной позиции, вершины которого имеют координаты  $A_0(0, 0, 0, 1)$ ,  $A_1(0, 0, 0, q)$ ,  $A_2(x_{21}, 0, 0, x_{24})$ ,  $A_3(x_{31}, x_{32}, 0, x_{34})$ ,  $A_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}, x_{44})$ . Тогда его алгебраический объем  $V = V(T_4)$  может быть вычислен по формуле

$$V(T_4) = -\frac{1}{3(-K)^{\frac{3}{2}}}(I_{11} - I_{10} + I_{21} - I_{20} + I_{31} - I_{30} + I_{41} - I_{40}), \quad (4.4.12)$$

где величины  $I_{10}$ ,  $I_{11}$ ,  $I_{20}$ ,  $I_{21}$ ,  $I_{30}$ ,  $I_{31}$ ,  $I_{40}$  и  $I_{41}$  имеют интегральные представления (4.4.6), (4.4.7), (4.4.9)–(4.4.11).

**Замечание 4.4.2.** Нетрудно заметить, что при первом интегрировании каждого из слагаемых вида (4.4.9)–(4.4.11) мы столкнемся с вычислением неопределенных интегралов вида

$$I = \int \frac{(Ax_j + B)F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_j = B \int \frac{F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_j + A \int \frac{x_j F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_j. \quad (4.4.13)$$

Первую первообразную в правой части формулы (4.4.13) мы уже находили, когда интегрировали выражения (4.4.8) по грани  $OA'_2A'_3$ . Вычислим теперь второй интеграл. Прямыми вычислениями получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{x_j F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^3} dx_j &= \int \frac{x_j dx_j}{[(x_j - a_{ij})^2 + b^2] \sqrt{c^2 - (x_j - a_{ij})^2}} - \int \frac{x_j \arcsin \frac{\sqrt{(x_j - a_{ij})^2 + b^2}}{R_i}}{[(x_j - a_{ij})^2 + b^2]^{\frac{3}{2}}} dx_j = \\ &= \frac{\arcsin \frac{\sqrt{(x_j - a_{ij})^2 + b^2}}{R_i}}{\sqrt{(x_j - a_{ij})^2 + b^2}} - \frac{1}{2R_i} \ln \left| \frac{\sqrt{R_i^2 - (x_j - a_{ij})^2 - b^2} - R_i}{\sqrt{R_i^2 - (x_j - a_{ij})^2 - b^2} + R_i} \right| + \\ &+ \frac{a_{ij}}{b^2} \arcsin \frac{x_j - a_{ij}}{\sqrt{R_i^2 - b^2}} + \frac{a_{ij}(x_j - a_{ij})}{b^2 \sqrt{(x_j - a_{ij})^2 + b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{(x_j - a_{ij})^2 + b^2}}{R_i} + \int \frac{tdt}{(t^2 + b^2)\sqrt{c^2 - t^2}}, \end{aligned}$$

где  $t = x_j - a_{ij}$ , а  $b^2$  и  $c^2$  представляют собой функции (мы не будем указывать их явный вид) от  $x_{ik}$  и  $a_{ik}$ , при этом  $k \neq j$  (поэтому при вычислении интегралов мы считаем их постоянными). Очевидно, что последняя первообразная представляет собой элементарную функцию, и ее вид зависит от коэффициентов  $b$  и  $c$  (см., например, [30]).

Мы не будем записывать выражения (4.4.9)–(4.4.11) в виде одномерных интегралов ввиду того, что соответствующие формулы получатся гораздо более громоздкими, нежели (4.4.6) и (4.4.7).

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема 4.4.2** (Краснов, 2019 г.). Вычисление объема четырехмерного симплекса сводится к вычислению одномерных интегралов от элементарных функций координат вершин.

В дальнейшем было бы интересно проверить, вычисляется ли объем гиперболического 4-симплекса через элементарные функции от координат вершин. Отметим, что данная проблема обозначена в работе [33] как одна из открытых проблем теории объемов неевклидовых многогранников.

**Замечание 4.4.3.** В работах [33, 34] приводится лемма, утверждающая, что координаты вершин гиперболического симплекса можно выразить элементарными функциями от длин его ребер. В статье [34] приводится схема доказательства этой леммы для трехмерного случая. Заметим, что

формулы, выражающие координаты вершин через длины ребер, являются очень громоздкими даже для случая  $n = 3$ . Таким образом, при желании с помощью теоремы 1.2.1 и вышеупомянутой леммы можно получить обобщение формулы Мураками—Ушиджимы [58] объема трехмерного тетраэдра через длины ребер на четырехмерный случай.

**Замечание 4.4.4.** Прямыми вычислениями можно показать, что если кривизна  $K \rightarrow 0$ , то формула объема гиперболического симплекса через длины ребер даст в пределе формулу Кэли—Менгера объема евклидова симплекса. Кроме того, легко заметить, что если в формуле (4.1.7), на которой основан вывод основных формул главы 4, положить  $a = 0$  (или  $K = 0$ ), то мы получим (при  $n = 3$ ) хорошо известную из курса математического анализа формулу вычисления ориентированного объема  $V$  евклидова тела  $D$  через интеграл по его граничной поверхности:

$$3V = \int \int_{\partial D} (x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy).$$

#### 4.5. ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО СИМПЛЕКСА В РАЗМЕРНОСТИ $n = 5$

В заключительном разделе этой главы мы представим общую схему вычисления объемов гиперболических 5-симплексов, а также опишем структуру формулы объема.

Рассмотрим пятимерный симплекс  $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ , расположенный в пространстве  $\mathbb{H}^5$  в стандартной позиции. Тогда его вершины имеют координаты

$$A_0(0, 0, 0, 0, 1), \quad A_1(0, 0, 0, 0, q), \quad A_2(x_{21}, 0, 0, 0, x_{25}), \quad A_3(x_{31}, x_{32}, 0, 0, x_{35}), \\ A_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}, 0, x_{45}), \quad A_5(x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55}).$$

Гипергранями симплекса, не ортогональными плоскости  $x_5 = 0$ , являются грани  $A_0A_2A_3A_4A_5$  и  $A_1A_2A_3A_4A_5$ . Они принадлежат соответственно гиперсферам с уравнениями

$$(x_1 - a_{01})^2 + (x_2 - a_{02})^2 + (x_3 - a_{03})^2 + (x_4 - a_{04}) + x_5^2 = R_0^2$$

и

$$(x_1 - a_{11})^2 + (x_2 - a_{12})^2 + (x_3 - a_{13})^2 + (x_4 - a_{14}) + x_5^2 = R_1^2.$$

Ортогональная проекция  $\Omega$  данных гиперграней на гиперплоскость  $x_5 = 0$  представляют собой 4-симплекс с вершинами

$$O(0, 0, 0, 0), \quad A'_2(x_{21}, 0, 0, 0), \quad A'_3(x_{31}, x_{32}, 0, 0), \quad A'_4(x_{41}, x_{42}, x_{43}, 0), \quad A'_5(x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}).$$

Тогда объем исходного 5-симплекса может быть сведен к алгебраической сумме тройных интегралов по границе  $\partial\Omega$ :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{(x_1 - a_{i1})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^4} dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - \frac{(x_2 - a_{i2})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^4} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + \\ + \frac{(x_3 - a_{i3})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^4} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 - \frac{(x_4 - a_{i4})F(\frac{r_i}{R_i})}{r_i^4} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

где функция  $F = F\left(\frac{r_i}{R_i}\right)$  имеет вид

$$F\left(\frac{r_i}{R_i}\right) = \frac{R_i}{2(R_i^2 - r_i^2)} + \ln \sqrt{R_i^2 - r_i^2} - \ln R_i - \frac{1}{2},$$

а

$$r_i^2 = (x_1 - a_{i1})^2 + (x_2 - a_{i2})^2 + (x_3 - a_{i3})^2 + (x_4 - a_{i4})^2.$$

В свою очередь, граница  $\partial\Omega$  представляет собой объединение тетраэдров. Таким образом, одной из компонент границы является тетраэдр  $OA'_2A'_3A'_4$  (рис. 1.1.1). Заметим, что для данного тетраэдра

$x_4 = 0$ . Поэтому для вычисления слагаемых, соответствующих компоненте границы  $OA'_2A'_3A'_4$ , нам необходимо будет найти тройной интеграл вида

$$\int_0^{x_{32}} dx_2 \int_{\frac{x_{31}}{x_{32}}x_2}^{\frac{(x_{31}-x_{21})}{x_{32}}x_2+x_{21}} dx_1 \int_{a_1x_1+b_1x_2}^{a_2x_1+b_2x_2+c_2} \frac{R_i}{2(R_i^2-r_i^2)} + \ln \sqrt{R_i^2 - r_i^2} - \ln R_i - \frac{1}{2}}{r_i^4} dx_3,$$

где величины  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$  (мы не будем выписывать их явный вид).

При вычислении интеграла по переменной  $x_3$  мы замечаем, что вся сложность заключается в вычислении неопределенного интеграла (остальные интегральные слагаемые представляют собой интегралы от рациональных функций, которые легко интегрируются в конечном виде)

$$\int \frac{\ln(a^2 - \alpha^2)}{(\alpha^2 + b^2)^2} d\alpha.$$

Двойным интегрированием по частям этот интеграл сводится к вычислению интегралов вида

$$\int \frac{\ln(t + a)}{(t + b)^2 + c^2} dt,$$

которые (см., например, [30]) не выражаются в элементарных функциях, а выражаются в терминах спецфункции Клаузена  $Cl_2 = Cl_2(x)$ , связанной с функцией Лобачевского  $\Lambda = \Lambda(x)$  и дилогарифмом Эйлера  $Li_2 = Li_2(z)$  соотношениями:

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \ln |2 \sin t| dt = \frac{1}{2} Cl_2(2x) = \frac{1}{2} \text{Im}[Li_2(e^{2xi})],$$

где

$$Li_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

Ввиду того, что интеграл от рациональной функции выражается через рациональные функции, логарифм от рациональной функции и арктангенс от рациональной функции (которые, к слову, также интегрируются в конечном виде), мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 4.5.1** (Краснов, 2019 г.). *Вычисление объема пятимерного гиперболического симплекса не сводится к вычислению двойных интегралов от элементарных функций координат вершин.*

## ГЛАВА 5

### ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

В данной главе мы представим последние результаты, касающиеся вычисления площадей многоугольников на плоскости Лобачевского, рассматриваемой как в векторной модели, так и модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

#### 5.1. Формулы ГЕРОНА и БРАХМАГУПТЫ

Еще в школьном курсе планиметрии известна формула, выражающая площадь  $S$  евклидова треугольника через длины его сторон  $a, b, c$ :

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)s,$$

где  $s = \frac{a + b + c}{2}$  — полупериметр треугольника.



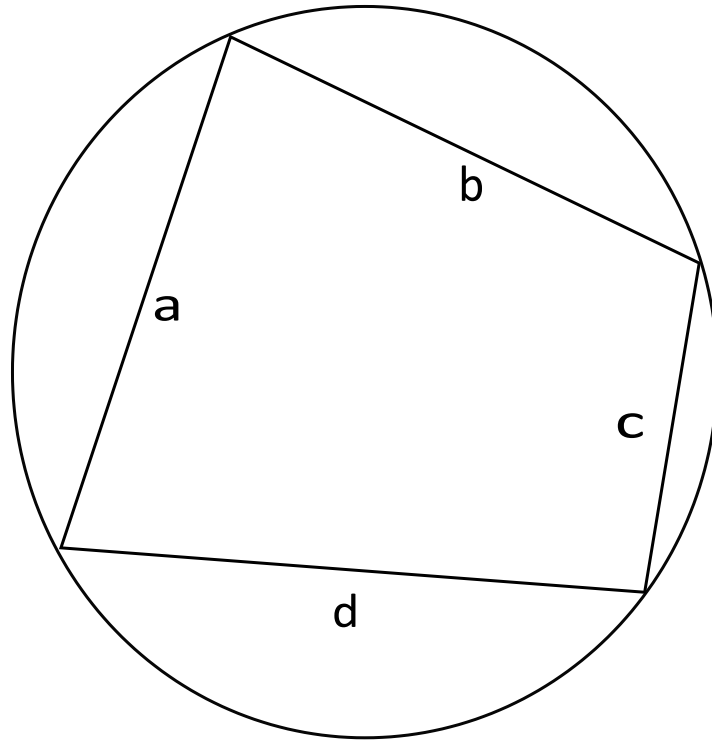


Рис. 5.1.1. Выпуклый четырехугольник, вписанный в окружность

Данная формула называется формулой Герона и приписывается Герону Александрийскому (около 60 г. до н.э.).

Для многоугольников, имеющих более трех сторон, их площади в общем случае нельзя выразить через длины этих сторон.

Но в случае, если четырехугольник можно вписать в окружность (рис. 5.1.1), Брахмагупта в VII в. н.э. был получен аналог формулы Герона для такого четырехугольника:

$$S^2 = (s - a)(s - b)(s - c)(s - d),$$

где  $a, b, c, d$  — длины сторон многоугольника, а  $s = \frac{a + b + c + d}{2}$  также представляет собой его полупериметр.

Элементарное доказательство данной формулы можно найти, например, в [43]. Д. П. Роббинс и В. В. Варфоломеев нашли некоторые обобщения формул Герона и Брахмагупты. Основная их идея заключалась в том, чтобы определить квадрат площади  $S^2$  как корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются целыми многочленами от квадратов длин сторон (см. [36, п. 4] и библиографию к этому обзору).

В данном разделе мы представим формулы, дающие обобщение формулы Герона и Брахмагупты на случай гиперболической плоскости постоянной отрицательной кривизны  $K = -1$ .

Рассмотрим сначала различные гиперболические версии формулы Герона.

**Теорема 5.1.1.** Пусть  $T$  — треугольник на плоскости Лобачевского с длинами сторон  $a, b$  и  $c$  (рис. 5.1.2). Тогда его площадь  $S = S(T)$  может быть вычислена по одной из формул:

1. формула синуса  $\frac{1}{2} \cdot S$

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh}(s - a) \cdot \operatorname{sh}(s - b) \cdot \operatorname{sh}(s - c) \cdot \operatorname{sh}(s)}{4 \operatorname{ch}^2\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}^2\left(\frac{b}{2}\right) \cdot \operatorname{ch}^2\left(\frac{c}{2}\right)},$$

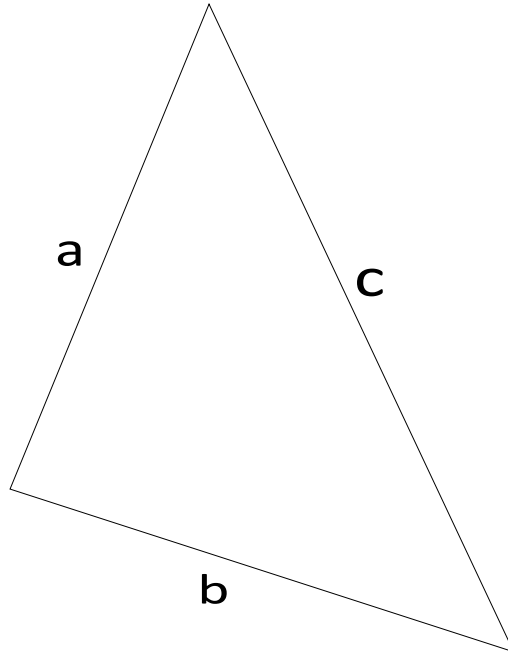


Рис. 5.1.2. Треугольник  $T$  с длинами сторон  $a, b, c$

2. формула тангенса  $\frac{1}{4} \cdot S$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \left( \frac{s-a}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{s-b}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{s-c}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{s}{2} \right),$$

3. формула синуса  $\frac{1}{4} \cdot S$

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \left( \frac{s-a}{2} \right) \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{s-b}{2} \right) \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{s-c}{2} \right) \cdot \operatorname{sh} \left( \frac{s}{2} \right)}{\operatorname{ch} \left( \frac{a}{2} \right) \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{c}{2} \right)},$$

4. формула Билински (*S. Bilinski*)

$$\cos \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} c + 1}{4 \operatorname{ch} \left( \frac{a}{2} \right) \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{b}{2} \right) \cdot \operatorname{ch} \left( \frac{c}{2} \right)},$$

где

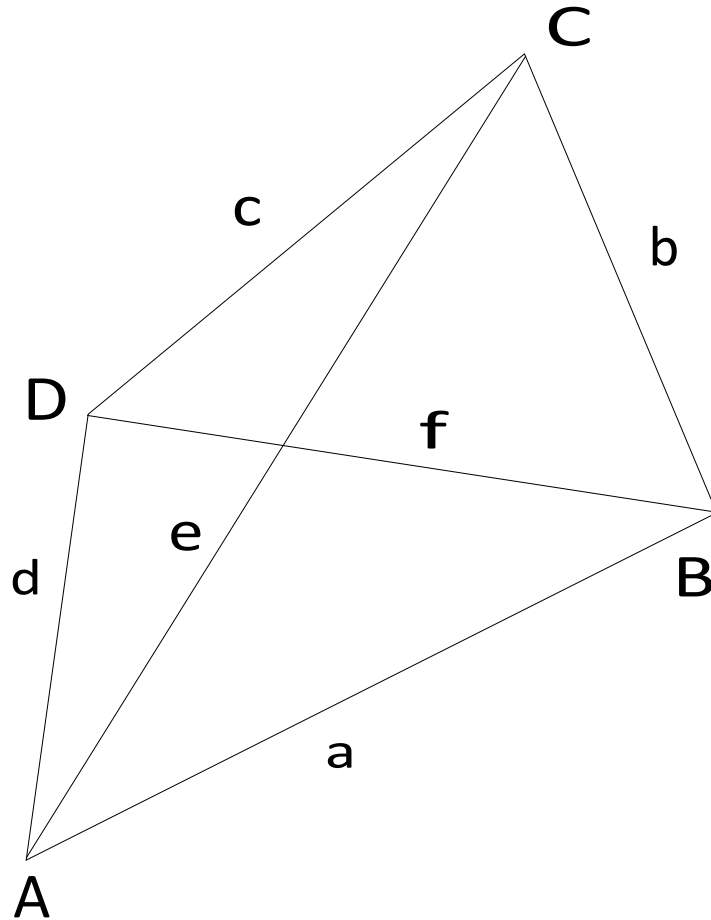
$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

**Замечание 5.1.1.** Доказательства формул 1 и 2 теоремы 5.1.1 содержатся в книге [10]. В свою очередь, формула 3 представляет собой следствие первых двух формул (ее нетрудно получить, возведя эти формулы в квадрат). Наконец, четвертая формула была выведена Станко Билински в работе [38].

Переходим теперь к обзору результатов, касающихся площадей некоторых четырехугольников на гиперболической плоскости.

**Определение 5.1.1.** Пусть  $P$  — многоугольник на плоскости Лобачевского. Мы будем называть этот многоугольник *вписанным*, если его можно вписать в некоторую окружность, орицикл или ветвь эквидистантной кривой.

**Замечание 5.1.2.** Во многих работах по неевклидовым геометриям такие многоугольники называются *циклическими*. В настоящем обзоре термин «циклический многогранник» употребляется

Рис. 5.1.3. Вписанный четырехугольник  $Q$ 

в другом смысле. Поэтому для многоугольника, который можно вписать в окружность, орицикл или эквидистанту, мы будем использовать термин *вписанный*.

Напомним несколько хорошо известных фактов о вписанных четырехугольниках. Выпуклый евклидов четырехугольник с внутренними углами  $A, B, C$  и  $D$  можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда

$$A + C = B + D = \pi.$$

Аналогичный результат для гиперболического четырехугольника был получен В.Ф. Петровым [29] и Л. Виммером [66]. Они доказали следующее предложение.

**Предложение 5.1.1.** *Выпуклый гиперболический четырехугольник с внутренними углами  $A, B, C, D$  (рис. 5.1.3) является вписанным тогда и только тогда, когда*

$$A + C = B + D.$$

Так как сумма углов гиперболического четырехугольника меньше  $2\pi$ , то для любого вписанного гиперболического четырехугольника

$$A + C = B + D < \pi.$$

Обозначим длины сторон и диагонали четырехугольника через  $a, b, c, d, e, f$ , как показано на рис. 5.1.3.

В евклидовом случае четырехугольник является вписанным тогда и только тогда, когда

$$ef = ac + bd.$$

Эта формула носит название *теоремы Птолемея*. Обобщение теоремы Птолемея для гиперболического четырехугольника можно найти в работе Дж. Э. Валентайна [65].

**Предложение 5.1.2** (Валентайн, 1970 г.). *Выпуклый гиперболический четырехугольник с длинами сторон  $a, b, c, d$  и диагоналями  $e, f$  является вписанным тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{sh} \frac{e}{2} \operatorname{sh} \frac{f}{2} = \operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} + \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}.$$

Еще одним дополнением к формуле Птолемея на евклидовой плоскости является следующая формула, связывающая длины сторон и диагоналей вписанного четырехугольника:

$$\frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd}. \tag{5.1.1}$$

Вместе с теоремой Птолемея эта формула позволяет выразить диагональ вписанного четырехугольника через длины его сторон.

В работе А. Д. Медных показано, что указанные выше отношения между сторонами и диагоналями вписанного четырехугольника также действительны в гиперболической геометрии после замены  $a$  на  $s(a) = \operatorname{sh} \frac{a}{2}$ .

В частности, формулу (5.1.1) можно сформулировать в виде следующего предложения [50].

**Предложение 5.1.3.** *Длины сторон  $a, b, c, d$  и длины диагоналей  $e, f$  вписанного гиперболического четырехугольника связаны соотношением*

$$\frac{s(e)}{s(f)} = \frac{s(a)s(d) + s(b)s(c)}{s(a)s(b) + s(c)s(d)},$$

где

$$\begin{aligned} s(a) &= \operatorname{sh} \frac{a}{2}, & s(b) &= \operatorname{sh} \frac{b}{2}, \\ s(c) &= \operatorname{sh} \frac{c}{2}, & s(d) &= \operatorname{sh} \frac{d}{2}, \\ s(e) &= \operatorname{sh} \frac{e}{2}, & s(f) &= \operatorname{sh} \frac{f}{2}. \end{aligned}$$

Из предложений 5.1.2 и 5.1.3 нетрудно вывести следующие полезные формулы для диагоналей  $e, f$  вписанного гиперболического четырехугольника. Имеем:

$$\begin{aligned} s^2(e) &= \frac{s(a)s(d) + s(b)s(c)}{s(a)s(b) + s(c)s(d)}(s(a)s(c) + s(b)s(d)), \\ s^2(f) &= \frac{s(a)s(b) + s(c)s(d)}{s(a)s(d) + s(b)s(c)}(s(a)s(c) + s(b)s(d)). \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

**Замечание 5.1.3.** Рассмотренные выше формулы, выражающие длины диагоналей через длины сторон, справедливы и для евклидова, и для сферического случая. В этих случаях вместо функции  $s(a)$  следует брать функции

$$s(a) = a$$

и

$$s(a) = \sin \frac{a}{2}$$

соответственно.

Доказательство данного утверждения для  $\mathbb{S}^2$  содержится, например, в работе [46].

Рассмотрим теперь четыре варианта формулы Брахмагупты для вписанного гиперболического четырехугольника, выведенные А. Д. Медных в работе [54]. Они являются обобщением соответствующих формул теоремы 5.1.1.

В частности, первая формула теоремы 5.1.1 имеет следующее обобщение.

**Теорема 5.1.2** (Медных, 2012 г.). Пусть  $Q$  — выпуклый вписанный четырехугольник на плоскости Лобачевского, длины ребер которого равны  $a, b, c, d$ . Тогда его площадь  $S$  может быть вычислена по формуле

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh}(s-a) \operatorname{sh}(s-b) \operatorname{sh}(s-c) \operatorname{sh}(s-d)}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}} (1 - \varepsilon),$$

где

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{s-a}{2} \operatorname{ch} \frac{s-b}{2} \operatorname{ch} \frac{s-c}{2} \operatorname{ch} \frac{s-d}{2}}$$

и

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

**Замечание 5.1.4.** Нетрудно заметить, что число  $\varepsilon$  обращается в нуль, если  $d = 0$ . В этом случае мы снова получаем первую формулу теоремы 5.1.1.

Вторая формула теоремы 5.1.1 для случая гиперболического четырехугольника имеет следующий вид.

**Теорема 5.1.3** (Медных, 2012 г.). Пусть  $Q$  — выпуклый вписанный четырехугольник на плоскости Лобачевского, длины ребер которого равны  $a, b, c, d$ . Тогда его площадь  $S$  выражается формулой

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \frac{1}{1 - \varepsilon} \operatorname{th} \frac{s-a}{2} \operatorname{th} \frac{s-b}{2} \operatorname{th} \frac{s-c}{2} \operatorname{th} \frac{s-d}{2},$$

где, как и выше,

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{s-a}{2} \operatorname{ch} \frac{s-b}{2} \operatorname{ch} \frac{s-c}{2} \operatorname{ch} \frac{s-d}{2}}$$

и

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Из теоремы 5.1.3 следует, что для любых  $a, b, c, d \neq 0$  имеем  $1 - \varepsilon > 0$  и  $\varepsilon > 0$ . Следовательно,

$$0 < \varepsilon < 1.$$

Принимая во внимание эти неравенства, из теорем 5.1.2 и 5.1.3 можно получается следующее важное следствие.

**Следствие 5.1.1.** Для любого вписанного гиперболического четырехугольника имеют место следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{S}{2} &< \frac{\operatorname{sh}(s-a) \operatorname{sh}(s-b) \operatorname{sh}(s-c) \operatorname{sh}(s-d)}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}}, \\ \operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} &> \operatorname{th} \left( \frac{s-a}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{s-b}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{s-c}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{s-d}{2} \right). \end{aligned}$$

Возводя в квадрат произведение формул из теорем 5.1.2 и 5.1.3, можно получить следующее прямое обобщение формулы 3 теоремы 5.1.1.

**Теорема 5.1.4** (Медных, 2012 г.). Площадь  $S$  выпуклого вписанного четырехугольника  $Q$  на гиперболической плоскости с длинами ребер  $a, b, c, d$  выражается формулой

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{s-a}{2} \operatorname{sh} \frac{s-b}{2} \operatorname{sh} \frac{s-c}{2} \operatorname{sh} \frac{s-d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}},$$

при этом

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

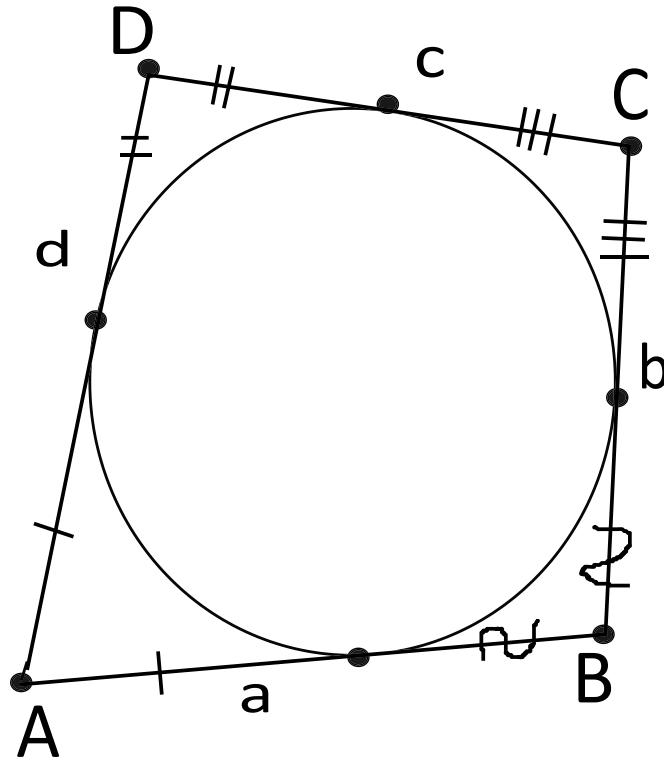


Рис. 5.1.4. Бицентральный четырехугольник  $Q$  с длинами сторон  $a, b, c, d$

Аналогичную формулу для сферического пространства можно получить, заменив гиперболические функции на соответствующие тригонометрические (см. [53]).

**Теорема 5.1.5.** *Площадь  $S$  выпуклого вписанного четырехугольника  $Q$  в  $\mathbb{S}^2$  с длинами ребер  $a, b, c, d$  можно вычислить по формуле*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\sin \frac{s-a}{2} \sin \frac{s-b}{2} \sin \frac{s-c}{2} \sin \frac{s-d}{2}}{\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{d}{2}},$$

где

$$s = \frac{a + b + c + d}{2}.$$

Рассмотрим описанный возле некоторой окружности четырехугольник  $Q$  с длинами сторон  $a, b, c, d$  (рис. 5.1.4). В этом случае

$$s - a = c, \quad s - b = d, \quad s - c = a, \quad s - d = b.$$

**Замечание 5.1.5.** Четырехугольник  $Q$  мы будем называть *бицентральным*, если он одновременно является и вписанным, и описанным.

Таким образом, нетрудно получить важное следствие теоремы 5.1.4 — формулу Брахмагупты для бицентрального гиперболического четырехугольника:

**Следствие 5.1.2** (Медных, 2012 г.). *Пусть  $Q$  — бицентральный четырехугольник с длинами сторон  $a, b, c, d$ . Тогда его площадь  $S$  выражается формулой*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \operatorname{th} \left( \frac{a}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{b}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{c}{2} \right) \operatorname{th} \left( \frac{d}{2} \right).$$

Аналогично, для сферического бицентрального четырехугольника справедлива аналогичная формула [53].

**Теорема 5.1.6.** *Площадь  $S$  бицентрического четырехугольника  $Q$  в  $\mathbb{S}^2$  с длинами ребер  $a, b, c, d$  можно вычислить по формуле*

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \operatorname{tg} \left( \frac{a}{2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{b}{2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{c}{2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{d}{2} \right).$$

Наконец, следующая теорема представляет собой вариант формулы Билинского для гиперболического вписанного четырехугольника [54].

**Теорема 5.1.7** (Медных, 2009 г.). *Площадь  $S$  выпуклого вписанного четырехугольника  $Q$  на гиперболической плоскости с длинами ребер  $a, b, c, d$  выражается формулой*

$$\cos \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} c + \operatorname{ch} d - 4 \operatorname{sh} \left( \frac{a}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{b}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{c}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{d}{2} \right)}{4 \operatorname{ch} \left( \frac{a}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{b}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{c}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{d}{2} \right)}.$$

Приведем теперь доказательство представленных выше формул Брахмагупты для вписанного гиперболического четырехугольника, базирующееся на обзоре Н. В. Абросимова и А. Д. Медных [36].

*Доказательство.* Рассмотрим вписанный гиперболический четырехугольник  $Q$  с длинами сторон  $a, b, c, d$  и внутренними углами  $A, B, C, D$  (рис. 5.1.3). Как известно из оснований неевклидовых геометрий, площадь  $S$  данного четырехугольника равна

$$S = 2\pi - A - B - C - D.$$

Используя известные тригонометрические формулы и результат предложения 5.1.1, получаем:

$$2 \sin^2 \frac{S}{4} = 1 - \cos \frac{S}{2} = 1 - \cos (\pi - (A + C)) = 1 + \cos (A + C),$$

откуда

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{1 + \cos A \cos C - \sin A \sin C}{2}. \quad (5.1.3)$$

Теперь покажем, что  $\cos A$ ,  $\cos C$  и произведение  $\sin A \sin C$  могут быть представлены в виде элементарных функций от  $a, b, c, d$ . Чтобы найти  $\cos A$ , мы используем теорему косинусов для гиперболического треугольника  $ABD$  (рис. 5.1.5):

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a \operatorname{ch} d - \operatorname{ch} f}{\operatorname{sh} a \operatorname{sh} d}. \quad (5.1.4)$$

Используя формулы понижения степени для гиперболических функций, получаем:

$$\operatorname{ch} f = 2s^2(f) + 1, \quad \operatorname{ch} a = 2s^2(a) + 1, \quad \operatorname{ch} d = 2s^2(d) + 1.$$

Подставляя эти формулы в уравнения (5.1.2) и (5.1.4), получаем выражение  $\cos A$  через  $a, b, c, d$ :

$$\cos A = \frac{s^2(a) - s^2(b) - s^2(c) + s^2(d) + 2s(a)s(b)s(c)s(d) + 2s^2(a)s^2(d)}{2(s(a)s(d) + s(b)s(c)) \operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}.$$

Аналогично нетрудно получить аналогичную формулу для  $\cos C$ :

$$\cos C = \frac{-s^2(a) + s^2(b) + s^2(c) - s^2(d) + 2s(a)s(b)s(c)s(d) + 2s^2(b)s^2(c)}{2(s(a)s(d) + s(b)s(c)) \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2}}.$$

Так как

$$\sin A \sin C > 0$$

и

$$\sin^2 A \sin^2 C = (1 - \cos^2 A)(1 - \cos^2 C),$$

то, извлекая корень из последнего равенства (после подстановки  $\cos A$  и  $\cos C$  из предыдущих уравнений), мы получим выражение  $\sin A \sin C$  в виде элементарной функции от  $a, b, c, d$  (мы не будем выписывать его явный вид).

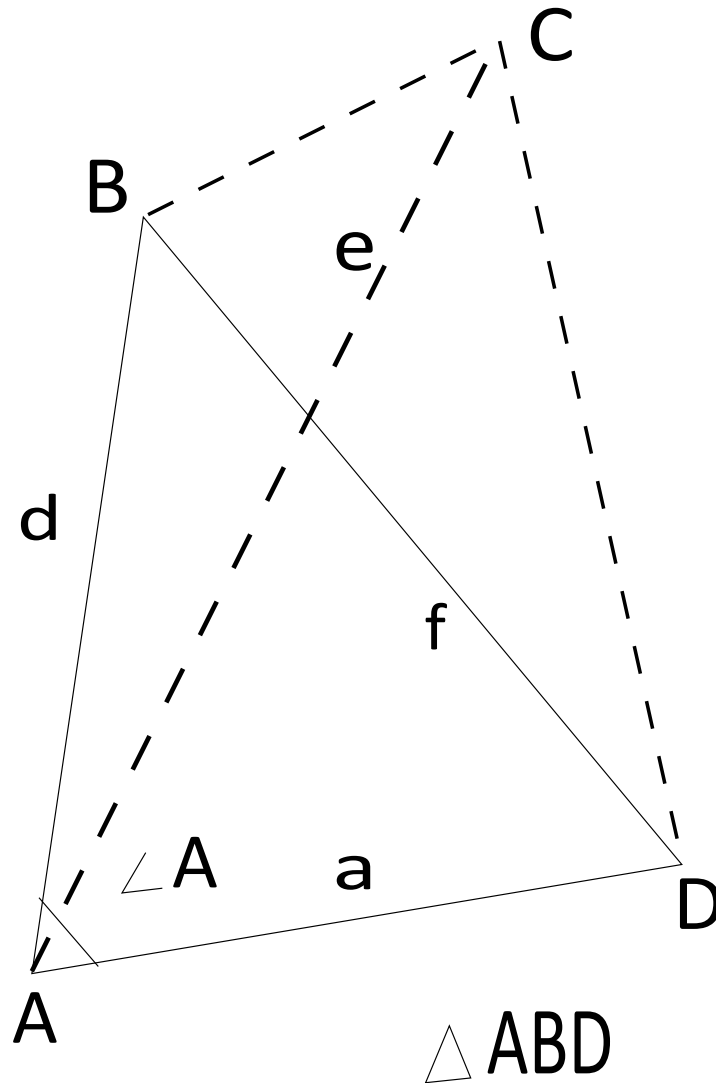


Рис. 5.1.5. Гиперболический треугольник  $ABD$

Подставляя выражения для  $\cos A$ ,  $\cos C$  и  $\sin A \sin C$  в формулу (5.1.3), мы получим:

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}, \tag{5.1.5}$$

что совпадает с результатом теоремы 5.1.4. Таким образом, теорема 5.1.4 доказана.

Аналогичным образом, используя простейшие формулы тригонометрии,

$$2 \cos^4 \frac{S}{4} = 1 + \cos \frac{S}{2} = 1 - \cos(A + C)$$

мы выводим

$$\cos^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2} \operatorname{ch} \frac{b}{2} \operatorname{ch} \frac{c}{2} \operatorname{ch} \frac{d}{2}}. \tag{5.1.6}$$

Для доказательства остальных формул введем рассмотрение величины

$$H = \frac{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c-d}{4}}.$$



Прямыми вычислениями можно показать, что величины  $H$  и

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{sh} \frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{b}{2} \operatorname{sh} \frac{c}{2} \operatorname{sh} \frac{d}{2}}{\operatorname{ch} \frac{s-a}{2} \operatorname{ch} \frac{s-b}{2} \operatorname{ch} \frac{s-c}{2} \operatorname{ch} \frac{s-d}{2}},$$

где

$$s = \frac{a + b + c + d}{2},$$

связаны соотношением:

$$H = 1 - \varepsilon.$$

Четырехкратно перемножим почленно формулы (5.1.5) и (5.1.6). Имеем:

$$\sin^2 \frac{S}{2} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4}}{4 \operatorname{ch}^2 \frac{a}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{b}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{c}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{d}{2}} \cdot H. \quad (5.1.7)$$

Таким образом, утверждение теоремы 5.1.2 следует из формулы (5.1.7), соотношения  $H = 1 - \varepsilon$  и очевидного тождества

$$s - a = \frac{-a + b + c + d}{2}.$$

В свою очередь, для доказательства теоремы 5.1.3 разделим (5.1.5) на (5.1.6). После почленного деления получаем:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh} \frac{-a+b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{4} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{4}}{\operatorname{ch} \frac{a+b-c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b+c-d}{4} \operatorname{ch} \frac{a-b-c+d}{4} \operatorname{ch} \frac{a+b+c+d}{4}}.$$

Отсюда, вновь используя соотношение

$$H = 1 - \varepsilon,$$

мы приходим к формуле из теоремы 5.1.3.

Наконец, формула Билинского (теорема 5.1.7) следует из тригонометрической формулы косинуса двойного угла

$$\cos \frac{S}{2} = \cos^2 \frac{S}{4} - \sin^2 \frac{S}{4}$$

и упомянутых выше тождеств (5.1.5) и (5.1.6).

Таким образом, все четыре формулы Брахмагупты для вписанного гиперболического четырехугольника доказаны.  $\square$

В завершение данного пункта мы представим формулу для площади гиперболической трапеции через длину его сторон, выведенную Д. Ю. Соколовой в работе [35].

**Определение 5.1.2.** Выпуклый гиперболический четырехугольник  $T$  с внутренними углами  $A, B, C$  и  $D$  называется *трапецией*, если

$$A + B = C + D.$$

Легко видеть, что это определение справедливо и для евклидова случая.

Обозначим длины сторон и диагоналей, как показано на рис. 5.1.6. Предположим также, что  $b \neq d$ . В противном случае, если  $b = d$ , площадь трапеции  $T$  не выражается через длины ее сторон.

Площадь гиперболической трапецией выражается следующей теоремой.

**Теорема 5.1.8** (Соколова, 2012 г.). Пусть  $T$  — гиперболическая трапеция с длинами сторон  $a, b, c, d$  (рис. 5.1.6). Тогда ее площадь  $S = S(T)$  определяется формулой

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{b+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b-c-d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b+c-d}{2} \operatorname{sh} \frac{-a+b+c-d}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b+c+d}{2}}{\operatorname{sh}^2 \frac{b-d}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b-c-d}{2} \operatorname{sh} \frac{a-b+c-d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b-c+d}{2} \operatorname{sh} \frac{a+b+c+d}{2}}.$$

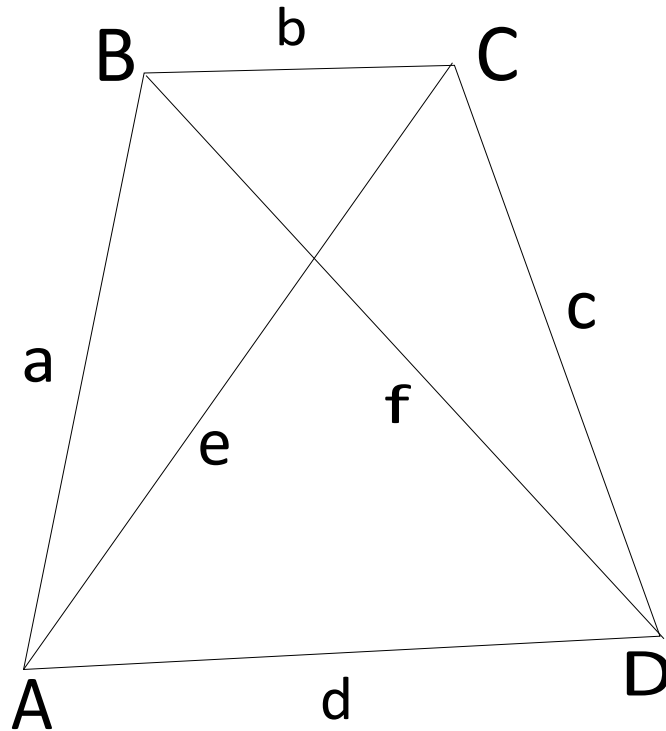


Рис. 5.1.6. Трапеция  $T$  с длинами сторон  $a, b, c, d$  и диагоналями  $e$  и  $f$

**Замечание 5.1.6.** Следующая формула дает площадь  $S_E$  евклидовой трапеции в терминах длин его сторон:

$$S_E = \frac{(b+d)^2(a+b-c-d)(a+b+c-d)(-a+b+c-d)(a-b+c+d)}{16(b-d)^2}.$$

Из приведенных формул нетрудно заметить, что

$$\operatorname{tg}^2 \frac{S}{4} \sim \left( \frac{S_E}{4} \right)^2$$

при

$$a, b, c, d \rightarrow 0,$$

что еще раз подчеркивает локальное стремление гиперболической геометрии к евклидовой.

### 5.2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА САБИТОВА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ОБЪЕМА ЦИКЛИЧЕСКОГО $n$ -УГОЛЬНИКА

Пусть на плоскости Лобачевского  $Oxy$  ( $\mathbb{H}^2$ ), заданной в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости  $y > 0$ , задан циклический  $k$ -угольник  $P_k$  с вершинами (рис. 5.2.1):

$$V_1(t_1, t_1^2), V_2(t_2, t_2^2), \dots, V_k(t_k, t_k^2), \quad t_1 < t_2 < \dots < t_k.$$

Заметим, что стороны  $V_1V_2, V_2V_3, \dots, V_{i-1}V_i, V_1V_i$  такого многоугольника расположены на полуокружностях с уравнениями:

$$\begin{cases} V_1V_2 : (x - a_1)^2 + y^2 = R_1^2, \\ V_2V_3 : (x - a_2)^2 + y^2 = R_2^2, \\ \dots \\ V_1V_k : (x - a_k)^2 + y^2 = R_k^2. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

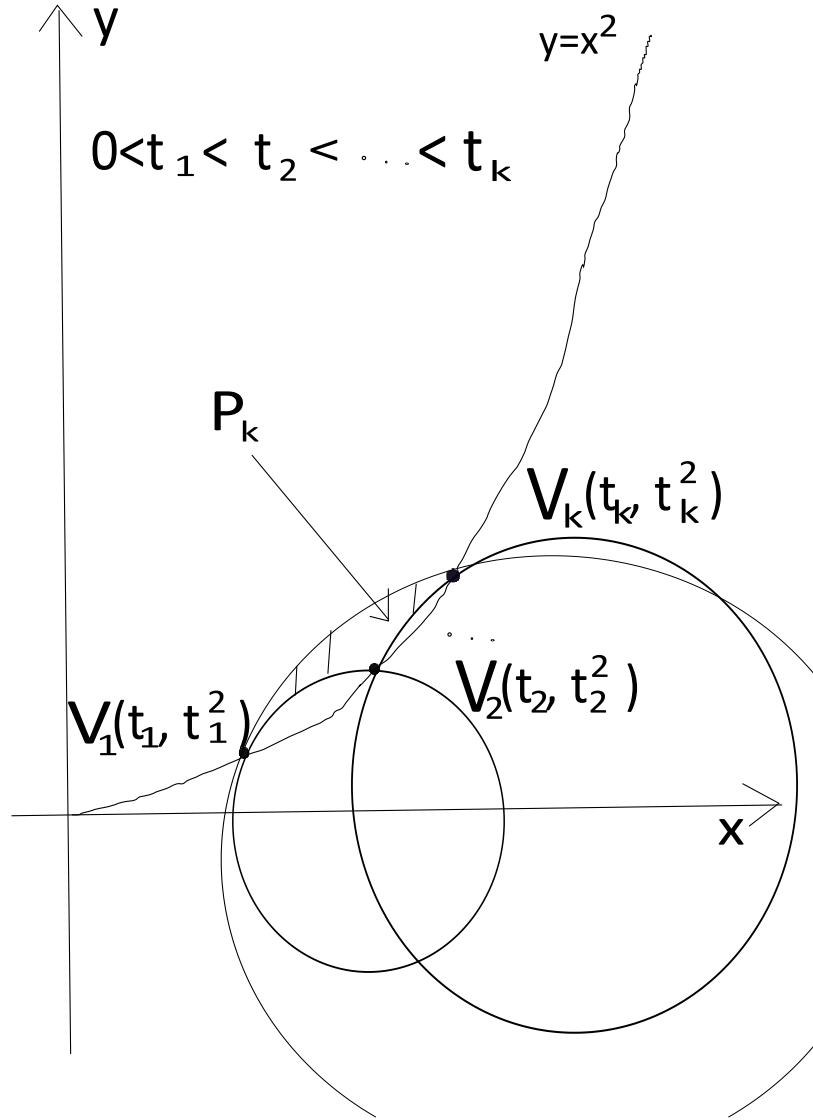


Рис. 5.2.1. Циклический  $k$ -угольник  $P_k$

Подставляя координаты вершин циклического многоугольника  $P_k$  в систему (5.2.1), находим:

$$\begin{cases} a_m = t_m + t_{m+1}, & R_m^2 = t_m^2 + t_{m+1}^2, & 1 \leq m \leq k-1; \\ a_k = t_1 + t_k, & R_k^2 = t_1^2 + t_k^2. \end{cases} \quad (5.2.2)$$

Применяя для вычисления площади многоугольника  $P_k$  формулы (4.1.5) и (4.1.6) (в данных формулах полагаем  $n = 2$ ), получаем:

$$S(P_k) = -\frac{1}{K} \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{dx}{\sqrt{R_1^2 - (x - a_1)^2}} + \int_{t_2}^{t_3} \frac{dx}{\sqrt{R_2^2 - (x - a_2)^2}} + \dots + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{dx}{\sqrt{R_{k-1}^2 - (x - a_{k-1})^2}} + \int_{t_k}^{t_1} \frac{dx}{\sqrt{R_k^2 - (x - a_k)^2}} \right). \quad (5.2.3)$$

Вычисляя интегралы в формуле (5.2.3) и подставляя найденные значения для  $a_s$  и  $R_s^2$  в (5.2.2), получаем (после нетрудных упрощений) следующую теорему.

**Теорема 5.2.1** (Краснов, 2020 г.). *Площадь циклического  $k$ -угольника  $P_k$  на плоскости Лобачевского  $\mathbb{H}^2$  постоянной кривизны  $K < 0$  (в интерпретации Пуанкаре в верхней полуплоскости  $y > 0$ ) может быть вычислена по формуле*

$$S(P_k) = \frac{1}{K} \left( \arcsin \frac{t_k^2 - t_1^2}{t_k^2 + t_1^2} + \sum_{i=1}^{k-1} \arcsin \frac{t_i^2 - t_{i+1}^2}{t_i^2 + t_{i+1}^2} \right). \quad (5.2.4)$$

**Замечание 5.2.1.** Полученная формула (4.1.6) может найти применение не только в неевклидовых геометриях, но и задачах элементарной математики (при изучении свойств обратных тригонометрических функций).

Автор выражает сердечную благодарность В. П. Лексину за поддержку, полезные обсуждения и ценные замечания, способствующие написанию настоящей работы.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абросимов Н. В.* К решению проблемы Зейделя об объемах гиперболических тетраэдров// Сиб. электрон. мат. изв. — 2009. — 6. — С. 211–218.
2. *Абросимов Н. В.* Проблема Зейделя об объеме неевклидового тетраэдра// Докл. РАН. — 2010. — 435, № 1. — С. 7–10.
3. *Абросимов Н. В., Байгонакова Г. А.* Гиперболический октаэдр с  $mm$ -симметрией// Сиб. мат. ж. — 2013. — 10. — С. 123–140.
4. *Абросимов Н. В., Вьонг Хыу Б.* Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрии  $S_4$ // Тр. ИММ УрО РАН. — 2017. — 23, № 4. — С. 2–17.
5. *Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д.* Об объеме сферического октаэдра с симметриями// Современ. мат. и ее прилож. — 2008. — 60. — С. 3–12.
6. *Абросимов Н. В., Кудина Е. С., Медных А. Д.* Об объеме гиперболического октаэдра, допускающего  $\bar{3}$ -симметрию// Тр. МИАН. — 2015. — 288. — С. 7–15.
7. *Абросимов Н. В., Кудина Е. С., Медных А. Д.* Объем гиперболического гексаэдра, допускающего  $\bar{3}$ -симметрию// Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — 13. — С. 1150–1158.
8. *Андреев Е. М.* О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского// Мат. сб. — 1970. — 81. — С. 445–478.
9. *Андреев Е. М.* О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского// Мат. сб. — 1970. — 83. — С. 256–260.
10. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны// Итоги науки и техн. Современ. пробл. мат. Фундам. направл. — 1988. — 29. — С. 1–146.
11. *Байгонакова Г. А., Годой-Молина М., Медных А. Д.* О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего  $mm$ -симметрией// Вестн. Кемеровского гос. ун-та. — 2011. — 47, № 3/1. — С. 13–18.
12. *Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю., Масуда М., Панов Т. Е., Пак С.* Когомологическая жесткость многообразий, задаваемых трехмерными многогранниками// Усп. мат. наук. — 2017. — 434, № 2. — С. 3–66.
13. *Бухштабер В. М., Панов Т. Е.* Торические действия в топологии и комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2004.
14. *Веснин А. Ю.* Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лебелля// Мат. заметки. — 1998. — 64, № 1. — С. 17–23.
15. *Веснин А. Ю.* Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия// Усп. мат. наук. — 2017. — 434, № 2. — С. 147–190.
16. *Винберг Э. Б.* Объемы неевклидовых многогранников// Усп. мат. наук. — 1993. — 290, № 2. — С. 17–46.
17. *Гайфуллин А. А.* Вложенные изгибаемые сферические кросс-политопы с непостоянными объемами// Тр. МИАН. — 2015. — 288. — С. 67–94.
18. *Гайфуллин А. А.* Аналитическое продолжение объема и гипотеза кузнечных мехов в пространствах Лобачевского// Мат. сб. — 2015. — 206, № 11. — С. 61–112.
19. *Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х.* Некоторые приложения формулы для объема октаэдра// Мат. заметки. — 2004. — 76, № 1. — С. 27–43.
20. *Деревнин Д. А., Медных А. Д.* Объем сферического куба Ламберта// Мат. заметки. — 2009. — 86, № 2. — С. 190–201.
21. *Деревнин Д. А., Медных А. Д., Пашкевич М. Г.* Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах// Сиб. мат. ж. — 2004. — 45, № 5. — С. 1022–1031.

22. Колпаков А. А., Медных А. Д., Пашкевич М. Г. Формула объема  $\mathbb{Z}_2$ -симметричного тетраэдра// Сиб. мат. ж. — 2011. — 52, № 3. — С. 577–594.
23. Краснов В. А. Об интегральных формулах объема гиперболических тетраэдров// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — 49. — С. 89–98.
24. Краснов В. А. Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — 51. — С. 74–86.
25. Краснов В. А. Неевклидовы октаэдры с  $mm2$ -симметрией// Мат. заметки. — 2016. — 99, № 1. — С. 145–148.
26. Краснов В. А. Об объемах гиперболических симплексов// Мат. заметки. — 2019. — 106, № 6. — С. 866–880.
27. Краснов В. А. О применении современного доказательства формулы Сфорца к вычислению объемов гиперболических тетраэдров специального вида// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — 65, № 4. — С. 623–634.
28. Лобачевский Н. И. Воображаемая геометрия// Полн. собр. соч. Т. 3. — М.—Л.: 1949.
29. Петров Ф. В. Вписанные четырехугольники и трапеции в абсолютной геометрии// В сб.: «Математическое просвещение. 13». — М.: МЦНМО, 2009. — С. 149–154.
30. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.
31. Сабитов И. Х. Объем многогранника как функция его метрики// Фундам. и прикл. мат. — 1996. — 2, № 4. — С. 1235–1246.
32. Сабитов И. Х. Объемы многогранников// В сб.: «Математическое просвещение. 21». — М.: МЦНМО, 2009.
33. Сабитов И. Х. Об одном методе вычисления объемов тел// Сиб. электрон. мат. изв. — 2013. — № 10. — С. 615–626.
34. Сабитов И. Х. Гиперболический тетраэдр: вычисление объема с применением к доказательству формулы Шлефли// Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — 20, № 6. — С. 149–161.
35. Соколова Д. Ю. О площади трапеции на плоскости Лобачевского// Сиб. электрон. мат. изв. — 2012. — 9. — С. 256–260.
36. Abrosimov N. V., Mednykh A. D. Volumes of polytopes in spaces of constant curvature// Fields Inst. Commun. — 2014. — 70, № 1. — С. 1–26.
37. Alexandrov V. A. An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space// Beitr. Algebra Geom. — 1997. — 38, № 1. — С. 11–18.
38. Bilinski S. Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene// Math. Ann. — 1969. — 180. — С. 256–268.
39. Bolyai J. Appendix. The theory of space// В сб.: «Janos Bolyai». — Budapest, 1987.
40. Cho Yu., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — 22. — С. 347–366.
41. Connely R., Sabitov I., Walz A. The bellows conjecture// Contrib. Algebra Geom. — 1997. — 38, № 1. — С. 1–10.
42. Coxeter H. S. M. The functions of Schläfli and Lobatschevsky// Quarterly J. Math. Oxford. — 1935. — 6. — С. 13–29.
43. Coxeter H. S. M., Greitzer S. L. Geometry Revisited. — Washington: The Mathematical Association of America, 1967.
44. Derevnin D. A., Mednykh A. D. A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Russ. Math. Surv. — 2005. — 60, № 2. — С. 346–348.
45. Diaz R. A characterization of Gram matrices of polytopes// Discrete Comput. Geom. — 1999. — 21, № 4. — С. 581–601.
46. Dickinson W., Salmassi M. The right right triangle on the sphere// College Math. J. — 2008. — 39, № 1. — С. 24–33.
47. Gaiullin A. A. Sabitov polynomials for polyhedra in four dimensions// Adv. Math. — 2014. — 252. — С. 586–611.
48. Gaiullin A. A. Generalization of Sabitov's theorem to polyhedra of arbitrary dimensions// Discrete Comput. Geom. — 2014. — 52, № 2. — С. 195–220.
49. Gaiullin A. A. The bellows conjecture for small flexible polyhedra in non-Euclidean spaces// Mosc. Math. J. — 2017. — 17, № 2. — С. 269–290.
50. Guo R., Sönmez N. Cyclic polygons in classical geometry// C. R. Acad. Bulgare Sci. — 2011. — 64, № 2. — С. 185–194.
51. Kellerhals R. On the volume of hyperbolic polyhedra// Math. Ann. — 1989. — 285, № 4. — С. 541–569.

52. *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie// Deutsche Math. — 1936. — 1. — С. 337–340.
53. *McClelland J. W., Preston T.* A Treatise on Spherical Trigonometry with Application to Spherical Geometry and Numerous Examples. Part II. — London: Macmillan and Co., 1886.
54. *Mednykh A. D.* Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane// Сиб. электрон. мат. изв. — 2012. — 9. — С. 247–255
55. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — 6, № 1. — С. 307–332.
56. *Mohanty Y.* The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space// Algebr. Geom. Topol. — 2003. — 3. — С. 1–31.
57. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron// Acta Math. Vietnam. — 2018. — 33, № 3. — С. 219–253.
58. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — 83, № 1-2. — С. 153–163.
59. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Commun. Anal. Geom. — 2005. — 13. — С. 379–400.
60. *Murakami H., Yokota Y.* Volume Conjecture for Knots. — Singapore: Springer, 2018.
61. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität// В сб.: «Gesammelte mathematische Abhandlungen». — Basel: Birkhäuser, 1950.
62. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi// Ric. Esten. Different. Ser. — 1906. — 8, № 3. — С. 3–66.
63. *Thurston W.* Three-dimensional manifold, Kleinian groups and hyperbolic geometry// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1982. — 6, № 3. — С. 357–381.
64. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra// Non-Euclid. Geom. — 2006. — 581. — С. 249–265.
65. *Valentine J. E.* An analogue of Ptolemy's theorem and its converse in hyperbolic geometry// Pacific J. Math. — 1970. — 34. — С. 817–825.
66. *Wimmer L.* Cyclic polygons in non-Euclidean geometry// Elem. Math. — 2011. — 66. — С. 74–82.

В. А. Краснов

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

E-mail: krasnov\_va@rudn.university, vladimir.krasnov3107@gmail.com

## Volumes of Polyhedra in Non-Euclidean Spaces of Constant Curvature

© 2020 V. A. Krasnov

**Abstract.** Computation of the volumes of polyhedra is a classical geometry problem known since ancient mathematics and preserving its importance until present time. Deriving volume formulas for 3-dimensional non-Euclidean polyhedra of a given combinatorial type is a very difficult problem. Nowadays, it is fully solved for a tetrahedron, the most simple polyhedron in the combinatorial sense. However, it is well known that for a polyhedron of a special type its volume formula becomes much simpler. This fact was noted by Lobachevsky who found the volume of the so-called ideal tetrahedron in hyperbolic space (all vertices of this tetrahedron are on the absolute). In this survey, we present main results on volumes of arbitrary non-Euclidean tetrahedra and polyhedra of special types (both tetrahedra and polyhedra of more complex combinatorial structure) in 3-dimensional spherical and hyperbolic spaces of constant curvature  $K = 1$  and  $K = -1$ , respectively. Moreover, we consider the new method by Sabitov for computation of volumes in hyperbolic space (described by the Poincaré model in upper half-space). This method allows one to derive explicit volume formulas for polyhedra of arbitrary dimension in terms of coordinates of vertices. Considering main volume formulas for non-Euclidean polyhedra, we will give proofs (or sketches of proofs) for them. This will help the reader to get an idea of basic methods for computation of volumes of bodies in non-Euclidean spaces of constant curvature.

### REFERENCES

1. N. V. Abrosimov, “K resheniyu problemy Zeydelya ob ob'emakh giperbolicheskikh tetraedrov” [To the solution of Seidel’s problem on the volumes of hyperbolic tetrahedra], *Sib. Elektron. Mat. Izv.* [Siberian Electron. Math. Bull.], 2009, **6**, 211–218 (in Russian).
2. N. V. Abrosimov, “Problema Zeydelya ob ob'eme neevklidovogo tetraedra” [Seidel’s problem on the volume of a non-Euclidean tetrahedron], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **435**, No. 1, 7–10 (in Russian).
3. N. V. Abrosimov and G. A. Baygonakova, “Giperbolicheskii oktaedr s mmm-simmetriey” [Hyperbolic octahedron with mmm-symmetry], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2013, **10**, 123–140 (in Russian).
4. N. V. Abrosimov and B. Vuong Huu, “Ob'em giperbolicheskogo tetraedra s gruppoy simmetrii  $S_4$ ” [The volume of a hyperbolic tetrahedron with symmetry group  $S_4$ ], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2017, **23**, No. 4, 2–17 (in Russian).
5. N. V. Abrosimov, M. Godoy-Molina, and A. D. Mednykh, “Ob ob'eme sfericheskogo oktaedra s simmetriyami” [On the volume of spherical octahedron with symmetries], *Sovrem. Mat. i Ee Prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2008, **60**, 3–12 (in Russian).
6. N. V. Abrosimov, E. S. Kudina, and A. D. Mednykh, “Ob ob'eme giperbolicheskogo oktaedra, dopuskayushchego  $\bar{3}$ -simmetriyu” [On the volume of a hyperbolic octahedron with  $\bar{3}$ -symmetry], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2015, **288**, 7–15 (in Russian).
7. N. V. Abrosimov, E. S. Kudina, and A. D. Mednykh, “Ob'em giperbolicheskogo geksaedra, dopuskayushchego  $\bar{3}$ -simmetriyu” [Volume of a hyperbolic hexahedron with  $\bar{3}$ -symmetry], *Sib. Elektron. Mat. Izv.* [Siberian Electron. Math. Bull.], 2016, **13**, 1150–1158 (in Russian).
8. E. M. Andreev, “O vypuklykh mnogogrannikakh v prostranstvakh Lobachevskogo” [On convex polyhedra in Lobachevsky spaces], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, 445–478 (in Russian).
9. E. M. Andreev, “O vypuklykh mnogogrannikakh konechnogo ob'ema v prostranstve Lobachevskogo” [On convex polyhedra of finite volume in Lobachevsky space], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1970, **83**, 256–260 (in Russian).
10. D. V. Alekseevskiy, E. B. Vinberg, and A. S. Solodovnikov, “Geometriya prostranstv postoyannoy krivizny” [Geometry of spaces of constant curvature], *Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Probl. Math. Fundam. Napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1988, **29**, 1–146 (in Russian).

11. G. A. Baygonakova, M. Godoy-Molina, and A. D. Mednykh, “O geometricheskikh svoystvakh giperbolicheskogo oktaedra, obladayushchego mmm-simmetriey” [On geometric properties of hyperbolic octahedron with mmm-symmetry], *Vestn. Kemerovskogo Gos. Un-ta* [Bull. Kemerovo State Univ.], 2011, **47**, No. 3/1, 13–18 (in Russian).
12. V. M. Bukhshtaber, N. Yu. Erokhovets, M. Masuda, T. E. Panov, and S. Pak, “Kogomologicheskaya zhestkost’ mnogoobraziy, zadavaemykh trekhmernymi mnogogrannikami” [Cohomological rigidity of manifolds defined by 3-dimensional polyhedra], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2017, **434**, No. 2, 3–66 (in Russian).
13. V. M. Bukhshtaber and T. E. Panov, *Toricheskie deystviya v topologii i kombinatorike* [Toric Actions in Topology and Combinatorics], MTsNMO, Moscow, 2004 (in Russian).
14. A. Yu. Vesnin, “Ob”emy trekhmernykh giperbolicheskikh mnogoobraziy Lebellya” [Volumes of 3-dimensional hyperbolic Labelle’s manifolds], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1998, **64**, No. 1, 17–23 (in Russian).
15. A. Yu. Vesnin, “Pryamougol’nye mnogogranniki i trekhmerye giperbolicheskie mnogoobraziya” [Rectangular polyhedra and three-dimensional hyperbolic manifolds], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2017, **434**, No. 2, 147–190 (in Russian).
16. E. B. Vinberg, “Ob”emy neevklidovykh mnogogrannikov” [Volumes of non-Euclidean polyhedra], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1993, **290**, No. 2, 17–46 (in Russian).
17. A. A. Gayfullin, “Vlozhennyye izgibaemye sfericheskie kross-politopy s nepostoyannymi ob”emami” [Embedded flexible spherical cross-polytopes with variable volumes], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2015, **288**, 67–94 (in Russian).
18. A. A. Gayfullin, “Analiticheskoe prodolzhenie ob”ema i gipoteza kuznechnykh mekhov v prostranstvakh Lobachevskogo” [Analytical continuation of the volume and the bellows hypothesis in Lobachevsky spaces], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2015, **206**, No. 11, 61–112 (in Russian).
19. R. V. Galiulin, S. N. Mikhalev, and I. Kh. Sabitov, “Nekotorye prilozheniya formuly dlya ob”ema oktaedra” [Some applications of the octahedron volume formula], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2004, **76**, No. 1, 27–43 (in Russian).
20. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, “Ob”em sfericheskogo kuba Lamberta” [Volume of the Lambert spherical cube], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 2, 190–201 (in Russian).
21. D. A. Derevnin, A. D. Mednykh, and M. G. Pashkevich, “Ob”em simmetrichnogo tetraedra v giperbolicheskom i sfericheskom prostranstvakh” [Ob”em simmetrichnogo tetraedra v giperbolicheskom i sfericheskom prostranstvakh], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2004, **45**, No. 5, 1022–1031 (in Russian).
22. A. A. Kolpakov, A. D. Mednykh, and M. G. Pashkevich, “Formula ob”ema  $\mathbb{Z}_2$ -simmetrichnogo tetraedra” [Volume formula for a  $\mathbb{Z}_2$ -symmetric tetrahedron], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2011, **52**, No. 3, 577–594 (in Russian).
23. V. A. Krasnov, “Ob integral’nykh formulakh ob”ema giperbolicheskikh tetraedrov” [On integral expressions for volumes of hyperbolic tetrahedra], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 89–98 (in Russian).
24. V. A. Krasnov, “Ob ob”eme giperbolicheskogo oktaedra s netrivial’nyimi simmetriyami” [On the volume of hyperbolic octahedra with nontrivial symmetry], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **51**, 74–86 (in Russian).
25. V. A. Krasnov, “Neevklidovy oktaedry s mm2-simmetriey” [Non-Euclidean octahedra with mm2-symmetry], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 1, 145–148 (in Russian).
26. V. A. Krasnov, “Ob ob”emakh giperbolicheskikh simpleksov” [On volumes of hyperbolic simplexes], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2019, **106**, No. 6, 866–880 (in Russian).
27. V. A. Krasnov, “O primeneniі sovremennogo dokazatel’sтва formuly Sfortsa k vychisleniyu ob”emov giperbolicheskikh tetraedrov spetsial’nogo vida” [On application of the modern proof of the Sforza formula to computation of the volumes of hyperbolic tetrahedra of a special form], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 623–634 (in Russian).
28. N. I. Lobachevskiy, “Voobrazhaemaya geometriya” [Imaginary Geometry], In: *Poln. Sobr. Soch. T. 3* [Complete Set of Works. Vol. 3], Moscow–Leningrad, 1949 (in Russian).
29. F. V. Petrov, “Vpisannyye chetyrekhugol’niki i trapetsii v absolyutnoy geometrii” [Inscribed quadrilaterals and trapezoids in absolute geometry], In: *Matematicheskoe Prosveshchenie. 13* [Mathematical Education. 13], MTsNMO, Moscow, 2009, pp. 149–154 (in Russian).
30. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integraly i ryady. Elementarnyye funktsii* [Integrals and Series. Elementary Functions], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
31. I. Kh. Sabitov, “Ob”em mnogogrannika kak funktsiya ego metriki” [Volume of a polyhedron as a function of its metrics], *Fundam. i Prikl. Mat.* [Fundam. Appl. Math.], 1996, **2**, No. 4, 1235–1246 (in Russian).



32. I. Kh. Sabitov, “Ob”emy mnogogrannikov” [Volumes of polyhedra], In: *Matematicheskoe Prosveshchenie*. **21** [Mathematical Education. **21**], MTsNMO, Moscow, 2009 (in Russian).
33. I. Kh. Sabitov, “Ob odnom metode vychisleniya ob”emov tel” [On one method for computation of volumes of bodies], *Sib. Elektron. Mat. Izv.* [Siberian Electron. Math. Bull.], 2013, No. 10, 615–626 (in Russian).
34. I. Kh. Sabitov, “Giperbolicheskiy tetraedr: vychislenie ob”ema s primeneniem k dokazatel’stvu formuly Shlefli” [Hyperbolic tetrahedron: computing volume with application to the proof of the Schläfli formula], *Model. i Analiz Inform. Sistem* [Model. Anal. Inform. Syst.], 2013, **20**, No. 6, 149–161 (in Russian).
35. D. Yu. Sokolova, “O ploshchadi trapetsii na ploskosti Lobachevskogo” [On the area of a trapezoid on the Lobachevsky plane], *Sib. Elektron. Mat. Izv.* [Siberian Electron. Math. Bull.], 2012, **9**, 256–260 (in Russian).
36. N. V. Abrosimov and A. D. Mednykh, “Volumes of polytopes in spaces of constant curvature,” *Fields Inst. Commun.*, 2014, **70**, No. 1, 1–26.
37. V. A. Alexandrov, “An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space,” *Beitr. Algebra Geom.*, 1997, **38**, No. 1, 11–18.
38. S. Bilinski, “Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene,” *Math. Ann.*, 1969, **180**, 256–268.
39. J. Bolyai, “Appendix. The theory of space,” In: *Janos Bolyai*, Budapest, 1987.
40. Yu. Cho and H. Kim, “On the volume formula for hyperbolic tetrahedra,” *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **22**, 347–366.
41. R. Connely, I. Sabitov, and A. Walz, “The bellows conjecture,” *Contrib. Algebra Geom.*, 1997, **38**, No. 1, 1–10.
42. H. S. Coxeter, “The functions of Schläfli and Lobatschewsky,” *Quarterly J. Math. Oxford*, 1935, **6**, 13–29.
43. H. S. Coxeter and S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, Washington, 1967.
44. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, “A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron,” *Russ. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 2, 346–348.
45. R. Diaz, “A characterization of Gram matrices of polytopes,” *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **21**, No. 4, 581–601.
46. W. Dickinson and M. Salmassi, “The right right triangle on the sphere,” *College Math. J.*, 2008, **39**, No. 1, 24–33.
47. A. A. Gaifullin, “Sabitov polynomials for polyhedra in four dimensions,” *Adv. Math.*, 2014, **252**, 586–611.
48. A. A. Gaifullin, “Generalization of Sabitov’s theorem to polyhedra of arbitrary dimensions,” *Discrete Comput. Geom.*, 2014, **52**, No. 2, 195–220.
49. A. A. Gaifullin, “The bellows conjecture for small flexible polyhedra in non-Euclidean spaces,” *Mosc. Math. J.*, 2017, **17**, No. 2, 269–290.
50. R. Guo and N. Sönmez, “Cyclic polygons in classical geometry,” *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 2011, **64**, No. 2, 185–194.
51. R. Kellerhals, “On the volume of hyperbolic polyhedra,” *Math. Ann.*, 1989, **285**, No. 4, 541–569.
52. H. Kneser, “Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie,” *Deutsche Math.*, 1936, **1**, 337–340.
53. J. W. McClelland and T. Preston, *A Treatise on Spherical Trigonometry with Application to Spherical Geometry and Numerous Examples. Part II*, Macmillan and Co., London, 1886.
54. A. D. Mednykh, “Brahmagupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane,” *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2012, **9**, 247–255
55. J. Milnor, “Hyperbolic geometry: the first 150 years,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1982, **6**, No. 1, 307–332.
56. Y. Mohanty, “The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space,” *Algebr. Geom. Topol.*, 2003, **3**, 1–31.
57. J. Murakami, “The volume formulas for a spherical tetrahedron,” *Acta Math. Vietnam*, 2018, **33**, No. 3, 219–253.
58. J. Murakami and A. Ushijima, “A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths,” *J. Geom.*, 2005, **83**, No. 1-2, 153–163.
59. J. Murakami and M. Yano, “On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron,” *Commun. Anal. Geom.*, 2005, **13**, 379–400.
60. H. Murakami and Y. Yokota, *Volume Conjecture for Knots*, Springer, Singapore, 2018.
61. L. Schläfli, “Theorie der vielfachen Kontinuität,” In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1950.
62. G. Sforza, “Spazi metrico-proiettivi,” *Ric. Esten. Different. Ser.*, 1906, **8**, No. 3, 3–66.
63. W. Thurston, “Three-dimensional manifold, Kleinian groups and hyperbolic geometry,” *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 1982, **6**, No. 3, 357–381.

64. A. Ushijima, “A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra,” *Non-Euclid. Geom.*, 2006, **581**, 249–265.
65. J.E. Valentine, “An analogue of Ptolemy’s theorem and its converse in hyperbolic geometry,” *Pacific J. Math.*, 1970, **34**, 817–825.
66. L. Wimmer, “Cyclic polygons in non-Euclidean geometry,” *Elem. Math.*, 2011, **66**, 74–82.

V. A. Krasnov

Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: krasnov\_va@rudn.university, vladimir.krasnov3107@gmail.com