

КОДИРОВАНИЕ УЗЛОВ С ПОМОЩЬЮ T -ГРАФОВ

© 2020 г. О. Н. БИРЮКОВ

Аннотация. Рассматриваются узлы как гладкие вложения окружности в \mathbb{R}^3 , заданные своими плоскими диаграммами. Предлагается новый способ кодирования узлов с помощью T -графов, описывающих структуру кручений на плоской диаграмме. Для данного способа кодирования вводятся понятия цикла и блока, а также описываются преобразования T -графов при применении к плоской диаграмме узла первого и третьего движений Рейдемейстера.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Понятие кручения на плоской диаграмме узла	531
2. Определение T -графа	534
3. Циклы в T -графах	536
4. Блоки в T -графах	539
5. Движения Рейдемейстера	540
Список литературы	542

1. ПОНЯТИЕ КРУЧЕНИЯ НА ПЛОСКОЙ ДИАГРАММЕ УЗЛА

Пусть задан узел K и D_K — его плоская диаграмма (см. [2]). Ориентируем диаграмму D_K и определим знак каждого перекрестка стандартным образом.

Плоскую диаграмму D_K будем также рассматривать как планарный 4-валентный граф, вершины которого соответствуют перекресткам исходной диаграммы, и в каждой вершине ребра пересекаются под прямым углом. Поэтому перекрестки на диаграмме D_K будем также называть ее вершинами.

Определение 1.1. *Кручением* на плоской диаграмме D_K называется всякий двуугольник, стороны которого не пересекаются, а вершины, возможно, совпадают. Вершины этого двуугольника будем называть *вершинами* кручения, и также говорить, что между этими двумя вершинами (перекрестками на плоской диаграмме) имеется кручение. Стороны этого двуугольника пересекаются в его вершинах под прямым углом, каждый из этих углов будем называть *направлением* кручения в соответствующей вершине.

Кручение с вершинами A и B будем обозначать AB . Стороны кручения AB обозначим α_{AB} и β_{AB} так, чтобы в вершине A кратчайший поворот от стороны α_{AB} к стороне β_{AB} происходил против часовой стрелки. Аналогично, для сторон кручения AB будем использовать обозначения α_{BA} и β_{BA} в зависимости от их расположения в вершине B .

Определение 1.2. Кручение называется *прямым*, если внутренние углы двуугольника, образующего данное кручение, оба равны 90° либо оба равны 270° ; в противном случае кручение называется *обратным*.



Определение 1.3. Направление кручения в заданной вершине называется *циклическим*, если при выборе некоторой ориентации плоской диаграммы обе стороны кручения оказываются ориентированы так, что обе выходят из данной вершины либо обе входят в вершину. Направление кручения называется *остовным*, если оно не является циклическим.

Ясно, что если направление кручения является циклическим в одной из его вершин, то оно будет циклическим и в другой вершине. В самом деле, если обе стороны выходят из одной вершины, то они заходят в другую вершину. Поэтому можно говорить о циклическом и остовном кручении.

Определение 1.4. Кручение называется *циклическим*, если в обеих своих вершинах оно расположено в циклическом направлении; в противном случае кручение называется *остовным*.

Пример. На плоской диаграмме на рис. 1 между вершиной A_1 и каждой из вершин B_1, B_2, B_3 есть циклическое кручение. Направления этих кручений выделены на рисунке дугами. Расставлены также знаки всех перекрестков, для чего выбрана ориентация. Кручение между вершинами A_1 и B_1 прямое, а кручение между вершинами A_1 и B_2 обратное.

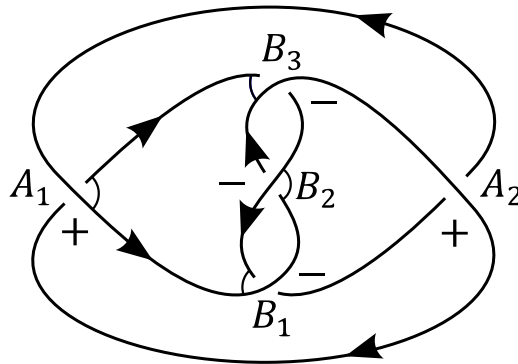


Рис. 1

Лемма 1.1 (о циклических направлениях). В любой вершине плоской диаграммы узла в каждом из двух циклических направлений расположено хотя бы одно кручение, при этом, возможно, что в обоих циклических направлениях расположено одно и то же кручение, вершины которого совпадают.

Доказательство. Выберем некоторый перекресток A на плоской диаграмме D_K узла K и обозначим через α и β дуги, соединяющие концы перекрестка, как указано на рис. 2. Если α и β не пересекаются, то в вершине A в обоих циклических направлениях, очевидно, расположено одно и то же кручение. Если же α и β пересекаются, то выберем перекресток B , ближайший к A по дуге α с одного или другого циклического направления. Ясно, что тогда между A и B будет циклическое кручение. \square

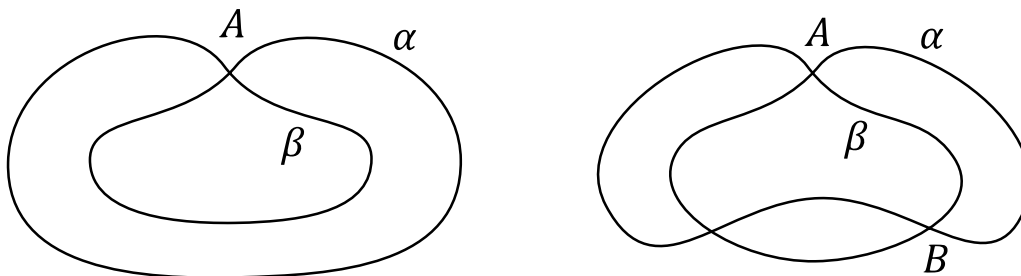


Рис. 2

На множестве всех кручений, расположенных в данном направлении из данной вершины, определим линейный порядок \prec . Пусть на плоской диаграмме два кручения AB_1 и AB_2 имеют одинаковое направление в вершине A . Положим $AB_1 \prec AB_2$, если $\alpha_{AB_1} \subset \alpha_{AB_2}$. Тогда $\beta_{AB_1} \supset \beta_{AB_2}$.

Определение 1.5. Кручение AB называется *первым* (соответственно, *последним*) в вершине A , если оно является минимальным (соответственно, максимальным) относительно линейного порядка \prec .

На множестве всех кручений с данной вершиной A определим теперь циклический порядок. Положим, что $AB_1 \prec AB_2 \prec AB_3 \prec AB_1$, если кручения, расположенные в одном направлении, связаны определенным выше линейным порядком, а кручения, расположенные в разных направлениях, упорядочены в соответствии с естественным циклическим порядком направлений на плоской диаграмме D_K . Для плоской диаграммы на рис. 1 имеем $A_1B_1 \prec A_1B_2 \prec A_1B_3 \prec A_1B_1$.

Определение 1.6. Кручение называется *существенным*, если хотя бы на одной из его сторон нет других перекрестков плоской диаграммы.

Лемма 1.2 (о существенных кручениях). *Прямое кручение является существенным тогда и только тогда, когда в одной из своих вершин оно является первым, а в другой вершине — последним. Обратное кручение является существенным тогда и только тогда, когда в обеих своих вершинах оно является первым, либо в обеих вершинах — последним.*

Доказательство. Пусть между вершинами A и B на плоской диаграмме есть прямое существенное кручение. Обозначим через γ сторону этого кручения, на которой нет других перекрестков плоской диаграммы, через α_1 и α_2 дуги, выходящие из A перпендикулярно γ , а через β_1 и β_2 дуги, выходящие из B перпендикулярно γ (см. рис. 3).

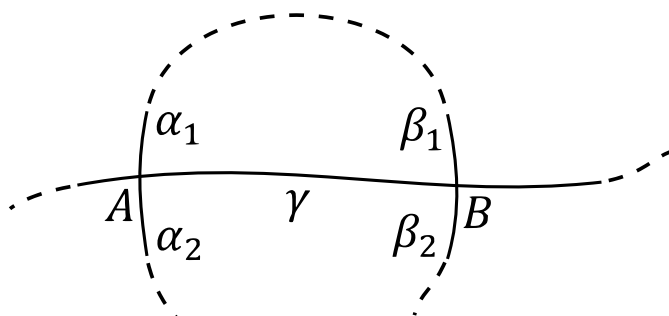


Рис. 3

Ясно, что ровно одна из дуг α_1 или α_2 соединяется с одной из дуг β_1 или β_2 , иначе получилась бы плоская диаграмма зацепления с более чем одной компонентой. Для прямого кручения дуга α_1 может соединиться только с β_1 , а дуга α_2 — с β_2 . Так как на дуге γ нет других перекрестков плоской диаграммы, в случае соединения дуг α_1 и β_1 полученное кручение будет первым в вершине A и последним в вершине B , т. е. существенным. В случае соединения дуг α_2 и β_2 полученное кручение будет первым в вершине B и последним в вершине A , т. е. опять существенным.

Аналогично рассматривается случай обратного кручения. Если α_1 соединяется с β_2 , то полученное кручение будет первым в обеих вершинах, а если α_2 соединяется с β_1 , полученное кручение будет последним в обеих вершинах, т. е. в любом случае кручение будет существенным.

Обратно, пусть между вершинами A и B на плоской диаграмме есть прямое кручение, которое является первым в вершине A и последним в вершине B . Обозначим через γ_1 и γ_2 стороны этого кручения, а через δ_1 и δ_2 петли с вершинами A и B , как указано на рис. 4. Так как кручение является первым в вершине A , то петля δ_2 на плоской диаграмме не пересекает дугу γ_1 . Так как кручение является последним в вершине B , то петля δ_1 на плоской диаграмме также не пересекает дугу γ_1 . Получаем, что на дуге γ_1 нет других перекрестков плоской диаграммы и кручение между A и B является существенным.

Пусть теперь между вершинами A и B на плоской диаграмме есть обратное кручение (см. рис. 5). Тогда если кручение является первым в обеих вершинах, то на дуге γ_1 нет других перекрестков плоской диаграммы. Если кручение является последним в обеих вершинах, то на дуге γ_2 нет других перекрестков плоской диаграммы. В любом случае кручение между A и B является существенным. \square

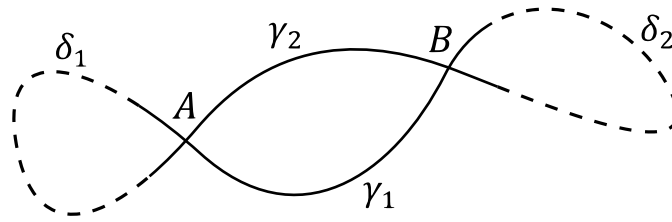


Рис. 4

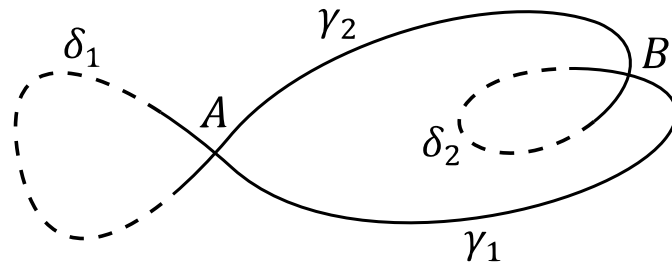


Рис. 5

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ T -ГРАФА

Определение 2.1. T -графом называется граф со следующей дополнительной структурой:

- каждая вершина снабжается знаком «плюс» или «минус»;
- множество всех ребер разбивается на два класса, ребра из которых будем называть соответственно *прямыми* и *обратными*;
- для каждой вершины A на множестве E_A всех ребер, инцидентных вершине A , задан циклический порядок \prec , а также задано разбиение множества E_A на 4 класса $C_1(A)$, $F_1(A)$, $C_2(A)$, $F_2(A)$, называемых *направлениями* ребер в вершине A , при этом классы $C_1(A)$ и $C_2(A)$, называемые *циклическими* направлениями, непустые, и разбиение на классы согласовано с циклическим порядком \prec в том смысле, что для любых ребер $l_1 \in C_1(A)$, $l_2 \in F_1(A)$, $l_3 \in C_2(A)$ и $l_4 \in F_2(A)$ имеем $l_1 \prec l_2 \prec l_3 \prec l_4 \prec l_1$; классы $F_1(A)$ и $F_2(A)$ будем называть *остовными* направлениями в вершине A ;
- всякое ребро, инцидентное вершинам A и B , либо принадлежит циклическим направлениям в обеих вершинах, либо остовным направлениям в обеих вершинах.

Закодируем структуру кручений на плоской диаграмме D_K с помощью T -графа, вершины которого соответствуют перекресткам на плоской диаграмме и снабжаются знаком «плюс» или «минус» в зависимости от типа перекрестка, а ребра T -графа соответствуют кручениям на плоской диаграмме и подразделяются на прямые и обратные в зависимости от типа кручений. Как было показано выше, в каждой вершине плоской диаграммы существуют 4 направления кручений, два из которых циклические и два остовные, в каждом из двух циклических направлений всякой вершины расположено хотя бы одно кручение, и у каждого кручения либо оба направления циклические, либо оба остовные, что полностью соответствует структуре T -графа. Тем самым для любой плоской диаграммы узла T -граф корректно определен.

Пример. На рис. 6 изображен T -граф для плоской диаграммы на рис. 1. Здесь и всюду далее циклические ребра изображены сплошными линиями, а остовные ребра — прерывистыми. Обратные ребра, чтобы отличать их от прямых ребер, изображены двойными линиями.

Теорема 2.1 (о свойствах T -графа). T -граф любого узла K обладает следующими свойствами:

1. Для любых двух вершин A и B на T -графе из вершины A в данном направлении может выходить максимум одно ребро к вершине B , и, кроме того, A и B не могут быть соединены одновременно и циклическим, и остовным ребрами.

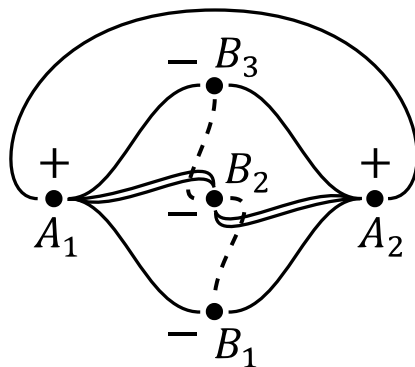


Рис. 6

2. Если рассматривать плоскую диаграмму узла как планарный 4-валентный граф, то для любых двух вершин на этом графе, соединенных ребром, соответствующие вершины на T-графе также соединены ребром.

Доказательство. Для заданной вершины A на плоской диаграмме в заданном направлении, очевидно, существует максимум один двуугольник с непересекающимися сторонами и второй вершиной в заданной точке B . Кроме того, если вершины A и B на T-графе соединены двумя ребрами в трансверсальных направлениях, то на плоской диаграмме эта ситуация будет выглядеть, как указано на рис. 7, т. е. это будет диаграмма не узла, а двухкомпонентного зацепления.

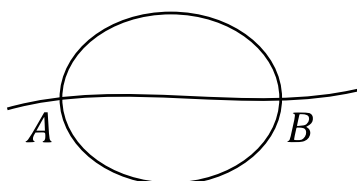


Рис. 7

Тем самым свойство 1 доказано.

Пусть вершины A и B на плоской диаграмме, рассматриваемой как 4-валентный граф, соединены ребром γ . Обозначим через α_1 и α_2 дуги, выходящие из A перпендикулярно γ , а через β_1 и β_2 дуги, выходящие из B перпендикулярно γ (см. рис. 8).

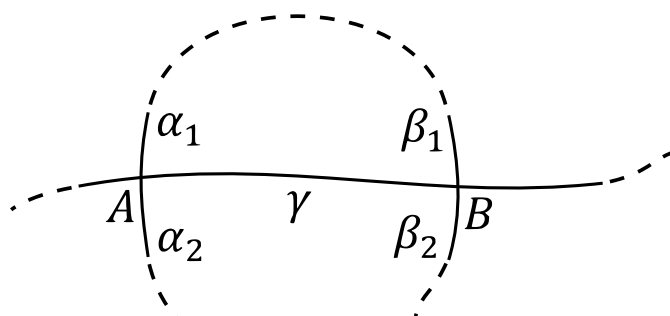


Рис. 8

Ясно, что ровно одна из дуг α_1 или α_2 соединяется с одной из дуг β_1 или β_2 , иначе получилась бы плоская диаграмма зацепления с более чем одной компонентой. Без ущерба для общности предположим, что α_1 соединяется с β_1 , тогда эта дуга не пересекается с γ и образует кручение с вершинами A и B , что доказывает свойство 2. \square

Поскольку ребра T-графа в точности соответствуют кручениям на плоской диаграмме, то по аналогии с кручениями можно говорить о существенных ребрах, о первом или последнем ребре в данном направлении из данной вершины T-графа.

Теорема 2.2 (о восстановлении узла по T -графу). T -граф однозначно определяет узел, т. е. не существует двух разных узлов с одинаковым T -графом.

Доказательство. Известно, что плоская диаграмма узла полностью его определяет, поэтому достаточно показать, как по T -графу восстановить плоскую диаграмму узла, которую можно представлять как 4-валентный граф с указанием структуры «проход—переход». Вершины T -графа в точности соответствуют перекресткам плоской диаграммы, а знаки вершин T -графа позволяют однозначно восстановить структуру «проход—переход» в каждом перекрестке. Чтобы понять, как вершины соединяются между собой в 4-валентном графе, задающем плоскую диаграмму, т. е. для каждой вершины установить смежную с ней в каждом из 4 направлений, следует в соответствии с определением существенных кручений посмотреть на существенные ребра T -графа, ведь именно они соединяют смежные на плоской диаграмме вершины. А распознать существенные ребра можно с помощью критерия из леммы 1.2. Для этого надо уметь различать первые и последние ребра в каждой вершине по каждому направлению, что можно сделать, поскольку для каждой вершины T -графа множество инцидентных ей ребер разбито на 4 класса и циклически упорядочено. \square

Из доказательства теоремы 2.2 видно, что для восстановления плоской диаграммы узла по T -графу достаточно знать расположение лишь существенных ребер, а остальные ребра нужны только для установления того, является ли существенное ребро первым или последним в каждой своей вершине. По этой причине в T -графе можно оставить только существенные ребра с указанием того, в какой вершине каждое из них является первым и в какой — последним. В соответствии с леммой 1.2 прямое существенное ребро в одной из своих вершин является первым, а в другой — последним. Поэтому такое ребро можно просто ориентировать в направлении от первой вершины к последней. В частности, если оно является и первой, и последней в каждой своей вершине, оно будет ориентировано в обе стороны. На рис. 9 указаны возможные варианты изображения прямого существенного ребра.



Рис. 9. Изображения прямого существенного ребра: а) ребро является первым в вершине A и последним в вершине B ; б) ребро является и первым, и последним в обеих своих вершинах.

Обратное существенное ребро либо в обеих своих вершинах является первым, либо в обеих — последним, либо в обеих вершинах — и первым, и последним. На рис. 10 указаны способы изображения каждого из вариантов.

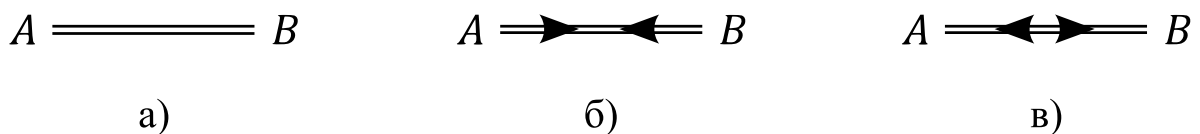


Рис. 10. Изображения обратного существенного ребра: а) ребро является первым в обеих вершинах; б) ребро является последним в обеих вершинах; в) ребро является и первым, и последним в обеих своих вершинах.

3. Циклы в T -ГРАФАХ

Определение 3.1. *Вершинным циклом с базовой вершиной A в T -графе называется максимальный подграф T -графа, порожденный вершиной A и всеми вершинами, которые соответствуют перекресткам на плоской диаграмме, образованным в результате пересечения двух дуг, полученных при разрезании плоской диаграммы в точке A . Циклом в T -графе называется максимальный (относительно вложения) элемент во множестве всех вершинных циклов.*

Плоская диаграмма, которая кодируется циклом с базовой вершиной A , может быть представлена как пересечение двух простых замкнутых дуг α и β , начало и конец каждой из которых расположены в точке A . Зафиксируем некоторую ориентацию плоской диаграммы, тем самым ориентируя дуги α и β . Тогда все перекрестки, входящие в цикл, кроме точки A , представляют собой точки пересечения дуг α и β . Очевидно, что количество точек пересечения α и β должно быть четным. Занумеруем эти точки числами от 1 до $2n$ в соответствии с их расположением на ориентированной дуге α и далее упорядочим эти числа в соответствии с порядком расположения перекрестков на ориентированной дуге β . Получим некоторую перестановку из $2n$ чисел $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{2n}$.

Определение 3.2. T -кодом цикла в T -графе будем называть пару из перестановки из $2n$ элементов $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_{2n}$ и упорядоченного набора из $2n + 1$ знаков «плюс» или «минус» $s_0s_1 \dots s_{2n}$, где s_0 указывает на знак перекрестка в базовой вершине цикла, а s_i , где $i = 1, \dots, 2n$, — на знак перекрестка с номером σ_i .

T -код цикла будем изображать в виде таблицы.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A & \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \hline s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{2n} \end{array}$$

Пример. Рассмотрим плоскую диаграмму узла на рис. 1 и соответствующий ей T -граф на рис. 6. Если в качестве базовой выбрать вершину A_1 или A_2 , то вершинный цикл будет включать все вершины и тем самым совпадать со всем T -графом. Если же в качестве базовой выбрать одну из вершин B_1, B_2 или B_3 , то вершинный цикл помимо выбранной вершины будет включать еще только вершины A_1 и A_2 . Так что у данного T -графа только один цикл, совпадающий со всем T -графом. Для записи T -кода этого цикла выберем в качестве базовой вершину A_1 и дуги α и β , как указано на рис. 11. Занумеруем перекрестки в соответствии с их расположением на дуге α и упорядочим номера перекрестков в соответствии с их расположением на дуге β . Получим перестановку 3214. Добавляя сюда знаки перекрестков, получаем T -код цикла.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} A_1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ \hline + & - & - & - & + \end{array}$$

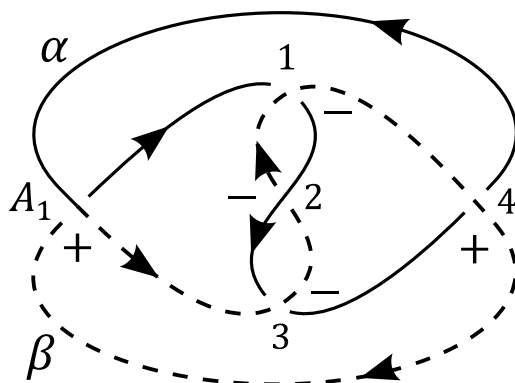


Рис. 11. Плоская диаграмма разрезается в вершине A_1 на две дуги α и β , выделенные сплошной и прерывистой линиями соответственно.

Определение 3.3. Для четырех попарно различных целых чисел x, y, z, t из промежутка $[1; n]$ будем говорить, что в заданной перестановке из n элементов пара x и y *разделяет* пару z и t , если ровно одно из чисел x или y расположено в перестановке между числами z и t .

Теорема 3.1 (о реализуемости T -кодов). T -код, содержащий перестановку σ из $2n$ элементов, реализуем как T -код некоторого цикла в T -графе плоской диаграммы некоторого узла тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие три условия:

1. в перестановке σ для любых различных целых k и t из промежутка $[1; 2n - 1]$, где k и t имеют одинаковую четность, пара чисел k и $k + 1$ не разделяет пару чисел t и $t + 1$;
2. для любого четного t из промежутка $[2; 2n - 2]$ между t и $t + 1$ в перестановке σ не содержится ни 1, ни $2n$;
3. 1 в перестановке σ расположена раньше, чем $2n$.

Доказательство. T -граф, восстановленный по T -коду, является циклом тогда и только тогда, когда дуга α не содержит самопересечений. Ясно, что если числа k и t одинаковой четности, то содержащиеся в α дуги между перекрестками k и $k + 1$ и между t и $t + 1$ либо обе содержатся внутри области, ограниченной β , либо обе снаружи. И эти две дуги не будут пересекаться в точности тогда, когда пара чисел k и $k + 1$ не разделяет пару чисел t и $t + 1$. Кроме того, часть дуги α между t и $t + 1$, где t четное, содержится в той же области относительно β , что и начальный (до первого перекрестка), и конечный (после последнего перекрестка) фрагменты дуги α . Чтобы начальный и конечный фрагменты не пересекались с частью дуги между t и $t + 1$, в перестановке ни 1, ни $2n$ не должны располагаться между t и $t + 1$. Наконец, чтобы начальный и конечный фрагменты не пересекались друг с другом, 1 в перестановке должна быть расположена раньше, чем $2n$. □

Рассмотрим преобразование T -кодов, которое будем называть R -преобразованием. Выберем в перестановке σ , содержащейся в T -коде, два элемента k и $k + t$, снабженные противоположными знаками и такие, что либо $t = 1$, либо между k и $k + t$ в перестановке σ расположены в произвольном порядке элементы $k + 1, k + 2, \dots, k + t - 1$ и только они. Тогда R -преобразованием будем называть удаление из T -кода элементов k и $k + t$ вместе с их знаками, уменьшение на 1 всех оставшихся элементов, больших k , но меньших $k + t$, и уменьшение на 2 всех элементов, больших $k + t$. Подобное уменьшение нужно, чтобы в полученной перестановке не было «пропусков». R -преобразование уменьшает количество элементов перестановки на 2 и тем самым упрощает T -код. В то же время несложно заметить, что в результате R -преобразования получается T -код того же самого узла, поскольку на плоской диаграмме R -преобразованию соответствует удаление двух перекрестков противоположных знаков и отражение части диаграммы, расположенной «между» этими двумя перекрестками.

Пример. Рассмотрим плоскую диаграмму тривиального узла (см. рис. 12). Выберем вершину A в качестве базовой и введем обозначения для дуг α и β , как указано на рисунке. Видим, что все перекрестки, кроме A , представляют собой пересечения дуг α и β , так что T -граф состоит из одного цикла. Зафиксируем ориентацию диаграммы и в соответствии с ней занумеруем перекрестки.

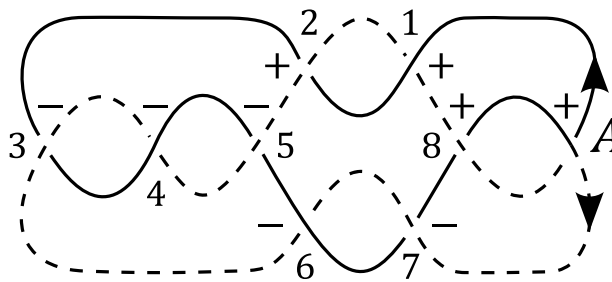


Рис. 12

Получим следующий T -код:

A	7	6	3	4	5	2	1	8
+	-	-	-	-	-	+	+	+

К вершинам 1 и 7 здесь можно применить R -преобразование, удалив эти два столбца таблицы и изменив номера оставшихся столбцов:

A	5	2	3	4	1	6
+	-	-	-	-	+	+

Далее применим R -преобразование к вершинам 1 и 5:

A	1	2	3	4
+	-	-	-	+

В полученном T -коде перестановка является тривиальной, и алгебраическая сумма знаков равна -1 . Несложно заметить, что это и в самом деле тривиальный узел.

Интересно, что исходная плоская диаграмма тривиального узла не является монотонно упрощаемой [3], т. е. ее нельзя преобразовать в тривиальную диаграмму (не имеющую перекрестков) последовательным применением движений Рейдемейстера так, чтобы на каждом шаге количество перекрестков не увеличивалось. В то же время T -код данного узла оказался монотонно упрощаем последовательным выполнением R -преобразований.

4. БЛОКИ В T -ГРАФАХ

Определение 4.1. Путь в T -графе будем называть *циклическим (остовным)*, если все составляющие его ребра циклические (соответственно, остовные). Путь в T -графе называется *гладким* в некоторой своей промежуточной вершине, если два соседних ребра пути подходят к этой вершине с противоположных направлений. Если же два соседних ребра пути подходят к общей вершине с одного и того же направления, то будем говорить, что путь в этой вершине имеет *касп*.

Определение 4.2. *Циклическим (остовным) блоком* в T -графе называется гладкий циклический (соответственно, остовный), простой и, возможно, замкнутый путь, который содержит минимум две вершины, если для любой его вершины множество всех смежных с ней вершин в трансверсальных направлениях будет одним и тем же, и для любой его вершины в том направлении, в котором выходит ребро данного пути, других ребер нет. Блок называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом блоке.

Теорема 4.1 (о факторизации T -графа по его блокам). *Профакторизуем T -граф по всем его максимальным блокам, т. е. все вершины, входящие в некоторый блок, будем считать одной вершиной фактор-графа, и соединим эту вершину ребрами в трансверсальных направлениях с теми вершинами, с которыми была соединена каждая из вершин склеиваемого блока. Тогда полученный граф будет T -графом некоторого узла.*

Доказательство. Факторизация по некоторому блоку на плоской диаграмме означает замену фрагмента, как на рис. 13, на обычный перекресток. \square

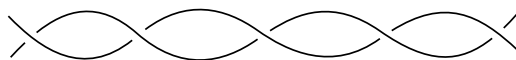


Рис. 13

По теореме 4.1 факторизацию T -графа по всем его максимальным блокам можно проводить последовательно до тех пор, пока в полученном T -графе не останется ни одного блока.

Определение 4.3. *Корневым T -графом* узла K будем называть T -граф, не содержащий ни одного блока и полученный из некоторого T -графа узла K путем последовательных факторизаций по всем его максимальным блокам. *T -деревом* узла K будем называть ориентированное дерево, корнем которого является корневой T -граф данного узла, на каждом уровне расположены все максимальные блоки, по которым проводилась факторизация на очередном этапе, и с каждым ориентированным ребром дерева связана вершина, полученная в результате склеивания всех вершин блока, на который указывает данное ребро.

Пример. Для T -графа на рис. 6 вершины B_1, B_2, B_3 образуют максимальный блок; обозначим его B . Другой максимальный блок A образуют вершины A_1 и A_2 . На рис. 14 изображено соответствующее T -дерево. Как видим, корневой T -граф данного узла состоит из одной вершины C .

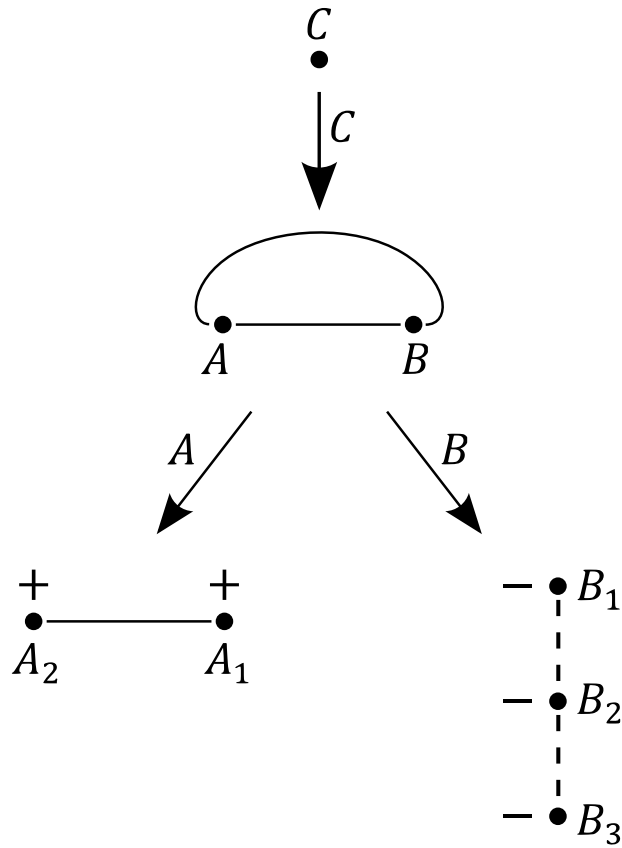


Рис. 14

5. ДВИЖЕНИЯ РЕЙДЕМЕЙСТЕРА

Рассмотрим преобразования T -графа плоской диаграммы узла при применении к плоской диаграмме движений Рейдемейстера (см. [2]).

Определение 5.1. *Остовным n -угольником, $n \geq 2$, называется простой замкнутый остовный путь в T -графе длины n , имеющий касп в каждой вершине и состоящий из существенных ребер. Циклическим n -угольником, $n \geq 2$, называется простой замкнутый гладкий циклический путь в T -графе, состоящий из существенных ребер, причем в каждой вершине одно из двух инцидентных ей ребер пути является первым в своем направлении этой вершины, а другое — последним.*

Пример. На рис. 15 изображена плоская диаграмма и подграф ее T -графа, являющийся остовным пятиугольником. При этом прерывистыми линиями на плоской диаграмме указано лишь одно из возможных соединений дуг, образующих пятиугольник.

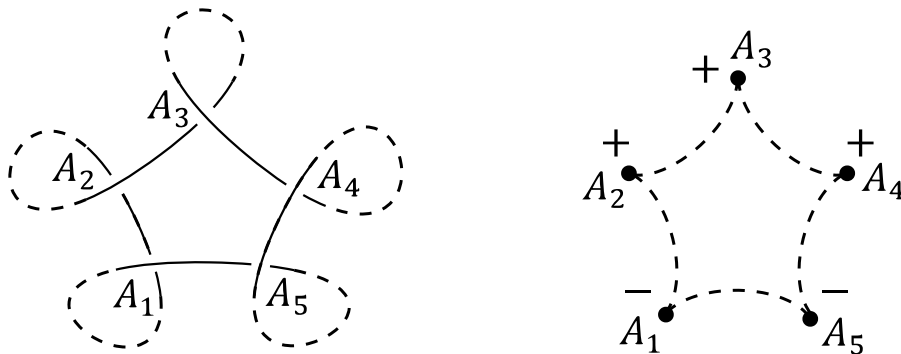


Рис. 15

При $n = 2$ остовный двуугольник есть просто пара вершин и соединяющее их остовное ребро, которое является и первым, и последним в обеих вершинах. Заметим, что за каждой вершиной в T -графе может быть скрыт целый блок вершин, по которому выполнена факторизация. По этой причине может существовать и циклический двуугольник (см. рис. 14).

Теорема 5.1. *Первому движению Рейдемейстера на плоской диаграмме узла соответствует добавление к остовному n -угольнику в T -графе новой вершины или удаление такой вершины.*

Доказательство. Из рис. 15 видно, что каждой петле на плоской диаграмме соответствует вершина остовного n -угольника на T -графе. □

Теорема 5.2. *Третьему движению Рейдемейстера на плоской диаграмме узла соответствует одно из следующих преобразований:*

1. *остовный треугольник с тремя обычными вершинами, среди которых есть вершины с разными знаками, преобразуется в циклический треугольник и обратно (см. рис. 16);*
2. *остовный двуугольник, одна из вершин A которого является обычной, а другая вершина B представляет собой циклический блок из двух вершин B_1 и B_2 , остовное ребро является обратным и знак вершины A совпадает со знаком хотя бы одной из вершин B_1 или B_2 , преобразуется в циклический двуугольник с обычной вершиной A и остовным блоком B из двух вершин B_1 и B_2 , в котором одно из циклических ребер является прямым, а другое обратным (см. рис. 17).*

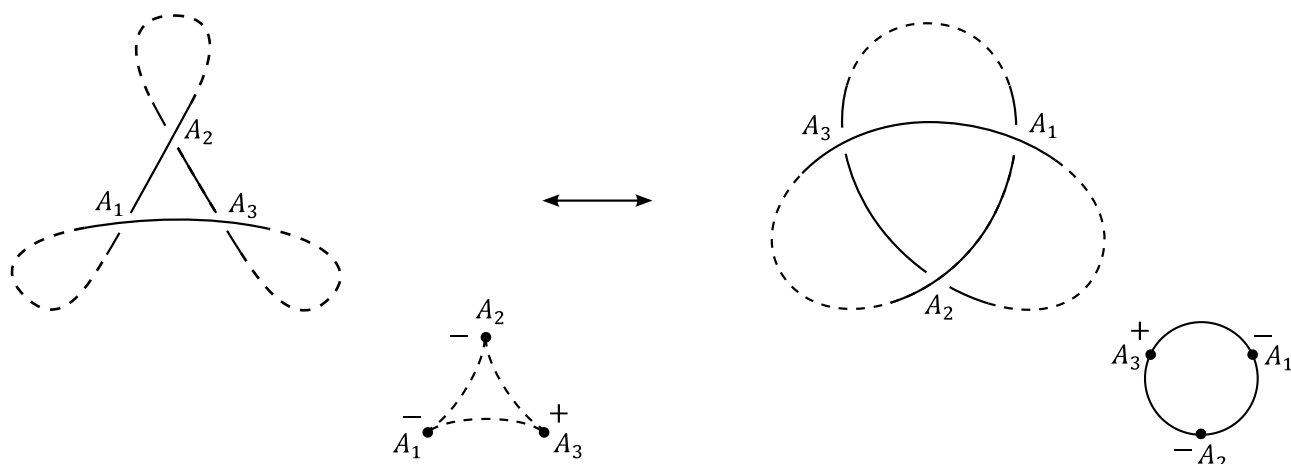


Рис. 16

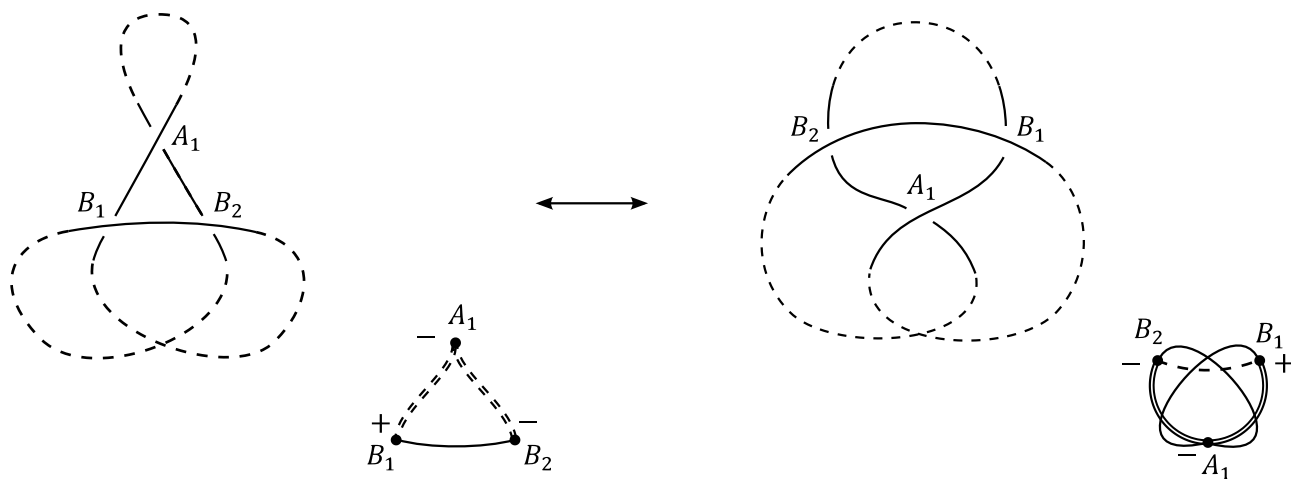


Рис. 17

Доказательство. При задании ориентации плоской диаграммы три стороны треугольника $A_1A_2A_3$, участвующего в третьем движении Рейдемейстера, могут оказаться все ориентированы одинаково или две стороны одинаково, а третья в противоположном направлении. Соответственно возникают две ситуации, представленные на рис. 16 и 17, где рядом с каждой плоской диаграммой изображен фрагмент T -графа. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бирюков О. Н. Бесхребетные узлы// Вестн. гос. соц.-гум. ун-та. — 2019. — № 3 (35). — С. 18–23.
2. Дужин С. В., Чмутлов С. В. Узлы и их инварианты// В сб.: «Математическое просвещение», вып. 3. — М.: МЦНМО, 1999. — С. 59–93.
3. Дынников И. А. Алгоритмы распознавания в теории узлов// Усп. мат. наук. — 2003. — 58, № 6. — С. 45–92.
4. Кроуэлл Р., Фокс Р. Введение в теорию узлов. — М.: Мир, 1967.
5. Мантуров В. О. Теория узлов. — Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005.
6. Сосинский А. Б. Узлы. Хронология одной математической теории. — М.: МЦНМО, 2005.
7. Hass J. Algorithms for recognizing knots and 3-manifolds// Chaos Solitons Fractals. — 1998. — 9, № 4-5. — С. 569–581.

О. Н. Бирюков

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,

Москва, ул. 2-я Бауманская, д. 5/1

E-mail: onbiryukov@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-4-531-543

UDC 515.16+519.17

Coding Knots by T -Graphs

© 2020 O. N. Biryukov

Abstract. In this paper, knots are considered as smooth embeddings of a circle into \mathbb{R}^3 defined by their flat diagrams. We propose a new method of coding knots by T -graphs describing the torsion structure on a flat diagram. For this method of coding, we introduce conceptions of a cycle and a block and describe transformations of T -graphs under the first and the third Reidemeister moves applied to the flat diagram of a knot.

REFERENCES

1. O. N. Biryukov, “Beskhrebetnye uzly” [Ridgeless knots], *Vestn. gos. sots.-gum. un-ta* [Bull. State Soc.-Hum. Univ.], 2019, No. 3 (35), 18–23 (in Russian).
2. S. V. Duzhin and S. V. Chmutov, “Uzly i ikh invarianty” [Knots and their invariants], In: *Matematicheskoe prosveshchenie* [Mathematical Enlightenment], Vol. 3, MTsNMO, Moscow, 1999, pp. 59–93 (in Russian).
3. I. A. Dynnikov, “Algoritmy raspoznavaniya v teorii uzlov” [Recognition algorithms in knot theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2003, **58**, No. 6, 45–92 (in Russian).
4. R. Crowell and R. Fox, *Vvedenie v teoriyu uzlov* [Introduction to Knot Theory], Mir, Moscow, 1967 (in Russian).
5. V. O. Manturov, *Teoriya uzlov* [Knot Theory], NITs Reg. Khaot. Dinam., Moscow—Izhevsk, 2005 (in Russian).
6. A. B. Sosinskiy, *Uzly. Khronologiya odnoy matematicheskoy teorii* [Nodes. Timeline of One Mathematical Theory], MTsNMO, Moscow, 2005 (in Russian).



7. J. Hass, “Algorithms for recognizing knots and 3-manifolds,” *Chaos Solitons Fractals*, 1998, **9**, No. 4-5, 569–581.

O. N. Biryukov
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: onbiryukov@yandex.ru