Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 3 (2020). С. 373–530

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-3-373-530 УДК 517.984.5

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ И ОПЕРАТОРА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ-РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

© 2020 г. **А. М. САВЧУК, И. В. САДОВНИЧАЯ**

Аннотация. Мы рассматриваем одномерный оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$. Краевые условия предполагаются регулярными по Биркгофу, а потенциал $P(x)$ — суммируемым на $[0,\pi]$. Вводятся понятия сильно и слабо регулярного оператора. В обоих случаях найдены асимптотические формулы для собственных значений. В этих формулах мы выписываем главные асимптотические члены и оцениваем остатки, которые специфицируем в зависимости от функционального класса потенциала: $L_p[0,\pi]$, где $p \in [1,2]$, и пространства Бесова $B^{\theta}_{p,p'}[0,\pi]$, где $p \in [1,2]$, а $\theta \in (0,1/p)$. Дополнительно мы доказываем равномерность наших оценок по шарам $\|P\|_{p,\theta} \leqslant R$. Затем мы получаем асимптотические формулы для нормированных собственных функций в сильно регулярном случае с такими же оценками остатков в равномерной на $[0,\pi]$ метрике. В слабо регулярном случае собственные значения асимптотически двукратны, и мы проводим аналогичные оценки для соответствующих двумерных спектральных проекторов. Далее мы доказываем базисность Рисса в пространстве $(L_2[0,\pi])^2$ системы собственных и присоединенных функций произвольного сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. В слабо регулярном случае доказана базисность Рисса двумерных подпространств.

Параллельно с оператором $\mathcal{L}_{P,U}$ мы рассматриваем оператор Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}_{q,U}$, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ с потенциалом q первого порядка сингулярности (т. е. предполагаем, что первообразная $u = q^{(-1)}$ лежит в $L_2[0,\pi]$) и регулярными по Биркгофу краевыми условиями. С помощью подобия мы сводим к этому случаю операторы более общего вида $-(\tau_1 y')' + i(\sigma y)' + i\sigma y' + \tau_0 y$, где τ_1', σ, $\tau_0^{(-1)} \in L_2$ и $\tau_1 > 0$. Для оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ мы получаем такие же результаты об асимптотике собственных значений, собственных функций, результаты о базисности, как и для $\mathcal{L}_{P,U}$.

Затем для оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ мы доказываем равномерность базисности Рисса по шарам $\|P\|_{p,\theta} \leqslant R$ при $p > 1$ или $\theta > 0$. Задача об условной базисности естественным образом обобщается до задачи о равносходимости спектральных разложений в различных метриках. Мы доказываем результат о равносходимости, варьируя три индекса: $f \in L_\mu[0,\pi]$ (раскладываемая функция), $P \in L_\varkappa[0,\pi]$ (потенциал) и $\|S_m - S_m^0\| \to 0$, $m \to \infty$, в $L_\nu[0,\pi]$ (равносходимость спектральных разложений по соответствующей норме). В завершение мы доказываем теоремы об условной и безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ в пространствах $L_\mu[0,\pi]$, $\mu \neq 2$, и в различных пространствах Бесова $B^{\theta}_{p,q}[0,\pi]$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант № 20-11-20261.

1. Введение

В этой работе речь пойдет о двух вполне классических объектах: об операторе Штурма—Лиувилля и об одномерной системе Дирака. Мы будем изучать оператор Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}$, порождаемый в пространстве $L_2[0,\pi]$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y \tag{1.1}$$

и подходящими (регулярными по Биркгофу) граничными условиями.

Мы рассмотрим и более общие операторы, дифференциальное выражение которых имеет вид

$$\ell(y) = -(\tau_1 y')' + i(\sigma y)' + i\sigma y' + \tau_0 y. \tag{1.2}$$

В разделе 2 данной работы мы докажем утверждение о подобии операторов общего вида операторам вида (1.1), которые и будем изучать далее.

Одномерную систему Дирака мы записываем в виде

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

и также добавляем два краевых условия, которые предполагаем регулярными по Биркгофу.

Всюду в работе мы считаем, что выражения (1.1) и (1.3) определены на конечном отрезке $[0,\pi] \ni x$.

Цель этой работы — провести детальное исследование спектральных свойств операторов (1.1) и (1.3) в случае негладких потенциалов q и P. А именно, мы будем работать с потенциалами q — распределениями первого порядка сингулярности, считая, что $q = u'$, где $u \in L_2[0,\pi]$, а производная понимается в смысле теории распределений. Пространство таких функций мы будем обозначать $W_2^{-1}[0,\pi]$.

Легко видеть, что оба оператора — второго дифференцирования и умножения на потенциал $q \in W_2^{-1}[0,\pi]$ — ограничены как операторы из $W_2^1[0,\pi]$ в $W_2^{-1}[0,\pi]$, то есть в смысле соболевских пространств действуют «в одну силу»[1]. Таким образом, мы имеем дело с «предельным» случаем. Примеры, показывающие невозможность определить оператор Штурма—Лиувилля вида (1.1) с произвольным более сингулярным потенциалом, можно найти в [67].

Операторы вида (1.1) были впервые определены в работе [65]. Отметим, что частные случаи, когда $q(x) = \delta_a(x)$ или $q(x) = v.p.\dfrac{1}{x-a}$, были известны и ранее. Литература, посвященная операторам с δ-потенциалами, настолько обширна, что указать ее всю в нашем коротком введении невозможно. Упомянем лишь классические монографии С. Альбеверио, Ф. Гештези, Р. Хоэг-Крона

[1]При этом первый оператор является изоморфизмом (с точностью до двумерного подпространства), а второй компактен.

и Х. Хольдена [93] и С. Альбеверио и П. Курасова [94], где можно познакомиться с данной теорией и обширной библиографией. Из последних работ в этой области следует упомянуть статьи М. М. Маламуда и А. Костенко [143, 144].

Отдельно следует сказать о возмущениях типа δ', которые, хотя и похожи на δ-возмущения, но приводят к существенно иным моделям. Литература, посвященная такого рода возмущениям, также весьма обширна, и мы сошлемся лишь на недавнюю работу Дж. Экхарда, А. Костенко, М. Маламуда и Г. Тешля [119], где предложен современный взгляд на тематику и приведена большая библиография.

Кроме δ-возмущений, рассматривались и другие конкретные потенциалы. Обычно речь шла о точечных сингулярностях степенного характера (с осцилляцией и без) на концах отрезка или в одной внутренней его точке. Так, исследованию потенциала типа $\dfrac{1}{x}$ посвящены работы Дж. Гунсона [127], П. Курасова [145], Ф. Аткинсона, В. Эверитта и А. Зеттла [95].

Работа [65] инициировала серию статей, посвященных операторам вида (1.1). Так, в [66] (а позднее в [11]) был найден спектральный след первого порядка для операторов вида (1.1) с потенциалом

$$q = u', \quad u \in BV_0[0, \pi].$$

Р. О. Гринив и Я. В. Микитюк в [131] изучили оператор Хилла: оператор вида (1.1) на всей оси с периодическим потенциалом $q \in W^{-1}_{2,loc}$ (в частности, было доказано, что спектр имеет лакунарную структуру). Эти исследования были продолжены Е. Коротяевым в [142]. Появились работы В. А. Михайлеца и В. М. Молибоги [153–155].

Затем оператор Хилла с потенциалом $q \in W_2^{-1}$ весьма детально был изучен Б. Митягиным и П. Джаковым в серии работ [107–109]. Эти исследования естественным образом вовлекли в рассмотрение вопросы базисности, а также привели к изучению периодической обратной спектральной задачи (см. по этому поводу [110, 111]). Наконец, в [116] были изучены периодические задачи в полной шкале пространств Соболева

$$q \in W_2^{\theta}, \quad \theta \geqslant -1.$$

Отметим также недавние работы А. Г. Баскакова и Д. М. Полякова [97, 98], где периодическая задача такого вида изучалась методом подобных операторов.

В работе [135] Р. О. Гринива и Я. В. Микитюка на случай операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями была перенесена классическая теория операторов преобразования. Это позволило записать для данного типа операторов Штурма—Лиувилля уравнение Гельфанда—Левитана—Марченко (см. [132–134]), что, в свою очередь, повлекло распространение на операторы с потенциалами-распределениями других результатов и методов теории обратных спектральных задач.

Здесь в первую очередь следует отметить работу Дж. Экхарда, Ф. Гештези, Р. Николса и Г. Тешля [120], где обсуждаются результаты, связанные с функцией Вейля—Тичмарша (для классических операторов Штурма—Лиувилля теория обратных спектральных задач по функции Вейля—Тичмарша и связанный с ней метод спектральных моделей наиболее полно изложен в монографии В. А. Юрко [92]). Случай операторов на всей оси впервые был рассмотрен в [65].

Вопросы обратной задачи рассеяния изучались К. Фреером, Р. О. Гринивым, Я. В. Микитюком и П. А. Перри в [124, 136, 137]. Вопросы, связанные с уравнением Картевега—де Фриза, рассматривались Т. Капеллером, К. Мором и П. Топаловым в [138–140], а затем А. Рыбкиным и С. Грудским в [126, 159].

Мы уже говорили, что начиная с работы [14] возник интерес к весовому оператору Штурма—Лиувилля с весом-распределением. Так же, как обычный оператор Штурма—Лиувилля образует пару Лакса для уравнения Картевега—де Фриза, весовой оператор Штурма—Лиувилля образует пару Лакса для уравнения Камасса—Хольма (см. [106]). Последние результаты по этой теме можно найти в работах [15, 16, 118].

В работе Ж. Бена-Амара и А. А. Шкаликова [99] на случай операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями была перенесена классическая теория Штурма об осцилляции. Изучение операторов порядка $n > 2$ с коэффициентами-распределениями начались с работы А. А. Владимирова [12] и было затем продолжено Ж. Бен-Амара и А. А. Шкаликовым в [99], К. А. Мирзоевым и А. А. Шкаликовым в [48, 49]. В этих работах ключевым для определения оператора стало использование квазипроизводных высоких порядков.

В нашей статье мы имеем дело только с одномерными операторами. В многомерном случае операторы с коэффициентами-распределениями изучаются не менее активно. Здесь определяющей оказалась работа М. И. Нейман-заде и А. А. Шкаликова [52], в которой был предложен метод мультипликаторов (и, соответственно, метод теории возмущений) для исследования такого рода операторов. Перечислим работы [3, 96, 150–152], где эти идеи получили существенное развитие.

В данной работе мы не только суммируем результаты, полученные в статьях авторов [57–64, 68, 72, 73, 161], но и получаем совершенно новые, ранее не публиковавшиеся результаты.

Так, мы проводим спецификацию характера убывания остатков в асимптотических формулах для собственных значений, собственных функций и двумерных спектральных проекторов (для слабо регулярного случая) в зависимости от характера потенциала. Здесь мы рассматриваем шкалу пространств Соболева $W_2^{\theta-1}[0,\pi]$, $\theta\in[0,1/2)$. При этом мы доказываем равномерность наших оценок по шарам $\|q\|_{W_2^{\theta-1}}\leqslant R$. Отметим, что оценки такого вида оказались чрезвычайно важными при исследовании обратных спектральных задач, предпринятых в работах [69, 70].

Изучение системы (1.3) мы проводим параллельно с исследованием оператора (1.1). Наш метод базируется на асимптотическом представлении для фундаментальной системы решений системы

$$BY'+PY=\lambda Y$$

или, соответственно, уравнения

$$-y''+qy=\lambda^2 y.$$

Обрисуем подробнее методы, применяемые при исследовании прямых спектральных задач. За более чем сто лет исследований таких методов разработано достаточно много: теория возмущений, вариационная техника, метод подобных операторов, метод операторов преобразования, метод В. А. Ильина среднего значения. Все результаты этой работы базируются на асимптотических методах. Теория возмущений имеет абсолютно абстрактную основу и потому применима к любым спектральным задачам. Она одинаково успешно позволяет получать результаты и для операторов в $\mathbb{R}^n$, и для функционально-дифференциальных операторов. Однако, несмотря на существенные последние продвижения (см., например, обзорную работу А. А. Шкаликова [91]), в случае обыкновенных дифференциальных операторов асимптотические методы позволяют получать более точные результаты.

В разделе 6 данной работы мы покажем, что спектральное уравнение $-y''+q(x)y=\lambda^2y$ можно свести к системе вида

$$BY'+A(x)Y+\frac{1}{\lambda}C(x)Y=\lambda Y. \tag{1.4}$$

Это позволит нам проводить изучение операторов (1.1) и (1.3) параллельно. Отметим, что изучение систем вида

$$BY'+A(x)Y+C(x,\lambda)Y=\lambda Y$$

размера $n\times n$ является одним из возможных методов исследования спектральных свойств операторов высокого порядка с коэффициентами-распределениями. Это отдельная тема, исследования по которой только начинаются (см. [71]).

Метод сжимающих отображений, который мы используем в разделе 6 для получения матрицы фундаментальной системы решений уравнений (1.4), без каких-либо изменений переносится на случай систем порядка n. При этом мы используем круг понятий и методов, которые появились еще в работах Г. Д. Биркгофа [104, 105] и Я. Д. Тамаркина [78, 164–166] (разделение плоскости параметра λ на секторы и т. п.). Конечно, в этих работах коэффициенты предполагались непрерывными или даже гладкими. Потом эти требования многократно ослаблялись (см., например, работы И. М. Раппопорта [53], А. И. Вагабова [8, 9], М. А. Наймарка [51]). По-видимому, наиболее общий на текущий момент случай разобран В. С. Рыхловым в работе [160], где, как и в нашей работе, элементы матрицы V предполагаются абсолютно непрерывными, а элементы матриц A_0 и C_0 — суммируемыми по Лебегу. Отметим, что статья [160] осталась незамеченной специалистами, и в работе [9] ее результаты были передоказаны, причем при более сильных условиях $\mathrm{V}\in W_q^1[0,1]$, $\mathrm{A}_0,\mathrm{C}_0\in L_q[0,1]$, $q>1$, и в более слабой норме $\|\cdot\|_{L_q'}$, $1/q+1/q'=1$, вместо $\|\cdot\|_{L_\infty}$.

Результаты об асимптотическом поведении фундаментальной матрицы решений соответствующей системы дифференциальных уравнений образуют своего рода технический фундамент для наших построений. Ключом к использованию этих методов и результатов является переход от дифференциальных выражений высокого порядка к системам. Этот переход основан на понятии квазипроизводных. Данные понятия также являются классическими и возникли еще в работах Д. Шина [86–88]. Они активно применяются в монографии [51] для исследования индексов дефекта обыкновенных дифференциальных операторов.

С той же целью их использовали А. Зеттл [169], затем К. Бенневиц и В. Эверитт (см. [102,122]), К. А. Мирзоев [48] и другие. Весьма подробное изложение теории квазипроизводных можно найти в книге Дж. Вайдмана [168] 1987 года. Замечательно то, что эта теория нашла свое применение при исследовании операторов с коэффициентами-распределениями (см. [65]). Мы используем технику квазипроизводных и в нашей работе.

Отметим, что метод квазипроизводных — не единственный метод, позволяющий работать с потенциалами пространства распределений. Задолго до выхода работы [65] активно изучались операторы с δ-образными потенциалами. В одномерной ситуации такие потенциалы, по-видимому, впервые были описаны М. Г. Крейном [37] и И. С. Кацем [28]. Для работы с δ-образными потенциалами достаточно методов теории расширений симметрических операторов. Кроме того, такие оператора допускают естественную дискретизацию, после которой мы приходим к теории якобиевых матриц. Здесь за последние 60 лет разработаны свои достаточно эффективные методы.

Другой путь для работы с сингулярными потенциалами был предложен М. Г. Крейном [37], И. С. Кацем [28, 29] и, независимо, В. Феллером в [123]. Этот метод довольно подробно описан в классической монографии [1] Т. Аткинсона (см. также приложение М. Г. Крейна и И. С. Каца в ней). Он основан на идее производных по мере и приводит к рассмотрению дифференциальных выражений с коэффициентами и весами из класса мер. Хороший исторический обзор по данной теме можно найти в монографии А. Б. Мингарелли [156] 1983 года (см. также работы Х. Лангера [146] и К. Бенневитца [101]).

Связь между исследованиями М. Г. Крейна, В. Феллера и Ф. Аткинсона проясняется также в работе Х. Фолькмера [167]. С современным состоянием этой теории можно ознакомиться в недавней работе Дж. Экхарда и Г. Тешля [121]. Заметим, что современную постановку задачи Крейна в терминах линейных операторных пучков с коэффициентами-распределениями предложили в [14] и развили затем в [13, 15] А. А. Владимиров и И. А. Шейпак. Эта же постановка (хотя и в несколько другом случае, когда вместо линейных пучков возникают квадратичные) была использована Дж. Экхардом и А. Костенко в [118].

Продолжая проводить параллель между операторами (1.1) и (1.3), видим, что случай $q \in W_2^{-1}[0,\pi]$ соответствует для системы Дирака случаю

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad p_2, p_3 \in L_2[0,\pi].$$

При этом общий оператор Штурма—Лиувилля вида (1.2) приводит к потенциалу общего вида

$$P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \quad \text{но вновь} \quad p_j \in L_2[0,\pi], \quad j = 1,2,3,4.$$

Таким образом, изучая оператор (1.3) с потенциалом $P \in L_1[0,\pi]$ мы работаем в «более сингулярном» случае. Здесь мы также проводим спецификацию остатков в асимптотических формулах для собственных значений, собственных функций и двумерных спектральных проекторов (в слабо сингулярном случае).

При этом мы рассматриваем различные шкалы: случай

$$P \in L_p[0,\pi], \quad p \in [1,2], \quad P \in B^\theta_{1,\infty}[0,\pi], \quad \theta \in [0,1]$$

и общую ситуацию

$$P \in B^\theta_{p,p'}[0,\pi], \quad p \in (1,2], \quad \theta \in (0,1/p).$$

Во всех случаях, кроме $p = 1$, $\theta = 0$, мы доказываем равномерность наших оценок на шарах $\|P\|_{B^\theta_{p,p'}} \leqslant R$.

Далее мы доказываем базисность Рисса (в случае слабой регулярности — базисность Рисса из двумерных подпространств) системы собственных и присоединенных функций оператора (1.3). Этот факт не является сложным в случае оператора (1.1), а также для оператора Дирака (1.3), если потенциал P принадлежит $L_2[0,\pi]$, так как работает теорема Бари о квадратичной близости базисов.

Случай же $P \notin L_2[0,\pi]$ оказывается совсем не тривиальным — результаты об обычной базисности были получены здесь практически одновременно в работах [43, 161] (полное доказательство см. в [148]). Случай слабой регулярности был позднее разобран в [63].

Для системы (1.3) (по сравнению с (1.1)) мы получаем дополнительные результаты. В разделе 14 мы рассматриваем задачу равносходимости спектральных разложений, а в разделе 15 — вопросы базисности системы собственных и присоединенных функций оператора Дирака в различных пространствах, отличных от $L_2[0,\pi]$. Отметим, что случай суммируемого (лишь суммируемого) потенциала P гораздо меньше представлен в литературе. Так, в недавних работах А. П. Хромова, В. В. Корнева, В. П. Курдюмова и М. Ш. Бурлуцкой [6, 7, 34], потенциал предполагается непрерывным.

Кроме уже упомянутых статей П. Джакова и Б. Митягина, где $P \in L_2$, и В. С. Рыхлова, надо упомянуть работы М. М. Маламуда, Л. Л. Оридороги [149] и А. А. Лунева [147, 148], где для систем достаточно общего вида (1.4) был рассмотрен случай $A \in L_1$.

Кроме вопросов базисности, мы изучаем в этой работе равносходимость спектральных разложений. В случае конечного отрезка эти разложения имеют вид

$$S_m(f) = \sum^{m}(f, z_n)y_n(x),$$

где $\{y_n\}$ — система собственных и присоединенных функций оператора, а $\{z_n\}$ — биортогональная к ней система. Если оператор задан на бесконечном интервале, то спектральное разложение имеет вид

$$S_\lambda(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \theta(x, y, \lambda) f(y)dy,$$

где $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция оператора.

Задачи сходимости спектральных разложений не только аккумулируют вопросы асимптотического поведения собственных значений, собственных функций, резольвенты и спектральной меры операторов, но также очень важны для построения соответствующих полугрупп и изучения их устойчивости, асимптотического поведения и т. д.

В работе В. А. Стеклова [77] 1909 года, по-видимому, впервые было отмечено, что изучение сходимости спектральных разложений для оператора на конечном интервале можно свести к изучению сходимости тригонометрических рядов при наличии теорем равносходимости. А именно, в статьях В. А. Стеклова [77, 162], а также в работах его ученика Я. Д. Тамаркина [164, 165] было показано, что

$$S_m(f, x) - S_m^0(f, x) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

поточечно, равномерно на произвольном компакте внутри интервала или равномерно на всем интервале (в зависимости от краевых условий и свойств функции f), где $S_m^0(f, x)$ — частичная сумма разложения функции f по подходящей тригонометрической системе.

Параллельно те же вопросы изучались в работах А. Хаара [128, 129] и Е. В. Хобсона [130]. Несколькими годами позже, в работах Я. Д. Тамаркина [78, 166] и М. Стоуна [163] эти результаты были перенесены на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (таким образом, и на случай обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n > 2$). При этом авторы рассматривали случай произвольных регулярных по Биркгофу краевых условий. Основным методом исследования были теоремы об асимптотическом поведении фундаментальной системы решений, полученные Г. Д. Биркгофом в работах [104, 105].

Еще раз отметим, что вначале рассматривались вопросы поточечной или равномерной равносходимости, а операторы были заданы на конечных интервалах. Случай бесконечного интервала имеет, конечно же, свою специфику. Для случая всей оси В. А. Ильиным и И. Антониу (см. [24–26]) рассматривались вопросы равносходимости на всей оси (в отличие от работ В. А. Марченко [46, 47] и Б. С. Левитана [38, 39], где равносходимость изучалась на компактных подмножествах оси).

Новый импульс тематика получила в 1960-х годах в связи с появлением в работах Н. Данфорда [117], В. П. Михайлова [50] и Г. М. Кесельмана [32] нового понятия — базисности Рисса (или безусловной базисности). Теперь кроме равномерной нормы стали рассматривать норму пространства L_2, а кроме условной сходимости разложений — безусловную. Вообще, начиная с этого времени, количество статей, посвященных теме равносходимости, столь велико, что даже их краткий обзор потребовал бы нескольких десятков страниц, а потому ограничимся упоминанием только направлений исследований и отдельных наиболее знаковых работ.

Так, довольно подробно изучались различия между равносходимостью на любом компакте отрезка и на всем отрезке. Здесь значительный вклад был сделан Саратовской математической школой, в частности, отметим работы А. П. Хромова [83, 85] 1966 и 1975 годов. Вопросы равносходимости на компактах внутри интервала подробно изучались также школой В. А. Ильина, см., например, его работы [21–23] и работу его ученика И. С. Ломова [42].

Изучались вопросы равносходимости для операторов с более общими, нежели регулярные по Биркгофу, условиями. Так, например, в работах А. П. Хромова [82] и Х. Бенцингера [103] для операторов высокого порядка был введен более широкий класс S-регулярных (регулярных по Стоуну) краевых условий. При отсутствии обычной суммируемости спектральных разложений Б. В. Лидским [41] был предложен метод, позволяющий проводить их суммирование методом Абеля подходящего порядка (см. также [35, 84]).

В работах А. А. Шкаликова [89, 90] изучались вопросы безусловной базисности, а также безусловной базисности со скобками системы корневых векторов при регулярных, но не сильно регулярных краевых условиях. Этой проблеме — поиску условий на потенциал, гарантирующих базисность Рисса без скобок в случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий (в частности, периодических и антипериодических условий), посвящены многие работы. Отметим здесь недавние статьи А. С. Макина [44], П. Джакова и Б. С. Митягина [111], А. А. Шкаликова и О. А. Велиева [10].

В работах В. С. Рыхлова [55, 56] изучалась связь между классом гладкости потенциала q и классом гладкости раскладываемой функции f, гарантирующая наличие равномерной на компактах равносходимости (кроме того, были даны оценки скорости равносходимости). Вообще, вопросы скорости равносходимости в зависимости от номера частичной суммы изучались в статьях многих авторов.

Помимо возмущения потенциалом $q(x)$ оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$, изучались более общие функционально-дифференциальные возмущения. Отметим здесь работы А. М. Гомилко и Г. В. Радзиевского [18, 158]. Заметим, что в этих работах, а также в работе А. Г. Баскакова и Т. К. Кацаряна [2], изучается безусловная равносходимость. Отдельной темой стало изучение задач с нелокальными краевыми условиями (см., например, работу [76] и библиографию в ней).

Обзор этих и других классических результатов по теме равносходимости можно найти в подробной работе А. М. Минкина [157] 1999 года.

В работах П. Джакова и Б. Митягина [113,115] равномерная равносходимость была доказана уже для любых регулярных краевых условий, но только при дополнительном условии Колмогорова—Селиверстова—Плесснера[1] на функцию f или на функцию u — первообразную потенциала q.

Кратко остановимся на структуре статьи, параллельно отмечая основные элементы новизны этой нашей работы в сравнении с предшествующими.

Первые 4 раздела имеют подготовительный характер. В разделе 2 мы даем определение оператора вида (1.2) с регулярными краевыми условиями и доказываем теорему о подобии оператору вида (1.1). Хотя вид оператора, осуществляющего подобие, известен, наше утверждение является новым, поскольку мы работаем с коэффициентами-распределениями. В третьем разделе мы вводим оператор Дирака с суммируемым потенциалом, и показываем, как можно перейти к случаю внедиагональной матрицы P. Четвертый и пятый разделы посвящены изучению невозмущенных операторов Штурма—Лиувилля и Дирака (когда $q \equiv P \equiv 0$). Результаты этих двух разделов, в основном, хорошо известны. Тем не менее, нам приходится выводить оценки на норму резольвенты

[1]Функция f удовлетворяет условию Колмогорова—Селиверстова—Плесснера, если ее коэффициенты Фурье $\{f_n\}$ суммируемы с логарифмическим весом: $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 \ln(|n|+1) < \infty$.

$\|(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda I)^{-1}\|_{L_p\to L_q}$, поскольку в случае p, $q\neq 2$ мы затрудняемся дать ссылку на классические монографии.

Ключевым для дальнейших исследований является шестой раздел работы, где мы находим асимптотическое поведение фундаментальной матрицы решений системы (1.4) при больших значениях комплексного спектрального параметра λ. Уже беглый взгляд на систему (1.4) позволяет сделать вывод, что главными членами асимптотики должны быть функции вида $\exp\{i\lambda x\}$, асимптотическое поведение которых (рост, убывание или осцилляция) определяется знаком величины $\mathrm{Re}(i\lambda)$. Отсюда видим, что асимптотику функции $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ надо искать в полуплоскостях $\mathrm{Im}\,\lambda>0$ и $\mathrm{Im}\,\lambda<0$ в комплексной плоскости. При этом в полуплоскости будет наблюдаться либо экспоненциальный рост, либо экспоненциальное убывание решений. Осцилляция возникает лишь в горизонтальной полосе комплексной плоскости. Ясно, что задачи об асимптотическом поведении собственных значений, собственных функций и т. д. операторов $\mathcal{L}_{q,U}$ и $\mathcal{L}_{P,U}$ требуют знания асимптотики $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ именно в этих полосах. В силу этих причин мы не можем использовать результаты недавней работы М. М. Маламуда и Л. Л. Оридороги [149], в которой изучались системы вида (1.4) с $\mathrm{C}(x,\lambda)=0$, но асимптотические представления были получены в «суженных» секторах $|\arg\lambda|\in(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$. Такие секторы не покрывают всю комплексную плоскость, и получить информацию о поведении решений в критических полуполосах из результатов [149] не удается. Результаты работы [160], в которой найдено асимптотическое поведение функции $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ в замкнутых полуплоскостях $|\arg\lambda|\in[0,\pi]$, также оказались недостаточными для наших нужд. Мы работаем в *расширенных полуплоскостях* $\mathrm{Im}\,\lambda>-r$ и $\mathrm{Im}\,\lambda<r$ для произвольного $r>0$, что позволяет затем легко перейти к изучению поведения $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ в полосах $|\mathrm{Im}\,\lambda|<r$.

Крайне важными являются и результаты раздела 7. Суть заключается в выборе функций $\Upsilon(\lambda)$, которые оценивают остаточные члены в асимптотических представлениях для $\mathrm{Y}(x,\lambda)$, и в тех оценках, которые можно получить на $\Upsilon(\lambda)$ в зависимости от гладкости элементов матрицы $\mathrm{A}(x)$. Используя тонкие результаты типа теоремы Карлесона—Ханта об ограниченности максимального оператора Карлесона в пространствах L_p и в весовых пространствах $L_p(w)$ с весом из классов Макенхаупта, нам удается исследовать различные шкалы пространств. Мы рассматриваем случаи $a_{ij}\in L_p$, $p\in[1,2]$; $a_{ij}\in B^{\theta}_{1,\infty}$, $\theta\in(0,1]$; и $a_{ij}\in B^{\theta}_{p,p'}$, $p\in[1,2]$, $\theta\in(0,1/p)$ (пространства Бесова). Очень важно еще и то, что константы в наших оценках оказываются равномерными на шарах $\|a_{ij}\|_p\leqslant R$ и $\|a_{ij}\|_{p,\theta}\leqslant R$ (за исключением предельного случая $p=1$, $\theta=0$).

Оценки раздела 7 являются абсолютно новыми и позволяют нам существенно усилить результаты об асимптотике собственных значений и собственных функций (в сильно регулярном случае). Эти результаты мы приводим в разделе 8 (для оператора Штурма—Лиувилля) и разделе 9 (для системы Дирака).

Далее мы намечаем следующую цель — теоремы о базисности системы собственных и присоединенных функций и равносходимости спектральных разложений. Поскольку суть нашего метода заключена в интегрировании резольвенты, нам необходимы оценки ее нормы. Мы получаем эти оценки в разделе 10 (для системы Дирака) и 11 (для оператора Штурма—Лиувилля). Теоремы раздела 10 повторяют работу [73], но с одним важным усилением: нам удается доказать равномерность констант и ширины полосы $|\mathrm{Im}\,\lambda|<r$ от нормы потенциала. В этих же разделах мы вводим результаты об асимптотическом поведении двумерных спектральных проекторов для случая слабо регулярных краевых условий. Как и в сильно регулярном случае, нам удается показать, что константы в этих оценках зависят только от краевых условий и нормы потенциала.

В разделе 12 мы доказываем базисность Рисса (в сильно регулярном случае) и базисность Рисса из подпространств (в слабо регулярном случае). Эти результаты уже были нами представлены в работах [63, 161].

Раздел 13 посвящен вопросам равномерности константы Рисса базиса из корневых функций оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$. Мы рассматриваем два случая и доказываем равномерность по компактам в $L_1[0,\pi]$ и равномерность по шарам в $L_\varkappa[0,\pi]$ при $\varkappa>1$. Эти результаты частично повторяют работы [60, 64].

Вопросы равносходимости спектральных разложений для оператора Дирака мы изучаем в разделе 14. Мы ставим вопрос в общем виде, изучая тройки пространств $f\in L_\mu$ (пространство раскладываемых функций), $P\in L_\varkappa$ (пространство потенциалов) и $S_m-S^0_m\to 0$ в норме L_ν. В изложении мы следуем работе [73].

Завершает работу раздел, где мы доказываем базисность системы корневых функций оператора Дирака в различных пространствах, отличных от $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$. Здесь мы имеем дело со шкалой пространств Соболева $\mathbb{H}^\theta_U$, $\theta \in (0,1]$, шкалой L_p, $p \neq 2$, и шкалой пространств Бесова $B^\theta_{p,q}$, $\theta \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty)$. Для оператора Штурма—Лиувилля в этой работе мы не доказываем результаты о равносходимости и, соответственно, о базисности в других пространствах. Частично эти результаты уже получены авторами (см. [74, 75]), но они требуют дополнительных рассуждений и будут представлены в отдельной работе. Отметим лишь, что еще в [72] была доказана равномерная равносходимость в случае $f \in L_2[0,\pi]$ и $q \in W_2^{-1}[0,\pi]$, но только для краевых условий Дирихле.

В приложения вынесены необходимые нам факты, которые не являются общеизвестными. В основном они связаны с теорией интерполяции. Там же помещены некоторые теоремы о базисах Рисса.

В целом работа носит обзорный характер. В том числе, в ней представлены результаты, полученные авторами совместно с А. А. Шкаликовым в работах [68, 70, 71].

2. Определение оператора Штурма—Лиувилля с коэффициентами-распределениями

Наиболее общим видом линейного дифференциального выражения второго порядка является

$$l(y) = \tau_{02}y'' + (\tau_{11}y')' + (\tau_{20}y)'' + \tau_{01}y' + (\tau_{10}y)' + \tau_{00}y. \tag{2.1}$$

Функции τ_{jk} здесь предполагаются регулярными или обобщенными функциями — точные условия на коэффициенты появятся ниже. Сразу же заметим, что, раскрывая надлежащим образом скобки, это дифференциальное выражение можно привести к виду

$$\ell(y) = -(\tau_1 y')' + i(\sigma y)' + i\sigma y' + \tau_0 y, \tag{2.2}$$

если положить

$$\begin{cases} \tau_1 = -\tau_{02} - \tau_{11} - \tau_{20}, \\ 2i\sigma = \tau_{20}' - \tau_{02}' + \tau_{01} + \tau_{10}, \\ 2\tau_0 = \tau_{20}'' + \tau_{02}'' + \tau_{10}' - \tau_{01}' + 2\tau_{00} \end{cases}$$

(все производные понимаются в смысле распределений). Далее мы будем работать с дифференциальными выражениями, записанными именно в таком виде. Причины такого выбора состоят в следующем. Прежде всего, выражение (2.2) однозначно определяется функциями τ_1, σ и τ_0. Преимущество записи (2.2) перед такими, например, как $p_0y'' + p_1y' + p_2y$, в том, что наше выражение является формально симметрическим в L_2 при вещественных τ_1, σ и τ_0.

В этой работе мы будем иметь дело только с конечным отрезком $[a,b] \ni x$. Что касается условий на коэффициенты, то мы потребуем

$$\tau_1 \in H^1[a,b], \quad \sigma \in L_2[a,b] = H[a,b], \quad \tau_0 \in H^{-1}[a,b], \tag{2.3}$$
$$\tau_1(x) > 0,$$

где $H^1[a,b]$ — классическое пространство Соболева функций с квадратично суммируемой производной, а $H^{-1}[a,b]$ — симметричное к $H^1[a,b]$ относительно $L_2[a,b]$ пространство. Более точно, мы предполагаем, что $\tau_0 = \mathcal{T}'$, где $\mathcal{T} \in L_2[a,b]$, т. е. что τ_0 есть функционал на $H^1[a,b]$, определенный равенством

$$\langle \tau_0, \varphi \rangle = -\int\limits_a^b \mathcal{T}(x)\varphi'(x)\,dx, \quad \varphi \in H^1[a,b].$$

Выбор пространств в условиях (2.3) продиктован нашим желанием построить корректно определенный оператор $\mathcal{L}$ из H^1 в H^{-1}. Сужая его затем на область $\mathcal{D} = \mathcal{L}^{-1}(H)$, мы получим корректно определенный неограниченный оператор в $H = L_2[a,b]$. Учитывая, что

$$\langle \tau_0 f, g \rangle = -\langle \mathcal{T}, (fg)' \rangle \quad \text{и} \quad \langle (\sigma f)', g \rangle = -\langle \sigma, fg' \rangle,$$

выбранный нами класс функций для τ_0 и σ является «максимально сингулярным», поскольку для f, $g \in H^1$ имеем: $(fg)'$, $fg' \in H$.

Условия $\tau_1 \in H^1$, $\tau_1(x) > 0$ могут показаться при таком подходе чересчур ограничительными: для корректной определенности оператора $\mathcal{L}$ из H^1 в H^{-1} достаточно потребовать $\tau_1 \in L_\infty[a,b]$.

Оказывается, однако, что отказ от требования $\tau_1 \in H^1$ приводит к оператору, спектральные свойства которого весьма далеки от свойств оператора $-y''$.

Поскольку цель настоящей работы — перенести основные спектральные свойства (асимптотика собственных значений, базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций, равносходимость спектральных разложений и т. д.) на весь класс операторов, то мы ограничимся рассмотрением положительных функций $\tau_1 \in H^1$. Отметим еще, что поскольку $H^1[a,b] \subset C[a,b]$, то условие $\tau_1 > 0$ фактически означает $\tau_1(x) \geqslant \tau_{min} > 0$.

Заметим, что для выражений общего вида (2.1) условия на коэффициенты вида

$$\tau_{jk} \in H^{-1+\min\{j,k\}}, \qquad \tau_{02} > 0$$

приводят к тому же классу дифференциальных выражений.

Определение 2.1. Определим *максимальный оператор* $\mathcal{L}_M$, порожденный дифференциальным выражением $l(z)$ на области определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_M) = \{z \mid z,\ z^{[1]} \in W_1^1[a,b],\ l(z) \in L_2[a,b]\},$$
$$l(z) = -(z^{[1]})' + \frac{i\sigma - \mathcal{T}}{\tau_1} z^{[1]} - \frac{\sigma^2 + T^2}{\tau_1} z,$$

где

$$z^{[1]} = \tau_1 z' - (\mathcal{T} + i\sigma) z$$

— первая квазипроизводная, $\mathcal{T}' = \tau_0$. *Минимальный оператор* $\mathcal{L}_m$ определим как сужение оператора $\mathcal{L}_M$ на область

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_m) = \{z \mid z,\ z^{[1]} \in W_1^1[a,b],\ l(z) \in L_2[a,b],\ z(a) = z^{[1]}(a) = z(b) = z^{[1]}(b) = 0\}.$$

Замечание 2.1. Поскольку $z \in W_1^1[a,b]$, то функция $(\mathcal{T} + i\sigma)z$ попадает в пространство $L_2[a,b]$, а значит, условие $z^{[1]} \in W_1^1[a,b]$ влечет $\tau_1 z' \in L_2[a,b]$. Учитывая, что функция $1/\tau_1$ ограничена, получаем $z' \in L_2[a,b]$, т. е. $z \in W_2^1[a,b]$.

Определение 2.2. Назовем выражение

$$\ell^*(z) = -(\overline{\tau}_1 z')' + i(\overline{\sigma} z)' + i\overline{\sigma} z' + \overline{\tau}_0 z$$

формально сопряженным к выражению ℓ. Соответствующие максимальный и минимальный операторы обозначим $\mathcal{L}_{*,M}$ и $\mathcal{L}_{*,m}$.

Утверждение 2.1 (формула Лагранжа)**.** *Для любых функций $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_M)$, $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{*,M})$ справедливо тождество*

$$\langle \mathcal{L}_M f, g \rangle = \langle f, \mathcal{L}_{*,M} g \rangle + [f,g]_a^b, \tag{2.4}$$

где

$$[f,g]_a^b = \tau_1 (f\overline{g}' - f'\overline{g})\big|_a^b + 2i\sigma f\overline{g}\big|_a^b.$$

Доказательство. Равенство (2.4) получается интегрированием по частям

$$\langle \ell(f), g \rangle = (-\tau_1 f' + (\mathcal{T} + i\sigma) f)\overline{g}\big|_a^b + \int_a^b (\tau_1 f' - (\mathcal{T} + i\sigma) f)\overline{g}' + (i\sigma - \mathcal{T}) f'\overline{g}\, dx,$$

$$\langle f, \ell^*(g) \rangle = (-\tau_1 \overline{g}' + (\mathcal{T} - i\sigma)\overline{g}) f\big|_a^b + \int_a^b (\tau_1 \overline{g}' + (i\sigma - \mathcal{T})\overline{g}) f' - (i\sigma + \mathcal{T})\overline{g}' f\, dx.$$

Остается вычесть из первого равенства второе. □

В частности, отсюда следует равенство

$$\langle \mathcal{L}_M f, g \rangle = \langle f, \mathcal{L}_{*,m} g \rangle, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_M),\ g \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{*,m}).$$

Теперь докажем теорему существования и единственности для системы $n \times n$

$$\mathbf{y}' = \mathrm{T}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x)$$

с начальным условием $\mathbf{y}(\xi) = \mathbf{y}^0$ и суммируемыми вектор-функцией $\mathbf{f}(x)$ и матрицей-функцией $\mathrm{T}(x)$. Эта теорема, конечно, хорошо известна (хотя обычно требуют непрерывность $\mathbf{f}(x)$ и $\mathrm{T}(x)$).

Нам здесь будут нужны, в первую очередь, оценки на норму решения и норму разности решений при варьировании ξ, $\mathbf{f}$ и T. Для удобства будем рассматривать отрезок $[0,1]$. Положим

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathrm{AC}} := \sum_{j=1}^{n}\int_0^1 |y_j(x)| + |y_j'(x)|\,dx, \qquad \|\mathbf{y}\|_{\xi} := \sum_{j=1}^{n}|y_j(\xi)| + \int_0^1 |y_j'(x)|\,dx,$$

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathrm{C}} = \|\mathbf{y}\|_{L_\infty} := \max_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ x\in[0,1]}} |y_j(x)|, \qquad \|\mathbf{y}\|_{L_p} = \left(\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 |y_j(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

и сразу же заметим, что $\|\mathbf{y}\|_{\mathrm{AC}} \leqslant 2\|\mathbf{y}\|_{\xi}$ для любого $\xi\in[0,1]$ и $\|\mathbf{y}\|_{\mathrm{C}} \leqslant \|\mathbf{y}\|_{\mathrm{AC}}$.

Для фиксированного вектора $\mathbf{y}$ положим

$$|\mathbf{y}| := \max_{1\leqslant j\leqslant n} |y_j|.$$

Введем обозначения

$$|\mathbf{f}(x)| := \max_{1\leqslant j\leqslant n} |f_j(x)|$$

для произвольной вектор-функции $\mathbf{f}(x)$ и

$$|\mathrm{T}(x)| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^{n} |t_{jk}(x)|$$

для произвольной матрицы-функции $\mathrm{T}(x)$.

Для краткости будем писать $\mathbf{f}\in L_1[0,1]$ или $\mathrm{T}\in L_1[0,1]$ в том смысле, что все $f_j(x)\in L_1[0,1]$ или $t_{jk}(x)\in L_1[0,1]$. Определим также матричные нормы

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{L_p} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 |t_{jk}(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{C}} = \max_{1\leqslant j,\,k\leqslant n} |t_{jk}(x)|,$$

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{\mathrm{AC}} = \|\mathrm{T}(x)\|_{L_1} + \|\mathrm{T}'(x)\|_{L_1}.$$

Теорема 2.I. *Пусть матрица* T *системы*

$$\mathbf{z}' = \mathrm{T}(x)\mathbf{z} + \mathbf{f}(x), \qquad x\in[0,1], \quad \mathbf{z}(\xi) = \mathbf{z}^0, \quad \mathbf{f}\in L_1[0,1] \tag{2.5}$$

размера $n\times n$ *лежит в* $L_1[0,1]$. *Тогда система* (2.5) *имеет единственное решение* $\mathbf{z}(x)\in \mathrm{AC}[0,1]$. *При этом*

$$\|\mathbf{z}\|_{\mathrm{AC}} \leqslant (1+4\tau e^{\tau})\|\mathbf{g}\|_{\mathrm{AC}}, \qquad |\mathbf{z}(x)| \leqslant e^{\tau(x)}\|\mathbf{g}\|_{\mathrm{C}}, \tag{2.6}$$

где

$$\tau(x) = \left|\int_\xi^x |\mathrm{T}(t)|\,dt\right|, \qquad \tau = \max_{x\in[0,1]}\tau(x), \qquad \mathbf{g}(x) = \mathbf{z}^0 + \int_\xi^x \mathbf{f}(t)\,dt.$$

Доказательство. Запишем систему (2.5) в интегральном виде

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{g}(x) + (\mathrm{T}\mathbf{z})(x), \quad \text{где} \quad (\mathrm{T}\mathbf{z})(x) = \int_\xi^x \mathrm{T}(t)\mathbf{z}(t)\,dt$$

и, прежде всего, докажем оценку

$$|(\mathrm{T}^l\mathbf{z})(x)| \leqslant \frac{\tau^l(x)}{l!}\|\mathbf{z}\|_C, \quad l\geqslant 1. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что

$$|(\mathrm{T}\mathbf{z})(x)| \leqslant \tau(x)\|\mathbf{z}\|_C.$$

Далее проведем доказательство по индукции. Пусть оценка уже получена для $l-1$, тогда

$$|(\mathrm{T}^l\mathbf{z})(x)| \leqslant \left|\int\limits_\xi^x |\mathrm{T}(t)|\cdot|(\mathrm{T}^{l-1}\mathbf{z})(t)|\,dt\right| \leqslant \|\mathbf{z}\|_{\mathrm{C}}\left|\int\limits_\xi^x |\mathrm{T}(t)|\frac{\tau^{l-1}(t)}{(l-1)!}\,dt\right| =$$
$$= \|\mathbf{z}\|_{\mathrm{C}}\left|\int\limits_\xi^x \frac{\tau^{l-1}(t)}{(l-1)!}\,d\tau(t)\right| = \frac{\tau^l(x)}{l!}\|\mathbf{z}\|_{\mathrm{C}},$$

и оценка (2.7) доказана. Отсюда следует другая оценка:

$$\|\mathrm{T}^l\mathbf{z}\|_{\mathrm{AC}} \leqslant 2\|\mathrm{T}^l\mathbf{z}\|_\xi \leqslant 2\int\limits_0^1 |\mathrm{T}(x)|\cdot|(\mathrm{T}^{l-1}\mathbf{z})(x)|\,dx \leqslant 2\|\mathbf{z}\|_{\mathrm{C}}\int\limits_0^1 |\mathrm{T}(x)|\frac{\tau^{l-1}(x)}{(l-1)!}\,dx \leqslant \frac{4\tau^l}{(l-1)!}\|\mathbf{z}\|_{\mathrm{C}}.$$

В частности,

$$\|\mathrm{T}^l\|_{\mathrm{AC}} \leqslant \frac{4\tau^l}{(l-1)!}. \tag{2.8}$$

Теперь решение уравнения (2.5) мы можем записать в виде ряда

$$\mathbf{z}(x) = \sum_{l=0}^\infty (\mathrm{T}^l\mathbf{g})(x), \tag{2.9}$$

причем в силу (2.7) и (2.8) этот ряд сходится и в каждой точке $x \in [0,1]$, и по норме пространства $\mathrm{AC}[0,1]$. При этом

$$|\mathbf{z}(x)| \leqslant \sum_{l=0}^\infty |(\mathrm{T}^l\mathbf{g})(x)| \leqslant \|\mathbf{g}\|_{\mathrm{C}}\sum_{l=0}^\infty \frac{\tau^l(x)}{l!} \leqslant e^{\tau(x)}\|\mathbf{g}\|_{\mathrm{C}},$$
$$\|\mathbf{z}\|_{\mathrm{AC}} \leqslant \sum_{l=0}^\infty \|\mathrm{T}^l\mathbf{g}\|_{\mathrm{AC}} \leqslant \|\mathbf{g}\|_{\mathrm{AC}}\left(1 + 4\sum_{l=1}^\infty \frac{\tau^l}{(l-1)!}\right) = \|\mathbf{g}\|_{\mathrm{AC}}(1+4\tau e^\tau).$$

Единственность решения доказывается классически: если $\mathbf{z}$ и $\widetilde{\mathbf{z}}$ — два решения системы (2.5), то

$$\mathbf{z} - \widetilde{\mathbf{z}} = \mathrm{T}(\mathbf{z} - \widetilde{\mathbf{z}}) = \dots = \mathrm{T}^l(\mathbf{z} - \widetilde{\mathbf{z}}),$$

откуда $\mathbf{z} - \widetilde{\mathbf{z}} = 0$, поскольку оператор T^l является сжатием в пространстве $\mathrm{AC}[0,1]$ при достаточно большом l. □

Замечание 2.2. При фиксированных ξ, $\mathbf{z}^0$ и $\mathbf{f} \in L_1[0,1]$ решение уравнения (2.5) непрерывно зависит от матрицы $\mathrm{T} \in L_1[0,1]$ в следующем смысле.

Если $\widetilde{\mathbf{z}}$ — решение начальной задачи (2.5) с теми же ξ, $\mathbf{z}^0$ и $\mathbf{f}$, но с другой матрицей $\widetilde{\mathrm{T}}$, то

$$\|\mathbf{z} - \widetilde{\mathbf{z}}\|_{\mathrm{AC}} \leqslant 2\|\mathrm{T} - \widetilde{\mathrm{T}}\|_{L_1}(1+4\tau e^\tau)e^{\widetilde{\tau}}\|\mathbf{g}\|_{\mathrm{AC}}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Положим $\mathbf{u}(x) = \mathbf{z}(x) - \widetilde{\mathbf{z}}(x)$. Эта функция абсолютно непрерывна, равна нулю в точке ξ и удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{u}' = \mathrm{T}(x)\mathbf{u} + (\mathrm{T}(x) - \widetilde{\mathrm{T}}(x))\widetilde{\mathbf{z}}(x).$$

Согласно (2.6),

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathrm{AC}} \leqslant (1+4\tau e^\tau)\left\|\int\limits_\xi^x (\mathrm{T}(t) - \widetilde{\mathrm{T}}(t))\widetilde{\mathbf{z}}(t)\,dt\right\|_{\mathrm{AC}} \leqslant$$
$$\leqslant 2(1+4\tau e^\tau)\left\|\int\limits_\xi^x (\mathrm{T}(t) - \widetilde{\mathrm{T}}(t))\widetilde{\mathbf{z}}(t)\,dt\right\|_\xi = 2(1+4\tau e^\tau)\int\limits_0^1 \left|(\mathrm{T}(x) - \widetilde{\mathrm{T}}(x))\widetilde{\mathbf{z}}(x)\right|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2(1+4\tau e^\tau)\|\mathrm{T} - \widetilde{\mathrm{T}}\|_{L_1}\|\widetilde{\mathbf{z}}\|_{\mathrm{C}} \leqslant 2\|\mathrm{T} - \widetilde{\mathrm{T}}\|_{L_1}(1+4\tau e^\tau)e^{\widetilde{\tau}}\|\mathbf{g}\|_{\mathrm{AC}}.$$

□

Замечание 2.3. Пусть матрица T, функция $\mathbf{f}$ и начальное значение $\mathbf{z}^0$ зависят от параметра λ, меняющегося в области $D \subset \mathbb{C}$.

Предположим, что функции $z_j^0(\lambda)$ и отображения

$$\lambda \mapsto f_j(\cdot, \lambda), \qquad \lambda \mapsto t_{jk}(\cdot, \lambda)$$

из D в $L_1[0,1]$, $1 \leqslant j,\, k \leqslant n$, голоморфны по λ.

Тогда и решение (2.5), отображение $\lambda \mapsto \mathbf{z}(\cdot, \lambda)$ из D в $(\mathrm{AC}[0,1])^n$, голоморфно по $\lambda \in D$.

Доказательство. Голоморфность функции $\mathbf{g}(\cdot, \lambda)$ в $(\mathrm{AC}[0,1])^n$ следует из представления

$$\mathbf{g}(\cdot, \lambda) = \mathbf{z}^0(\lambda) + \int \mathbf{f}(\cdot, \lambda).$$

Голоморфность функции $(\mathrm{T}\mathbf{g})(\cdot, \lambda)$ следует из определения оператора T.

Голоморфность функций $(\mathrm{T}^m\mathbf{g})(\cdot, \lambda)$ устанавливается по индукции. Поскольку функция $\tau(\lambda)$ непрерывна по $\lambda \in D$, то она ограничена на каждом компакте. Тогда оценки (2.8) гарантируют равномерную на этом компакте сходимость ряда (2.9). Теперь голоморфность функции $\mathbf{z}(\cdot, \lambda)$ следует из теоремы Вейерштрасса[1]. $\square$

Вернемся к оператору второго порядка. Заметим, что уравнение

$$\ell(z) - \lambda z = f$$

легко сводится к системе двух уравнений первого порядка

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathcal{T} + i\sigma}{\tau_1} & \dfrac{1}{\tau_1} \\ -\lambda - \dfrac{\sigma^2 + \mathcal{T}^2}{\tau_1} & \dfrac{i\sigma - \mathcal{T}}{\tau_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f \end{pmatrix}$$

заменой $z_1 = z$, $z_2 = z^{[1]}$. Важно то, что все элементы матрицы суммируемы на $[a,b]$, а значит, к этой системе применима теорема 2.I.

Напомним, что оператор F, действующий в гильбертовом (или банаховом) пространстве H, называется *фредгольмовым*, если его область определения плотна в H, образ замкнут, а дефектные числа $\{\alpha, \beta\}$, равные размерностям ядра и коядра, конечны.

Утверждение 2.2. *При любом $\lambda \in \mathbb{C}$ оба оператора $\mathcal{L}_M - \lambda I$ и $\mathcal{L}_m - \lambda I$ фредгольмовы с дефектными числами $\{2, 0\}$ и $\{0, 2\}$ соответственно.*

Доказательство. Согласно формуле Лагранжа, достаточно провести доказательство для оператора $\mathcal{L}_M$. Из теоремы 2.I следует, что его образ равен $L_2[a,b]$, а ядро двумерно. Для доказательства плотности $\mathcal{D}(\mathcal{L}_M)$ проведем следующее рассуждение.

Возьмем произвольную функцию $f \in L_2[a,b]$, приблизим ее с точностью ε функцией $f_1 \in W_1^1[a,b]$. Вычислим квазипроизводную

$$g_1 = f_1^{[1]} \in L_1[a,b],$$

приблизим ее функцией $g_2 \in W_1^1[a,b]$ так, что

$$\|g_2 - g_1\|_{L_1} < \delta.$$

Пользуясь теоремой 2.I, найдем функцию $f_2 \in W_1^1[a,b]$ такую, что $f_2^{[1]} = g_2$ и $f_2(a) = f_1(a)$.

Уменьшая δ, добьемся

$$\|f_2 - f_1\|_{W_1^1} < \varepsilon.$$

Теперь применим к f_2 выражение $\ell - \lambda$ и обозначим

$$\ell(f_2)\lambda f_2 = h_2 \in L_1[a,b].$$

Приблизим h_2 функцией $h_3 \in L_2[a,b]$ так, что

$$\|h_2 - h_3\|_{L_1} < \delta.$$

[1] Мы даем здесь краткое доказательство, подробности см., например, в [5, глава 12].

Пользуясь теоремой 2.I, найдем функцию $f_3 \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_M)$ такую, что $(\mathcal{L}_m - \lambda I)f_3 = h_3$ и $f_3(a) = f_2(a)$, $f_3^{[1]}(a) = f_2^{[1]}(a)$.

Уменьшая δ, добьемся $\|f_3 - f_2\|_{W_1^1} < \varepsilon$. Тогда

$$\|f_3 - f\|_{L_2} < 3\varepsilon.$$

□

Из доказанного утверждения следует, что любой оператор $\mathcal{L}$, для которого $\mathcal{L}_m \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_M$, с непустым резольвентным множеством, обязан иметь область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{z \,|\, z,\ z^{[1]} \in W_1^1[a,b],\ l(z) \in L_2[a,b],\ U_1(z) = U_2(z) = 0\}, \tag{2.11}$$

где U_j, $j = 1, 2,$ — пара линейно независимых линейных форм от $z(a)$, $z(b)$, $z^{[1]}(a)$ и $z^{[1]}(b)$, т. е.

$$U_j(z) = a_{j1}z(a) + a_{j2}z^{[1]}(a) + b_{j1}z(b) + b_{j2}z^{[1]}(b), \quad j = 1, 2.$$

Рассмотрим матрицу размера 2×4 краевых условий

$$\mathcal{U} = (A\,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Следуя классическим работам, выделим класс регулярных по Биркгофу краевых условий.

Определение 2.3. Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из столбцов матрицы $\mathcal{U}$ с номерами α и β. Краевые условия U называются *регулярными по Биркгофу*, если выполнено одно из следующих условий:

1) $J_{24} \neq 0$;
2) $J_{24} = 0$, но $\sqrt{\tau_1(b)}J_{14} + \sqrt{\tau_1(a)}J_{32} \neq 0$;
3) $a_{12} = b_{12} = a_{22} = b_{22} = 0$, а $a_{11}b_{21} - b_{11}a_{21} \neq 0$ (условия Дирихле).

Естественно, линейные преобразования строк матрицы $\mathcal{U}$ не меняют краевых условий. Пользуясь этим, вид матрицы можно упростить — это пригодится нам в дальнейшем.

Утверждение 2.3. *В случае* 1) *матрица краевых условий приводится к виду*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 1 & b_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 & b_{21} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

В случае 2) *матрица приводится к одному из следующих видов*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & 1 \\ 1 & 0 & b_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

где в первом варианте $a_{12}b_{21} \neq -\sqrt{\dfrac{\tau_1(b)}{\tau_1(a)}}$, *а во втором* $a_{21}b_{12} \neq -\sqrt{\dfrac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}}$.

В случае 3) *матрица приводится к виду*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$J = \begin{pmatrix} a_{12} & b_{12} \\ a_{22} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

В первом случае ее ранг равен двум, а в третьем нулю. Тогда во втором случае ее ранг равен единице. Если ранг равен двум, то домножая матрицу $\mathcal{U}$ на J^{-1}, придем к виду (2.12). В третьем случае домножим $\mathcal{U}$ на $\begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} \\ a_{21} & b_{21} \end{pmatrix}^{-1}$ и получим вид (2.14). Остается разобраться со случаем 2). Так как здесь ранг матрицы J равен одному, то линейным преобразованием можем получить

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & 0 & b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Возможны два случая: $b_{12} \neq 0$ или $b_{12} = 0$. В первом случае поделим первую строку на b_{12}. Возможны вновь два подслучая: $a_{21} \neq 0$ или $a_{21} = 0$. В первом подслучае поделим вторую строку на a_{21} и получим первый вариант в (2.13). При этом

$$J_{14} + \sqrt{\frac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}} J_{32} = -1 - \sqrt{\frac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}} a_{12} b_{21} \neq 0.$$

Если же $a_{21} = 0$, то $b_{21} \neq 0$. Поделим вторую строку на b_{21} и получим

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $J_{14} + \sqrt{\dfrac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}} J_{32} \neq 0$, то видим, что $a_{12} \neq 0$. Тогда деление первой строки на a_{12} приводит матрицу к частному случаю второго вида в (2.13). При этом $a_{21} b_{12} = 0 \neq -\sqrt{\dfrac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}}$.

Неразобранным остался еще случай $b_{12} = 0$, т. е.

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 & b_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$J_{14} + \sqrt{\frac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}} J_{32} = -\sqrt{\frac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}} a_{12} b_{21} \neq 0,$$

т. е. оба числа a_{12} и b_{21} отличны от нуля. Тогда деление первой строки на a_{12}, а второй на b_{21} приводит матрицу к виду

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 & b_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

что является частным случаем второго варианта в (2.13). При этом $a_{21} b_{12} = 0 \neq -\sqrt{\dfrac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}}$. □

Утверждение 2.4. *Оператор $\mathcal{L}$ порождает на $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ билинейную форму*

$$l[f,g] = \int_a^b \tau_1(x) f' g' \, dx + i \int_a^b \sigma(x)(f'g - fg') \, dx - \int_a^b \mathcal{T}(x)(fg)' \, dx + t[f,g],$$

где вид терминальной формы t зависит от краевых условий. А именно, в случае 1)

$$t[f,g] = h_1 f(b) g(b) + h_2 f(a) g(b) + h_3 f(b) g(a) + h_4 f(a) g(a)$$

для некоторых $h_j \in \mathbb{C}$, а в случае 3) $t[f,g] \equiv 0$.

В случае 2) *возможны два варианта*:

$$t[f,g] = h_0 f^{[1]}(a) g(b) + h_1 f(b) g(b) + h_2 f(a) g(b)$$

или

$$t[f,g] = h_0 f^{[1]}(b) g(a) + h_3 f(b) g(a) + h_4 f(a) g(a).$$

Доказательство. В выражении $\langle l(f), g \rangle$ проведем интегрирование по частям. Получим

$$l[f,g] = \int_a^b f^{[1]} g' \, dx - f^{[1]} g \big|_a^b + \int_a^b (i\sigma - \mathcal{T}) f' g \, dx + \int_a^b \frac{\mathcal{T}^2 + \sigma^2}{\tau_1} f g \, dx -$$

$$- \int_a^b \frac{\sigma^2 + \mathcal{T}^2}{\tau_1} f g \, dx = \int_a^b \tau_1 f' g' \, dx - f^{[1]} g \big|_a^b + i \int_a^b \sigma (f'g - fg') \, dx - \int_a^b \mathcal{T}(f'g + fg') \, dx.$$

Вид формы $t[f,g]$ получается непосредственно из вида краевых условий (2.12), (2.13) или (2.14). □

Замечание 2.4. При выборе функционального класса τ_0 мы ограничились пространством функций из $H^{-1}[a,b]$, которые являются обобщенными производными функций из $L_2[a,b]$. Все пространство $H^{-1}[a,b]$ при этом шире: мы можем рассмотреть в качестве τ_0 произвольный функционал вида

$$\langle \tau_0 f, g\rangle = -\int_a^b \mathcal{T}(x)(fg)'\,dx + h_a f(a)g(a) + h_b f(b)g(b).$$

Оказывается, однако, что такое обобщение не меняет класса операторов. Действительно, добавление в форму $l[f,g]$ двух новых слагаемых приводит просто к изменению матрицы краевых условий. В случае 1) новая матрица примет вид

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_{11} - h_a & 1 & b_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 & b_{21} + h_b & 1 \end{pmatrix}.$$

В двух подслучаях в 2), соответственно,

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_{11} + h_b + b_{21}^2 h_a & a_{12} & b_{11} & 1 \\ 1 & 0 & b_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} a_{11} + h_a + a_{21}^2 h_b & 1 & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, в случае 3) новые добавки вообще не меняют формы t, оставляя ее нулевой. Во всех трех случаях мы не выходим за пределы класса регулярных по Биркгофу операторов.

Остается заметить, что связь между оператором $\mathcal{L}$ и его билинейной формой взаимно однозначна. Первая часть этого утверждения (оператор $\mathcal{L}$ однозначно порождает форму l) очевидна, а вторая следует из первой теоремы о представлении (см., например, [27]). Необходимо, правда, проверить применимость этой теоремы, т. е. надо доказать, что все регулярные по Биркгофу операторы $\mathcal{L}$ вида (2.11) плотно определены, замкнуты и m-секториальны. Это будет проделано далее, что и даст полное оправдание нашего выбора функционального класса для коэффициента τ_0.

Напомним, что если два оператора A_1 и A_2 в гильбертовом пространстве с плотными областями определения подобны, т. е. существует такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор T, что

$$A_2 = T^{-1}A_1T, \quad \text{а} \quad \mathcal{D}(A_2) = T^{-1}\mathcal{D}(A_1),$$

то из замкнутости одного оператора следует замкнутость другого. Подобные операторы имеют одинаковый спектр, в частности, если спектр оператора A_1 состоит из собственных значений $\sigma(A_1) = \{\lambda_n\}$, то и $\sigma(A_2) = \{\lambda_n\}$, причем кратности этих собственных значений для A_1 и A_2 совпадают.

Если $\{e_n\}$ — система собственных и присоединенных векторов оператора A_1, то $\{T^{-1}e_n\}$ — система собственных и присоединенных векторов оператора A_2. Отсюда следует, что эти системы обладают одинаковыми геометрическими свойствами (полнота, минимальность, базисность Рисса, базисность Рисса со скобками и т. д.).

Утверждение 2.5. *Оператор $\mathcal{L}$, определенный в (2.11) на функциях $z(\xi)$ переменной $\xi \in [a,b]$, подобен оператору $\widetilde{\mathcal{L}}$, порожденному в пространстве $L_2[0,c]$ дифференциальным выражением*

$$\widetilde{l}(y) = -y''(x) + q(x)y(x) := -(y^{[1]}(x))' - u(x)y^{[1]}(x) - u^2(x)y(x)$$

и краевыми условиями $\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{A}, \widetilde{B})$. Здесь x — новая независимая переменная, связанная с ξ заменой

$$x = \omega(\xi) = \int_a^\xi \tau_1^{-1/2}(t)\,dt, \qquad c = \omega(b), \qquad y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x),$$

$$q(x) = u'(x) = \frac{\frac{d^2}{d\xi^2}\tau_1(\xi)}{4} - \frac{(\frac{d}{d\xi}\tau_1(\xi))^2}{16\tau_1(\xi)} - \frac{\sigma^2(\xi)}{\tau_1(\xi)} + \tau_0(\xi). \tag{2.15}$$

Подобие $\widetilde{\mathcal{L}} = W^{-1}\mathcal{L}W$ осуществляется ограниченным и ограниченно обратимым оператором

$$z = Wy, \qquad W:\, L_2[0,c] \to L_2[a,b],$$

$$z(\xi) = y(\omega(\xi)) \cdot \frac{e^{is(\xi)}}{\sqrt[4]{\tau_1(\xi)}}, \qquad s(\xi) = \int\limits_a^{\xi} \frac{\sigma(t)}{\tau_1(t)}\, dt. \tag{2.16}$$

При этом условия $\tau_1 \in H^1[a,b]$, $\tau_1(\xi) > 0$, $\sigma \in L_2[a,b]$, $\tau_0 \in H^{-1}[a,b]$ *влекут* $q \in H^{-1}[0,c]$. *Матрица новых краевых условий равна*

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \left(\widetilde{A}\,\widetilde{B}\right), \qquad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \kappa_{00}a_{11} + \varkappa_0\kappa_{00}a_{12} & \kappa_{10}a_{12} \\ \kappa_{00}a_{21} + \varkappa_0\kappa_{00}a_{22} & \kappa_{10}a_{21} \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{B} = \begin{pmatrix} \kappa_{01}b_{11} + \varkappa_1\kappa_{01}b_{12} & \kappa_{11}a_{12} \\ \kappa_{01}b_{21} + \varkappa_1\kappa_{01}b_{22} & \kappa_{11}a_{21} \end{pmatrix},$$

где

$$\kappa_{00} = \tau_1^{1/4}(a), \qquad \kappa_{10} = \tau_1^{-1/4}(a), \qquad \kappa_{01} = \tau_1^{1/4}(b)e^{-is(b)}, \qquad \kappa_{11} = \tau_1^{-1/4}(b)e^{-is(b)},$$

а числа $\varkappa_j$ *однозначно определяются функциями* τ_1 *и* σ. *При этом новые краевые условия* $\widetilde{U}$ *регулярны тогда и только тогда, когда регулярны условия* U. *Оператор* $\widetilde{\mathfrak{L}}$ *имеет область определения*

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}}) = W^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{y|\ y,\, y^{[1]} \in W_1^1[0,c],\ \widetilde{l}(y) \in L_2[0,c], \quad \widetilde{U}_1(y) = \widetilde{U}_2(y) = 0\}.$$

Доказательство. Заметим, что оператор W ограничен и ограниченно обратим. Действительно,

$$\int\limits_a^b |z(\xi)|^2\, d\xi = \int\limits_0^c |y(x)|^2 \frac{e^{2\operatorname{Im} s(\omega^{-1}(x))}}{\tau_1(\omega^{-1}(x))}\, dx,$$

где функции

$$s(\omega^{-1}(x)) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\tau_1(\omega^{-1}(x))}$$

ограничены. Проверка равенства

$$W\widetilde{l}(y) = l(z), \quad \text{где } z = Wy,$$

идейно тривиальна, хотя технически достаточно громоздка. Опишем основные шаги. Действуя в пространстве распределений, выражение $\ell(z)$ запишем в виде

$$\ell(z) = -\tau_1 z'' - \tau_1' z' + 2i\sigma z' + i\sigma' z + \tau_0 z.$$

Дифференцируя (2.16), получим

$$z'(\xi) = \left(y'(x)\tau_1^{-3/4}(\xi) - \frac{1}{4}y(x)\tau_1'(\xi)\tau_1^{-5/4}(\xi) + iy(x)\sigma(\xi)\tau_1^{-5/4}(\xi)\right)e^{is(\xi)}.$$

Продолжая действовать так же, найдем $z''(\xi)$ и после подстановки и сокращения части слагаемых получим выражение

$$l(y) = -y''(x) + q(x)y(x).$$

Заметим, что функция $q(x)$, определенная в (2.15), лежит в $H^{-1}[a,b]$. Действительно, производная τ_1' по переменной ξ квадратично суммируема. Тогда $\tau_1'' \in H^{-1}[a,b]$. Сама функция τ_1 непрерывна и отделена от нуля. Отсюда

$$\frac{(\tau_1')^2}{\tau_1} \in L_1[a,b] \subset H^{-1}[a,b].$$

По тем же причинам

$$\frac{\sigma^2}{\tau_1} \in L_1[a,b].$$

Наконец, $\tau_0 \in H^{-1}[a,b]$ в силу (2.3).

Остается сказать, что функция f переменной ξ принадлежит $H^{-1}[a,b]$ в точности тогда, когда $f(\omega^{-1}(x))$ принадлежит $H^{-1}[0,c]$. Чтобы проверить это, покажем вначале, что для произвольной тестовой $g \in H^1[0,c]$ композиция $g(\omega(\xi)) \in H^1[a,b]$. Имеем

$$\int\limits_a^b \left|\frac{d}{d\xi}g(\omega(\xi))\right|^2 d\xi = \int\limits_a^b \left|\frac{g'(\omega(\xi))}{\sqrt{\tau_1(\xi)}}\right|^2 d\xi = \int\limits_0^c |g'(x)|^2 \frac{dx}{\sqrt{\tau_1(\omega^{-1}(x))}},$$

а композиция

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_1(\omega^{-1}(x))}}$$

двух ограниченных функций также ограничена. Для произвольных функций $f \in H^{-1}[a,b]$ и $g \in H^1[a,b]$

$$\int\limits_0^c f(\omega^{-1}(x))g(x)\,dx = \int\limits_a^b f(\xi)g(\omega(\xi))\frac{d\xi}{\sqrt{\tau_1(\xi)}},$$

где $g(\omega(\xi)) \in H^1[a,b]$, а

$$\frac{1}{\sqrt{\tau_1(\xi)}} \in L_\infty[a,b].$$

Итак, мы проверили, что $q(\cdot) \in H^{-1}[0,c]$. Покажем теперь, что $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = W\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{L}})$. Прежде всего, заметим, что обе функции

$$\frac{e^{is(\xi)}}{\sqrt[4]{\tau_1(\xi)}} \quad \text{и} \quad e^{-is(\xi)}\sqrt[4]{\tau_1(\xi)}$$

абсолютно непрерывны, так что $z(\xi) \in H^1[a,b]$ тогда и только тогда, когда $y(\omega(\xi)) \in H^1[a,b]$. То, что условие $y(x) \in H^1[0,c]$ влечет $y(\omega(\xi)) \in H^1[a,b]$, мы уже показали выше. Обратное также проверяется легко:

$$\int\limits_0^c |y(x)|^2\,dx = \int\limits_a^b |y(\omega(\xi))|^2\frac{d\xi}{\sqrt{\tau_1(\xi)}}.$$

Обратимся к квазипроизводной:

$$\begin{aligned} &z^{[1]}(\xi) = \tau_1(\xi)z'(\xi) - (i\sigma(\xi) + \mathcal{T}(\xi))z(\xi) = \\ &= \left(y'(x)\tau_1^{1/4}(\xi) - \frac{1}{4}y(x)\tau_1'(\xi)\tau_1^{-1/4}(\xi) + iy(x)\sigma(\xi)\tau_1^{-1/4}(\xi) - (i\sigma(\xi)+\mathcal{T}(\xi))y(x)\tau_1^{-1/4}(\xi)\right)e^{is(\xi)} = \\ &\qquad = \left(y'(x)\tau_1^{1/4}(\xi) - \frac{1}{4}y(x)\tau_1'(\xi)\tau_1^{-1/4}(\xi) - \mathcal{T}(\xi))y(x)\tau_1^{-1/4}(\xi)\right)e^{is(\xi)}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что домножение на функцию $e^{is(\xi)}\tau_1^{1/4}(\xi)$ не меняет условия $z^{[1]} \in W_1^1[a,b]$, получаем

$$z^{[1]}(\xi) \in W_1^1[a,b] \Longleftrightarrow y'(x) - \left(\frac{\tau_1'(\xi)}{4\sqrt{\tau_1(\xi)}} + \frac{\mathcal{T}(\xi)}{\sqrt{\tau_1(\xi)}}\right)y(x) \in W_1^1[0,c].$$

Заметим, что добавление к функции $u'(x)$ суммируемых слагаемых $f(x)$ не меняет условия $y^{[1]}(x) \in W_1^1[0,c]$, поскольку $y(x)\cdot\int f(x) \in W_1^1[0,c]$ автоматически, за счет условия $y(x) \in W_1^1[0,c]$. Это означает, что необходимо и достаточно проверить условие

$$y'(x) - y(x)\int\limits_0^x \left(\frac{\tau_1''(\xi)}{4} + \tau_0(\xi)\right)\,dx \in W_1^1[0,c].$$

С другой стороны, дифференцируя по x выражение $\dfrac{\tau_1'(\xi)}{4\sqrt{\tau_1(\xi)}} + \dfrac{\mathcal{T}(\xi)}{\sqrt{\tau_1(\xi)}}$, получаем

$$\frac{\tau_1''(\xi)}{4} + \tau_0(\xi) - \frac{(\tau_1'(\xi))^2}{8\tau_1(\xi)} - \frac{\mathcal{T}(\xi)\tau_1'(\xi)}{2\tau_1(\xi)}.$$

Видим, что различие состоит в двух слагаемых

$$\frac{(\tau_1'(\xi))^2}{16\tau_1(\xi)} - \frac{\mathcal{T}(\xi)\tau_1'(\xi)}{2\tau_1(\xi)},$$

каждое из которых суммируемо, и потому может быть отброшено.

Мы проверили две эквивалентности

$$z \in W_1^1[a,b] \Longleftrightarrow y \in W_1^1[0,c], \qquad z^{[1]} \in W_1^1[a,b] \Longleftrightarrow y^{[1]} \in W_1^1[0,c].$$

Условия $l(z) \in L_2[a,b]$ и $\widetilde{l}(y) \in L_2[0,c]$ эквивалентны, потому что $\widetilde{l}(y) = W^{-1}l(z)$, а оператор W ограничен и ограниченно обратим. Остается найти матрицу $\widetilde{\mathcal{U}}$ краевых условий. Для этого заметим, что

$$z(a) = \frac{y(0)}{\sqrt[4]{\tau_1(a)}} := \frac{y(0)}{\kappa_{00}}, \quad z(b) = \frac{y(c)e^{is(b)}}{\sqrt[4]{\tau_1(b)}} := \frac{y(0)}{\kappa_{01}}.$$

Аналогично,

$$z^{[1]}(a) = \frac{y^{[1]}(0) - \varkappa_0 y(0)}{\kappa_{10}}, \qquad z^{[1]}(b) = \frac{y^{[1]}(c) - \varkappa_1 y(c)}{\kappa_{11}}$$

для некоторых ненулевых κ_{ij} и некоторых $\varkappa_j$. Теперь вид матрицы $\widetilde{\mathcal{U}}$ получается напрямую.

Обсудим регулярность новых краевых условий. Если условия U регулярны и выполнен случай 1), то, в силу равенства

$$\widetilde{J}_{42} = \kappa_{10}\kappa_{11}J_{42},$$

выполнено условие 1) для $\widetilde{U}$. Обратное, естественно, тоже верно.

В случае 2) имеем

$$J_{42} = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{J}_{42} = 0,$$

а тогда

$$\widetilde{J}_{14} = \kappa_{11}\kappa_{00}J_{14} \quad \text{и} \quad \widetilde{J}_{32} = \kappa_{10}\kappa_{01}J_{32}.$$

Видим, что условие

$$\widetilde{J}_{14} + \widetilde{J}_{32} \neq 0$$

эквивалентно условию

$$J_{14} + \sqrt{\frac{\tau_1(a)}{\tau_1(b)}}J_{32} \neq 0.$$

Третий случай очевиден. □

3. Определение оператора Дирака с суммируемым потенциалом

Заметим, что существует два альтернативных вида записи системы Дирака. Мы будем рассматривать систему вида

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где} \tag{3.1}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

в пространстве

$$\mathbb{H} = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}.$$

Функции p_j, $j = 1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Краевые условия и область определения оператора будут обсуждаться ниже. Другой формой записи (см., например, [40]) является

$$\ell_Q(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}' + Q\mathbf{u}, \quad \text{где} \tag{3.2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & q_4(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}.$$

Эти формы записи эквивалентны. Так, замена

$$u_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad u_2 = \frac{i}{2}(y_1 - y_2)$$

сводит систему (3.2) к виду (3.1). Далее мы покажем, что достаточно изучить случай, когда $p_4 = p_1 = 0$ (для системы, записанной в форме (3.2), это эквивалентно равенствам $q_1 = -q_4$, $q_2 = q_3$).

Через $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$ будем обозначать вектор-функции на отрезке $[0,\pi]$, а через

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int\limits_0^\pi (f_1(x)\overline{g_1}(x) + f_2(x)\overline{g_2}(x))\, dx$$

— скалярное произведение в пространстве $\mathbb{H}$. Чтобы не усложнять запись, мы будем писать $\mathbf{f} \in L_p$, имея в виду, что $\mathbf{f} \in L_p[0,\pi] \times L_p[0,\pi]$, или $P \in L_p$, имея в виду, что все компоненты матрицы лежат в L_p. Норму по переменной $x \in [0,\pi]$ в пространстве L_p или в $L_p \times L_p$ будем иногда обозначать $\|\cdot\|_p$.

Перейдем к определению оператора $\mathcal{L}_P$, который мы свяжем с дифференциальным выражением ℓ_P. Прежде всего, определим максимальный оператор

$$\mathcal{L}_{P,M}\,\mathbf{y} := \ell_P(\mathbf{y}), \qquad \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) = \{\mathbf{y} \in AC[0,\pi] : \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}\},$$

и минимальный оператор $\mathcal{L}_{P,m}$, являющийся сужением оператора $\mathcal{L}_{P,M}$ на область

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,m}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(\pi) = 0\}.$$

Здесь $AC[0,\pi] = W_1^1[0,\pi]$ — пространство абсолютно непрерывных функций. Поскольку элементы матрицы P — суммируемые функции, оба слагаемых дифференциального выражения $\ell_P(\mathbf{y})$ корректно определены как функции из $L_1[0,\pi]$. При этом в область определения оператора входят только те функции $\mathbf{y}$, для которых сумма этих слагаемых принадлежит $\mathbb{H}$.

Через $\mathcal{L}_{P^*,M}$ и $\mathcal{L}_{P^*,m}$ будем обозначать максимальный и минимальный операторы, порожденные сопряженным дифференциальным выражением

$$\ell_{P^*}(\mathbf{y}) := B\mathbf{y}' + P^*\mathbf{y}, \qquad \text{где } P^* = \begin{pmatrix} \overline{p_1} & \overline{p_3} \\ \overline{p_2} & \overline{p_4} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 3.1 (формула Лагранжа). *Для любых функций* $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M})$, $\mathbf{g} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P^*,M})$ *справедливо тождество*

$$\langle \mathcal{L}_{P,M}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathcal{L}_{P^*,M}\mathbf{g}\rangle + [\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^\pi, \tag{3.3}$$

где

$$[\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^\pi = -i\, f_1(x)\overline{g_1}(x)|_0^\pi + i\, f_2(x)\overline{g_2}(x)|_0^\pi.$$

Доказательство. Равенство (3.3) получается интегрированием по частям. □

Из этой формулы, в частности, получаем

$$\langle \mathcal{L}_{P,M}\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathcal{L}_{P^*,m}\mathbf{g}\rangle, \qquad \mathbf{f} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}),\ \mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P^*,m}).$$

Из теоремы существования и единственности 2.I вытекает сразу, что система

$$\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f} \quad \text{с условием} \quad \mathbf{y}(c) = \xi$$

имеет единственное решение в пространстве $\mathbf{y} \in (AC[0,\pi])^2$.

Из утверждения 3.1 сразу следует

Утверждение 3.2. *При любом* $\lambda \in \mathbb{C}$ *операторы* $\mathcal{L}_{P,M} - \lambda I$ *и* $\mathcal{L}_{P^*,m} - \overline{\lambda} I$ *фредгольмовы, являются взаимно сопряженными, а их дефектные числа равны* $\{2,0\}$ *и* $\{0,2\}$, *соответственно.*

Перейдем к описанию расширений $\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}_{P,m}$, для которых $\mathcal{L}_{P,m} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{P,M}$. Заметим, что любой такой оператор имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : U_j(\mathbf{y}) = 0, 1 \leqslant j \leqslant \nu\},$$

где U_j — линейные формы от векторов $\mathbf{y}(0)$ и $\mathbf{y}(\pi)$. Эти формы можно считать линейно независимыми и тогда их число ν заключено между 0 и 2. Если мы хотим, чтобы оператор $\mathcal{L}$ имел непустое резольвентное множество, т. е. для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ индексы оператора $\mathcal{L} - \lambda I$ были нулевыми, то, согласно утверждению 3.2, $\nu = 1$.

Таким образом, оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{P,U}$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : U(\mathbf{y}) = 0\}, \quad \text{где}$$

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

причем строки матрицы

$$\mathcal{U} := (C,\, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбца матрицы $\mathcal{U}$.

Определение 3.1. Краевое условие, определенное формой U, называется *регулярным* (по Биркгофу), если

$$J_{14} \cdot J_{23} \neq 0.$$

Оператор Дирака, порожденный регулярным краевым условием U (т. е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения (3.4)), будем называть *регулярным*.

Далее в работе мы будем рассматривать только регулярные краевые условия, так как для данной задачи регулярные операторы сохраняют классические асимптотики для собственных значений и собственных функций.

Без ограничения общности можно считать функции p_1 и p_4 нулевыми. Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 3.3. *Пусть $P(x)$ — произвольная матрица размера 2×2 с элементами $p_j \in L_1[0,\pi]$, $j = 1, 2, 3, 4$, а матрица $\mathcal{U}$ задает регулярные краевые условия. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I$, где*

$$\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\psi(x)-\varphi(x))}, \qquad \widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\varphi(x)-\psi(x))}, \tag{3.5}$$

$$\varphi(x) = \gamma x - \int_0^x p_1(t)dt, \qquad \psi(x) = \int_0^x p_4(t)dt - \gamma x,$$

$$\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (p_1(t) + p_4(t))dt,$$

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C}, \widetilde{D}), \quad \widetilde{C} = C, \quad \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D. \tag{3.6}$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{H}$ оператор умножения на матрицу $W(x)$:

$$W : \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\psi(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Заметим, что этот оператор ограничен, поскольку функции φ и ψ абсолютно непрерывны, и ограниченно обратим. Тогда

$$W^{-1}\ell_P(W\mathbf{f}) = W^{-1}BW\mathbf{f}' + \left(W^{-1}PW + W^{-1}BW'\right)\mathbf{f} =$$
$$= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\mathbf{f}' + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 e^{i(\psi-\varphi)} \\ p_3 e^{i(\varphi-\psi)} & p_4 \end{pmatrix}\mathbf{f} + \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & -\psi' \end{pmatrix}\mathbf{f} = \ell_{\widetilde{P}}(\mathbf{f}) + \gamma\mathbf{f}.$$

Остается найти область определения оператора $W^{-1}\mathcal{L}_{P,U}W$. Заметим, что

$$\mathbf{y} \in AC[0,\pi] \Longleftarrow W^{-1}\mathbf{y} \in AC[0,\pi] \qquad \text{и} \qquad \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H} \Longleftarrow \ell_{\widetilde{P}}(W^{-1}\mathbf{y}) = W^{-1}\ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H},$$

так что для максимального оператора $W^{-1}\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) = \mathcal{D}(\mathcal{L}_{\widetilde{P},M})$. Легко видеть, что

$$W(0) = I, \quad \text{а} \quad W(\pi) = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))dt\right) I.$$

Если $\mathbf{z} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}})$, то $\mathbf{z} = W^{-1}\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U})$. Тогда краевые условия принимают вид

$$C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0 \iff CW(0)\mathbf{z}(0) + DW(\pi)\mathbf{z}(\pi) = 0 \iff$$
$$\iff C\mathbf{z}(0) + \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D\mathbf{z}(\pi) = 0,$$

т. е. $\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C},\, \widetilde{D})$, где $\widetilde{C} = C$, а $\widetilde{D} = \exp\left(\dfrac{i}{2}\displaystyle\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D$. $\square$

Всюду далее в этой работе (если не оговорено обратное) мы будем считать, что преобразования уже проведены (при этом спектральный параметр λ мы заменяем на $\lambda + \gamma$). Таким образом, мы будем рассматривать оператор, порожденный дифференциальным выражением (3.1), где матрица $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2(x),\ p_3(x) \in L_1[0, \pi], \tag{3.8}$$

и регулярными краевыми условиями (3.4). Мы также выделим сильно регулярные операторы Дирака.

Определение 3.2. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ называется *сильно регулярным*, если он регулярен и к тому же $(J_{12} + J_{34})^2 + 4J_{14}J_{23} \neq 0$.

Отметим, что давать определение сильно регулярного краевого условия корректно именно в случае $p_1 \equiv p_4 \equiv 0$. Иначе при одних и тех же краевых условиях оператор Дирака может удовлетворять или не удовлетворять условию сильной регулярности в зависимости от потенциала.

4. Невозмущенный оператор Дирака

Мы будем сравнивать асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{0,U}$, порожденный дифференциальным выражением

$$\ell_0(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}'$$

и регулярными краевыми условиями $U(\mathbf{y}) = 0$ вида (3.4).

Утверждение 4.1. *Спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $\varkappa_0 + 2n$ и $\varkappa_1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $\varkappa_j = -\dfrac{i}{\pi}\ln\zeta_0$, а ζ_0 и ζ_1 — корни квадратного уравнения*

$$J_{23}\zeta^2 - [J_{12} + J_{34}]\zeta - J_{14} = 0. \tag{4.1}$$

В случае, если дискриминант квадратного уравнения (4.1) *равен нулю, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны.*

В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n \in \mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну. Нумерацию проведем следующим образом. Зафиксируем множество

$$\mathcal{M} = \{0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < 2,\ \operatorname{Im}\lambda > 0\} \cup \{0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant 2,\ \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0\}.$$

Заметим, что в это множество попадает ровно одна точка из серии $-\dfrac{i}{\pi}\ln z_0 + 2n$ и ровно одна точка из серии $-\dfrac{i}{\pi}\ln z_1 + 2n$. Обозначим через λ_1^0 ту из этих точек, которая имеет меньшую вещественную часть, и через λ_2^0 вторую из пары точек. Если вещественные части точек совпадают, то через λ_1^0 обозначим ту точку, которая имеет большую мнимую часть.

Наконец, если точки совпали, то получившееся двукратное собственное значение занумеруем $\lambda_1^0 = \lambda_2^0$. Затем все точки серии $\lambda_1^0 + 2n$ занумеруем λ_{1+2n}^0 и, соответственно, $\lambda_2^0 + 2n$ занумеруем λ_{2+2n}^0.

Доказательство. Решениями уравнения $\ell_0(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ с начальными условиями $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ являются функции

$$\mathbf{e}_1^0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_2^0(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}$$

соответственно, а общее решение имеет вид

$$\mathbf{y} = \omega_1^0\mathbf{e}_1^0 + \omega_2^0\mathbf{e}_2^0.$$

Подставляя это выражение в краевые условия, получаем систему

$$\begin{cases} [u_{11} + u_{13}e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{12} + u_{14}e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0, \\ [u_{21} + u_{23}e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{22} + u_{24}e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Обозначим матрицу этой системы через $M_0(\lambda)$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ тогда и только тогда, когда определитель $\Delta_0(\lambda) := \det M_0(\lambda)$ обращается в нуль. Непосредственными вычислениями получаем

$$\Delta_0(\lambda) = [J_{12} + J_{34}] - J_{23}e^{i\pi\lambda} + J_{14}e^{-i\pi\lambda}. \tag{4.3}$$

Остается сделать в этом уравнении подстановку $e^{i\pi\lambda} = z$. □

Утверждение 4.2. *Нормированные собственные функции $\mathbf{y}_n^0$, $n \in \mathbb{Z}$ сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ имеют вид*

$$\mathbf{y}_n^0 = \omega_{1,j}^0 \begin{pmatrix} e^{i\lambda_n^0 x} \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_{2,j}^0 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda_n^0 x} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.4}$$

где $j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n. Числа $\omega_{i,j}^0$, где $i = 1, 2$, а $j = 0, 1$, определяются матрицей $\mathcal{U}$.

Доказательство. Собственные функции, введенные в доказательстве предыдущего утверждения, имеют вид

$$\omega_{1,n}^0 \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) + \omega_{2,n}^0 \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0).$$

При этом числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ — решения системы (4.2), в которой $\lambda = \lambda_n^0$.

Поскольку матрица этой системы 2-периодична по параметру λ, а $\lambda_{n+2}^0 - \lambda_n^0 = 2$, то числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ зависят лишь от четности индекса n. Обозначим их $\omega_{1,j}^0$ и $\omega_{2,j}^0$, где $j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n.

Остается нормировать собственные функции. Так как

$$\mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_n^0 x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda_n^0 x} \end{pmatrix},$$

то

$$\left\|\omega_{1,j}^0 \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) + \omega_{2,j}^0 \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0)\right\|_{\mathbb{H}}^2 = |\omega_{1,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{i\lambda_n^0 x}|^2 \, dx + |\omega_{2,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{-i\lambda_n^0 x}|^2 \, dx =$$

$$= |\omega_{1,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{i\varkappa_j^0 x}|^2 \, dx + |\omega_{2,j}^0|^2 \int_0^\pi |e^{-i\varkappa_j^0 x}|^2 \, dx.$$

Последнее выражение зависит только от четности n, а значит, после нормировки получим (4.4) с некоторыми новыми $\omega_{i,j}^0$, $i = 1, 2$, которые по-прежнему зависят только от четности n. □

Замечание 4.1. Если оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ сильно регулярен, то дискриминант квадратного уравнения (4.1) отличен от нуля, и корни z_0, z_1 различны. Корневые подпространства регулярного, но не сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие каждому собственному значению, двумерны. При этом возможны два случая: либо в каждом подпространстве есть базис из двух собственных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, либо каждое подпространство содержит ровно один (с точностью до множителя) собственный вектор.

Замечание 4.2. Если краевое условие не является регулярным (например, если коэффициент при $e^{i\pi\lambda}$ в (4.3) равен нулю), то в случае неравенства нулю коэффициента при $e^{-i\pi\lambda}$ спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ будет состоять из одной серии простых собственных значений $\lambda_n^0 = \varkappa + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если первый и третий коэффициенты равны нулю оба, то

$$\Delta_0(\lambda) = J_{12} + J_{34}.$$

Тогда либо собственных значений нет (если $J_{12}+J_{34}\neq 0$), либо спектр — вся комплексная плоскость (если $J_{12}+J_{34}=0$). Легко видеть, что все три ситуации реализуемы. Например, $\Delta_0(\lambda)\equiv 0$, если

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ \beta & -\beta & \beta & -\beta\end{pmatrix},\quad 0\neq\beta\in\mathbb{C}.$$

Перейдем к изучению резольвенты невозмущенного оператора.

Теорема 4.1. *Резольвента* $\mathfrak{R}_0(\lambda)=(\mathcal{L}_{0,U}-\lambda I)^{-1}$ *регулярного оператора* $\mathcal{L}_{0,U}$ *является интегральным оператором*

$$\mathfrak{R}_0(\lambda)\mathbf{f}=\int_0^\pi G_0(x,t,\lambda)\mathbf{f}(t)dt. \tag{4.5}$$

Функция $G_0(x,t,\lambda)$ *непрерывна на квадрате* $(x,t)\in[0,\pi]^2$ *за исключением диагонали* $x=t$ *и имеет вид*

$$G_0(t,x,\lambda)=\frac{i}{\Delta_0(\lambda)}\begin{pmatrix}e^{i\lambda(x-t)}\left[J_{12}+J_{14}e^{-i\pi\lambda}\right] & -J_{24}e^{i\lambda(x+t-\pi)}\\ -J_{13}e^{i\lambda(\pi-x-t)} & e^{i\lambda(t-x)}\left[-J_{12}+J_{23}e^{i\pi\lambda}\right]\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

при $t<x$ *и*

$$G_0(t,x,\lambda)=\frac{i}{\Delta_0(\lambda)}\begin{pmatrix}e^{i\lambda(x-t)}\left[-J_{34}+J_{23}e^{i\pi\lambda}\right] & -J_{24}e^{i\lambda(x+t-\pi)}\\ -J_{13}e^{i\lambda(\pi-x-t)} & e^{i\lambda(t-x)}\left[J_{34}+J_{14}e^{-i\pi\lambda}\right]\end{pmatrix} \tag{4.7}$$

при $t>x$.

Вне δ*-кружков с центрами в нулях* λ_n^0 *определителя* $\Delta_0(\lambda)$ (*в частности, вне некоторой полосы* $|\operatorname{Im}\lambda|>r$) *функция* $G_0(x,t,\lambda)$ *удовлетворяет оценке*

$$|G_0(x,t,\lambda)|\leqslant M$$

с некоторой константой M, *зависящей от краевых условий и числа* δ (*или* r), *но не зависящей от* x, t *и* λ.

Доказательство. Уравнение $\ell_0(\mathbf{y})=\lambda\mathbf{y}+\mathbf{f}$ решается явно:

$$\begin{aligned} y_1(x)&=\gamma_1 e^{i\lambda x}+\int_0^x e^{i\lambda(x-t)}f_1(t)dt,\\ y_2(x)&=\gamma_2 e^{-i\lambda x}+\int_0^x e^{-i\lambda(x-t)}f_2(t)dt.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Подставив это решение в краевые условия, получим систему из двух уравнений для определения чисел γ_1 и γ_2:

$$\mathrm{C}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}+\mathrm{D}\begin{pmatrix}e^{i\pi\lambda}\gamma_1\\ e^{-i\pi\lambda}\gamma_2\end{pmatrix}+\mathrm{D}\hat{f}(\lambda)=0,$$

где

$$\hat{f}(\lambda)=\begin{pmatrix}\hat{f}_1(\lambda)\\ \hat{f}_2(\lambda)\end{pmatrix},\qquad \hat{f}_1(\lambda)=\int_0^\pi e^{i\lambda(\pi-t)}f_1(t)dt,\quad \hat{f}_2(\lambda)=\int_0^\pi e^{-i\lambda(\pi-t)}f_2(t)dt.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta_0(\lambda)}\begin{pmatrix}-u_{22}-u_{24}e^{-i\pi\lambda} & u_{12}+u_{14}e^{-i\pi\lambda}\\ u_{21}+u_{23}e^{i\pi\lambda} & -u_{11}-u_{13}e^{i\pi\lambda}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}u_{13} & u_{14}\\ u_{23} & u_{24}\end{pmatrix}\hat{f}(\lambda),$$

откуда следуют (4.5), (4.6) и (4.7) (вычисления мы опускаем). Из представления (4.3), очевидно, следует оценка

$$\Delta_0(\lambda)\geqslant Ce^{|\pi\operatorname{Im}\lambda|}$$

вне δ-кружков с центрами в нулях λ_n^0 с константой C, зависящей только от δ и чисел J_{ij}. Все слагаемые в представлениях (4.6) и (4.7), очевидно, оцениваются сверху такой же величиной (но с другой константой). Это доказывает теорему. $\square$

Замечание 4.3. Сопряженный к $\mathcal{L}_{0,U}$ оператор $\mathcal{L}_{0,U}^* = \mathcal{L}_{0,U^*}$ порожден тем же дифференциальным выражением и краевым условием

$$U^*(y) = \hat{C}\mathbf{y}(0) + \hat{D}\mathbf{y}(\pi) = 0,$$

где $\hat{C}, \hat{D}$ — некоторые матрицы размера 2×2. Эти матрицы определяются неоднозначно. Например, можно положить

$$\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} \overline{J_{23}} & \overline{J_{13}} & -\overline{J_{12}} & 0 \\ 0 & -\overline{J_{34}} & \overline{J_{24}} & \overline{J_{23}} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 4.3. *Если краевое условие $U(\mathbf{y}) = 0$ является регулярным, то тем же свойством обладает сопряженное краевое условие $U^*(\mathbf{y}) = 0$. Таким образом, сопряженный оператор $\mathcal{L}_{0,U^*}$ регулярен одновременно с $\mathcal{L}_{0,U}$.*

Доказательство. Собственные значения λ_n и $\overline{\lambda_n}$ операторов $\mathcal{L}_{0,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U^*}$ взаимно сопряжены, причем их кратности совпадают. Если краевое условие $U^*(\mathbf{y}) = 0$ не является регулярным, то реализуется одна из возможностей, описанных в замечании 4.2. Но это не согласуется с равенствами $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$ с сохранением кратностей. □

Заметим, наконец, что резольвента

$$\mathfrak{R}_{0,U^*}(\lambda) := (\mathcal{L}_{0,U^*} - \lambda I)^{-1}$$

совпадает с оператором, сопряженным к $\mathfrak{R}_0(\overline{\lambda})$, а значит, является интегральным оператором с ядром $G^*(t,x,\lambda) = \overline{G(x,t,\overline{\lambda})}$.

Следствие 4.1. *Система собственных функций регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ является полной в пространстве $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Если найдется вектор $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$, ортогональный всем собственным функциям оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, то вектор-функция

$$\mathbf{F}(\lambda) = \mathfrak{R}_0^*(\lambda)\mathbf{f}$$

является целой (условие ортогональности $\mathbf{f}$ собственным функциям обеспечивает равенство нулю всех вычетов в полюсах резольвенты сопряженного оператора).

Вне δ-кружков с центрами в собственных значениях $\overline{\lambda}_n$ сопряженного оператора функция $\mathbf{F}(\lambda)$ оценивается константой. При достаточно малом $\delta > 0$ эти кружки не пересекаются. Из принципа максимума и теоремы Лиувилля тогда следует, что $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{g}$ — постоянный вектор. Но справедливо равенство

$$(\mathcal{L}_{0,U}^* - \lambda)\mathbf{f} = \mathbf{g}.$$

Правая часть от λ не зависит, поэтому $\mathbf{f} = 0$. □

Определение 4.1. Система векторов в гильбертовом пространстве H называется *базисом Рисса* (или *безусловным базисом*), если существует ограниченный и обратимый оператор в H, который переводит эту систему в ортонормированный базис.

Теорема 4.2. *Нормированная система собственных функций сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Вспомним, что собственные функции $\mathbf{y}_n^0$ оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ имеют представление (4.4). Так как оператор $\mathcal{L}_{0,U^*}$ тоже сильно регулярен, то его система собственных функций, согласно утверждению 4.2, имеет аналогичное представление

$$\left[\begin{array}{ll} \mathbf{z}_n^0(x,\lambda) = \gamma_{1,0}^0 \left(e^{i\overline{\lambda}_n^0 x},\ 0\right)^t + \gamma_{2,0}^0 \left(0,\ e^{-i\overline{\lambda}_n^0 x}\right)^t, & \text{если } n \text{ четно}, \\ \mathbf{z}_n^0(x,\lambda) = \gamma_{1,1}^0 \left(e^{i\overline{\lambda}_n^0 x},\ 0\right)^t + \gamma_{2,1}^0 \left(0,\ e^{-i\overline{\lambda}_n^0 x}\right)^t, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{array}\right.$$

Так как все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ простые, то справедливы соотношения

$$\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{z}_j^0 \rangle = \alpha_n \delta_{nj},$$

где числа α_n зависят от нормировки систем функций $\mathbf{y}_n^0$ и $\mathbf{z}_n^0$. Но из вида $\mathbf{y}_n^0$ и $\mathbf{z}_n^0$ и из утверждения 4.2 сразу следует, что числа α_n зависят только от четности n, т. е.

$$\alpha_{2n} = \alpha_0, \quad \alpha_{2n+1} = \alpha_1, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Домножив векторы системы $\{\mathbf{z}_n^0\}$ с четными номерами на константу $\dfrac{1}{\alpha_0}$, а векторы с нечетными номерами — на константу $\dfrac{1}{\alpha_1}$, получим, что системы $\{\mathbf{y}_n^0\}$ и $\{\mathbf{z}_n^0\}$ взаимно биортогональны.

Обе они, очевидно, бесселевы, и обе полны в $\mathbb{H}$ согласно следствию 4.1. Тогда в силу теоремы Бари—Боаса 18.II обе системы образуют базис Рисса в $\mathbb{H}$. □

Поясним теперь, что происходит в случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий. Полезно рассмотреть оператор Дирака с нулевым потенциалом и краевыми условиями

$$\begin{cases} y_1(0) + y_2(0) = \alpha(y_1(\pi) + y_2(\pi)), \\ y_1(0) - y_2(0) = y_1(\pi) - y_2(\pi). \end{cases}$$

При любом $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ спектр этого оператора состоит из собственных значений $\lambda_n^0 = 2n$ (при $\alpha = -1$ оператор теряет регулярность, так как $J_{14} = J_{23} = 0$). Каждое такое собственное значение имеет алгебраическую кратность 2.

При $\alpha = 1$ геометрическая кратность каждого собственного значения также равна двум: есть две ортогональные друг другу собственные функции

$$\mathbf{c}^0(x, \lambda_n^0) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\lambda_n^0 x} \\ e^{-i\lambda_n^0 x} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{s}^0(x, \lambda_n^0) = \frac{1}{2i}\begin{pmatrix} e^{i\lambda_n^0 x} \\ -e^{-i\lambda_n^0 x} \end{pmatrix}.$$

При $\alpha \neq 1$ геометрическая кратность равна единице: собственной функцией является только $\mathbf{s}^0(x, \lambda_n^0)$, и к ней имеется присоединенная. Это типичный пример, что следует из следующего предложения.

Лемма 4.1. *Пусть оператор Дирака $\mathcal{L}_{0,U}$ слабо регулярен. Тогда либо все его собственные значения*

$$\lambda_n^0 = 2n + \varkappa$$

имеют геометрическую кратность 2, и в этом случае им отвечают две линейно независимые собственные функции, либо всем его собственным значениям отвечают жордановы цепочки, т. е. только одна собственная функция вида

$$\mathbf{y}_n^0(x) = \gamma_1 \mathbf{e}_+^0(x, \lambda_n^0) + \gamma_2 \mathbf{e}_-^0(x, \lambda_n^0)$$

и присоединенная к ней функция вида

$$\mathbf{y}_n^1(x) = i\gamma_1 x \mathbf{e}_+^0(x, \lambda_n^0) - i\gamma_2 x \mathbf{e}_-^0(x, \lambda_n^0) + \beta\gamma_1 \mathbf{e}_+^0(x, \lambda_n^0) + \beta\gamma_2 \mathbf{e}_-^0(x, \lambda_n^0), \tag{4.9}$$

где

$$\mathbf{e}_+^0(x, \lambda_n^0) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda_n^0 x} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_-^0(x, \lambda_n^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-i\lambda_n^0 x} \end{pmatrix}.$$

Здесь числа γ_1, γ_2 от n не зависят.

Число β можно подобрать так, что функции $\mathbf{y}_n^0$ и $\mathbf{y}_n^1$ будут взаимно ортогональными. При этом число β и нормы $\|\mathbf{y}_n^0\|$, $\|\mathbf{y}_n^1\|$ также не зависят от n.

Доказательство. Согласно определению, в условиях леммы имеем, что собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ имеют вид

$$\lambda_n^0 = 2n + \varkappa, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Наличие или отсутствие второго собственного вектора, отвечающего собственному значению λ_n^0, определяется краевыми условиями, а точнее — матрицей $M_0(\lambda)$, введенной в (4.2).

Эта матрица 2-периодична, поэтому собственные функции являются линейными комбинациями $\mathbf{e}_+^0(x,\lambda_n^0)$ и $\mathbf{e}_-^0(x,\lambda_n^0)$ с постоянными γ_1,γ_2, не зависящими от n. По определению, присоединенная функция $\mathbf{y}^1(x)$ должна удовлетворять системе

$$\begin{cases} -iy_1' - \lambda_n^0 y_1 = \gamma_1 e^{i\lambda_n^0 x}, \\ iy_2' - \lambda_n^0 y_2 = \gamma_2 e^{-i\lambda_n^0 x}. \end{cases}$$

Общим решением этой системы является функция

$$i\gamma_1 x\mathbf{e}_+^0(x,\lambda_n^0) - i\gamma_2 x\mathbf{e}_-^0(x,\lambda_n^0) + \beta_1\mathbf{e}_+^0(x,\lambda_n^0) + \beta_2\mathbf{e}_-^0(x,\lambda_n^0)$$

с произвольными постоянными β_1,β_2. Подставляя эту функцию в краевое условие, найдем соотношение между β_1 и β_2. Проверка независимости норм функций $\mathbf{y}_n^0$ и $\mathbf{y}_n^1$ от n осуществляется элементарным вычислением. □

Напомним, что система φ_k в H называется *бесселевой* системой, если для любого вектора $f\in H$ ряд $\sum|\langle f,\varphi_k\rangle|^2$ сходится.

Системы $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ называются *биортогональными*, если

$$\langle\varphi_k,\psi_j\rangle = \delta_{kj},$$

где δ_{kj} — символ Кронекера.

Заметим, что если собственным значениям λ_n^0 оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ отвечают жордановы цепочки $\mathbf{y}_n^0,\mathbf{y}_n^1$, то собственным значениям $\overline{\lambda}_n^0$ сопряженного оператора $\mathcal{L}_{0,U}^*$ также отвечают жордановы цепочки $\mathbf{z}_n^0,\mathbf{z}_n^1$ того же вида. Из общих соотношений биортогональности для взаимно сопряженных операторов (см., например, [31]) следует

$$\langle\mathbf{z}_n^0,\mathbf{y}_n^0\rangle = 0, \qquad \langle\mathbf{z}_n^0,\mathbf{y}_n^1\rangle = \alpha_n = \alpha \neq 0, \qquad \langle\mathbf{z}_n^1,\mathbf{y}_n^0\rangle = \alpha_n' = \alpha' \neq 0.$$

Проводя, если надо, перенормировку, можем считать, что $\alpha=\alpha'=1$. Заменяя, если нужно, $\mathbf{z}_n^1$ на $\mathbf{z}_n^1+\beta\mathbf{z}_n^0$ (такая функция остается присоединенной к $\mathbf{z}_n^0$), можно добиться равенства

$$\langle\mathbf{y}_n^1,\mathbf{z}_n^1\rangle = 0.$$

Тогда можно считать, что *системы* $\{\mathbf{y}_n^0,\mathbf{y}_n^1\}$ *и* $\{\mathbf{z}_n^0,\mathbf{z}_n^1\}$ *являются взаимно биортогональными.* Но из вида этих систем следует, что они бесселевы. Обе системы полны в $\mathbb{H}$, а потому каждая из них образует базис Рисса.

Тем самым доказан следующий факт.

Теорема 4.3. *Собственные и присоединенные функции слабо регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ можно выбрать так, чтобы они образовывали базис Рисса в $\mathbb{H}$.*

Свойство безусловной базисности легко можно распространить на шкалу пространств

$$\mathbb{H}_U^\theta = (W_{2,U}^\theta[0,\pi])^2, \quad 0\leqslant\theta\leqslant 1$$

(см. определение 17.8).

Теорема 4.4. *Перенормированная система собственных и присоединенных функций любого регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$*

$$\left\{(n^2+1)^{-\theta/2}\mathbf{y}_n^0\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}_U^\theta$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку λ_0, не принадлежащую спектру оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Тогда оператор $\mathfrak{R}_0(\lambda_0)$ является изоморфизмом из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}_U^1$.

Действительно, оператор $\mathcal{L}_{0,U}-\lambda_0 I$ ограниченно действует из $\mathbb{H}_U^1$ в $\mathbb{H}$. Он биективен, поскольку для любого $\mathbf{f}\in\mathbb{H}$ существует решение уравнения

$$\mathcal{L}_{0,U}\mathbf{y} - \lambda_0\mathbf{y} = \mathbf{f},$$

лежащее в $W_1^1[0,\pi]$ и удовлетворяющее краевым условиям. Теперь ограниченность обратного оператора следует из теоремы Банаха об обратном операторе.

По теореме 18.IV базисность Рисса сохраняется при изоморфизме, то есть система

$$\{(\lambda_n^0-\lambda_0)^{-1}\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

образует базис Рисса в $\mathbb{H}_U^1$. Теперь заметим, что последовательность

$$(\lambda_n^0-\lambda_0)(n^2+1)^{-1/2}$$

отделена от нуля и от бесконечности (теорема 4.1). Это означает, что перенормировка является изоморфизмом в $\mathbb{H}_U^1$, и утверждение теоремы доказано для случая $\theta=1$.

Для доказательства общего случая остается применить теорему 18.VI. □

Утверждение 4.4. *Пусть $\{\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, а $\{\mathbf{z}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — соответствующая биортогональная система. Для любой абсолютно непрерывной*[1] *функции $\mathbf{f}$, удовлетворяющей краевым условиям $U(\mathbf{f})=0$, ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_n^0\rangle\mathbf{y}_n^0$$

сходится к $\mathbf{f}$ равномерно на отрезке $[0,\pi]$.

Доказательство. Из классической теоремы вложения Соболева следует, что $W_{1,U}^1\subset\mathbb{H}_U^\theta\subset L_\infty$. Раскладывая теперь произвольную функцию $\mathbf{f}\in W_{1,U}^1$ в ряд по системе

$$\{(n^2+1)^{-1/2}\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

получаем его сходимость в $\mathbb{H}_U^{1/2}$, а значит, и в $L_\infty[0,\pi]$. □

Условию этого утверждения удовлетворяет, в частности, любая абсолютно непрерывная на $[0,\pi]$ функция $\mathbf{f}$ с носителем, компактно лежащим в интервале $(0,\pi)$.

Поскольку множество таких функций плотно в каждом из пространств $L_\alpha[0,\pi]$, $\alpha\in[1,\infty)$, мы приходим к следующему утверждению.

Утверждение 4.5. *Система $\{\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций любого регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ полна в любом пространстве $L_\alpha[0,\pi]$, $\alpha\in[1,\infty)$.*

Наконец докажем важную в дальнейшем оценку резольвенты $\mathfrak{R}_0(\lambda)$ как оператора, действующего в пространствах $L_p[0,\pi]$.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathfrak{R}_0(\lambda)$ — резольвента регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Положим $\lambda=\sigma+i\tau$. Тогда для некоторого числа $a_0\geqslant 1$, зависящего только от краевых условий, при всех λ вне полосы Π_{a_0} и при всех индексах $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ справедлива оценка*

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{L_p\to L_q}\leqslant C_{p,q}|\tau|^{-1+1/p-1/q}\tag{4.10}$$

с константой $C_{p,q}$, зависящей только от p и q, но не от λ.

Доказательство. Воспользуемся явным видом функции $G_0(t,x,\lambda)$, полученным в теореме 4.1. Докажем, что при надлежащем выборе числа a_0 мы можем добиться оценки

$$|\Delta_0(\lambda)|^{-1}\leqslant C_0e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|}\tag{4.11}$$

вне полосы Π_{a_0} с константой C_0, зависящей только от краевых условий. Разберем случай $\operatorname{Im}\lambda>0$. Подберем $a_0\geqslant 1$ так, что

$$|J_{12}|+|J_{34}|+|J_{32}|e^{-\pi a_0}\leqslant\frac{1}{2}|J_{14}|e^{\pi a_0}.$$

Тогда при $\operatorname{Im}\lambda\geqslant a_0$ получим

$$|\Delta_0(\lambda)|\geqslant|J_{14}e^{-i\pi\lambda}|-|J_{12}+J_{34}+J_{32}e^{i\pi\lambda}|\geqslant\frac{1}{2}|J_{14}e^{-i\pi\lambda}|,$$

а значит,

$$|\Delta_0(\lambda)|^{-1}\leqslant 2|J_{14}|^{-1}e^{-\pi|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Случай $\operatorname{Im}\lambda<0$ аналогичен, и оценка (4.11) доказана.

[1] Требование абсолютной непрерывности можно ослабить, взяв функцию $\mathbf{f}$ непрерывной и имеющей ограниченную вариацию на $[0,\pi]$ (см. [112, теорема 22]).

Вначале мы разберем случай $p = 1$, $q = \infty$. В этом случае

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} = \max_{1\leqslant j,\,k\leqslant 2}\ \max_{t,\,x\in[0,\pi]} |g^0_{jk}(t,x,\lambda)|,$$

и оценка $\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} \leqslant C_0$ следует из представления (4.5) резольвенты как интегрального оператора и равномерной оценки в норме $L_\infty[0,\pi]$ функции Грина (см теорему 4.1).

Теперь рассмотрим случай $p = q = \infty$. Заметим, что

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\infty\to\infty} = \max_{j=1,2}\ \max_{x\in[0,\pi]} \left\{ \int\limits_0^\pi |g^0_{j1}(t,x,\lambda)|\,dt + \int\limits_0^\pi |g^0_{j2}(t,x,\lambda)|\,dt \right\}.$$

Учитывая (4.11), имеем

$$\int\limits_0^\pi |g^0_{11}(t,x,\lambda)|\,dt = \int\limits_0^x |g^0_{11}(t,x,\lambda)|\,dt + \int\limits_x^\pi |g^0_{11}(t,x,\lambda)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|J_{12}| + |J_{14}|e^{\pi\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda||\Delta_0(\lambda)|}\left(1 + e^{-x\operatorname{Im}\lambda}\right) + \frac{|J_{34}| + |J_{23}|e^{-\pi\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda||\Delta_0(\lambda)|}\left(1 + e^{(\pi-x)\operatorname{Im}\lambda}\right) \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|}.$$

Остальные элементы матрицы $G_0(t,x,\lambda)$ оцениваются аналогично:

$$\int\limits_0^\pi |g^0_{12}(t,x,\lambda)|\,dt \leqslant \frac{|J_{24}|}{|\lambda||\Delta_0(\lambda)|}\left(e^{(\pi-x)\operatorname{Im}\lambda} + e^{-x\operatorname{Im}\lambda}\right) \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|};$$

$$\int\limits_0^\pi |g^0_{21}(t,x,\lambda)|\,dt \leqslant \frac{|J_{13}|}{|\lambda||\Delta_0(\lambda)|}\left(e^{(x-\pi)\operatorname{Im}\lambda} + e^{x\operatorname{Im}\lambda}\right) \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|}.$$

Наконец,

$$\int\limits_0^\pi |g^0_{22}(t,x,\lambda)|\,dt = \int\limits_0^x |g^0_{22}(t,x,\lambda)|\,dt + \int\limits_x^\pi |g^0_{22}(t,x,\lambda)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|J_{12}| + |J_{23}|e^{-\pi\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda||\Delta_0(\lambda)|}\left(1 + e^{x\operatorname{Im}\lambda}\right) + \frac{|J_{34}| + |J_{14}|e^{\pi\operatorname{Im}\lambda}}{|\lambda||\Delta_0(\lambda)|}\left(1 + e^{(x-\pi)\operatorname{Im}\lambda}\right) \leqslant \frac{C_0}{|\lambda|},$$

где C_0 зависит только от краевых условий. Итак, мы доказали, что

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\infty\to\infty} \leqslant \frac{C_0}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Разберем теперь случай $p = q = 1$. Здесь

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to 1} = \max_{j=1,2}\ \max_{t\in[0,\pi]} \left\{ \int\limits_0^\pi |g^0_{1j}(t,x,\lambda)|\,dx + \int\limits_0^\pi |g^0_{2j}(t,x,\lambda)|\,dx \right\},$$

и доказательство полностью аналогично.

Теперь мы покажем, что с помощью теоремы об интерполяции наше утверждение переносится на случай произвольных индексов $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Прежде всего, рассмотрим случай $q = \infty$, p — произвольное число между 1 и ∞. Для произвольного $\theta \in (0,1)$ положим

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{1}} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{\frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{\infty}}.$$

В силу теоремы 16.II об интерполяции, оценки

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\infty\to\infty} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-1} \quad \text{и} \quad \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} \leqslant C_0$$

влекут

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\alpha\to\beta} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{\theta-1}.$$

Теперь положим $\theta = 1/p$ и получим оценку

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{p\to\infty} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p}, \quad p \in [1,\infty]. \tag{4.12}$$

Далее, рассмотрим случай $p = 1$, q — произвольное число между 1 и ∞. Тогда для произвольного $\theta \in (0,1)$ оценки

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} \leqslant C_0 \quad \text{и} \quad \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to1} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-1}$$

влекут

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\alpha\to\beta} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-\theta},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{1}}, \qquad \beta = \frac{1}{\frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{1}}.$$

Положим $\theta = 1/q$, получаем оценку

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to q} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-1/q}, \quad q \in [1,\infty]. \tag{4.13}$$

Рассмотрим теперь случай произвольных индексов $1 < p \leqslant q < \infty$. Заметим вначале, что

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{p} < 1,$$

а значит

$$r = \frac{pq}{q-p} \in (1,\infty] \quad \text{и } s = \frac{pq}{pq+p-q} \in [1,\infty).$$

Тогда с учетом (4.12) и (4.13) из оценок

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to s} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p-1/q} \quad \text{и} \quad \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{r\to\infty} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p-1/q}$$

вытекает, что

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\alpha\to\beta} \leqslant C_0|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p-1/q},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta(q-p)}{pq}}, \qquad \beta = \frac{1}{\frac{(1-\theta)(pq+p-q)}{pq} + \frac{\theta}{\infty}}.$$

Наконец, выбирая

$$\theta = \frac{pq-q}{pq+p-q} \in (0,1),$$

получаем оценку (4.10). □

5. Невозмущенный оператор Штурма—Лиувилля

Так же как и в случае оператора Дирака, приведем основные факты о невозмущенном операторе Штурма—Лиувилля. Практически все факты этого раздела общеизвестны, и мы приводим их здесь, прежде всего, для удобства читателя. Кроме того, здесь мы вводим несколько определений, важных для дальнейшего изложения.

Невозмущенным оператором Штурма—Лиувилля назовем оператор

$$\mathcal{L}_{0,U}y = -y'', \qquad \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{0,U}) = \{y \in W_2^2[0,\pi],\ U_1(y) = U_2(y) = 0\}, \tag{5.1}$$

где U_j, $j = 1, 2,$ — две линейно независимые формы вида

$$U_j(y) = u_{j1}y(0) + u_{j2}y'(0) + u_{j3}y(\pi) + u_{j4}y'(\pi).$$

При этом мы будем считать краевые условия регулярными по Биркгофу, т. е. будем считать выполненным одно из условий

1) $J_{24} \neq 0$;
2) $J_{24} = 0$, но $J_{23} - J_{14} \neq 0$;
3) $u_{12} = u_{14} = u_{22} = u_{24} = 0$, но $J_{13} \neq 0$.

Здесь через J_{ij} мы, как и ранее, обозначаем определитель матрицы краевых условий $\mathcal{U}$, составленный из соответствующих столбцов.

Определение 5.1. В случае 2), если

$$J_{12} + J_{34} = \pm(J_{23} - J_{14}),$$

то краевые условия называются *слабо регулярными*. Регулярные, но не слабо регулярные условия называют *сильно регулярными*.

Утверждение 5.1. *Спектр любого регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений*

$$\mathbf{z}_n^0 = (\lambda_n^0)^2, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Дополним последовательность $\{\lambda_n^0\}_1^\infty$ точками $\lambda_{-n}^0 = -\lambda_n^0$, $n \in \mathbb{N}$.

Тогда последовательность $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}_0}$ (здесь и далее $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) с точностью до $O(n^{-1})$ имеет ту же структуру, что и последовательность собственных чисел оператора Дирака.

А именно,

$$\lambda_n^0 = \lambda_n^{00} + \rho_n, \quad \text{где} \quad \rho_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad |n| \to \infty,$$

а числа λ_n^{00}, $n \in \mathbb{Z}_0$, можно записать двумя сериями $\varkappa_0 + 2n$ и $\varkappa_1 + 2n$. При этом

$$\lambda_{-n}^{00} = -\lambda_n^{00}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Нумерацию чисел λ_n^{00}, $n \in \mathbb{Z}_0$, мы проводим так же, как и в случае оператора Дирака. Зафиксируем множество

$$\mathcal{M} = \{0 \leqslant \operatorname{Re}\lambda < 2,\ \operatorname{Im}\lambda > 0\} \cup \{0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant 2,\ \operatorname{Im}\lambda \leqslant 0\}.$$

Заметим, что в это множество попадает ровно одна точка из серии $\varkappa_0 + 2n$ и ровно одна точка из серии $\varkappa_1 + 2n$. Обозначим через λ_1^{00} ту из этих точек, которая имеет меньшую вещественную часть, и через λ_2^{00} вторую из пары точек. Если вещественные части точек совпадают, то через λ_1^{00} обозначим ту точку, которая имеет большую мнимую часть.

Наконец, если точки совпали, то получившееся двукратное собственное значение занумеруем $\lambda_1^{00} = \lambda_2^{00}$. Затем все точки серии $\lambda_1^{00} + 2n$ занумеруем λ_{1+2n}^{00} и, соответственно, $\lambda_2^{00} + 2n$ занумеруем λ_{2+2n}^{00}.

Числа $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ можно выписать явно. В случае 1) (когда $J_{24} \neq 0$) имеем $\varkappa_0 = -1/2$, $\varkappa_1 = 1/2$. В случае 3) $\varkappa_0 = 1$, $\varkappa_1 = 2$. В случае 2) $\varkappa_j = -\dfrac{i}{\pi}\ln\zeta_j$, где ζ_0 и $\zeta_1 = 1/\zeta_0$ — корни квадратного уравнения

$$(J_{23} - J_{14})\zeta^2 - 2(J_{12} + J_{34})\zeta + (J_{23} - J_{14}) = 0.$$

В случае, когда дискриминант этого уравнения равен нулю, все числа λ_n^0 асимптотически двукратны. Именно в этом случае краевые условия регулярны лишь слабо.

Доказательство. Положим $\lambda = \sqrt{\mathbf{z}}$, причем ветвь корня зафиксируем, выбрав аргумент числа $\mathbf{z}$ в диапазоне $(-\pi, \pi]$. От уравнения $-y'' = \lambda^2 y$ перейдем к системе, сделав замену

$$y_1 = \frac{\lambda y}{2} - \frac{iy'}{2}, \quad y_2 = \frac{\lambda y}{2} + \frac{iy'}{2}. \tag{5.2}$$

Обратная замена имеет вид $y = \dfrac{y_1 + y_2}{\lambda}$ при $\lambda \neq 0$. В случае $\lambda = 0$ функцию y можно восстановить как $i\int(y_1 - y_2)$. Уравнение на собственные значения принимает вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \lambda \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}(\lambda) \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0, \tag{5.3}$$

где матрица $\mathcal{U}(\lambda)$ равна

$$\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} u_{11} + i\lambda u_{12} & u_{11} - i\lambda u_{12} & u_{13} + i\lambda u_{14} & u_{13} - i\lambda u_{14} \\ u_{21} + i\lambda u_{22} & u_{21} - i\lambda u_{22} & u_{23} + i\lambda u_{24} & u_{23} - i\lambda u_{24} \end{pmatrix}.$$

Решениями полученной системы с начальными условиями $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ являются функции

$$\mathbf{e}_1^0(x,\lambda) = \begin{pmatrix}e^{i\lambda x}\\0\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_2^0(x,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\e^{-i\lambda x}\end{pmatrix}$$

соответственно, а общее решение имеет вид

$$\mathbf{y} = \omega_1^0\mathbf{e}_1^0 + \omega_2^0\mathbf{e}_2^0.$$

Подставляя это выражение в краевые условия, получаем систему

$$\begin{cases}[u_{11} + i\lambda u_{12} + (u_{13} + i\lambda u_{14})e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{11} - i\lambda u_{12} + (u_{13} - i\lambda u_{14})e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0,\\ [u_{21} + i\lambda u_{22} + (u_{23} + i\lambda u_{24})e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{21} - i\lambda u_{22} + (u_{23} - i\lambda u_{24})e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0.\end{cases} \tag{5.4}$$

Непосредственными вычислениями находим определитель $\Delta_0(\lambda)$ этой системы:

$$\Delta_0(\lambda) = 2\lambda J_{24}\cos(\pi\lambda) - 2i(J_{12} + J_{34}) - 2i(J_{14} - J_{23})\cos(\pi\lambda) - 2iJ_{13}\frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda}.$$

Отсюда видим, прежде всего, что $|\Delta_0(\lambda)|$ экспоненциально растет при увеличении $|\operatorname{Im}\lambda|$, так что все его корни расположены в некоторой полосе $\Pi_\alpha = \{\lambda : \ |\operatorname{Im}\lambda| < \alpha\}$, $\alpha > 0$, где α зависит только от краевых условий U.

Внутри полосы можем выделить «старшие по порядку» слагаемые. Обозначим

$$\Delta_0(\lambda) = \Delta_{00}(\lambda) + \delta_0(\lambda).$$

Здесь

$$\Delta_{00}(\lambda) = \begin{cases}2\lambda J_{24}\cos(\pi\lambda) & \text{в случае 1)},\\ -2i(J_{12} + J_{34} + (J_{14} - J_{23})\cos(\pi\lambda)) & \text{в случае 2)},\\ -2iJ_{13}\sin(\pi\lambda)/\lambda & \text{в случае 3)},\end{cases}$$

а функция $\delta_0(\lambda)$ имеет в любом из случаев на единицу меньший порядок роста. Отсюда вытекает (применяем теорему Руше), что корни функций $\Delta_0(\lambda)$ и $\Delta_{00}(\lambda)$, которые мы обозначим λ_n^0 и λ_n^{00} соответственно, связаны соотношением

$$\lambda_n^0 - \lambda_n^{00} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

При этом нумерацию чисел λ_n^{00} мы уже описали выше, а нумерацию чисел λ_n^0 ведем так, чтобы было выполнено это асимптотическое соотношение. При этом дефект нумерации чисел λ_n^0 равен нулю. Для доказательства достаточно применить теорему Руше на прямоугольнике с вершинами $\pm\beta \pm i\alpha$ при достаточно большом β. □

Замечание 5.1. Нумерация чисел λ_n^{00} зафиксирована нами однозначно. При этом нумерация чисел λ_n^0 пока неоднозначна. Точнее, она фиксирована, начиная с некоторого номера $N = N(U)$. Числа λ_n^0 с номерами $n \in [-N, N]$ мы можем перенумеровывать — это не меняет асимптотического соотношения

$$\lambda_n^0 = \lambda_n^{00} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В дальнейшем при доказательстве равномерных оценок в асимптотике собственных значений нам придется эту нумерацию уточнить. Пока же договоримся, что число 0 (оно всегда является собственным значением задачи (5.3)) имеет номер нуль, все числа λ_n^0, лежащие в полуплоскости $\arg\lambda \in (-\pi/2, \pi/2]$, имеют номера $n \in \mathbb{N}$, а числа с отрицательными индексами занумерованы по симметрии: $\lambda_{-n}^0 = -\lambda_n^0$.

Для корректности последнего заметим, что если точка λ является собственным значением задачи (5.3) с собственным вектором $\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$, то точка $-\lambda$ также является собственным значением с вектором $\begin{pmatrix}y_2\\y_1\end{pmatrix}$.

Утверждение 5.2. *Собственные значения сильно регулярного оператора Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}_{0,U}$ однократны, начиная с некоторого номера $N = N(U)$. Соответствующие нормированные собственные функции y_n^0 имеют вид*

$$y_n^0(x) = y_n^{00}(x) + r_n^0(x), \quad \text{где } y_n^{00}(x) = \omega_{1,j}^0 e^{i\lambda_n^{00}x} + \omega_{2,j}^0 e^{-i\lambda_n^{00}x}, \quad \|r_n^0(x)\|_{C[0,\pi]} = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{5.5}$$

$j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n. Числа $\omega_{i,j}^0$, где $i = 1, 2$, а $j = 0, 1$, определяются матрицей $\mathcal{U}$.

Доказательство. Собственные функции (до нормировки) имеют вид

$$y_n^0 = y_{1,n}^0 + y_{2,n}^0.$$

В свою очередь, функции $y_{j,n}^0$ равны $\omega_{1,n}^0 e^{i\lambda_n^0 x}$ и $\omega_{2,n}^0 e^{-i\lambda_n^0 x}$. Остается определить числа $\omega_{j,n}^0$ из системы (5.4). При этом нам нужно лишь доказать, что они 2-периодичны по n с точностью до следующих по порядку поправок.

Далее следует перебор случаев. Если, например, отличен от нуля определитель J_{24}, то матрицу краевых условий можно привести к виду

$$\begin{pmatrix} u_{11} & 1 & u_{13} & 0 \\ u_{21} & 0 & u_{23} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда из первого уравнения системы имеем

$$i\lambda(\omega_1^0 - \omega_2^0) + O(1) = 0,$$

т. е. можно взять $\omega_{1,n}^0 = 1$, $\omega_{2,n}^0 = 1 + O(n^{-1})$.

Так же легко разбирается третий случай, где получаем $\omega_{1,n}^0 = 1$, $\omega_{2,n}^0 = -1 + O(n^{-1})$.

Второй случай чуть более сложен. Здесь всегда можно привести матрицу $\mathcal{U}$ к виду

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & 0 & u_{23} & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем можно заметить, что числа u_{21} и u_{23} не могут обнуляться одновременно, не могут быть равны и не могут отличаться лишь знаком (условие сильной регулярности). Значит, здесь достаточно разобрать три подслучая: $u_{21} = 0$ и $u_{23} = 1$, либо наоборот, либо $u_{21} = a \neq \pm 1$ и $u_{23} = 1$.

Для примера разберем третий (он более сложен). Из второго уравнения системы (5.4) имеем

$$(a + e^{i\pi\lambda_n^{00}}(1 + O(n^{-1})))\omega_{1,n}^0 + (a + e^{-i\pi\lambda_n^{00}}(1 + O(n^{-1})))\omega_{2,n}^0 = 0,$$

откуда и следует 2-периодичность решений с малыми поправками.

Нормировка собственных функций не нарушает утверждения, поскольку нормы функций y_n^0 также образуют 2-периодическую последовательность с точностью до поправок на единицу меньшего порядка. $\square$

Доказательство последнего утверждения показывает, что с точностью до замены $y = \dfrac{y_1 + y_2}{\lambda}$ собственные функции оператора Штурма—Лиувилля совпадают с собственными функциями оператора Дирака с точностью до поправок порядка $O\left(\lambda^{-1}\right)$.

Введем следующие обозначения. Будем писать, что функция $a(\lambda)$ равна $\lfloor b(\lambda) \rfloor$, если

$$a(\lambda) = b(\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Аналогично,

$$a(x, \lambda) = \lfloor b(x, \lambda) \rfloor, \text{ если } a(x, \lambda) = b(x, \lambda) + r(x, \lambda), \text{ где } \sup_{x \in [0,\pi]} |r(x, \lambda)| = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

$$a_n(x) = \lfloor b_n(x) \rfloor, \text{ если } a_n(x) = b_n(x) + r_n(x), \text{ где } \sup_{x \in [0,\pi]} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

В таких обозначениях предыдущее утверждение принимает вид

$$y_n^0(x) = \lfloor y_n^{00}(x) \rfloor.$$

Обсудим вид резольвенты невозмущенного оператора Штурма—Лиувилля. В следующем утверждении мы покажем, как по правой части $f \in L_2[0,\pi]$ восстанавливается пара $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.

Теорема 5.1. *Резольвента* $\mathcal{R}_0(\lambda) = (\mathcal{L}_{0,U} - \lambda I)^{-1}$ *регулярного оператора Штурма—Лиувилля* $\mathcal{L}_{0,U}$ *является интегральным оператором с непрерывным интегральным ядром*

$$G_0(t,x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}(g^0_{11} + g^0_{12} + g^0_{21} + g^0_{22})(t,x,\lambda),$$

где функции $g^0_{ij}(t,x,\lambda)$ *образуют матрицу* $\mathbf{G}_0(t,x,\lambda)$, *причем*

$$\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \lambda^{-1} \\ i & -i \end{pmatrix} \int\limits_0^\pi \mathbf{G}_0(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt, \tag{5.6}$$

где $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}$.

Функция $\mathbf{G}_0(t,x,\lambda)$ *непрерывна на квадрате* $(x,t) \in [0,\pi]^2$ *за исключением диагонали* $x = t$ *и имеет вид*

$$\mathbf{G}_0(t,x,\lambda) = \frac{i\lambda^j}{\Delta_0(\lambda)}\begin{pmatrix} e^{i\lambda(x-t)}\left(\lfloor J_{12}\rfloor + \lfloor J_{14}\rfloor e^{-i\pi\lambda}\right) & -\lfloor J_{24}\rfloor e^{i\lambda(x+t-\pi)} \\ -\lfloor J_{13}\rfloor e^{i\lambda(\pi-x-t)} & e^{i\lambda(t-x)}\left(-\lfloor J_{12}\rfloor + \lfloor J_{23}\rfloor e^{i\pi\lambda}\right) \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

при $t < x$ *и*

$$\mathbf{G}_0(t,x,\lambda) = \frac{i\lambda^j}{\Delta_0(\lambda)}\begin{pmatrix} e^{i\lambda(x-t)}\left(-\lfloor J_{34}\rfloor + \lfloor J_{23}\rfloor e^{i\pi\lambda}\right) & -\lfloor J_{24}\rfloor e^{i\lambda(x+t-\pi)} \\ -\lfloor J_{13}\rfloor e^{i\lambda(\pi-x-t)} & e^{i\lambda(t-x)}\left(\lfloor J_{34}\rfloor + \lfloor J_{14}\rfloor e^{-i\pi\lambda}\right) \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

при $t > x$. *Здесь*

$$\Delta_0(\lambda) = 2\lambda J_{24}\cos(\pi\lambda) - 2i(J_{12} + J_{34}) - 2i(J_{14} - J_{23})\cos(\pi\lambda) - 2iJ_{13}\frac{\sin(\pi\lambda)}{\lambda},$$

а степень j *равна* 1, 0 *или* -1 *в случаях регулярности* 1), 2) *и* 3) *соответственно.*

Вне δ*-кружков с центрами в нулях* λ^0_n *определителя* $\Delta_0(\lambda)$ (*в частности, вне некоторой полосы* $|\operatorname{Im}\lambda| > r$) *функция* $\mathbf{G}_0(t,x,\lambda)$ *удовлетворяет оценке*

$$|\mathbf{G}_0(t,x,\lambda)| \leqslant M$$

с некоторой константой M, *зависящей от краевых условий и числа* δ (*или* r), *но не зависящей от* x, t *и* λ.

Доказательство. Очевидно, что

$$\lfloor a\rfloor f(\lambda) \cdot \lfloor b\rfloor g(\lambda) = \lfloor ab\rfloor f(\lambda)g(\lambda).$$

Тогда достаточно повторить доказательство теоремы 4.1, меняя элементы матрицы краевых условий

$$\mathcal{U}(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11}\lambda^{-1} + iu_{12} & \lambda^{-1}u_{11} - iu_{12} & \lambda^{-1}u_{13} + iu_{14} & \lambda^{-1}u_{13} - iu_{14} \\ u_{21}\lambda^{-1} + iu_{22} & u_{21}\lambda^{-1} - iu_{22} & u_{23}\lambda^{-1} + iu_{24} & u_{23}\lambda^{-1} - iu_{24} \end{pmatrix}$$

u_{jk} на $\lfloor u_{jk}\rfloor$. Действительно, в случае 1) из определения регулярных краевых условий имеем

$$\mathcal{U}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lfloor u_{12}\rfloor & -\lfloor u_{12}\rfloor & \lfloor u_{14}\rfloor & -\lfloor u_{14}\rfloor \\ \lfloor u_{22}\rfloor & -\lfloor u_{22}\rfloor & \lfloor u_{24}\rfloor & -\lfloor u_{24}\rfloor \end{pmatrix}.$$

При этом условия регулярности главной части краевых условий выполнены, поскольку определители, составленные из первого-четвертого и второго-третьего столбцов, отличны от нуля.

В случае 2) всегда можно линейным преобразованием обнулить u_{22} и u_{24}, умножить вторую строку на λ, так что

$$\mathcal{U}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lfloor u_{12}\rfloor & -\lfloor u_{12}\rfloor & \lfloor u_{14}\rfloor & -\lfloor u_{14}\rfloor \\ u_{21} & u_{21} & u_{23} & u_{23} \end{pmatrix}.$$

Здесь условие регулярности главной части матрицы $\mathcal{U}$ имеет вид

$$u_{12}u_{23} + u_{21}u_{14} \neq 0$$

(условие $J_{23} - J_{14} \neq 0$). Случай 3) очевиден. $\square$

Явный вид резольвенты и ее очевидная связь с резольвентой соответствующего оператора Дирака позволяет нам легко перенести результаты, доказанные в предыдущем разделе, на случай оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. В частности, получаем классический результат о базисности системы собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Мы приводим только схему доказательства, поскольку этот факт хорошо известен (см., например, [20]).

Теорема 5.2. *Систему собственных и присоединенных функций любого регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ можно выбрать так, что она образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$.*

Доказательство. Матрица замены $\begin{pmatrix}\lambda^{-1} & \lambda^{-1}\\ i & -i\end{pmatrix}$ задает невырожденное преобразование в $\mathbb{H}$. Поэтому достаточно доказать базисность в $\mathbb{H}$ системы $\{\mathbf{y}_n^0\}$, где $\mathbf{y}_n^0 = \begin{pmatrix}y_{1,n}^0\\ y_{2,n}^0\end{pmatrix}$.

Полнота этой системы выводится повторением доказательства следствия 4.1. Базисность следует из теоремы 4.3 и теоремы Бари—Боаса в силу квадратичной близости системы $\{\mathbf{y}_n^0\}$ к системе $\{\mathbf{y}_n^{00}\}$ (последнюю систему мы определяем как систему собственных и присоединенных функций операторы Дирака с матрицей краевых условий — главной частью матрицы $\mathcal{U}(\lambda)$). □

6. Асимптотические формулы для ФСР

Здесь мы получим результаты об асимптотическом поведении фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y) = \lambda y$ при больших значениях комплексного параметра λ. При этом мы проведем рассуждения одновременно и для задачи Штурма—Лиувилля, и для уравнения Дирака. Для этого мы запишем обе эти задачи в общем виде, сведя к системе уравнений типа

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathrm{B}\mathbf{y} + \mathrm{A}(x)\mathbf{y} + \mathrm{C}(x,\lambda)\mathbf{y}.$$

Результаты этого раздела являются ключевыми в нашем исследовании.

Вначале покажем, как свести уравнение

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$$

к системе типа Дирака. Для единообразия мы меняем здесь спектральный параметр на λ^2. Кроме того, заметим, что линейным преобразованием отрезок $[0,c]$ переводится в отрезок $[0,\pi]$, и в дальнейшем будем всюду полагать $c = \pi$. Итак, сделаем замену

$$y_1(x) = \frac{y(x)}{2} - \frac{i}{2\lambda} y^{[1]}(x), \qquad y_2(x) = \frac{y(x)}{2} + \frac{i}{2\lambda} y^{[1]}(x),$$

где $y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x)y(x)$, $q = u'$. Получим систему относительно вектора $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$:

$$\mathbf{y}'(x) = \lambda \begin{pmatrix} i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\mathbf{y}(x) + \begin{pmatrix} 0 & u(x)\\ u(x) & 0\end{pmatrix}\mathbf{y}(x) + \frac{i}{2\lambda}\begin{pmatrix} u^2(x) & u^2(x)\\ -u^2(x) & -u^2(x)\end{pmatrix}\mathbf{y}(x).$$

Обозначим три матрицы в правой части этой системы через B, $\mathrm{A}(x)$ и $\mathrm{C}(x,\lambda)$ соответственно, т. е. запишем систему в виде

$$\mathbf{y}'(x) = \lambda \mathrm{B}\mathbf{y}(x) + \mathrm{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathrm{C}(x,\lambda)\mathbf{y}(x). \tag{6.1}$$

Отметим, что элементы матриц $\mathrm{A}(x)$ и $\mathrm{C}(x,\lambda)$ суммируемы на $x \in [0,\pi]$, а

$$\|\mathrm{C}(x,\lambda)\|_{L_1} = O(\lambda^{-1}) \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Для системы Дирака, очевидно,

$$\mathrm{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x)\end{pmatrix} = -BP(x) = \begin{pmatrix} 0 & -ip_2(x)\\ ip_3(x) & 0\end{pmatrix},$$

а $\mathrm{C}(x,\lambda) = 0$.

Полученная единая запись позволяет нам далее в этом разделе работать с системой (6.1). Наша цель — получить асимптотические формулы для фундаментальной матрицы решений системы $\mathrm{Y}(x,\lambda)$,

$$\mathrm{Y}' = (\lambda \mathrm{B} + \mathrm{A}(x) + \mathrm{C}(x,\lambda))\mathrm{Y},$$

при $\lambda \to \infty$. Мы проведем рассуждения отдельно для верхней и нижней полуплоскости. Обозначим

$$G_{+,r} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda > -r\},$$

где $r > 0$. Аналогично,

$$G_{-,r} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\lambda < r\}.$$

Обозначим еще

$$\Pi_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}\lambda| < r\}.$$

Для оценки остатков введем функции (везде полагаем интеграл равным нулю, если нижний предел больше верхнего)

$$\upsilon_{+,11}(s,x,\lambda) = \int\limits_s^x a_{21}(t)e^{2i\lambda(t-s)}\,dt, \quad \upsilon_{+,12}(s,x,\lambda) = -\int\limits_{\max\{x,s\}}^{\pi} a_{21}(t)e^{2i\lambda(t-x)}\,dt,$$

$$\upsilon_{+,21}(s,x,\lambda) = \int\limits_s^x a_{12}(t)e^{2i\lambda(x-t)}\,dt, \quad \upsilon_{+,22}(s,x,\lambda) = -\int\limits_0^{\min\{x,s\}} a_{12}(t)e^{2i\lambda(s-t)}\,dt, \quad \lambda \in G_{+,r},$$

$$\upsilon_{-,11}(s,x,\lambda) = \int\limits_s^x a_{12}(t)e^{-2i\lambda(t-s)}\,dt, \quad \upsilon_{-,12}(s,x,\lambda) = -\int\limits_{\max\{x,s\}}^{\pi} a_{12}(t)e^{-2i\lambda(t-x)}\,dt,$$

$$\upsilon_{-,21}(s,x,\lambda) = \int\limits_s^x a_{21}(t)e^{-2i\lambda(x-t)}\,dt, \quad \upsilon_{-,22}(s,x,\lambda) = -\int\limits_0^{\min\{x,s\}} a_{21}(t)e^{-2i\lambda(s-t)}\,dt, \quad \lambda \in G_{-,r}.$$

Для $\lambda \in G_{\pm,r}$ положим

$$\Upsilon_{\pm}(\lambda) = \max_{s,x\in[0,\pi],\, j,k=1,2} |\upsilon_{\pm,j,k}(s,x,\lambda)|. \tag{6.2}$$

В полосе $\Pi_r \ni \lambda$ для оценок удобно использовать функцию

$$\Upsilon_0(\lambda) = \Upsilon_+(\lambda) + \Upsilon_-(\lambda). \tag{6.3}$$

Напомним, что

$$a = \|\mathrm{A}(x)\|_{L_1} = \sum_{j,\,k\in\{1,2\}} \|a_{jk}(x)\|_{L_1}.$$

Обозначим еще

$$\gamma(\lambda) = \frac{\|u^2\|_{L_1}}{2|\lambda|}$$

для уравнения Штурма—Лиувилля и $\gamma(\lambda) = 0$ для системы Дирака — оценка матрицы $\mathrm{C}(x,\lambda)$.

Положим

$$G_{\pm,r,0} = \{\lambda \in G_{\pm,r} :\ |\lambda| > \Lambda_0\},$$

$$\Pi_{r,0} = \{\lambda \in \Pi_r :\ |\lambda| > \Lambda_0\},$$

$$\gamma = \max_{|\lambda|>\Lambda_0} |\gamma(\lambda)|.$$

В случае системы Дирака возьмем $\Lambda_0 = 1$, а для оператора Штурма—Лиувилля положим

$$\Lambda_0 = \max\left\{1, \frac{\|u^2\|_{L_1}}{2a}\right\} = \max\left\{1, \frac{\|u^2\|_{L_1}}{4\|u\|_{L_1}}\right\}$$

(при $u \equiv 0$ считаем и здесь $\Lambda_0 = 1$). Этот выбор числа Λ_0 обеспечивает нам оценки $|\lambda| \geqslant 1$ и $\gamma(\lambda) \leqslant a$. В процессе доказательства основной теоремы мы, возможно, увеличим число Λ_0 необходимым нам образом.

Лемма 6.1. *При $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in G_{\pm,r,0}$ выполнено $\Upsilon_{\pm}(\lambda) \to 0$. Если $|\lambda| \to \infty$, $\lambda \in \Pi_{r,0}$, то $\Upsilon_0(\lambda) \to 0$.*

Доказательство. Проведем рассуждения для верхней полуплоскости. Фактически, наша лемма есть вариант леммы Римана—Лебега. Зафиксируем малое ε и приблизим в $L_1[0,\pi]$ функции a_{lm} гладкими функциями p_{lm} с точностью до ε. Тогда

$$|\Upsilon_+(\lambda, a_{lm}) - \Upsilon_+(\lambda, p_{lm})| \leqslant 2\varepsilon e^{\pi r}.$$

Подставляя p_{lm} в интегралы для $v_{+,j,k}(s,x,\lambda)$ вместо a_{lm} и проводя в них интегрирование по частям, получим

$$\Upsilon_+(\lambda, p_{lm}) \leqslant \frac{4e^{\pi r}}{|\lambda|}\|p_{lm}\|_{W_1^1}.$$

Устремляя $|\lambda| \to \infty$, получаем оценку $\Upsilon_+(\lambda) \leqslant C\varepsilon$. □

Главным членом асимптотики функции $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ окажется матрица

$$\mathcal{E}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

решение системы при $\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0$.

Теорема 6.1. *В области $G_{+,r,0}$ система* (6.1) *имеет фундаментальную матрицу решений $\mathrm{Y}_+(x,\lambda)$ вида*

$$\begin{gathered} \mathrm{Y}_+(x,\lambda) = (I + \mathcal{A}_+(x,\lambda))\,\mathcal{E}(x,\lambda),\ \mathcal{A}_+(x,\lambda) = (\alpha_{+,jk}(x,\lambda)), \quad \textit{где} \\ \max_{j,k}\|\alpha_{+,jk}(\cdot,\lambda)\|_{C[0,\pi]} \leqslant C(\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda)), \quad \textit{а} \quad C = C(a,\gamma,r). \end{gathered} \tag{6.5}$$

Более того, в $G_{+,r,0}$ матрица $\mathcal{A}_+(x,\lambda)$ допускает оценку

$$\max_{j,k}\|\alpha_{+,jk}(\cdot,\lambda)\|_{W_1^1[0,\pi]} \leqslant C(a,\gamma,r)|\lambda|. \tag{6.6}$$

В области $G_{-,r,0}$ имеет место аналогичное представление с заменой $Y_+(x,\lambda)$ на $Y_-(x,\lambda)$, а Υ_+ на Υ_-.

Доказательство. Проведем рассуждения для области $G_{+,r,0}$. Будем искать решение в виде $\mathrm{Y}_+ = \mathrm{Z}\mathcal{E}$, где для элементов матрицы $\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} z_{11}(x) & z_{12}(x) \\ z_{21}(x) & z_{22}(x) \end{pmatrix}$ зафиксируем условия $z_{11}(0) = 1$, $z_{12}(0) = 0$, $z_{21}(\pi) = 0$, $z_{22}(0) = 1$. Тогда система (6.1) примет вид

$$\mathrm{Z}' = \lambda(B\mathrm{Z} - \mathrm{Z}B) + (\mathrm{A} + \mathrm{C})\mathrm{Z}. \tag{6.7}$$

Обозначим $\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{21} \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{pmatrix}$ и перейдем к интегральным уравнениям. Получим:

$$\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + V_1\mathbf{z}_1, \qquad \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + V_2\mathbf{z}_2,$$

где

$$V_1\begin{pmatrix} z_{11}(x,\lambda) \\ z_{21}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^x (c_{11}(t,\lambda)z_{11}(t) + (a_{12}(t) + c_{12}(t,\lambda))z_{21}(t))\,dt \\ -\int\limits_x^\pi ((a_{21}(t) + c_{21}(t,\lambda))z_{11}(t) + c_{22}(t,\lambda)z_{21}(t))\,e^{2i\lambda(t-x)}dt \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

$$V_2\begin{pmatrix} z_{12}(x,\lambda) \\ z_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^x (c_{11}(t,\lambda)z_{12}(t) + (a_{12}(t) + c_{12}(t,\lambda))z_{22}(t))\,e^{2i\lambda(x-t)}dt \\ \int\limits_0^x ((a_{21}(t) + c_{21}(t,\lambda))z_{12}(t) + c_{22}(t,\lambda)z_{22}(t))\,dt \end{pmatrix}. \tag{6.9}$$

Покажем, что интегральные операторы $V_1(\lambda)$ и $V_2(\lambda)$ ограничены как операторы из $(L_\infty[0,\pi])^2$ в $(L_\infty[0,\pi])^2$ величинами, не зависящими от $\lambda \in G_{+,r,0}$.

Действительно, из представлений (6.8)-(6.9) сразу следует, что

$$\|V_j\|_{L_\infty \to L_\infty} \leqslant e^{2\pi r}(a + \gamma), \qquad j = 1,\ 2,$$

где $a = \|\mathrm{A}\|_{L_1}$. Более того, квадраты операторов $V_1(\lambda)$ и $V_2(\lambda)$, действующих из $(L_\infty[0,\pi])^2$ в $(L_\infty[0,\pi])^2$, являются сжимающими при больших значениях $|\lambda|$.

Рассмотрим сначала оператор V_1. Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что

$$V_1(V_1(\mathbf{z}_1(x,\lambda))) = \mathbf{w}_1(x,\lambda) = \begin{pmatrix} w_{11}(x,\lambda) \\ w_{21}(x,\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$w_{11}(x,\lambda) = \int_0^x \left\{ c_{11}(t,\lambda) \left(\int_0^t (c_{11}(s,\lambda)z_{11}(s) + (a_{12}(s) + c_{12}(s,\lambda))z_{21}(s))ds \right) - \right.$$

$$\left. - (a_{12}(t) + c_{12}(t,\lambda)) \int_t^\pi ((a_{21}(s) + c_{21}(s,\lambda))z_{11}(s) + c_{22}(s,\lambda)z_{21}(s))e^{2i\lambda(s-t)}ds \right\} dt =$$

$$= \int_0^\pi K_{11}(s,x)z_{11}(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad G_{+,r,0} \ni \lambda \to \infty,$$

причем

$$K_{11}(s,x) = -a_{21}(s) \int_0^{\min\{s,x\}} a_{12}(t)e^{2i\lambda(s-t)}dt = a_{21}(s)\upsilon_{+,22}(s,x,\lambda);$$

$$w_{21}(x,\lambda) = -\int_x^\pi \left\{ (a_{21}(t) + c_{11}(t,\lambda))e^{2i\lambda(t-x)} \left(\int_0^t (c_{11}(s,\lambda)z_{11}(s) + (a_{12}(s) + c_{12}(s,\lambda))z_{21}(s))ds \right) - \right.$$

$$\left. - c_{22}(t,\lambda)e^{2i\lambda(t-x)} \int_t^\pi ((a_{21}(s) + c_{21}(s,\lambda))z_{11}(s) + c_{22}(s,\lambda)z_{21}(s))e^{2i\lambda(s-t)}ds \right\} dt =$$

$$= \int_0^\pi K_2(s,x)z_{21}(s)ds + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad G_{+,r,0} \ni \lambda \to \infty,$$

причем

$$K_{21}(s,x) = a_{12}(s) \int_{\max\{s,x\}}^\pi a_{21}(t)e^{2i\lambda(t-x)}ds = a_{12}(s)\upsilon_{+,12}(s,x,\lambda).$$

Аналогично,

$$V_2\left(V_2\begin{pmatrix} z_{12} \\ z_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \int_0^x a_{21}(s)\upsilon_{+,21}(s,x,\lambda)z_{12}(s)ds \\ \\ \int_0^x a_{12}(s)\upsilon_{+,11}(s,x,\lambda)z_{22}(s)ds \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Теперь заметим, что

$$\|K_{11}\|_{L_\infty} \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant\pi} \int_0^\pi |K_{11}(s,x)|\,ds \leqslant \|a_{21}\|_{L_1} \max_{s,\,x} |\upsilon_{+,22}(s,x,\lambda)| \leqslant a\Upsilon_+(\lambda).$$

Такие же оценки справедливы для других интегральных ядер K_{jk}. Отсюда и из леммы 6.1 следует, что

$$\|(V_j(\lambda))^2\|_{L_\infty} \leqslant 4(a+\gamma)e^{2\pi r}(\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda)) \to 0, \quad |\lambda| \to \infty, \quad j = 1, 2.$$

Значит, операторы $(V_1(\lambda))^2$ и $(V_2(\lambda))^2$ действительно являются сжимающими в $L_\infty[0,\pi]$ при больших значениях $|\lambda|$, $\lambda \in G_{+,r,0}$.

Вернемся к системе (6.7). Обозначим $\mathbf{z}_1^0 = \mathbf{z}_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z}_2^0 = \mathbf{z}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Представим решение системы в виде (пока формального) ряда

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^0 + \mathrm{V}_k(\lambda) \sum_{\nu=0}^{\infty} (V_k(\lambda))^\nu \mathbf{z}_k^0, \quad k = 1,\, 2.$$

Из этой записи и из ограниченности оператора $V_k(\lambda)$, действующего из $L_\infty[0,\pi]$ в $L_\infty[0,\pi]$, видно, что достаточно доказать сходимость ряда по норме $L_\infty[0,\pi]$. Для этого перепишем его в виде

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^0 + \mathrm{V}_k(\lambda)\mathbf{z}_k^0 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mathrm{V}_k(\lambda))^{2\nu} \left((\mathrm{V}_k(\lambda))^2 \mathbf{z}_k^0 + (\mathrm{V}_k(\lambda))^3 \mathbf{z}_k^0 \right).$$

Увеличим, если надо, число Λ_0 так, чтобы при всех $\lambda \in G_{+,r,0}$ было выполнено неравенство

$$\|(\mathrm{V}_k(\lambda))^2\|_{L_\infty} < 1/2.$$

Это гарантирует сходимость ряда в норме $L_\infty[0,\pi]$ и дает оценку

$$\|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0 - \mathrm{V}_k(\lambda)\mathbf{z}_k^0\|_{L_\infty} \leqslant 2 \left\| (\mathrm{V}_k(\lambda))^2 \mathbf{z}_k^0 + (\mathrm{V}_k(\lambda))^3 \mathbf{z}_k^0 \right\|_{L_\infty}. \tag{6.10}$$

Условимся дальше обозначать $\mathbf{z}_k^\nu = (V_k)^\nu \mathbf{z}_k^0$. Из ограниченности $\|\mathrm{V}_k\|_{L_\infty \to L_\infty}$ следует оценка

$$\|\mathbf{z}_k^1\|_{L_\infty} \leqslant e^{2\pi r}(a + \gamma).$$

Введем функции

$$\widetilde{\mathbf{z}}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\int\limits_x^\pi a_{21}(t) e^{2i\lambda(t-x)}\, dt \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathbf{z}}_2^1 = \begin{pmatrix} \int\limits_0^x a_{12}(t) e^{2i\lambda(x-t)}\, dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

— они получаются из функций $\mathbf{z}_1^1$ и $\mathbf{z}_2^1$ отбрасыванием всех слагаемых, содержащих функции c_{jk}. Легко видеть, что

$$\|\mathbf{z}_k^1 - \widetilde{\mathbf{z}}_k^1\|_{L_\infty} \leqslant (\pi + 1) e^{2\pi r} \gamma(\lambda).$$

Заметим еще, что

$$\widetilde{\mathbf{z}}_1^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \upsilon_{+,12}(0, x, \lambda) \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{\mathbf{z}}_2^1 = \begin{pmatrix} \upsilon_{+,21}(0, x, \lambda) \\ 0 \end{pmatrix},$$

так что $\|\widetilde{\mathbf{z}}_k^1\|_{L_\infty} \leqslant \Upsilon_+(\lambda)$. Из этих двух неравенств следует, что

$$\|\mathbf{z}_k^1\|_{L_\infty} \leqslant (\pi + 1) e^{2\pi r} (\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda)). \tag{6.11}$$

Далее,

$$\|\mathbf{z}_k^2\|_{L_\infty} \leqslant \|\mathrm{V}_k\|_{L_\infty \to L_\infty} \|\mathbf{z}_k^1\|_{L_\infty} \leqslant (\pi + 1)(a + \gamma) e^{4\pi r} (\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$
$$\|\mathbf{z}_k^3\|_{L_\infty} \leqslant \|\mathrm{V}_k\|_{L_\infty \to L_\infty} \|\mathbf{z}_k^2\|_{L_\infty} \leqslant (\pi + 1)(a + \gamma)^2 e^{6\pi r} (\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda)).$$

Итак, согласно (6.10),

$$\|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0 - \mathbf{z}_k^1\|_{L_\infty} \leqslant 2(\pi + 1)(a + \gamma)(a + \gamma + 1) e^{6\pi r} (\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda)).$$

Учитывая (6.11), получаем

$$\|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0\|_{L_\infty} \leqslant C(\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda)),$$

где величина C зависит только от a, γ и r. Мы доказали первое утверждение теоремы.

Второе неравенство получается из первого. Заметим, что $\Upsilon_+(\lambda) + \gamma(\lambda) \leqslant C(a, \gamma, r)$, а значит, и $\|\mathbf{z}_k\|_{L_\infty} \leqslant C(a, \gamma, r)$. Поскольку $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k^0 + \mathrm{V}_k \mathbf{z}_k$, то

$$\|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}_k^0\|_{W_1^1} \leqslant \|\mathrm{V}_k\|_{L_\infty \to W_1^1} \|\mathbf{z}_k\|_{L_\infty} \leqslant C(a, \gamma, r)|\lambda|.$$

$\square$

Замечание 6.1. Из доказательства теоремы видно, что число Λ_0 полностью определяется параметрами a, γ и r и характером убывания к нулю функции $\Upsilon_+(\lambda)$. А именно, нам требуется выполнение неравенства
$$4(a+\gamma)e^{2\pi r}(\Upsilon_+(\lambda)+\gamma(\lambda)) \leqslant \frac{1}{2}.$$
Учитывая, что $\gamma \leqslant a$ (мы так ввели число Λ_0), достаточно обеспечить неравенство
$$\Upsilon_+(\lambda)+\gamma(\lambda) \leqslant \frac{e^{-2\pi r}}{16a}.$$
В случае системы Дирака слагаемое $\gamma(\lambda)$ равно 0, и получаем окончательно
$$\Lambda_0 = \max\left\{1, \inf\left\{\mu:\ \Upsilon_+(\lambda) \leqslant \frac{e^{-2\pi r}}{16(\|p_2\|_{L_1}+\|p_3\|_{L_1})}\ \forall\lambda\in G_{+,r},\ |\lambda|>\mu\right\}\right\}.$$
Для системы, возникающей при исследовании оператора Штурма—Лиувилля, определение числа Λ_0 чуть сложнее:
$$\Lambda_0 = \max\left\{1,\ 32e^{2\pi r}\|u\|_{L_1}\|u^2\|_{L_1},\ \inf\left\{\mu:\ \Upsilon_+(\lambda) \leqslant \frac{e^{-2\pi r}}{32\|u\|_{L_1}}\ \forall\lambda\in G_{+,r},\ |\lambda|>\mu\right\}\right\}. \tag{6.12}$$
Дальнейшая конкретизация числа Λ_0 в общей ситуации невозможна. Хотя $\Upsilon_+(\lambda)\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$, но убывать к нулю эта величина может «как угодно медленно». Заметим, впрочем, что здесь мы всегда можем пожертвовать явным видом области $G_{0,+,r}$ и считать, что
$$G_{0,+,r} = \left\{\lambda\in G_{+,r}:\ |\lambda|>1,\ \Upsilon_+(\lambda) < \frac{e^{-2\pi r}}{16(\|p_2\|_{L_1}+\|p_3\|_{L_1})}\right\}$$
в случае оператора Дирака и
$$G_{0,+,r} = \left\{\lambda\in G_{+,r}:\ |\lambda|>1,\ |\lambda|>64e^{2\pi r}\|u\|_{L_1}\|u^2\|_{L_1},\ \Upsilon_+(\lambda) < \frac{e^{-2\pi r}}{32\|u\|_{L_1}}\right\}$$
в случае оператора Штурма—Лиувилля.

Отметим, что подходящей для нас асимптотикой в $G_{+,r}$ и $G_{-,r}$ обладают *некоторые* матрицы фундаментальных решений $\mathrm{Y}_\pm(x,\lambda)$. В полосе Π_r ситуация упрощается, в частности, можно зафиксировать условие $\mathrm{Y}(0,\lambda)=\mathrm{I}$.

Следствие 6.1. *В области* $\Pi_{r,0}$ *фундаментальная матрица решений системы* (6.1) *с начальным условием* $\mathrm{Y}(0,\lambda)=\mathrm{I}$ *имеет асимптотику*
$$\begin{gathered}\mathrm{Y}(x,\lambda) = (I+\mathcal{A}(x,\lambda))\mathcal{E}(x,\lambda) = \mathcal{E}(x,\lambda)+\mathrm{R}(x,\lambda),\ \mathrm{R}(x,\lambda)=(r_{jk}(x,\lambda)),\ \mathcal{A}(x,\lambda)=(\alpha_{jk}(x,\lambda)),\\ \text{где}\quad \max_{j,k}\|r_{jk}(\cdot,\lambda)\|_{C[0,\pi]} \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda)+\gamma(\lambda)),\quad \text{а}\quad C=C(a,\gamma,r).\end{gathered} \tag{6.13}$$
Кроме того, в $\Pi_{r,0}$ *матрица* $\mathcal{A}(x,\lambda)$ *допускает оценку*
$$\max_{j,k}\|\alpha_{jk}(\cdot,\lambda)\|_{W_1^1[0,\pi]} \leqslant C(a,\gamma,r). \tag{6.14}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в полосе Π_r элементы матриц $\mathcal{E}(x,\lambda)$ и $\mathrm{Y}_+(x,\lambda)$ равномерно по $x\in[0,\pi]$ ограничены величиной $C(a,\gamma,r)$. Пусть $\mathrm{Y}_+(x,\lambda)$ — матрица, построенная в теореме в области $G_{+,r,0}\supset\Pi_{r,0}$. Заметим, что
$$\mathrm{Y}_+(0,\lambda) = \mathrm{I}+\mathcal{A}_+(0,\lambda),$$
где элементы матрицы $\mathcal{A}_+(0,\lambda)$ допускают оценку величиной $C(a,\gamma,r)(\Upsilon_+(\lambda)+\gamma(\lambda))$.

Увеличивая при необходимости Λ_0, получим представление
$$\mathrm{Y}_+^{-1}(0,\lambda) = \mathrm{I}+\widetilde{\mathcal{A}}_+(\lambda),$$
где элементы матрицы $\widetilde{\mathcal{A}}_+(\lambda)$ допускают такую же оценку в $\Pi_{r,0}$. Для доказательства оценки (6.13) достаточно заметить, что
$$\mathrm{Y}(x,\lambda) = \mathrm{Y}_+^{-1}(0,\lambda)\mathrm{Y}_+(x,\lambda),$$
откуда
$$\mathrm{R}(x,\lambda) = \mathcal{A}_+(x,\lambda)\mathcal{E}(x,\lambda)+\widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)\mathrm{Y}_+(x,\lambda).$$

Для доказательства (6.14) заметим, что

$$\mathcal{A}(x,\lambda) = \mathcal{A}_+(x,\lambda) + \widetilde{\mathcal{A}}(\lambda) + \widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)\mathcal{A}_+(x,\lambda).$$

Все элементы матрицы $\mathcal{A}_+(x,\lambda)$ ограничены по норме пространства $W_1^1[0,\pi]$ величиной $C(a,\gamma,r)$, а элементы матрицы $I + \widetilde{\mathcal{A}}(\lambda)$ не зависят от x и допускают аналогичную оценку, откуда вытекает (6.14). □

7. Оценки функций $\Upsilon_\pm(\lambda)$ и $\Upsilon_0(\lambda)$

Теперь наша цель — показать, что при дополнительных условиях на потенциал $q(x)$ оператора Штурма—Лиувилля или $P(x)$ оператора Дирака можно прояснять характер убывания к нулю функций $\Upsilon_\pm(\lambda)$.

Мы будем работать с функцией $\Upsilon_+(\lambda)$ в верхней полуплоскости $G_{+,r}$ — рассуждения для нижней полуплоскости $G_{-,r}$ полностью аналогичны (меняется лишь знак в показателях экспонент), а полоса Π_r является подмножеством $G_{+,r}$.

Приведем определение пространства Харди, необходимое нам для дальнейших рассуждений.

Определение 7.1. *Пространством Харди H^s* в полуплоскости $G_{+,r} = \{z = x+iy:\ y > -r\}$, $r > 0$, называется банахово пространство аналитических функций $\varphi(z)$, для которых конечна величина

$$\|\varphi\|_{H^s} = \begin{cases} \sup\limits_{y>r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x+iy)|^s\,dx\right)^{1/s}, & \text{если } s\in[1,\infty),\\ \sup\limits_{y>r}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\varphi(x+iy)|, & \text{если } s=+\infty.\end{cases}$$

Пространством Харди H^s в полосе $\Pi_r = \{z:\ |\operatorname{Im} z| < r\}$, $r > 0$, называется банахово пространство голоморфных в Π_r функций с конечной нормой

$$\|\varphi\|_{H^s} = \sup_{|y|<r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x+iy)|^s\,dx\right)^{1/s}, \quad 1 < s < \infty$$

(при $s = \infty$ интеграл заменяем на супремум).

Мы уже знаем, что

$$\Upsilon_+(\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad G_{+,r} \ni \lambda \to \infty.$$

Теорема Пэли—Винера утверждает, что одностороннее преобразование Фурье

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\,dt$$

любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p\in[1,2]$, есть функция пространства Харди $H^{p'}$ с сопряженным индексом $p' = \dfrac{p}{p-1}$ (для краткости дальнейших формулировок договоримся везде далее обозначать штрихом сопряженный индекс).

Оказывается, что функция $\Upsilon_+(\lambda)$ обладает аналогичными свойствами. Конечно, эта функция не может лежать в пространстве Харди, поскольку она не аналитична по переменной $\lambda \in G_{+,r}$, но свойства аналитичности и гладкости функции $\Upsilon_0(\lambda)$ нас не интересуют, нам интересен ее «характер убывания» при $|\lambda| \to \infty$.

В данном разделе мы покажем, что в этом отношении свойства функции $\Upsilon_+(\lambda)$ полностью повторяют свойства функций пространства Харди $H^{p'}(\mathbb{C}_+)$.

Прежде всего, мы перепишем функции $\upsilon_{+,jk}$ в следующем виде:

$$\upsilon_{+,11}(s,x,\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x-2s} a_{21}(\tau/2+s)e^{i\lambda\tau}\,d\tau, \tag{7.1}$$

$$\upsilon_{+,12}(s,x,\lambda) = -\frac{1}{2}\int\limits_{\max\{0,2s-2x\}}^{2\pi-2x} a_{21}(\tau/2+x)e^{i\lambda\tau}\,d\tau,$$

$$\upsilon_{+,21}(s,x,\lambda) = -\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2x-2s} a_{12}(x-\tau/2)e^{i\lambda\tau}\,d\tau,$$

$$\upsilon_{+,22}(s,x,\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_{\max\{0,2s-2x\}}^{2s} a_{12}(s-\tau/2)\;e^{i\lambda\tau}\,d\tau,$$

где $\lambda \in G_{+,r}$, а параметры s, $x \in [0,\pi]$ считаем фиксированными.

Мы будем рассматривать шкалы пространств $L_p[0,\pi]$ и $B^{\theta}_{p,q}[0,\pi]$ для функций $u(x)$ (первообразная потенциала q для оператора Штурма—Лиувилля) и $p_2(x)$, $p_3(x)$ (элементы матрицы-потенциала $P(x)$ для системы Дирака). Определение пространств Бесова см. в приложении В, определение 17.6 и теорема 17.IX. Вернемся к функциям $\upsilon_{+,jk}(s,x,\lambda)$. Поскольку оператор линейной замены $T\,:\, f \mapsto f(\omega(\cdot))$ ограничен в пространствах $L_p[0,\pi]$ и в пространствах $B^{\theta}_{p,q}[0,\pi]$, достаточно будет рассмотреть функцию

$$\upsilon(x,\lambda) = \int\limits_0^{2x} f(t/2)e^{i\lambda t}dt, \qquad \Upsilon(\lambda) = \sup_{x\in[0,\pi]} |\upsilon(x,\lambda)|\,. \tag{7.2}$$

Прежде всего заметим, что в верхней полуплоскости

$$\Upsilon(\sigma+i\tau) \leqslant \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(t/2)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_0^{2\pi} e^{-p'\tau t}dt\right)^{1/p'} \leqslant C(p)\|f\|_{L_p}\tau^{-1/p'} \tag{7.3}$$

(обычная оценка для преобразования Лапласа функции из L_p). Более точная информация об убывании функции Υ содержится в следующей теореме.

Теорема 7.1. *Для любой $f \in L_p[0,\pi]$, $p \in (1,2]$ справедлива оценка функции $\Upsilon(\lambda)$*

$$\sup_{\tau\geqslant -r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Upsilon^{p'}(\sigma+i\tau)\,d\tau\right)^{1/p'} \leqslant C\|f\|_{L_p}, \tag{7.4}$$

где величина C зависит только от r и p.

Доказательство. Положим $\lambda = \sigma + i\tau$, зафиксируем $\tau > -r$ и обозначим $h(t) = f(t/2)e^{-\tau t}$ (далее считаем функцию h продолженной нулем за пределы отрезка $[0,2\pi]$). Легко видеть, что

$$\Upsilon(\sigma+i\tau) = \left[\mathcal{C}(\check{h})\right](\sigma),$$

где $\mathcal{C}$ — нелинейный оператор Карлесона

$$\left[\mathcal{C}(f)\right](\sigma) := \sup_{x>0}\left|\int\limits_{-x}^{x} \hat{f}(t)e^{it\sigma}dt\right|,$$

а $\check{h}$ — обратное преобразование Фурье функции h. Теперь воспользуемся теоремой Карлесона—Ханта (см. теорему 17.V приложения В). В силу этой теоремы и теоремы Хаусдорфа—Юнга

$$\|\Upsilon(\cdot+i\tau)\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C(p)\|\check{h}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C(p)\|h\|_{L_p[0,2\pi]} \leqslant C(p)e^{\pi r}\|f\|_{L_p[0,\pi]}.$$

Переходя к супремуму по $\tau \geqslant -r$, получаем утверждение теоремы. □

Для формулировки дальнейших результатов нам потребуются некоторые свойства меры Карлесона (см. приложение В, определение 17.3).

Теорема 7.2. *Для любой* $f \in L_p[0,\pi]$, $p \in [1,2]$, *и для любой меры Карлесона* μ *в* $G_{+,r}$ *справедлива оценка функции* $\Upsilon(\lambda)$, *введенной в* (7.2):

$$\|\Upsilon\|_{L_{p'}(\mu)} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина C *зависит только от* $|d\mu|$ *и числа* r.

Доказательство. Мы уже доказали, что функция $\Upsilon(\lambda)$ интегрируема в степени p' по каждой горизонтальной прямой, лежащей в замкнутой полуплоскости $\overline{G_{+,r}}$. Заметим теперь, что $\Upsilon(\lambda)$ субгармонична в открытой полуплоскости $G_{+,r}$.

Действительно, пусть точка λ лежит в $G_{+,r}$ вместе со своей окрестностью радиуса δ. Зафиксируем $x \in [0,\pi]$ и запишем формулу среднего значения для голоморфной функции переменной λ:

$$\upsilon(x,\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \upsilon(x,\lambda+\delta e^{i\theta})\,d\theta.$$

Тогда

$$|\upsilon(x,\lambda)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\upsilon(x,\lambda+\delta e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Upsilon(\lambda+\delta e^{i\theta})\,d\theta$$

и остается перейти к супремуму по $x \in [0,\pi]$. Поскольку функция $\Upsilon(t-ir)$, $t \in \mathbb{R}$, суммируема в степени p', то интеграл Пуассона

$$U(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} P_{\tau+r}(\sigma-t)\Upsilon(t-ir)\,dt, \quad \lambda = \sigma+i\tau, \qquad P_a(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{\xi^2+a^2},$$

корректно определяет гармоническую в $G_{+,r}$ функцию $U(\lambda)$. Эта функция непрерывна в $\overline{G_{+,r}}$ и совпадает с $\Upsilon(\lambda)$ при $\lambda \in \partial G_{+,r}$, а значит, является гармонической мажорантой:

$$\Upsilon(\lambda) \leqslant |U(\lambda)|$$

для всех $\lambda \in \overline{G_{+,r}}$. Поскольку $\Upsilon(t-ir) \in L_{p'}(\mathbb{R})$, то $U(\lambda) \in H^{p'}$ (см. [17, теорема I.3.5]), откуда $U \in L_{p'}(d\mu)$ (см. [17, теорема II.3.9]), а значит, и $\Upsilon(\lambda) \in L_{p'}(d\mu)$ с соответствующей оценкой на норму

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|\Upsilon(t-ir)\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C\|\Upsilon(\lambda)\|_{H^{p'}(G_{+,r})},$$

где величина C зависит только от характеристики меры $|d\mu|$. □

Для приложений полученного результата отметим следующий частный случай. Назовем последовательность λ_n, $n \in \mathbb{N}$, точек полосы $\alpha_1 < \operatorname{Im}\lambda < \alpha_2$ для некоторых α_1 и α_2, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, *несгущающейся*, если найдется число $\beta > 0$ такое, что в любом прямоугольнике

$$\operatorname{Re}\lambda \in [x, x+1], \quad \operatorname{Im}\lambda \in [\alpha_1,\alpha_2]$$

заключено не более β элементов последовательности.

Следствие 7.1. *Пусть* $\{\lambda_n\}$ — *несгущающаяся последовательность точек полосы* $\alpha_1 < \operatorname{Im}\lambda < \alpha_2$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p[0,\pi]$, $p \in [1,2]$, *справедлива оценка*

$$\|\{\Upsilon(\lambda_n)\}\|_{l_{p'}} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина C *зависит только от характеристик несгущающейся последовательности* $\{\lambda_n\}$. *В случае* $p=1$ *можно добавить, что* $\Upsilon(\lambda_n) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Достаточно заметить, что мера $d\mu = \sum \delta(\lambda-\lambda_n)$ является мерой Карлесона. Действительно, для каждого прямоугольника $Q_{x,y}$ имеем

$$\mu(Q_{x,y}) \leqslant \begin{cases} \beta(y+1), & \text{если } y \geqslant \alpha_1, \\ 0, & \text{если } y \in (0,\alpha_1). \end{cases}$$

Остается воспользоваться теоремой 7.2. Последнее утверждение о стремлении $\Upsilon(\lambda_n)$ к нулю было доказано выше. □

Перейдем к шкале пространств Бесова $B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$. Обозначим через $L^\theta_\infty(G_{+,r})$, $\theta\in[0,1]$, пространство ограниченных измеримых на $G_{+,r}$ функций $f(z)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L^\theta_\infty}=\sup_{z\in G_{+,r}}|f(z)|(1+|z|)^\theta.$$

Это пространство, как легко видеть, состоит из функций $f(z)=O(|z|^{-\theta})$ при $z\to\infty$. Подпространство в $L^\theta_\infty(G_{+,r})$, состоящее из функций $f(z)=o(|z|^{-\theta})$ при $z\to\infty$, обозначим через $L^\theta_{\infty,0}(G_{+,r})$.

Теорема 7.3. *Если функция f лежит в пространстве $B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$, $\theta\in(0,1)$, то $\Upsilon(\lambda)\in L^\theta_\infty(G_{+,r})$, причем*

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L^\theta_\infty}\leqslant C\|f\|_{B^\theta_{1,\infty}},$$

где величина C зависит только от r. Если функция f абсолютно непрерывна, то $\Upsilon(\lambda)\in L^1_\infty(G_{+,r})$, причем

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L^1_\infty}\leqslant C\|f\|_{W^1_1}.$$

При замене пространства $B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$ на $B^\theta_{1,\infty,0}[0,\pi]$ получим $\Upsilon(\lambda)\in L^\theta_{\infty,0}[0,\pi]$ с сохранением оценки на норму.

Доказательство. Для случая $f\in L_1[0,\pi]$ уже доказано в лемме 6.1, что

$$\Upsilon(\lambda)\in L_{\infty,0}(G_{+,r})),\quad \text{причем}\quad \|\Upsilon(\lambda)\|_{L_\infty}\leqslant C\|f\|_{L_1}.$$

В случае $f\in W^1_1[0,\pi]$ утверждение вытекает из леммы 6.1 и интегрирования по частям:

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L^1_\infty(G_{+,r})}\leqslant\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left(\frac{e^{i\lambda t}f(t/2)\Big|_0^{2x}}{|\lambda|}+\frac{1}{2|\lambda|}\left|\int_0^{2x}f'(t/2)e^{i\lambda t}\,dt\right|\right)\leqslant\frac{\|f\|_{W^1_1}}{|\lambda|}\left(1+2e^{2\pi r}\right).$$

Пусть теперь $f\in B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$. Здесь утверждение доказывается при помощи теоремы об интерполяции (см. приложение A, теорема 16.II и приложение B, теорема 17.X). Положим

$$T_x: f(\cdot)\mapsto \upsilon(x,\cdot),$$

$$X_0=L_1[0,\pi],\qquad Y_0=L_\infty(G_{+,r}),\qquad X_1=W^1_1[0,\pi],\qquad Y_1=L^1_\infty(G_{+,r}),$$
$$X=(X_0,X_1)_{\theta,\infty}=B^\theta_{1,\infty}[0,\pi],\qquad Y=(Y_0,Y_1)_{\theta,\infty}=L^\theta_\infty(G_{+,r})$$

(здесь мы пользуемся теоремой Стейна—Вейса, см. приложение B, теорема 17.II).

Мы уже доказали, что

$$\|T_x\|_{X_0\to Y_0}=C_0<\infty,\qquad \|T_x\|_{X_1\to Y_1}=C_1<\infty,$$

с константами, не зависящими от x. Это значит, что

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}\|T_x\|_{X\to Y}\leqslant C_0^{1-\theta}C_1^\theta.$$

Тогда

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L^\theta_\infty}=\sup_{\operatorname{Im}\lambda\geqslant0}(1+|\lambda|)^\theta\sup_{x\in[0,2\pi]}|\upsilon(x,\lambda)|=\sup_{x\in[0,2\pi]}\|\upsilon(x,\cdot)\|_{L^\theta_\infty}\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{x\in[0,2\pi]}\|T_x\|_{B^\theta_{1,\infty}\to L^\theta_\infty}\cdot\|f\|_{B^\theta_{1,\infty}}\leqslant C\|f\|_{B^\theta_{1,\infty}}.$$

Случай $f\in B^\theta_{1,\infty,0}[0,\pi]$ выводится из доказанного стандартным приемом. Вначале заметим, что

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}|\upsilon(x,\lambda;f_1)-\upsilon(x,\lambda;f_2)|\leqslant\sup_{x\in[0,2\pi]}\|T_x\|_{B^\theta_{1,\infty}\to L^\theta_\infty}\|f_1-f_2\|_{B^\theta_{1,\infty}}\leqslant C\|f_1-f_2\|_{B^\theta_{1,\infty}}.\tag{7.5}$$

Зафиксируем функцию $f\in B^\theta_{1,\infty}$ и подберем абсолютно непрерывную функцию $\widetilde f$, для которой

$$\|f-\widetilde f\|_{B^\theta_{1,\infty,0}[0,1]}<\varepsilon.$$

Тогда

$$(1+|\lambda|)^\theta|\upsilon(x,\lambda;f)|=(1+|\lambda|)^\theta|\upsilon(x,\lambda;\widetilde f)|+\|\upsilon(x,\lambda;f)-\upsilon(x,\lambda;\widetilde f)\|_{L^\theta_\infty}\leqslant C|\lambda|^{\theta-1}+C\varepsilon,$$

где C не зависит от x. Выбирая $\lambda \in G_{+,r}$ достаточно большим по модулю, получим

$$(|\lambda|+1)^{\theta}|\upsilon(x,\lambda;f)| \leqslant C\varepsilon.$$

□

Перейдем к случаю $f \in B^{\theta}_{p,p'}[0,\pi]$, $p \in (1,2]$, $\theta < 1/p$. Заметим, что при $p=2$ эти пространства совпадают с пространствами бесселевых потенциалов $H^{\theta}_2[0,\pi]$ (см. определение 17.9) и с пространствами Соболева $W^{\theta}_2[0,\pi]$.

Теорема 7.4. *Если функция $f \in B^{\theta}_{p,p'}[0,\pi]$, $p \in (1,2]$, $\theta \in (0,1/p)$, то*

$$\sup_{\tau\geqslant -r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} (\Upsilon(\lambda))^{p'}(1+|\sigma|)^{\theta p'}\,d\sigma\right)^{1/p'} \leqslant C\|f\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, \qquad \lambda=\sigma+i\tau, \tag{7.6}$$

где величина C зависит только от r. Кроме того, для любой несгущающейся последовательности $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ в $G_{+,r}$ выполнено $\{n^{\theta}\Upsilon(\lambda_n)\} \in l_{p'}$, причем

$$\|\{n^{\theta}\Upsilon(\lambda_n)\}\|_{l_{p'}} \leqslant C\|f\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, \tag{7.7}$$

где величина C зависит только от r и характеристик α_1, α_2, β последовательности $\{\lambda_n\}$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $p=2$. Пусть F — оператор преобразования Фурье. Согласно лемме 17.1, функция

$$\hat{h} = F[h](\sigma) = \upsilon(1,\sigma+i\tau)$$

(здесь $\tau \geqslant -r$ фиксировано) лежит в пространстве $L^{\theta}_2(\mathbb{R})$, причем

$$\|\hat{h}\|_{L^{\theta}_2} \leqslant C\|h\|_{B^{\theta}_{2,2}}, \tag{7.8}$$

где C зависит только от функции r. Как и в доказательстве теоремы 7.1 заметим, что

$$\Upsilon(\sigma+i\tau) = \left[\mathcal{C}(\check{h})\right](\sigma),$$

где $\mathcal{C}$ — нелинейный оператор Карлесона, а $\check{h}$ — обратное преобразование Фурье функции h. Легко проверить, что вес $w(\lambda)=(1+|\lambda|)^{2\theta}$ принадлежит классу Макенхаупта A_2, а $L_2(w)=L^{\theta}_2(\mathbb{R})$. В силу теоремы 17.V и (7.8),

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_2((1+|\lambda|)^{2\theta})} \leqslant C\|\check{h}\|_{L_2((1+|\lambda))^{2\theta})} \leqslant C(r)\|h\|_{B^{\theta}_{2,2}[0,\pi]}.$$

Переходя к максимуму по $\tau \geqslant -r$, получаем

$$\sup_{\tau\geqslant -r}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} (\Upsilon(\lambda))^{2}(1+|\sigma|)^{2\theta}\,d\sigma\right)^{1/2} \leqslant C\|f\|_{B^{\theta}_{2,2}}, \qquad \lambda=\sigma+i\tau.$$

Мы доказали первое утверждение теоремы для случая $p=2$. Общий случай получается теперь с помощью интерполяции по индексу $p \in [1,2]$ (случай $p=1$ разобран в теореме 7.3). Зафиксируем переменную $\tau \geqslant -r$; рассмотрим отображение

$$T: f(x) \mapsto \Upsilon(\sigma+i\tau) = \sup_{x\in[0,\pi]}\left|\int\limits_0^{2x} f(t/2)e^{i\lambda t}\,dt\right|,$$

где $\lambda=\sigma+i\tau$. Мы уже проверили, что

$$T:\ B^{s_1}_{2,2}[0,\pi] \to L^{s_1}_2(\mathbb{R}),\ 0<s_1<1/2, \quad \|Tf\|_{L^{s_1}_2} \leqslant C_1\|f\|_{B^{s_1}_{2,2}}.$$

Кроме того

$$T:\ B^{s_2}_{1,\infty}[0,\pi] \to L^{s_2}_{\infty}(\mathbb{R}),\ 0<s_2<1, \quad \|Tf\|_{L^{s_2}_{\infty}} \leqslant C_2\|f\|_{B^{s_2}_{1,\infty}}.$$

При этом константы C_1 и C_2 зависят от r и индексов s_1, s_2, но не зависят от τ и f. Мы положим

$$A_1 = B^{s_1}_{2,2}[0,\pi], \qquad A_2 = B^{s_2}_{1,\infty}[0,\pi],$$

причем выберем $s_1 \leqslant s_2$.

Далее, пусть

$$B_1 = L_2^{s_1}(\mathbb{R}), \qquad B_2 = L_\infty^{s_2}(\mathbb{R}).$$

Согласно теоремам 17.XIV и 17.III, имеем

$$[A_1, A_2]_\theta = B_{p,p'}^s[0,\pi], \qquad [B_1, B_2]_\theta = L_{p'}^s(\mathbb{R}),$$

где

$$s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2, \qquad p = \frac{2}{1+\theta}.$$

Получаем первое утверждение теоремы.

Перейдем к доказательству второго утверждения. Так же, как при доказательстве теоремы 7.2, проверяется, что функция $\Upsilon(\lambda)$ субгармонична в $\mathbb{C}_+$. Тогда при любом достаточно малом $\delta > 0$

$$\Upsilon(\lambda_n) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Upsilon(\lambda_n + \delta e^{i\theta})\, d\theta. \tag{7.9}$$

Положим $R = \min\{\alpha_1, 1/2\}$, где α_1 введено в определении несгущающейся последовательности. Умножим неравенство (7.9) на δ и проинтегрируем по $\delta \in [0, R]$:

$$\frac{R^2}{2}\Upsilon(\lambda_n) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} \Upsilon(\lambda_n + \delta e^{i\theta})\, d\theta\, d\delta = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\lambda-\lambda_n|\leqslant R} \Upsilon(\lambda)\, d\sigma\, d\tau.$$

Тогда

$$\Upsilon(\lambda_n)|\lambda_n|^\theta \leqslant \frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{|\lambda-\lambda_n|\leqslant R} \Upsilon(\lambda)(1+|\lambda|)^\theta\, d\sigma\, d\tau.$$

Применяя неравенство Гельдера, получим

$$\Upsilon^{p'}(\lambda_n)|\lambda_n|^{p'\theta} \leqslant C\iint\limits_{|\lambda-\lambda_n|\leqslant R} \Upsilon^{p'}(\lambda)(1+|\lambda|)^{p'\theta}\, d\sigma\, d\tau.$$

Непосредственно из определения несгущающейся последовательности следует оценка

$$C_1 n \leqslant |\lambda_n| \leqslant C_2 n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^\infty \Upsilon^{p'}(\lambda_n) n^{p'\theta} \leqslant C\sum_{n=1}^\infty \iint\limits_{|\lambda-\lambda_n|\leqslant R} \Upsilon^{p'}(\lambda)(1+|\lambda|)^{p'\theta}\, d\sigma\, d\tau.$$

Каждый из кругов $U_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| \leqslant R\}$ может пересекаться с не более, чем β другими такими кругами, а значит, сумма интегралов в правой части не превосходит

$$\beta\int_0^{\alpha_2+1}\int_{\mathbb{R}} \Upsilon^{p'}(\lambda)(1+|\lambda|)^{p'\theta}\, d\sigma\, d\tau.$$

Учитывая (7.6), имеем

$$\|\{\Upsilon(\lambda_n)n^\theta\}\|_{l_{p'}} \leqslant C\left(\sup_{\tau\geqslant 0}\int_{\mathbb{R}} \Upsilon^{p'}(\lambda)(1+|\lambda|)^{p'\theta}\, d\sigma\right)^{1/p'} \leqslant C\|f\|_{B_{p,p'}^\theta}.$$

□

В заключение этого раздела еще раз отметим, что в силу представлений (7.1) и ограниченности оператора линейной замены $T : f \mapsto f(\omega(\cdot))$ в пространствах $L_p[0,\pi]$ и в пространствах $B_{p,q}^\theta[0,\pi]$ все доказанные выше результаты справедливы для функций $\Upsilon_\pm$ в соответствующих полуплоскостях и для функции Υ_0 в полосе.

8. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора Штурма—Лиувилля в сильно регулярном случае

Вначале мы получим асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций определенного в утверждении 2.5 дифференциального оператора $\mathcal{L}_{q,U}$, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + q(x)y$$

и регулярными краевыми условиями

$$U_j(y) = a_{j1}y(0) + a_{j2}y^{[1]}(0) + b_{j1}y(\pi) + b_{j2}y^{[1]}(\pi), \qquad j = 1, 2. \tag{8.1}$$

Обозначим через J_{ij} определитель, составленный из i-го и j-го столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что оператор $\mathcal{L}_{q,U}$ называется *регулярным* (по Биркгофу), если выполнено одно из следующих условий:

1) $J_{42} \neq 0$;
2) $J_{42} = 0,\ J_{14} + J_{32} \neq 0$;
3) $J_{42} = J_{14} = J_{32} = 0,\ J_{12} + J_{34} = 0,\ J_{13} \neq 0$.

При этом в случаях 1) и 3), а также в случае 2) при дополнительном условии

$$J_{14} + J_{32} \neq \pm(J_{12} + J_{34}),$$

оператор называется *сильно регулярным*. В противном случае будем называть его *слабо регулярным*.

Далее мы будем проводить оценки в комплексной $\mathbf{z}$-плоскости внутри областей, ограниченных параболами

$$P_r = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im}\sqrt{\mathbf{z}}| < r\},$$

а в λ-плоскости ($\lambda = \sqrt{\mathbf{z}}$) внутри полос

$$\Pi_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im}\lambda| < r\}.$$

Из результатов этого раздела будет видно, что на самом деле числа $\lambda_n = \sqrt{\mathbf{z}_n}$, где $\mathbf{z}_n$ — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{q,U}$, сосредоточены в полуполосах $\{\lambda \in \Pi_r : \operatorname{Re}\lambda > R\}$ для некоторого $R \in \mathbb{R}$.

Таким образом, нас будут интересовать асимптотические оценки именно в таких полуполосах, но для удобства изложения мы будем писать $\lambda \in \Pi_r$, понимая, что $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$. Всюду далее, рассматривая функцию $\lambda = \sqrt{\mathbf{z}}$, подразумеваем выбор ее главной ветви, принимающей положительные значения при $\mathbf{z} > 0$.

Определение шкалы W_2^θ и $\mathring{W}_2^\theta = W_{2,U}^\theta$, где $U(y) = (y(0), y(\pi))$, см. в приложении B. Отметим (см. теорему 17.XVII), что

$$W_2^\theta = \mathring{W}_2^\theta \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta < 1/2.$$

Через l_p^θ обозначим пространства последовательностей (см. определение 17.1).

Напомним, что последовательность точек $\{\lambda_n\}$ полосы Π_r называется *несгущающейся*, если найдется такое $\beta > 0$, что количество членов последовательности, попадающих в прямоугольник

$$Q_a = \{\operatorname{Re}\lambda \in [a, a+1],\ |\operatorname{Im}\lambda| < r\},$$

не превосходит β.

Мы будем проводить оценки в полуплоскостях

$$G_{+,r} = \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > -r\} \quad \text{и} \quad G_{-,r} = \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda < r\},$$

где $r \geqslant 0$ — произвольно, а также в полосах Π_r.

Для оценки остатков мы будем использовать функции $\Upsilon_\pm$ и Υ_0, определенные в (6.2) и (6.3). Естественно, первая функция будет использоваться для проведения оценок в полуплоскости $G_{+,r}$, а вторая — в полуплоскости $G_{-,r}$. В полосах Π_α удобно для оценок использовать функцию Υ_0.

Через $\varphi(x, \lambda)$ и $\psi(x, \lambda)$ далее обозначаем фундаментальную систему решений уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y$$

с начальными условиями

$$\varphi(0,\lambda)=1,\quad \varphi^{[1]}(0,\lambda)=0,\qquad \psi(0,\lambda)=0,\quad \psi^{[1]}(0,\lambda)=1. \tag{8.2}$$

Напомним, что $q=u'$, $u\in L_2[0,\pi]$.

Утверждение 8.1. *Для любого вещественного r найдется такое $k_0=k_0(r,\|u\|_{L_2})$, что для всех точек множества*

$$\lambda\in G_{0,+,r}=\{\lambda:\ \operatorname{Im}\lambda>-r,\ \Upsilon(\lambda)+|\lambda|^{-1}<k_0\},$$

справедливы представления

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}+r_{0,0}(x,\lambda),\qquad \varphi(x,\lambda)=\cos(\lambda x)+r_{1,0}(x,\lambda), \tag{8.3}$$
$$\psi^{[1]}(x,\lambda)=\cos(\lambda x)+r_{0,1}(x,\lambda),\qquad \varphi^{[1]}(x,\lambda)=-\lambda\sin(\lambda x)+r_{1,1}(x,\lambda),$$

где функции $r_{j,k}(x,\lambda)$ удовлетворяют оценке

$$\sum_{j,\,k\in\{0,\,1\}}\|r_{j,k}(\cdot,\lambda)\|_{C[0,\pi]}\leqslant C(\Upsilon_+(\lambda)+|\lambda|^{-1}), \tag{8.4}$$

а константа C зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и r. Для полуплоскости $G_{-,r}$ справедливо то же утверждение (с заменой Υ_+ на Υ_-).

Доказательство. Проведем доказательство для $G_{0,+,r}$. Согласно теореме 6.1, для всех λ из $G_{0,+,r}$, где k_0 зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и r, найдется фундаментальная система решений

$$y_\pm(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}\left[1+\zeta_\pm(x,\lambda)\right],\qquad y_\pm^{[1]}(x,\lambda)=\pm i\lambda e^{\pm i\lambda x}\left[1+\zeta_{\pm,1}(x,\lambda)\right],$$

где остатки $\zeta_\pm$ и $\zeta_{\pm,1}$ подчинены оценкам

$$\|\zeta(\cdot,\lambda)\|_{L_\infty}\leqslant C\left(\Upsilon_+(\lambda)+|\lambda|^{-1}\right)$$

(здесь C вновь зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и r).

Уменьшим, если надо, число k_0 так, чтобы правая часть в последних оценках не превосходила $1/2$ (при этом число k_0 по-прежнему зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и r). Тогда прямым подсчетом получаем

$$\psi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_+(x,\lambda) & y_-(x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\zeta_+(0,\lambda) & 1+\zeta_-(0,\lambda)\\ -1-\zeta_{+,1}(0,\lambda) & 1+\zeta_{-,1}(0,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ i/\lambda\end{pmatrix}=\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}+r_{0,0}(x,\lambda),$$

$$\psi^{[1]}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_+^{[1]}(x,\lambda) & y_-^{[1]}(x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\zeta_+(0,\lambda) & 1+\zeta_-(0,\lambda)\\ -1-\zeta_{+,1}(0,\lambda) & 1+\zeta_{-,1}(0,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ i/\lambda\end{pmatrix}=\cos(\lambda x)+r_{0,1}(x,\lambda).$$

Аналогично,

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_+(x,\lambda) & y_-(x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\zeta_+(0,\lambda) & 1+\zeta_-(0,\lambda)\\ -1-\zeta_{+,1}(0,\lambda) & 1+\zeta_{-,1}(0,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\cos(\lambda x)+r_{1,0}(x,\lambda),$$

$$\varphi^{[1]}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}y_+^{[1]}(x,\lambda) & y_-^{[1]}(x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\zeta_+(0,\lambda) & 1+\zeta_-(0,\lambda)\\ -1-\zeta_{+,1}(0,\lambda) & 1+\zeta_{-,1}(0,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}= =-\lambda\sin(\lambda x)+r_{1,1}(x,\lambda).$$

Здесь остатки будут подчинены оценке (8.4). □

Следствие 8.1. *Для любого вещественного α найдется такое $k_0=k_0(\alpha,\|u\|_{L_2})$, что для всех точек области*

$$\lambda\in\Pi_{0,\alpha}=\{\lambda:\ |\operatorname{Im}\lambda|<\alpha,\ \Upsilon_0(\lambda)+|\lambda|^{-1}<k_0\}$$

справедливы представления (8.3) *с оценками* (8.4) (*с заменой Υ_+ на Υ_0*).

Пусть $\mathcal{L}_{0,U}$ — оператор с нулевым потенциалом и теми же краевыми условиями (имеется в виду, что матрица краевых условий остается неизменной, а квазипроизводные $y^{[1]}(0)$ и $y^{[1]}(\pi)$ меняются на $y'(0)$ и $y'(\pi)$ соответственно). Теперь мы готовы доказать следующий результат.

Утверждение 8.2. *Пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический определитель регулярного оператора $\mathcal{L}_{q,U}$, а $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Тогда в произвольной области $\Pi_{0,r}$ справедливо представление*

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \delta(\lambda), \quad |\delta(\lambda)| \leqslant M|\lambda|^k(\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1}), \tag{8.5}$$

где $k = 1$, 0 или -1 при регулярности краевых условий первого, второго или третьего вида, соответственно, а M зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и r.

Кроме того, найдется такая полоса Π_{r_0}, где r_0 определяется только нормой $\|u\|_{L_2}$ и краевыми условиями U, что вне этой полосы справедливо асимптотическое представление

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(1 + \rho(\lambda)), \qquad |\rho(\lambda)| \leqslant M(\Upsilon_+(\lambda) + |\lambda|^{-1}), \tag{8.6}$$

с константой M, зависящей только от $\|u\|_{L_2}$ и краевых условий.

Доказательство. Пусть $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ — решения уравнения $l(y) = \lambda^2 y$, определенные выше. Согласно теореме 2.I, для любой функции $f \in L_2[0,\pi]$ существует решение $\eta(x,\lambda)$ уравнения

$$l(y) - \lambda^2 y = f,$$

подчиненное условию $\eta(0,\lambda) = \eta^{[1]}(0,\lambda) = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = c_1\varphi + c_2\psi + \eta,$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Условие $y \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ влечет $U_j(y) = 0$, $j = 1, 2$. Поэтому решение y находится однозначно, если не равен нулю характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\varphi) & U_1(\psi) \\ U_2(\varphi) & U_2(\psi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11}\varphi(\pi,\lambda) + b_{12}\varphi^{[1]}(\pi,\lambda) & a_{12} + b_{11}\psi(\pi,\lambda) + b_{12}\psi^{[1]}(\pi,\lambda) \\ a_{21} + b_{21}\varphi(\pi,\lambda) + b_{22}\varphi^{[1]}(\pi,\lambda) & a_{22} + b_{21}\psi(\pi,\lambda) + b_{22}\psi^{[1]}(\pi,\lambda) \end{vmatrix}.$$

Прямые вычисления приводят к равенству

$$\Delta(\lambda) = J_{12} + J_{34} + J_{13}\psi(\pi,\lambda) + J_{14}\psi^{[1]}(\pi,\lambda) + J_{32}\varphi(\pi,\lambda) + J_{42}\varphi^{[1]}(\pi,\lambda). \tag{8.7}$$

Подставляя асимптотические формулы (8.3), получим в $G_{0,+,r}$

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leqslant M|\lambda|^k(\Upsilon_+(\lambda) + |\lambda|^{-1})\left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right), \tag{8.8}$$

где $M = M(\|u\|_{L_2}, r)$. Поскольку $\Pi_{0,r} \subset G_{0,+,r}$, то первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Разберем случай $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Пусть, например, $J_{24} \neq 0$. Напомним, что в этом случае мы ввели обозначения

$$\Delta_{00}(\lambda) = 2\lambda J_{24}\cos(\pi\lambda) \quad \text{и} \quad \delta_0(\lambda) = \Delta_0(\lambda) - \Delta_{00}(\lambda).$$

Подберем $r = r(U) > 0$ так, что $|\delta_0(\lambda)| \leqslant \dfrac{1}{2}|\Delta_{00}(\lambda)|$. Тогда при $\operatorname{Im}\lambda > r_0$

$$|\Delta_0(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|\Delta_{00}(\lambda)| \geqslant |J_{24}| \cdot |\lambda e^{-i\pi\lambda}|,$$

а значит

$$|\lambda||\Delta_0(\lambda)|^{-1}\left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right) \leqslant C(U).$$

Итак, при $\operatorname{Im}\lambda > r_0$

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + (\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)) = \Delta_0(\lambda)(1 + \rho(\lambda)), \quad \text{где} \quad \rho(\lambda) \leqslant C(\|u\|, r, U)(\Upsilon_+(\lambda) + |\lambda|^{-1}).$$

Здесь мы воспользовались оценкой (8.8) в области $G_{0,+,r}$. Теперь мы подберем число r_0 так, чтобы множество $\{\operatorname{Im}\lambda > r_0\}$ помещалось в $G_{0,+,r}$. Тогда число r_0 приобретает зависимость от величины Λ_0, определенной в (6.12). Однако в силу оценки (7.3) неравенство

$$\Upsilon_+(\lambda) \leqslant \frac{e^{-2\pi r}}{32\|u\|_{L_1}}$$

из (6.12) заведомо выполнено при

$$\operatorname{Im}\lambda > r_0 = (C_{abs}\|u\|_{L_2}\|u\|_{L_1}e^{2\pi r})^2.$$

Таким образом, r_0 зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и r, а эта величина, в свою очередь, зависит только от краевых условий.

Другие случаи регулярности краевых условий и случай $\operatorname{Im}\lambda < 0$ разбираются аналогично. $\square$

Замечание 8.1. Поскольку

$$\Delta_0(\lambda) - \Delta_{00}(\lambda) = O(|\lambda|^{k-1}),$$

где $k = 1$, 0 или -1 при регулярности краевых условий первого, второго или третьего вида, соответственно, то в представлениях (8.5) и (8.6) определитель $\Delta_0(\lambda)$ можно заменить на $\Delta_{00}(\lambda)$.

Теорема 8.1. *Любой регулярный оператор Штурма—Лиувилля с потенциалом $q = u'$, $u \in L_2[0,\pi]$, имеет непустое резольвентное множество, спектр его дискретен и лежит в некоторой полосе Π_α в плоскости $\lambda = \sqrt{\mathsf{z}}$. При этом число α зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и краевых условий U.*

Доказательство. Из представления (8.5) и явного вида функции $\Delta_{00}(\lambda)$ непосредственно следует, что $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ внутри любой полосы Π_r, если выполнено одно из условий 1)–3).

Так как $\Delta(\lambda)$ есть голоморфная функция от λ во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то нули $\Delta(\lambda)$ образуют последовательность, не имеющую конечных предельных точек. Если $\Delta(\lambda_0) \neq 0$, то в силу оценки (2.6) оператор $(\mathcal{L}_{q,U} - \lambda_0^2 I)^{-1}$ отображает единичный шар пространства $L_2[0,\pi]$ в ограниченное множество пространства W_1^1. Следовательно, $(\mathcal{L}_{q,U} - \lambda_0^2 I)^{-1}$ компактен. Но тогда $\mathcal{L}_{q,U}$ имеет дискретный спектр, который совпадает с квадратами нулей определителя $\Delta(\lambda)$.

Остается доказать утверждение о локализации спектра в некоторой полосе Π_α в λ-плоскости. Согласно замечанию 8.1, запишем представление

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{00}(\lambda)(1 + \rho(\lambda)), \qquad |\rho(\lambda)| \leqslant M(\Upsilon_+(\lambda) + |\lambda|^{-1})$$

с константой $M = M(\|u\|_{L_2}, U)$ вне полосы Π_{r_0}, $r_0 = r_0(\|u\|_{L_2}, U)$.

Нули функции Δ_{00} лежат в некоторой полосе, ширина которой определяется только краевыми условиями. Сомножитель $1 + \rho(\lambda)$ также не может обратиться в нуль вне некоторой полосы. При этом оценка (7.3) показывает, что ширина этой полосы зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и краевых условий. Отсюда следует, что все нули функции $\Delta(\lambda)$ лежат в некоторой полосе Π_α, где $\alpha = \alpha(\|u\|_{L_2}, U)$. $\square$

Перейдем к выводу асимптотических формул для собственных чисел оператора $\mathcal{L}_{q,U}$. Пусть

$$q = u', \quad u \in W_2^\theta[0,\pi], \quad \theta \in [0, 1/2).$$

В утверждении 5.2 мы уже провели нумерацию чисел λ_n^0. Собственные значения $\mathsf{z}_n^0 = (\lambda_n^0)^2$, $n \in \mathbb{N}$, оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, таким образом, уже определены.

При этом

$$\mathsf{z}_n^0 = (-\lambda_{-n}^0)^2$$

в силу равенств

$$\lambda_{-n}^0 = -\lambda_n^0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Следующее необходимое нам утверждение сразу следует из теоремы 7.4, поскольку $B_{2,2}^\theta[0,\pi] = W_2^\theta[0,\pi]$.

Лемма 8.1. *Если $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — несгущающаяся последовательность чисел в полосе Π_α, а функция $u \in W_2^\theta[0,\pi]$ при некотором $0 \leqslant \theta < 1/2$, то последовательность $\{\Upsilon_0(\lambda_n)\}_{n=1}^\infty \in l_2^\theta$.*

Теорема 8.2. *Пусть $u \in W_2^\theta[0,\pi]$ при некотором $0 \leqslant \theta < 1/2$, а $q = u'$ в смысле теории распределений. Пусть $\mathcal{L}_{q,U}$ — оператор, порожденный дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$ и регулярными краевыми условиями U. Тогда квадратные корни его собственных значений λ_n, $n \in \mathbb{N}$, можно занумеровать так, что*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + s_n = \lambda_n^{00} + \widetilde{s}_n, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{8.9}$$

В случае сильной регулярности краевых условий $\{s_n\}_{n=1}^\infty \in l_2^\theta$ и $\{\widetilde{s}_n\}_1^\infty \in l_2^\theta$, а в случае слабой регулярности $\{|s_n|^2\}_{n=1}^\infty \in l_2^\theta$ и $\{|\widetilde{s}_n|^2\}_{n=1}^\infty \in l_2^\theta$.

Доказательство. Для определенности рассмотрим только случай, когда выполнено условие 2) регулярности краевых условий (другие случаи легче).

Зафиксируем параболу P_α, содержащую все собственные значения (теорема 8.1). В силу теоремы 8.1 и следствия 8.1, собственные значения оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ в области P_α определяются из уравнения

$$\Delta(\lambda) = \cos \pi \mathtt{z}^{1/2} + J_0 + \varrho(\mathtt{z}^{1/2}) = 0, \quad J_0 = \frac{J_{12}+J_{34}}{J_{14}-J_{23}},$$

где $\mathtt{z} = \lambda^2$,

$$|\varrho(\lambda)| \leqslant M(\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1}), \qquad \operatorname{Re}\lambda > \Lambda_0.$$

Перейдем в λ-плоскость и перепишем это уравнение в виде

$$\Delta(\lambda) = \cos \pi\lambda + J_0 + \varrho(\lambda) = 0.$$

Точки $\{\lambda_n^0\}_{n=1}^\infty$ суть корни уравнения

$$\Delta_{00}(\lambda) = \cos \pi\lambda + J_0 = 0$$

из правой полуплоскости. Очевидно, $\mathtt{z}_n^0 = (\lambda_n^0)^2$.

Увеличим число α так, чтобы в полосе Π_α кроме чисел λ_n помещались все $\{\lambda_n^{00}\}$ со своими 1-окрестностями. Если $J_0 \neq \pm 1$ (сильная регулярность), то все нули $\{\lambda_n^{00}\}$ функции Δ_{00} простые и найдутся числа $\delta \in (0,1)$, $\varepsilon > 0$ такие, что круги

$$K_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^{00}| < \delta\}$$

не пересекаются, причем

$$|\Delta_{00}(\lambda)| > \varepsilon \quad \text{при} \quad \lambda \in \partial K_n$$

(это утверждение легко следует из периодичности рассматриваемой функции).

Так как $|\varrho(\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to \infty$, $\lambda \in \Pi_\alpha$, то в силу теоремы Руше при всех достаточно больших $n \geqslant N$ функция $\Delta(\lambda)$ имеет ровно один нуль λ_n в круге K_n. Конечно, последовательность $\{\lambda_n\}_{n=N}^\infty$ является несгущающейся. Поэтому из леммы 8.1 имеем $\{\varrho(\lambda_n)\} \in l_2^\theta$, а тогда

$$\{\cos \pi\lambda_n - \cos \pi\lambda_n^{00}\}_N^\infty \in l_2^\theta.$$

Число δ можно считать выбранным столь малым, что $\left|(\cos(\pi\lambda))'\right| > \varepsilon_1 > 0$ при $z \in K_n$. Но тогда

$$|\lambda_n - \lambda_n^{00}| \leqslant M|\cos \pi\lambda_n - \cos \pi\lambda_n^{00}|, \tag{8.10}$$

где постоянная M не зависит от n. Тем самым, асимптотические равенства (8.9) доказаны (точнее, доказаны вторые из этих равенств; первые следуют теперь из утверждения 5.1).

В случае $J_0 = \pm 1$ корни λ_n^{00} имеют кратность 2. Тогда можно повторить проведенные рассуждения, но вместо неравенства (8.10) воспользоваться неравенством

$$|\lambda_n - \lambda_n^{00}|^2 \leqslant M|\cos \pi\lambda_n - \cos \pi\lambda_n^{00}|, \tag{8.11}$$

из которого получаем $\{\widetilde{s}_n^2\}_N^\infty \in l_2^\theta$.

Остается доказать, что построенная нами нумерация чисел λ_n, $n \in \mathbb{N}$, имеет нулевой дефект. Для этого применим теорему Руше к прямоугольнику с вершинами $\pm a \pm ib$. Число b выберем настолько большим, что, во-первых, $b > \alpha$, а, во вторых, на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \pm b$ справедлива оценка $|\rho(\lambda)| < 1$, где ρ определено в (8.6).

Число a выберем настолько большим, чтобы все числа λ_n, λ_n^0 и λ_n^{00} с номерами $n \in [-N, N]$ лежали в нашем прямоугольнике. Сдвинем, если надо, отрезок $[a-ib, a+ib]$ так, чтобы $\Delta_{00}(\lambda)$ на этом отрезке не обращалась в нуль, и обозначим

$$\varepsilon = \min_{\lambda \in [a-ib, a+ib]} |\Delta_{00}(\lambda)|.$$

Теперь увеличим, при необходимости, число a до $a + 2m$, $m \in \mathbb{N}$, так, что

$$\max_{\lambda \in [a-ib, a+ib]} |\rho(\lambda)| < \varepsilon.$$

Значения функции Δ_{00} при этом не поменяются в силу ее 2-периодичности. Остается применить теорему Руше к функциям $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_{00}(\lambda)$ на построенном прямоугольнике. $\square$

Обсудим важный вопрос о равномерности полученных асимптотических представлений. Отметим, что случай $u \in W_2^\theta[0,\pi]$ с показателем θ строго больше нуля существенно проще случая $\theta = 0$, поскольку скорость убывания функций Υ_+, Υ_- и Υ_0 к нулю при $|\lambda| \to \infty$ можно в случае $\theta > 0$ оценить величиной $C|\lambda|^{-\theta}$.

Далее обозначаем $\|\cdot\|_{W_2^\theta[0,\pi]}$ через $\|\cdot\|_\theta$.

Теорема 8.3. *В условиях теоремы* 8.2, *при* $\theta \in [0,1/2)$ *в дополнение к асимптотическим соотношениям* (8.9) *нумерацию собственных значений* z_n *можно провести так, что будут выполнены оценки*

$$\|\{s_n\}\|_{l_2^\theta} \leqslant C(\|u\|_\theta, U) \tag{8.12}$$

в случае сильной регулярности краевых условий и

$$\|\{|s_n|^2\}\|_{l_2^\theta} \leqslant C(\|u\|_\theta, U) \tag{8.13}$$

в случае слабой регулярности.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 8.2 рассмотрим только случай 2) в определении краевых условий. Рассуждения в остальных двух случаях аналогичны.

Пусть Π_α — полоса, содержащая все точки λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Из утверждения 8.1 следует, что $\alpha = \alpha(\|u\|_\theta, U)$. Расширим ее при необходимости так, как это было сделано в доказательстве теоремы 8.2.

Случай $\theta > 0$. Поскольку $W_2^\theta[0,\pi] \subset B_{1,\infty}^\theta[0,\pi]$, то $\Upsilon_0(\lambda) \in L_\infty^\theta(\Pi_\alpha)$ (теорема 7.3) и

$$\sup_{\lambda \in \Pi_\alpha} \Upsilon_0(\lambda)(1+|\lambda|)^\theta \leqslant C\|u\|_\theta$$

с константой C, зависящей только от α, а значит, только от $\|u\|_\theta$. Тогда для любого k найдется такое число $R = R(k, \|u\|_\theta)$, что неравенство $\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1} < k$ выполнено всюду в области

$$\Pi_{\alpha,R} := \{\lambda \in \Pi_\alpha : |\lambda| > R\}.$$

Пусть $k_0 = k_0(\alpha, \|u\|_\theta) = k_0(\|u\|_\theta)$ — величина из условия утверждения 8.1. Тогда соотношения (8.3) и оценки (8.4) справедливы всюду в $\Pi_{\alpha,R}$. Подставляя эти соотношения в характеристический определитель, получим для него представление в $\Pi_{\alpha,R}$

$$\Delta(\lambda) = \Delta_{00}(\lambda) + \varrho(\lambda), \qquad |\varrho(\lambda)| \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1}),$$

где $C = C(\|u\|_\theta, U)$. В нашей ситуации

$$\Delta_0(\lambda) = (J_{14} + J_{32})\cos(\pi\lambda) + J_{12} + J_{34}.$$

Разберем вначале случай сильно регулярных краевых условий. Здесь все нули функции Δ_0 просты и образуют две периодические последовательности

$$\lambda_n = n + \varkappa_j, \quad j = n\,(mod\,2).$$

Выберем число δ настолько малым, чтобы круги $K_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \leqslant \delta\}$ не пересекались и лежали Π_α. Число α при этом, возможно, придется увеличить, так что теперь оно зависит не только от $\|u\|_\theta$, но и от краевых условий: $\alpha = \alpha(\|u\|_\theta, U)$. При этом δ зависит только от краевых условий.

Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 8.2. Надо только отметить, во-первых, что возможность применения теоремы Руше определяется двумя условиями:

$$\begin{cases} \lambda \in \Pi_{\alpha,R}, \\ \sup\limits_{\lambda \in \partial K_n} |\varrho(\lambda)| < \inf\limits_{\lambda \in \partial K_n} |\Delta_0(\lambda)|. \end{cases}$$

В последнем неравенстве правая часть определяется только краевыми условиями, а левую часть можно оценить величиной $C(\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1})$, $C = C(\|u\|_\theta, U)$.

Тогда это неравенство заведомо выполнено в $\Pi_{\alpha,R}$ (при этом величину R, возможно, потребуется увеличить, так что теперь она зависит не только от $\|u\|_\theta$, но и от краевых условий: $R = R(\|u\|_\theta, U)$).

Второе, что нужно отметить, это то, что величина M в (8.10) зависит только от δ, а значит, только от краевых условий. В случае слабой регулярности оценки (8.10) меняются на (8.11).

Таким образом, мы доказали (8.12) и (8.13), но не для всей последовательности $\{s_n\}_1^\infty$, а только для $\{s_n\}_{n=N}^\infty$. При этом число N определяется условием $K_n \subset \Pi_{\alpha,R}$, а значит, $N = N(\|u\|_\theta, U)$. Увеличим еще один (последний) раз число R (и, соответственно, индекс N). А именно, зафиксируем величину $\delta = \delta(U)$ так, чтобы круги K_n не пересекались. Теперь положим

$$\varepsilon = \inf\{|\Delta_{00}(\lambda) : \lambda \in \Pi_\alpha \setminus \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n\}.$$

Функция Δ_{00} периодична по λ, так что величина ε зависит только от α и δ, т. е. $\varepsilon = \varepsilon(\|u\|_\theta, U)$. Теперь увеличим R так, чтобы в $\Pi_{\alpha,R}$ выполнялось неравенство $|\varrho(\lambda)| < \varepsilon$. Поскольку

$$|\varrho(\lambda)| \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1}), \quad C = C(\|u\|_\theta, U),$$

то по-прежнему имеем $R = R(\|u\|_\theta, U)$.

Тогда функция $\Delta(\lambda)$ не может обратиться в нуль на множестве $\lambda \in \Pi_{\alpha,R} \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Это означает, что все ее корни λ_n с номерами $n \in [1, N-1]$ лежат в прямоугольнике

$$\{|\operatorname{Im}\lambda| < \alpha,\ 0 < \operatorname{Re}\lambda < R\}.$$

Тогда оценки (8.12) и (8.13) переносятся на последовательности $\{s_n\}_1^\infty$ и $\{|s_n|^2\}_1^\infty$, соответственно.

Случай $\theta = 0$. Вначале разберем сильно регулярный случай. Зафиксируем число ε и рассмотрим непересекающиеся круги $\mathcal{K}_n$ с центрами λ_n^{00}, $n \in \mathbb{Z}_0$, такие, что $|\Delta_{00}(\lambda)| > \varepsilon$ на окружностях $\partial\mathcal{K}_n$ и $|(\cos\pi\lambda)'| > \varepsilon_1 > 0$ на $\overline{\mathcal{K}_n}$.

Назовем *регулярными* те индексы n, для которых

$$\max_{\lambda\in\partial\mathcal{K}_n} |\varrho(\lambda)| < \varepsilon.$$

Остальные индексы n назовем *иррегулярными*.

Пусть μ_n — точки на $\partial\mathcal{K}_n$, где $|\varrho(\lambda)|$ достигает своего максимального значения. Последовательность $\{\mu_n\}$ несгущающаяся, а значит,

$$\{\Upsilon_0(\mu_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_0} \in l_2^\theta$$

(теорема 7.4). Более того, характеристики α и β последовательности определяются только краевыми условиями и шириной полосы $\alpha = \alpha(\|u\|_{L_2}, U)$, т. е.

$$\|\{\Upsilon_0(\mu_n)\}\|_{l_2} \leqslant C(\|u\|_{L_2}, U).$$

Из этой оценки следует, что число N иррегулярных индексов зависит тоже лишь от $\|u\|_{L_2}$ и краевых условий U.

Для регулярных индексов n повторим рассуждения из доказательства теоремы 8.2 и получим, что $\Delta(\lambda)$ имеет в круге $\mathcal{K}_n$ ровно один корень, который мы обозначаем λ_n, причем

$$|\cos\pi\lambda_n - \cos\pi\lambda_n^{00}| = |\varrho(\lambda_n)| \leqslant M(\|u\|_{L_2}, U)(\Upsilon_0(\lambda_n) + |\lambda_n|^{-1}).$$

Характеристики несгущающейся последовательности $\{\lambda_n\}$ (n пробегает все регулярные индексы) зависят только от $\|u\|_{L_2}$ и краевых условий, а значит,

$$\|\{\cos\pi\lambda_n - \cos\pi\lambda_n^{00}\}\|_{l_2} \leqslant C(\|u\|_{L_2}, U).$$

Пользуясь оценкой

$$|\lambda_n - \lambda_n^{00}| \leqslant M_{abs}|\cos\pi\lambda_n - \cos\pi\lambda_n^{00}|,$$

перенесем полученную оценку нормы на последовательность $\{s_n\}$, где n по-прежнему пробегает все регулярные индексы:

$$\|\{\lambda_n - \lambda_n^{00}\}\|_{l_2} \leqslant C(\|u\|_{L_2}, U). \tag{8.14}$$

В случае слабо регулярных краевых условий корни λ_n^{00} имеют кратность 2. Тогда можно повторить проведенные рассуждения с той лишь разницей, что

$$|\lambda_n - \lambda_n^{00}|^2 \leqslant M|\cos\pi\lambda_n - \cos\pi\lambda_n^{00}|,$$

откуда получаем

$$\|\{|\lambda_n - \lambda_n^{00}|^2\}\|_{l_2} \leqslant C(\|u\|_{L_2}, U).$$

Итак, регулярные собственные значения занумерованы. Перейдем к иррегулярным номерам n (напомним, что их число N конечно и зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и U).

Проведем в полосе Π_α кривые γ_n, $n \in \mathbb{Z}_0$. Для построения кривой $\gamma_1(t)$, $t \in [-1,1]$, проведем вначале отрезок $[-i\alpha + \operatorname{Re}\lambda_1^{00}, i\alpha + \operatorname{Re}\lambda_1^{00}]$, ориентированный снизу вверх. Теперь заменим ту его часть, которая попала в круг $\mathcal{K}_1$, на правую полуокружность.

Если полученный путь пересекает круг $\mathcal{K}_2$, то заменим ту часть отрезка, которая попала внутрь $\mathcal{K}_2$, на левую дугу окружности $\partial\mathcal{K}_2$. Если полученный путь пересекает круг $\mathcal{K}_{-1}$, то заменим ту часть отрезка, которая попала внутрь $\mathcal{K}_{-1}$, на правую дугу окружности $\partial\mathcal{K}_{-1}$.

В силу оценки
$$|\lambda_n^{00} - \lambda_m^{00}| \geqslant 2(|m-n|-1)$$
другие круги путь пересечь не может. В результате получим путь γ_1, который все круги с номерами $n \geqslant 2$ оставляет справа, а все круги с номерами $n \leqslant 1$ слева. Аналогичным образом проведем путь γ_2. Остальные пути получим параллельным переносом
$$\gamma_{1+2n} = \gamma_1 + 2n, \qquad \gamma_{2+2n} = \gamma_2 + 2n, \qquad n \geqslant 0,$$
и симметрией
$$\gamma_{-n}(t) = -\gamma_n(-t).$$
Теперь построим замкнутые контуры $C_{m,n}$, $m < n$, дополнив кривые $\gamma_m(t)$ и $\gamma_n(t)$ отрезками прямых $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$ и $\operatorname{Im}\lambda = -\alpha$.

По построению, каждый контур $C_{m,n}$ содержит внутри ровно $n-m$ точек последовательности $\{\lambda_j^{00}\}_{j\in\mathbb{Z}_0}$. Заметим еще (это потребуется в дальнейшем), что
$$\operatorname{diam} C_{m,n} \leqslant |\operatorname{Re}\lambda_n^{00} - \operatorname{Re}\lambda_m^{00}| + 2 + 2\alpha \leqslant n - m + 3 + 2\alpha.$$
Построенные контуры, по аналогии с числами λ_n, разобъем на две категории — подходящие (для применения теоремы Руше) и неподходящие. Путь γ_n назовем *подходящим*, если
$$\max_{\gamma_n} |\varrho(\lambda)| < \min_{\gamma_n} |\Delta_{00}(\lambda)|,$$
и *неподходящим* в противном случае. Контур $C_{m,n}$ назовем подходящим, если оба пути γ_n и γ_m подходящие (на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha$ неравенство $\max|\varrho(\lambda)| < \min|\Delta_{00}(\lambda)|$ выполнено).

Повторим рассуждения, которые мы уже применили к окружностям $\partial\mathcal{K}_n$. Пусть ν_n — точки на γ_n, где $|\varrho(\lambda)|$ достигает своего максимального значения. Последовательность $\{\nu_n\}$ несгущающаяся, а значит,
$$\{\Upsilon_0(\nu_n)\}_{n\in\mathbb{Z}_0} \in l_2^\theta$$
(теорема 7.4). Более того, характеристики α и β последовательности определяются только краевыми условиями и шириной полосы $\alpha = \alpha(\|u\|_{L_2}, U)$, т. е.
$$\|\{\Upsilon_0(\nu_n)\}\|_{l_2^\theta} \leqslant C(\|u\|_{L_2}, U).$$
Из этой оценки следует, что число N_1 неподходящих контуров γ_n зависит тоже лишь от $\|u\|_{L_2}$ и краевых условий U.

Теперь разобъем все индексы $n \in \mathbb{Z}_0$ на «пачки» следующим образом.

Для каждого числа k найдем наименьшее $n \geqslant k$ такое, что путь γ_n является подходящим. Аналогично, найдем наибольшее $m \leqslant k$ такое что подходящим является путь γ_m. Естественно, $n \leqslant k + N_1 - 1$, а $m \geqslant k - N_1$.

Применим теорему Руше к контуру $C_{m,n}$ и получим, что он ограничивает одинаковое число $n-m$ точек наборов $\{\lambda_j\}$ и $\{\lambda_j^{00}\}$. Множество индексов чисел λ_j^{00}, попавших в $\operatorname{int} C_{m,n}$, объединим в одну «пачку». Точкам $\lambda_j^{00} \in \operatorname{int} C_{m,n}$ с регулярными номерами уже отвечают точки λ_j.

Теперь каждому иррегулярному числу λ_j^{00} из $\operatorname{int} C_{m,n}$ сопоставим одно (произвольное еще не занумерованное) $\{\lambda_j\}$, лежащее в $\operatorname{int} C_{m,n}$. В результате мы получим некоторую нумерацию последовательности λ_j при которой
$$|\lambda_j - \lambda_j^{00}| \leqslant \operatorname{diam} C_{m,n} \leqslant n - m + 3 + 2\alpha \leqslant 2N_1 + 2\alpha + 4.$$
Тогда (индекс n ниже пробегает все иррегулярные индексы)
$$\|\{\lambda_n - \lambda_n^{00}\}\|_{l_2} \leqslant \Big(\sum (2N_1 + 2\alpha + 4)^2\Big)^{1/2} = N^{1/2}(2N_1 + 2\alpha + 4).$$

Величина в правой части зависит только от $\|u\|_{L_2}$ и U, что позволяет перенести оценку (8.14) на все индексы. □

Отметим, что согласно теореме 8.2 условие сильной регулярности краевых условий влечет асимптотическую однократность собственных значений z_n (т. е. все собственные числа z_n, начиная с некоторого номера, однократны). Далее через y_n мы будем обозначать собственные функции, отвечающие числам z_n с номерами $n \in \mathbb{N}\setminus\mathcal{J}$. При этом мы будем нормировать их условием $\|y_n\|_{L_2} = 1$.

Теорема 8.4. *Пусть выполнены условия и сохранены обозначения теоремы* 8.2, *причем краевые условия сильно регулярны. Обозначим через* $\{y_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{J}}$ *и* $\{y_n^0(x)\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{J}}$ *нормированные в пространстве* $L_2[0,\pi]$ *собственные функции операторов* $\mathcal{L}_{q,U}$ *и* $\mathcal{L}_{0,U}$, *отвечающие собственным значениям* $\{\mathrm{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{J}}$ *и* $\{\mathrm{z}_n^0\}_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathcal{J}}$ *соответственно. Тогда*

$$y_n(x) = y_n^0(x) + r_n(x), \qquad y_n^{[1]}(x) = (y_n^0(x))' + nr_n^1(x), \tag{8.15}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\theta}\left(\|r_n(x)\|^2_{C[0,\pi]} + \|r_n^1(x)\|^2_{C[0,\pi]}\right) \leqslant C, \tag{8.16}$$

причем C *зависит только от* $\|u\|_{L_2}$ *и краевых условий* U.

Доказательство. Снова рассмотрим наиболее трудный случай, когда выполнено условие 2) теоремы 8.2. В этом случае после нормировки одно из краевых условий (будем считать, что второе) имеет нулевой порядок, т. е.

$$U_2(y) = \beta y(0) + \gamma y(\pi), \quad |\beta| + |\gamma| > 0.$$

Тогда собственные функции определяются равенством $y_n(x) = y(x, \mathrm{z}_n)$, где

$$y(x,\mathrm{z}) = \begin{vmatrix} \varphi(x,\sqrt{\mathrm{z}}) & \psi(x,\sqrt{\mathrm{z}}) \\ U_2(\varphi) & U_2(\psi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(x,\sqrt{\mathrm{z}}) & \psi(x,\sqrt{\mathrm{z}}) \\ \beta + \gamma\varphi(\pi,\sqrt{\mathrm{z}}) & \gamma\psi(\pi,\sqrt{\mathrm{z}}) \end{vmatrix}. \tag{8.17}$$

Это так, поскольку $y(x,\mathrm{z})$ — решение уравнения $l(y) = \mathrm{z}y$ и $U_j(y(x,\mathrm{z}_n)) = 0$, $j = 1, 2$. Используя обозначения $\sqrt{\mathrm{z}_n} = \lambda_n$, $\sqrt{\mathrm{z}_n^0} = \lambda_n^0$, получаем

$$y_n^0(x) = \gamma(\sin\lambda_n^0\pi)\cos\lambda_n^0 x + (\beta + \gamma\cos\lambda_n^0\pi)\sin\lambda_n^0 x.$$

Нетрудно видеть, что $y_n^0(x)$ почти нормированы, т. е. существуют такие постоянные M_1 и M_2, что

$$M_1 \leqslant \|y_n^0\|_{L_2} \leqslant M_2, \quad M_j = M_j(U).$$

В силу теоремы 8.2 имеем

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| < M\Upsilon_0(\lambda_n), \quad M = M(\|u\|_{L_2}, U).$$

Воспользовавшись следствием 8.1, из представления (8.17) легко получить оценки

$$|y_n(x) - y_n^0(x)| \leqslant M\Upsilon_0(\lambda_n), \quad M = M(\|u\|_{L_2}, U).$$

Очевидно, такое же неравенство сохраняется после нормировки функций $\{y_n\}$ и $\{y_n^0\}$. Утверждение теоремы теперь следует из леммы 8.1. □

Замечание 8.2. Нужно оговорить, что в случае слабой регулярности бесконечно много собственных значений могут оказаться двукратными, и им может отвечать пара собственных функций или одна собственная и одна присоединенная функции. В этом случае выбор собственных и присоединенных функций можно провести специальным образом так, что утверждение теоремы 8.4 сохранится, но вместо величин $\Upsilon_0(\lambda_n)$ в оценках будут участвовать величины $\sqrt{\Upsilon_0(\lambda_n)}$. Такой выбор возможен, но подробное доказательство из-за его громоздкости здесь опущено.

В действительности при наличии кратных собственных значений у невозмущенного оператора более важной является не задача об оценках разности собственных или присоединенных функций возмущенного и невозмущенного операторов, а задача об оценке норм разности проекторов Рисса $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_n^0$ на соответствующие двумерные подпространства.

9. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора Дирака в сильно регулярном случае

Здесь мы получим асимптотические представления для собственных значений и собственных функций сильно регулярного оператора Дирака. Обозначим через

$$E(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda)\\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{9.1}$$

$$\mathbf{e}_1(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e_{11}(x,\lambda)\\ e_{21}(x,\lambda)\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e_{12}(x,\lambda)\\ e_{22}(x,\lambda)\end{pmatrix}, \tag{9.2}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения $\ell_P(\mathbf{y})=\lambda\mathbf{y}$ с начальными условиями $E(0,\lambda)=\mathrm{I}$. Легко видеть, что в случае $P=0$

$$E(x,\lambda)=E^0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e^0_{11}(x,\lambda) & e^0_{12}(x,\lambda)\\ e^0_{21}(x,\lambda) & e^0_{22}(x,\lambda)\end{pmatrix}=\mathcal{E}(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e^{i\lambda x} & 0\\ 0 & e^{-i\lambda x}\end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Утверждение 9.1. *Пусть* $\Pi_r=\{\lambda:\ |\operatorname{Im}\lambda|<r\}$, $r>0$. *Тогда для всех точек* $\lambda\in\Pi_r$ *справедливы представления*

$$\begin{aligned} e_{11}(x,\lambda)&=e^{i\lambda x}(1+\eta_{11}(x,\lambda)), & e_{21}(x,\lambda)&=e^{-i\lambda x}\eta_{21}(x,\lambda),\\ e_{12}(x,\lambda)&=e^{i\lambda x}\eta_{12}(x,\lambda), & e_{22}(x,\lambda)&=e^{-i\lambda x}(1+\eta_{22}(x,\lambda)),\end{aligned} \tag{9.4}$$

где

$$\max_{j,k}\|\eta_{jk}(\cdot,\lambda)\|_{C[0,\pi]}\leqslant\Upsilon_0(\lambda)C(\|P\|_{L_1[0,\pi]},r). \tag{9.5}$$

Кроме этого, почти всюду на $[0,1]$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda\in\Pi_r}\left|(\eta_{11}(x,\lambda))'_x\right|&\leqslant M|p_2(x)|, & \sup_{\lambda\in\Pi_r}\left|(\eta_{12}(x,\lambda))'_x\right|&\leqslant M|p_2(x)|,\\ \sup_{\lambda\in\Pi_r}\left|(\eta_{21}(x,\lambda))'_x\right|&\leqslant M|p_3(x)|, & \sup_{\lambda\in\Pi_r}\left|(\eta_{22}(x,\lambda))'_x\right|&\leqslant M|p_3(x)|,\end{aligned} \tag{9.6}$$

где $M=\exp\left(2r+ae^{2r}\right)$, $a=\|p_2\|_{L_1}+\|p_3\|_{L_1}$.

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{e}_1(x,\lambda)=\begin{pmatrix}e_{11}(x,\lambda)\\ e_{21}(x,\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(1+\eta_{11}(x,\lambda))e^{i\lambda x}\\ \eta_{21}(x,\lambda)e^{-i\lambda x}\end{pmatrix}.$$

Оценки (9.5) сразу вытекают из представлений (6.13). Далее,

$$\begin{pmatrix}1+\eta_{11}\\ \eta_{21}\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}0 & -ip_2(x)e^{-2i\lambda x}\\ ip_3(x)e^{2i\lambda x} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+\eta_{11}\\ \eta_{21}\end{pmatrix}. \tag{9.7}$$

В силу теоремы 2.I последняя система имеет единственное решение, причем оценка (2.6) дает нам

$$\max\{|1+\eta_{11}(x,\lambda)|,\ |\eta_{21}(x,\lambda)|\}\leqslant\exp\left(ae^{2r}\right).$$

Подставляя эти оценки в систему (9.7), получаем результат для первого столбца матрицы $\mathrm{E}(x,\lambda)$. Оценки для второго столбца выводятся аналогично. □

Определение 9.1. Пусть потенциал $P\in L_1[0,\pi]$, краевые условия заданы матрицей $\mathcal{U}$, а функции $\mathbf{e}_1(x,\lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x,\lambda)$ определены в (9.1). *Характеристическим определителем* $\Delta(\lambda)$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ называется детерминант матрицы

$$M(\lambda)=\begin{pmatrix}u_{11}+u_{13}e_{11}(\pi,\lambda)+u_{14}e_{21}(\pi,\lambda) & u_{12}+u_{13}e_{12}(\pi,\lambda)+u_{14}e_{22}(\pi,\lambda)\\ u_{21}+u_{23}e_{11}(\pi,\lambda)+u_{24}e_{21}(\pi,\lambda) & u_{22}+u_{23}e_{12}(\pi,\lambda)+u_{24}e_{22}(\pi,\lambda)\end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

Утверждение 9.2. *Пусть потенциал* P *имеет вид* (3.8)*, а краевые условия* U *регулярны. Пусть* $\Delta(\lambda)$ — *характеристический определитель оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$, *а* $\Delta_0(\lambda)$ — *характеристический определитель оператора* $\mathcal{L}_{0,U}$. *Тогда в произвольной области* $\Pi_{0,r}$ *справедливо представление*

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\delta(\lambda),\quad |\delta(\lambda)|\leqslant M\Upsilon_0(\lambda), \tag{9.9}$$

где M зависит только от $\|P\|_{L_1}$ и r. Кроме того, найдется такая полоса Π_{r_0}, где r_0 определяется только краевыми условиями U, что вне этой полосы справедливо представление

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(1 + \rho(\lambda)), \qquad |\rho(\lambda)| \leqslant M\Upsilon_+(\lambda), \tag{9.10}$$

с константой M, зависящей только от $\|P\|_{L_1}$ и краевых условий.

Доказательство. Определитель матрицы $M(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = J_{12} + J_{13}e_{12}(\pi,\lambda) + J_{14}e_{22}(\pi,\lambda) + J_{32}e_{11}(\pi,\lambda) + J_{42}e_{21}(\pi,\lambda) + \\ + J_{34}(e_{11}(\pi,\lambda)e_{22}(\pi,\lambda) - e_{12}(\pi,\lambda)e_{21}(\pi,\lambda)). \tag{9.11}$$

Заметим, что выражение $e_{11}(x,\lambda)e_{22}(x,\lambda) - e_{12}(x,\lambda)e_{21}(x,\lambda)$ является определителем матрицы фундаментальной системы решений в точке $x \in [0,\pi]$. Поскольку след матрицы $B^{-1}(\lambda I - P(x))$ равен нулю, то согласно теореме Лиувилля (см., например, [33, гл. III, § 1]) это выражение не зависит от x, а при $x = 0$ оно равно единице по определению функций $\mathbf{e}_1(x,\lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x,\lambda)$. Подставляя асимптотические формулы (6.13) в соотношение (9.11), получим

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leqslant C\Upsilon_0(\lambda)\left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right),$$

и первое утверждение доказано. Докажем второе утверждение. Разберем случай $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Подберем $r_0 > 0$ так, что

$$|J_{12}| + |J_{34}| + |J_{32}|e^{-\pi r_0} \leqslant |J_{14}|\frac{e^{\pi r_0}}{2}.$$

Тогда при $\operatorname{Im}\lambda > r_0$

$$|\Delta_0(\lambda)| \geqslant |J_{14}e^{-i\pi\lambda}| - |J_{12} + J_{34} + J_{32}e^{i\pi\lambda}| \geqslant \frac{1}{2}|J_{14}e^{-i\pi\lambda}|, \tag{9.12}$$

а значит

$$|\Delta_0(\lambda)|^{-1}\left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right) \leqslant 2|J_{14}|^{-1}\left(1 + |e^{-2\pi r_0}|\right) \leqslant 4|J_{14}|^{-1}.$$

Далее, рассуждая аналогично доказательству утверждения 8.2, получаем оценку (9.10) с константой M, зависящей только от $\|P\|_{L_1}$ и краевых условий. Случай $\operatorname{Im}\lambda < 0$ разбирается аналогично. □

Мы переходим к выполнению нашей основной задачи в данном разделе — выводу асимптотических формул для собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. При этом матрицу P мы можем считать внедиагональной (см. утверждение 3.3). Мы начнем с наиболее общей ситуации $P \in L_1[0,\pi]$. В этом случае наш результат заключается в том, что собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически сближаются с собственными значениями невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Теорема 9.1. *Пусть потенциал $P \in L_1[0,\pi]$ имеет вид* (3.8) *и $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака. Обозначим через λ_n^0 собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ и через λ_n — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с учетом алгебраической кратности. Тогда при подходящей нумерации последовательности $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (и такая нумерация возможна)*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1) \quad \text{при} \quad |n| \to \infty.$$

В частности, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \Pi_{r_0}$ для некоторого $r_0 > 0$.

Если $P \in L_p[0,\pi]$, $p > 1$, или $P \in B^{\theta}_{1,\infty}[0,\pi]$, $\theta > 0$, то ширина r_0 полосы зависит только от нормы потенциала $\|P\|$ в соответствующем пространстве и краевых условий U.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $P \in L_1[0,\pi]$. Обозначим $f(\lambda) := \Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$. В силу утверждения 9.2 найдется r_0 такое, что

$$\frac{|f(\lambda)|}{|\Delta_0(\lambda)|} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \notin \Pi_{r_0}.$$

Выберем число $r > r_0$ так, чтобы на прямых $|\operatorname{Im}\lambda| = r$ было выполнено неравенство

$$|f(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)|.$$

Далее, зафиксируем произвольное число $\mu \in (0,2)$, для которого на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \mu$ нет нулей функции $\Delta_0(\lambda)$ и обозначим

$$m = \min\{|\Delta_0(\lambda)| : \operatorname{Re}\lambda = \mu\}.$$

Вновь обращаясь к утверждению 9.2, видим, что $|f(\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ внутри полосы Π_r.

Тогда найдется такое натуральное N_1, что при всех $\lambda \in \overline{\Pi}_r$, $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant \mu + 2N_1$, выполнено $|f(\lambda)| < m$.

Заметим, что функция $\Delta_0(\lambda)$ периодична с периодом 2, а значит, на вертикальных отрезках $\operatorname{Re}\lambda = \mu \pm 2n$, $n > N_1$, внутри полосы Π_r выполнено

$$\min|\Delta_0(\lambda)| = m > |f(\lambda)|.$$

Применим теорему Руше к прямоугольнику, ограниченному прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \pm r$, $\operatorname{Re}\lambda = \mu \pm 2n$, где $n > N_1$, и получим, что функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ имеют одинаковое (с учетом кратности) число нулей в любом таком прямоугольнике.

Перейдем к изучению нулей функции $\Delta(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ внутри полосы Π_r. Зафиксируем число ε так, чтобы круги

$$U_\varepsilon(\lambda_n^0) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \leqslant \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

не пересекались и лежали в полосе Π_r. Обозначим

$$m_n = \min\{|\Delta_0(\lambda)| : |\lambda - \lambda_n^0| = \varepsilon\}.$$

Поскольку функция $\Delta_0(\lambda)$ периодична, то $m_n \geqslant M$ для некоторого $M > 0$. Тогда существует такое натуральное N_2, что при $|\operatorname{Re}\lambda| > \mu + 2N_2$ на окружностях $|\lambda - \lambda_n^0| = \varepsilon$ выполнено:

$$|f(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)|.$$

По теореме Руше количество нулей функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ в каждом круге $U_\varepsilon(\lambda_n^0)$, $|n| \geqslant 2N_2 + 2$, совпадает.

Теперь мы занумеруем нули функции $\Delta(\lambda)$ в каждом таком круге так, чтобы их номера совпадали с номерами нулей функции $\Delta_0(\lambda)$ в этом же круге. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что количество нулей функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$, не попавших в объединение этих кругов, конечно и одинаково. Проведем нумерацию оставшихся нулей функции $\Delta(\lambda)$ в произвольном порядке.

Нули функции $\Delta(\lambda)$ — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ — мы обозначим $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Остается заметить, что число ε мы можем уменьшать и выбирать сколь угодно малым. Для любого такого ε найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $|n| > N(\varepsilon)$ выполнено

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| < \varepsilon.$$

Иными словами,

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1), \qquad |n| \to \infty.$$

Остается доказать утверждение об оценке ширины горизонтальной полосы, содержащей числа λ_n.

Если $P \in L_p[0,\pi]$, $p > 1$, или $P \in B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$, $\theta > 0$, то, согласно оценке (7.3) или теореме 7.3, соответственно, выполнено

$$\Upsilon_0(\sigma + i\tau) \leqslant C\|P\||\tau|^{-a}$$

(здесь $a > 0$ и равно $1/p'$ или θ, а величина C зависит только от p или θ).

Это означает, что оценка $|\rho(\lambda)| < 1$ функции $\rho(\lambda)$ из (9.10) выполнена при всех $|\operatorname{Im}\lambda| > \alpha$, где α зависит только от $\|P\|$. Поскольку нули функции $\Delta_0(\lambda)$ лежат в полосе, ширина которой зависит только от краевых условий, представление (9.10) приводит к оценке полосы $r_0 = r_0(\|P\|, U)$. $\square$

Результаты раздела 6 позволяют уточнять оценки остатков в полученных асимптотических формулах при дополнительных предположениях на потенциал P. Эти оценки различаются в случае сильной и слабой регулярности невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Пусть $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Выберем число ε так, что в кругах

$$K_n = \{\lambda : \ |\lambda - \lambda_n^0| \leqslant 3\varepsilon\} \tag{9.13}$$

лежит ровно одно (для сильно регулярного случая — однократное, а для слабо регулярного случая — двукратное) собственное значение.

Заметим, что построенные круги не пересекаются, а число $\varepsilon > 0$ корректно определено, поскольку последовательность $\{\lambda_n^0\}$ периодична. Зафиксируем горизонтальную полосу Π_α, содержащую все эти круги, и заметим, что α зависит только от краевых условий U. Определим числа

$$s_n(r) = \max_{|\lambda-\lambda_n^0|\leqslant r} \Upsilon_0(\lambda), \quad 0 \leqslant r \leqslant \varepsilon. \tag{9.14}$$

Определитель $\Delta_0(\lambda)$ равен нулю при $\lambda = \lambda_n^0$. Если краевые условия сильно регулярны, то все его нули просты, и тогда в круге $|\lambda - \lambda_n^0| < \varepsilon$, где число ε определено выше, выполнена оценка

$$|\Delta_0(\lambda)| > c_1|\lambda - \lambda_n^0|.$$

При этом, поскольку функция $\Delta_0(\lambda)$ периодична, число c_1 можно выбрать не зависящим от n. Очевидно, что функция $s_n(r)$ непрерывна и монотонно возрастает по $r \in [0, \varepsilon]$.

Заметим, что $s_n(\varepsilon) \to 0$ при $|n| \to \infty$ согласно лемме 6.1. Это означает, что неравенства $s_n(\varepsilon) \leqslant \dfrac{c_1\varepsilon}{M}$ (число $M = M(\|P\|_{L_1}, \alpha) = M(\|P\|_{L_1}, U)$ определено в (9.9)) выполнены для всех $n \in \mathbb{Z}$, кроме некоторого конечного набора индексов. Мы обозначим это множество индексов $\mathcal{I}$ и, как и в случае оператора Штурма—Лиувилля, назовем $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{I}$ *регулярными*, а $n \in \mathcal{I}$ *иррегулярными* индексами.

Естественно, существует такой номер $N = N(P, U)$, что все n регулярны при $|n| \geqslant N$. Итак, для каждого регулярного n найдется число $r = r_n$, являющееся корнем уравнения $s_n(r) = \dfrac{c_1 r}{M}$. При некоторых n это уравнение может иметь несколько решений — мы выберем наименьшее из них (оно, возможно, равно нулю). Таким образом

$$\max_{|\lambda-\lambda_n^0|\leqslant r_n} \Upsilon_0(\lambda) = s_n(r_n) = \frac{c_1 r_n}{M}.$$

Числа $s_n(r_n)$ мы будем обозначать просто s_n.

Если же краевые условия слабо регулярны, то все нули λ_n^0 двукратны, и в круге $|\lambda - \lambda_n^0| < \varepsilon$ выполнена оценка

$$|\Delta_0(\lambda)| > c_2|\lambda - \lambda_n^0|^2,$$

где c_2 вновь не зависит от n. В этом случае мы также рассмотрим функции $s_n(r)$, но число r_n определим как наименьший корень уравнения $s_n(r) = \dfrac{c_2 r^2}{M}$, заведомо существующий на отрезке $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$, если $s_n(\varepsilon) \leqslant \dfrac{c_2\varepsilon^2}{M}$ — зафиксируем это неравенство в качестве определения регулярности индекса n.

Теорема 9.2. *Пусть* $P \in L_1[0, \pi]$ — *потенциал вида* (3.8) *и* $\mathcal{L}_{P,U}$ — *регулярный оператор Дирака. Обозначим через* λ_n^0 *собственные значения ассоциированного оператора* $\mathcal{L}_{0,U}$, *а через* λ_n — *собственные значения оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$, *занумерованные так, что* $\lambda_n - \lambda_n^0 \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда в случае сильной регулярности оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$ *справедлива асимптотика*

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| \leqslant r_n \leqslant \frac{M}{c_1} s_n(\varepsilon), \qquad M = M(\|P\|_{L_1}, U),\ c_1 = c_1(U), \tag{9.15}$$

а в случае слабой регулярности

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| \leqslant r_n \leqslant \sqrt{\frac{M}{c_2} s_n(\varepsilon)}, \qquad c_2 = c_2(U), \tag{9.16}$$

где неравенства справедливы для всех $n \in \mathbb{Z}\setminus\mathcal{I}$ *и, в частности, начиная с некоторого номера* N, *зависящего от потенциала* P *и краевых условий* U.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда корни функции $\Delta_0(\lambda)$ просты. На окружностях γ_n радиуса r_n с центрами в нулях λ_n^0 имеем оценки

$$|\Delta_0(\lambda)| > c_1 r_n, \qquad |\delta(\lambda)| < M\Upsilon_0(\lambda) \leqslant c_1 r_n.$$

Тогда на окружностях γ_n будем иметь оценку $|\Delta_0(\lambda)| > |\delta(\lambda)|$. Согласно теореме Руше, внутри окружности γ_n находится ровно один нуль λ_n функции $\Delta(\lambda)$, т. е. для регулярных n выполняются оценки $|\lambda_n - \lambda_n^0| < r_n$. В случае двукратных корней на окружностях γ_n справедливы оценки

$$|\Delta_0(\lambda)| > c_2 r_n^2, \qquad |\delta(\lambda)| < M\Upsilon_0(\lambda) \leqslant c_2 r_n^2,$$

и из теоремы Руше следует, что внутри каждой окружности γ_n лежат ровно два нуля функции $\Delta(\lambda)$. Согласованность нумераций последовательностей $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ следует из теоремы 9.1. $\square$

Теорема 9.3. *Пусть потенциал P имеет вид* (3.8)*, а оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярен. Если $P\in L_1[0,\pi]$, то*

$$\lambda_n-\lambda_n^0\to 0 \text{ при } |n|\to\infty \quad и \quad \max_{n\in\mathbb{Z}}|\lambda_n-\lambda_n^0|\leqslant C\|P\|_{L_1}. \tag{9.17}$$

Если $P\in L_p[0,\pi]$, $p\in(1,2]$, то

$$\{\lambda_n-\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l_{p'},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad и \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\lambda_n-\lambda_n^0|^{p'}\right)^{1/p'}\leqslant C\|P\|_{L_p}. \tag{9.18}$$

Если $P\in B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$ (пространство Бесова, см. определение в приложении B), $\theta\in(0,1)$, то

$$\{n^\theta(\lambda_n-\lambda_n^0)\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l_\infty \quad и \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^\theta|\lambda_n-\lambda_n^0|\leqslant C\|P\|_{B^\theta_{1,\infty}}, \tag{9.19}$$

причем это утверждение при $\theta=1$ справедливо для потенциалов $P\in W_1^1[0,\pi]$.
Если $P\in B^\theta_{1,\infty,0}[0,\pi]$, $\theta\in(0,1)$, то

$$n^\theta(\lambda_n-\lambda_n^0)\to 0 \text{ при } |n|\to\infty \quad и \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^\theta|\lambda_n-\lambda_n^0|\leqslant C\|P\|_{B^\theta_{1,\infty,0}}. \tag{9.20}$$

Если $P\in B^\theta_{p,p'}[0,\pi]$, $p\in(1,2]$, $\theta\in(0,1/p)$, то

$$\{n^\theta(\lambda_n-\lambda_n^0)\}_{n\in\mathbb{Z}}\in l_{p'},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad и \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^{p'\theta}|\lambda_n-\lambda_n^0|^{p'}\right)^{1/p'}\leqslant C\|P\|_{B^\theta_{p,p'}}. \tag{9.21}$$

Если потенциал P имеет вид (3.8)*, а оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ слабо регулярен, то все оценки* (9.17)–(9.21) *сохраняются с заменой разности $\lambda_n-\lambda_n^0$ на $|\lambda_n-\lambda_n^0|^2$.*

Все константы C в оценках (9.17)–(9.21) *зависят только потенциала P, параметров p или θ и краевых условий. При этом везде, кроме оценки* (9.17)*, зависимость от потенциала равномерна, т. е. C зависит от $\|P\|_{L_p}$, $\|P\|_{B^\theta_{1,\infty}}$ и $\|P\|_{B^\theta_{p,p'}}$ соответственно (точнее, нумерацию чисел λ_n можно провести так, чтобы зависимость констант от потенциала была равномерна).*

Если матрица P имеет общий вид (3.1)*, то все утверждения теоремы сохраняются с той лишь разницей, что числа λ_n^0 являются собственными значениями оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$, где краевые условия $\widetilde{U}$ определены в* (3.6).

Доказательство. Согласно теореме 9.2, достаточно доказать оценки (9.17)–(9.21) для чисел $s_n(\varepsilon)$. Пусть μ_n — точки, для которых

$$s_n(\varepsilon)=\max_{|\lambda-\lambda_n^0|\leqslant\varepsilon}\Upsilon_0(\lambda)=\Upsilon_0(\mu_n).$$

Так как $|\mu_n-\mu_m|\geqslant\varepsilon$, то последовательность $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не сгущается. Теперь оценки (9.17)–(9.21) вытекают из следствия 7.1 и теорем 7.3 и 7.4.

Все утверждения очевидным образом переносятся на случай потенциала P общего вида при помощи утверждения о подобии 3.3. Остается установить равномерность оценок, т. е. показать, что константы C зависят не от самого потенциала P, а от его нормы в соответствующем пространстве.

Характеристики несгущающейся последовательности $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — число ε и ширина полосы α — определяются только краевыми условиями U. Тогда норма последовательности $\{\Upsilon_0(\mu_n)\}$ в соответствующем пространстве зависит только от соответствующей нормы $\|P\|$ и краевых условий. Зависимость констант M, c_1 и c_2 от величин $\|P\|_{L_1}$ и U уже отмечена выше.

Таким образом, равномерность всех оценок (9.17)–(9.21) доказана, но не для всей последовательности $\{\lambda_n-\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$, а лишь для регулярных n. Дальнейшие наши рассуждения преследуют две цели: доказать, что число иррегулярных собственных значений $|\mathcal{I}|$ зависит не от P, а от $\|P\|$; оценить разность $|\lambda_n-\lambda_n^0|$ при $n\in\mathcal{I}$.

Как и в доказательстве теоремы 8.3, разберем два случая.

Случай $\theta > 0$. Предположим, что $P \in B^{\theta}_{p,p'}[0,\pi]$ для некоторого $p \in [1,2]$ и $\theta > 0$. В силу вложения $B^{\theta}_{p,p'}[0,\pi] \subset B^{\theta}_{1,\infty}[0,\pi]$ и теоремы 7.3 имеем

$$\Upsilon_0(\lambda) < C(1+|\lambda|)^{-\theta}, \qquad \lambda \in \Pi_\alpha,\ C = C(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, \alpha),\ \alpha = \alpha(U). \tag{9.22}$$

Учитывая, что $|\lambda^0_n| \geqslant c_3|n|$, $c_3 = c_3(U)$, видим, что все n с номерами $|n| > N_0 = N_0(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U)$ являются регулярными. Первая цель достигнута.

Для оценки величины $|\lambda_n - \lambda^0_n|$, $n \in \mathcal{I}$, применим теорему Руше к функции $\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \delta(\lambda)$ на прямоугольнике с вершинами $\pm i\alpha \pm \beta$. Вначале увеличим, при необходимости, определенное нами выше число α так, чтобы на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha$ была выполнена оценка

$$|\Delta(\lambda)/\Delta_0(\lambda) - 1| < 1.$$

В силу (9.10) это неравенство обеспечивается условием

$$|M\Upsilon_+(\lambda)| < 1, \quad M = M(\|P\|_{L_1}, U).$$

Оценка (9.22) теперь показывает, что $\alpha = \alpha(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U)$.

Теперь выберем число β так, чтобы прямоугольник с вершинами $\pm i\alpha \pm \beta$ содержал все собственные значения λ^0_n с номерами $|n| < N_0$. Положим

$$m = \min_{\lambda \in [-i\alpha \pm \beta, i\alpha \pm \beta]} |\Delta_0(\lambda)| > 0.$$

Мы хотим добиться выполнения оценки $|\delta(\lambda)| < m$ на этих двух отрезках. В силу (9.9) это неравенство обеспечивается условием

$$M\Upsilon_0(\lambda) < m, \quad \text{где} \quad M = M(\|P\|_{L_1}, \alpha), \quad \alpha = \alpha(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U), \quad m = m(\alpha, U).$$

Теперь из (9.22) следует, что увеличением β мы можем добиться желаемой оценки, причем

$$\beta = \beta(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U).$$

Остается заметить, что β мы всегда можем увеличивать, не меняя m, т. к. функция Δ_0 периодична с периодом 2. Применяя теорему Руше к построенному прямоугольнику, видим, что все иррегулярные λ_n остаются внутри него. Это означает, что вне зависимости от их нумерации справедлива оценка

$$|\lambda_n - \lambda^0_n| \leqslant 2\alpha + 2\beta,\ |n| \leqslant N_0,\ \alpha = \alpha(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U),\ \beta = \beta(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U),\ N_0 = N_0(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U).$$

Тогда в (9.19) и (9.20) имеем

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} n^{\theta}|\lambda_n - \lambda^0_n| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{I}} n^{\theta}|\lambda_n - \lambda^0_n| + \sup_{n\in\mathcal{I}} n^{\theta}|\lambda_n - \lambda^0_n| \leqslant C(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U) + 2(\alpha+\beta)N_0^{\theta}.$$

В (9.20)

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{p'\theta}|\lambda_n - \lambda^0_n|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{I}} n^{p'\theta}|\lambda_n - \lambda^0_n|^{p'}\right)^{1/p'} + \left(\sum_{n\in\mathcal{I}} n^{p'\theta}|\lambda_n - \lambda^0_n|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant$$

$$\leqslant C(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U) + 2(\alpha+\beta)N_0^{\theta}(2N_0+1)^{1/p'}.$$

Случай $\theta > 0$ полностью разобран.

Случай $\theta = 0$. Пусть $P \in L_p$ для некоторого $p > 1$. Напомним, что

$$s_n(\varepsilon) = \max_{|\lambda - \lambda^0_n| \leqslant \varepsilon} \Upsilon_0(\lambda) = \Upsilon_0(\mu_n).$$

Поскольку $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — несгущающаяся последовательность с характеристиками $\varepsilon = \varepsilon(U)$ и $\alpha = \alpha(U)$, то, в силу следствия 7.1

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\Upsilon_0(\mu_n))^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant C(U)\|P\|_{L_p}.$$

Условие $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{I}$ определяется выполнением неравенства $\Upsilon_0(\mu_n) < \dfrac{c_1\varepsilon}{M}$ для сильно регулярных краевых условий и $\Upsilon_0(\mu_n) < \dfrac{c_2\varepsilon^2}{M}$ для слабо регулярных. При этом

$$\varepsilon = \varepsilon(U), \quad c_1 = c_1(U), \quad c_2 = c_2(U), \quad M = M(\|P\|_{L_1}, U).$$

Это означает, что в любом случае

$$C(U)\|P\|_{L_p} \geqslant \left(\sum_{n\in\mathcal{I}} (\Upsilon_0(\mu_n))^{p'}\right)^{1/p'} \geqslant M_1|\mathcal{I}|, \quad M_1 = M_1(p, \|P\|_{L_1}, U),$$

т. е. число N_0 иррегулярных индексов оценивается величиной, зависящей только от $\|P\|_{L_p}$ и U.

Остается оценить величину $|\lambda_n - \lambda_n^0|$ для иррегулярных индексов. Вначале, как и в случае $\theta > 0$, увеличим ширину полосы Π_α, чтобы добиться оценки $|\rho(\lambda)| < 1$ на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha$ функции из (9.10). Эта оценка обеспечивается неравенством

$$\Upsilon_+(\sigma + i\alpha) < \frac{1}{M}, \qquad M = M(\|P\|_{L_1}, U).$$

Напомним, что

$$\Upsilon_+(\sigma + i\tau) \leqslant C\tau^{-1/p'}, \quad \text{где} \quad C = C(\|P\|_{L_p})$$

(неравенство (7.3)).

Итак, число $\alpha = \alpha(\|P\|_{L_p}, U)$ зафиксировано. Теперь, как и в доказательстве теоремы 8.3, построим семейство контуров γ_n, $n \in \mathbb{Z}$.

Для построения кривой $\gamma_1(t)$, $t \in [-1, 1]$, проведем вначале отрезок $[-i\alpha + \operatorname{Re}\lambda_1^0, i\alpha + \operatorname{Re}\lambda_1^0]$, ориентированный снизу вверх. Теперь заменим ту его часть, которая попала в круг K_1, на правую полуокружность. Если полученный путь пересекает круг K_2, то заменим ту часть отрезка, которая попала внутрь K_2, на левую дугу окружности ∂K_2. Если полученный путь пересекает круг K_0, то заменим ту часть отрезка, которая попала внутрь K_0, на правую дугу окружности ∂K_0. В силу оценки

$$|\lambda_n^0 - \lambda_m^0| \geqslant 2(|m - n| - 1)$$

другие круги путь пересечь не может.

В результате получим путь γ_1, который все круги с номерами $n \geqslant 2$ оставляет справа, а все круги с номерами $n \leqslant 1$ — слева. Аналогичным образом проведем путь γ_2. Остальные пути получим параллельным переносом

$$\gamma_{1+2n} = \gamma_1 + 2n, \qquad \gamma_{2+2n} = \gamma_2 + 2n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь построим замкнутые контуры $C_{m,n}$, $m < n$, дополнив кривые $\gamma_m(t)$ и $\gamma_n(t)$ отрезками прямых $\operatorname{Im}\lambda = \alpha$ и $\operatorname{Im}\lambda = -\alpha$.

По построению, каждый контур $C_{m,n}$ содержит внутри ровно $n - m$ точек последовательности $\{\lambda_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Заметим, что

$$\operatorname{diam} C_{m,n} \leqslant |\operatorname{Re}\lambda_n^0 - \operatorname{Re}\lambda_m^0| + 2 + 2\alpha \leqslant n - m + 3 + 2\alpha.$$

Построенные контуры, по аналогии с числами λ_n, разобъем на две категории — подходящие (для применения теоремы Руше) и неподходящие. Путь γ_n назовем *подходящим*, если

$$\max_{\gamma_n} |\delta(\lambda)| < \min_{\gamma_n} |\Delta_0(\lambda)|,$$

и *неподходящим* в противном случае. Контур $C_{m,n}$ назовем *подходящим*, если оба пути γ_n и γ_m подходящие (на прямых $\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha$ неравенство $\max|\delta(\lambda)| < \min|\Delta_0(\lambda)|$ выполнено).

Повторим рассуждения, которые мы уже применили к окружностям ∂K_n. Пусть ν_n — точки на γ_n, где $|\delta(\lambda)|$ достигает своего максимального значения. Последовательность $\{\nu_n\}$ несгущающаяся, а значит, $\{\Upsilon_0(\nu_n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{p'}^\theta$ (теорема 7.4).

Более того, характеристики α и β последовательности определяются только краевыми условиями и шириной полосы $\alpha = \alpha(\|P\|_{L_p}, U)$, т. е.

$$\|\{\Upsilon_0(\nu_n)\}\|_{l_{p'}^\theta} \leqslant C(\|P\|_{L_p}, U).$$

Из этой оценки следует, что число N_1 неподходящих контуров γ_n зависит тоже лишь от $\|P\|_{L_p}$ и краевых условий U. Применяя теорему Руше к каждому подходящему контуру, получим для каждого иррегулярного n оценку

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| \leqslant \operatorname{diam} C_{n-N_1,n+N_1} \leqslant 2N_1 + 3 + 2\alpha.$$

Тогда в (9.18)

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n - \lambda_n^0|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{I}} |\lambda_n - \lambda_n^0|^{p'}\right)^{1/p'} + \left(\sum_{n\in\mathcal{I}} |\lambda_n - \lambda_n^0|^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|P\|_{L_p}, U) + (2N_1 + 3 + 2\alpha) N_0^{1/p'}.$$

□

Теперь докажем теорему об асимптотике собственных функций сильно регулярного оператора. В слабо регулярном случае собственные значения асимптотически двукратны. В этом случае мы изучим асимптотическое поведение соответствующих двумерных спектральных проекторов (см. теорему 10.3 ниже).

Теорема 9.4. *Пусть потенциал $P \in L_1[0,\pi]$ имеет вид* (3.8)*, а оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярен. Тогда для всех $n \in \mathbb{Z}$, кроме конечного множества индексов*[1] *$\mathcal{J}$, собственные значения λ_n просты. Обозначим через $\{\mathbf{y}_n(x)\}_{n\in\setminus\mathcal{I}}$ нормированные собственные функции этого оператора, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n\}$, а через $\{\mathbf{y}_n^0(x)\}$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n^0\}$. Тогда*

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_n^0(x) + \mathbf{r}_n(x), \qquad \text{где } \|\mathbf{r}_n\|_C \to 0 \text{ при } \mathbb{Z}\setminus\mathcal{J} \ni n \to \infty. \tag{9.23}$$

Более того, справедливо представление

$$y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x), \qquad y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x), \tag{9.24}$$

причем

$$|\tau_{j,n}(0)| \leqslant C, \quad j = 1,\ 2, \quad C = C(\|P\|_{L_1}, U),$$

а производные функций $\tau_{j,n}(x)$ подчинены оценке

$$|\tau'_{j,n}(x)| \leqslant C(|p_2(x)| + |p_3(x)|) \tag{9.25}$$

почти всюду на $[0,\pi] \ni x$, где постоянная C зависит только от $\|P\|_{L_1}$ и U.
Если $P \in L_p[0,\pi]$, $p \in (1,2]$, то

$$\{\|\mathbf{r}_n\|_C\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}} \|\mathbf{r}_n\|_C^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant C(\|P\|_{L_p}, U). \tag{9.26}$$

Если $P \in B^{\theta}_{1,\infty}[0,\pi]$ (пространство Бесова, см. определение в приложении B), $\theta \in (0,1)$, то

$$\{n^{\theta}\|\mathbf{r}_n\|_C\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}} \in l_\infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}} n^{\theta}\|\mathbf{r}_n\|_C \leqslant C(\|P\|_{B^{\theta}_{1,\infty}}, U), \tag{9.27}$$

причем это утверждение при $\theta = 1$ справедливо для потенциалов $P \in W_1^1[0,\pi]$.
Если $P \in B^{\theta}_{1,\infty,0}$, $\theta \in (0,1)$, то

$$n^{\theta}\|\mathbf{r}_n\|_C \to 0 \text{ при } |n| \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}} n^{\theta}\|\mathbf{r}_n\|_C \leqslant C(\|P\|_{B^{\theta}_{1,\infty,0}}, U). \tag{9.28}$$

Если $P \in B^{\theta}_{p,p'}[0,\pi]$, $p \in (1,2]$, $\theta \in (0,1/p)$, то

$$\{n^{\theta}\|\mathbf{r}_n\|_C\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}} n^{p'\theta}\|\mathbf{r}_n\|_C^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant C(\|P\|_{B^{\theta}_{p,p'}}, U). \tag{9.29}$$

[1] Напомним, что эти индексы мы выше назвали иррегулярными.

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ сильно регулярен, то все его собственные значения просты. Проведем непересекающиеся круги K_n, определенные в (9.13). Тогда в силу теоремы 9.1, каждый круг K_n для $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{J}$ содержит ровно одно собственное значение λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Эти круги поместим в полосу Π_α, где $\alpha = \alpha(U)$.

Из определения собственных значений следует, что $\Delta_0(\lambda_n^0) = 0$, где $\Delta_0(\lambda) = \det M_0(\lambda)$,

$$M_0(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}^0(\lambda) & M_{12}^0(\lambda) \\ \\ M_{21}^0(\lambda) & M_{22}^0(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}^0(\pi,\lambda) & e_{12}^0(\pi,\lambda) \\ \\ e_{21}^0(\pi,\lambda) & e_{22}^0(\pi,\lambda) \end{pmatrix},$$

Обозначим

$$\omega_n^0 = \begin{pmatrix} M_{12}^0(\lambda_n^0) \\ \\ -M_{11}^0(\lambda_n^0) \end{pmatrix}.$$

Тогда функция

$$\widetilde{\mathbf{y}}_n^0(x) = \omega_{1,n}^0 \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) + \omega_{2,n}^0 \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0)$$

является собственной (ненормированной) функцией для оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Для $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{J}$ аналогично определим вектор

$$\omega_n = \begin{pmatrix} M_{12}(\lambda_n) \\ \\ -M_{11}(\lambda_n) \end{pmatrix},$$

так что функция

$$\widetilde{\mathbf{y}}_n(x) = \omega_{1,n} \mathbf{e}_1(x, \lambda_n) + \omega_{2,n} \mathbf{e}_2(x, \lambda_n)$$

является собственной для оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Из (9.5) следует, что

$$\|\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n)\|_C + \|\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n)\|_C \leqslant C\Upsilon_0(\lambda_n), \tag{9.30}$$

здесь $C = C(\|P\|_{L_1}, U)$. Из явного вида функций $\mathbf{e}_1^0(x,\lambda)$ и $\mathbf{e}_2^0(x,\lambda)$ следует оценка

$$\|\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0)\|_C + \|\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0)\|_C \leqslant C|\lambda_n - \lambda_n^0|, \tag{9.31}$$

где $C = C(U)$. Подставляя сюда $x = \pi$, получим, что

$$\|\omega_n - \omega_n^0\| \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda_n) + |\lambda_n - \lambda_n^0|), \qquad C = C(\|P\|_{L_1}, U). \tag{9.32}$$

Распишем разность

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{y}}_n(x) - \mathbf{y}_n(x) &= \omega_{1,n}\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) - \omega_{1,n}^0\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0) + \omega_{2,n}^0\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0) = \\ &= (\omega_{1,n} - \omega_{1,n}^0)\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) + (w_{2,n} - \omega_{2,n}^0)\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) + \omega_{1,n}^0\left(\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n)\right) = \\ &= \omega_{2,n}^0\left(\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n)\right) + \omega_{1,n}^0\left(\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0)\right) + \omega_{2,n}^0\left(\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0)\right). \end{aligned}$$

В силу (9.30), (9.31) и (9.32) получаем

$$\|\widetilde{\mathbf{y}}_n(x) - \mathbf{y}_n(x)\|_{C[0,\pi]} \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda_n) + |\lambda_n - \lambda_n^0|), \quad C = C(\|P\|_{L_1}, U). \tag{9.33}$$

Поскольку $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}}$ — несгущающаяся последовательность, то теперь представление (9.23) и оценки (9.26)–(9.29) немедленно следуют из теоремы 9.3. Однако эти оценки получены на *ненормированные* собственные функции.

Необходимо нормировать функции $\widetilde{\mathbf{y}}_n$ и $\widetilde{\mathbf{y}}_n^0$. Заметим, что

$$\big|\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}} - \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}\big| \leqslant C_{abs}\|\widetilde{\mathbf{y}}_n - \widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_C.$$

Далее, функции $\widetilde{\mathbf{y}}_n^0$ зависят только от четности номера n, а значит, последовательность норм $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}}$ (и в пространстве C, и в пространстве $\mathbb{H}$) отделена от нуля и от бесконечности константами $C_\pm = C_\pm(U)$. Тогда тем же свойством обладает и последовательность $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|\}_{\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}}$ (только константы зависят еще и от $\|P\|_{L_1}$), откуда

$$\left\|\frac{\widetilde{\mathbf{y}}_n(x)}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}} - \frac{\widetilde{\mathbf{y}}_n^0(x)}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}}\right\|_C \leqslant \frac{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}\cdot\|\widetilde{\mathbf{y}}_n - \widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_C + \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_C\cdot\big|\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}} - \|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\big|}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\cdot\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}} \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda_n) + |\lambda_n - \lambda_n^0|), \tag{9.34}$$

$n \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{J}$, $C = C(\|P\|_{L_1}, U)$ и представление (9.23) доказано.

Для доказательства представления (9.24) воспользуемся соотношениями (9.4) и (9.6). Получим

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\left(\omega_{1,n} + \omega_{1,n}\eta_{11}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{12}(x,\lambda_n)\right), \\ \widetilde{y}_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\left(\omega_{2,n} + \omega_{1,n}\eta_{21}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{22}(x,\lambda_n)\right), \end{cases} \qquad |n| > N.$$

Введем обозначения

$$\widetilde{\tau}_{1,n}(x) = \widetilde{y}_{1,n}(x)e^{-i\lambda_n x} \quad \text{и} \quad \widetilde{\tau}_{2,n}(x) = \widetilde{y}_{2,n}(x)e^{i\lambda_n x}.$$

Тогда

$$\widetilde{\tau}_{j,n}(0) = \omega_{j,n} = \omega^0_{j,n} + \omega_{j,n} - \omega^0_{j,n}, \quad j = 1,\, 2.$$

Поскольку числа $\omega^0_{1,n}$ и $\omega^0_{2,n}$ зависят только от четности номера n, а величины $|\omega_{j,n} - \omega^0_{j,n}|$ уже оценены в (9.32), то последовательности $\{\widetilde{\tau}_{1,n}(0)\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}}$ и $\{\widetilde{\tau}_{2,n}(0)\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}}$ ограничены.

Остается оценить производные:

$$\widetilde{\tau}'_{j,n}(x) = \omega_{1,n}\eta'_{j1}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta'_{j2}(x,\lambda_n),$$

а значит, согласно (9.6),

$$|\widetilde{\tau}'_{1,n}(x)| \leqslant M|p_2(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|), \qquad |\widetilde{\tau}'_{2,n}(x)| \leqslant M|p_3(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|),$$

где $M = M(\|P\|_{L_1}, U)$.

Отсюда сразу следует оценка (9.25) для ненормированных функций $\widetilde{\mathbf{y}}_n$. Так как нормы $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathcal{J}}$ отделены от нуля, то эта оценка сохранится и после нормировки. □

10. Резольвента оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$

Мы покажем, что резольвента оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ компактна, и изучим асимптотическое поведение производящей функции $G(t,x,\lambda)$ этого компактного оператора (функции Грина) при $\lambda \to \infty$.

Утверждение 10.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (3.8). *Резольвента*

$$\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$$

регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ определена при всех $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где λ_n — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, и является интегральным оператором в $\mathbb{H}$:

$$\mathfrak{R}(\lambda)\mathbf{f} = \int_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt. \tag{10.1}$$

Функция $G(t,x,\lambda)$ непрерывна на квадрате $(t,x) \in [0,\pi]^2$ за исключением диагонали $x = t$.

Доказательство. Матрица $E(x,\lambda)$, определенная в (9.1), удовлетворяет уравнению

$$BE'(x,\lambda) + P(x)E(x,\lambda) = \lambda E(x,\lambda),$$

причем $E(0,\lambda) = I$. Применим метод вариации постоянных к уравнению $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f}$. Тогда решение этого уравнения примет вид

$$\mathbf{y}(x,\lambda) = \omega_1\mathbf{e}_1(x,\lambda) + \omega_2\mathbf{e}_2(x,\lambda) - \int_x^\pi E(x,\lambda)E^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt, \tag{10.2}$$

где ω_1 и ω_2 — произвольные числа. Легко видеть, что

$$\mathbf{y}(0,\lambda) = \omega - \int_0^\pi E^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt, \quad \mathbf{y}(\pi,\lambda) = E(\pi,\lambda)\omega, \quad \text{где } \omega = (\omega_1,\omega_2)^t.$$

Для определения вектора ω воспользуемся краевыми условиями $C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0$, введенными в (3.4). Тогда

$$\omega = \int_0^\pi M^{-1}(\lambda)CE^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt,$$

где

$$M(\lambda) = C + DE(\pi,\lambda).$$

Матрица $M^{-1}(\lambda)$ определена в точности тогда, когда

$$\Delta(\lambda) = \det M(\lambda) \neq 0,$$

т. е. для всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Функция $\mathbf{y}(x,\lambda)$ теперь принимает вид

$$\mathbf{y}(x,\lambda) = \int_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)\,dt,$$

где

$$G(t,x,\lambda) = \begin{cases} E(x,\lambda)M^{-1}(\lambda)CE^{-1}(t,\lambda)B^{-1} & \text{при } t<x, \\ E(x,\lambda)(M^{-1}(\lambda)C-I)E^{-1}(t,\lambda)B^{-1} & \text{при } t>x, \end{cases} \tag{10.3}$$

что доказывает требуемое утверждение. □

Определение 10.1. Функция $G(t,x,\lambda)$ называется *функцией Грина* оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Через $G_0(t,x,\lambda)$ будем обозначать функцию Грина невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Отметим, что из доказанного утверждения следует компактность в пространстве $\mathbb{H}$ оператора $\mathfrak{R}(\lambda)$ при любом $\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (отсюда, в частности, следует замкнутость оператора $\mathcal{L}_{P,U}$).

Наша ближайшая цель — получить оценки для функции $G(t,x,\lambda)$. Эти оценки являются ключевыми для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$.

Для упрощения дальнейших выкладок обозначим

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda) = E(x,\lambda)E^{-1}(a,\lambda),$$

где $0 \leqslant a,\ x \leqslant \pi$, $\lambda \in \mathbb{C}$, и найдем эту функцию в явном виде.

Мы уже отмечали в доказательстве утверждения 9.2, что $\det E(x,\lambda) \equiv 1$. Тогда

$$E^{-1}(a,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{22}(a,\lambda) & -e_{12}(a,\lambda) \\ -e_{21}(a,\lambda) & e_{11}(a,\lambda) \end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_{11}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{12}(a,x,\lambda) \\ \mathcal{E}_{21}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{22}(a,x,\lambda) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{gathered} \mathcal{E}_{j1}(a,x,\lambda) = e_{j1}(x,\lambda)e_{22}(a,\lambda) - e_{j2}(x,\lambda)e_{21}(a,\lambda), \\ \mathcal{E}_{j2}(a,x,\lambda) = e_{j2}(x,\lambda)e_{11}(a,\lambda) - e_{j1}(x,\lambda)e_{12}(a,\lambda), \quad j=1,\,2. \end{gathered} \tag{10.4}$$

В случае $P(x) \equiv 0$ будем использовать обозначения $\mathcal{E}^0(a,x,\lambda) = (\mathcal{E}^0_{jk}(a,x,\lambda))$, $j,\,k=1,\,2$.

Лемма 10.1. *Матрица $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению*

$$B\mathcal{E}'(x) + P(x)\mathcal{E}(x) = \lambda\mathcal{E}(x), \quad x \in [0,\pi] \tag{10.5}$$

и начальному условию $\mathcal{E}(a,a,\lambda) = I$.

Функции $\mathcal{E}_{ij}(a,x,\lambda)$ аналитичны по λ во всей комплексной плоскости, и при $\lambda \to \infty$ верно представление

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda\xi}\cdot(1+o(1)) + e^{-i\lambda\xi}\cdot o(1) & e^{i\lambda\xi}\cdot o(1) + e^{-i\lambda\xi}\cdot o(1) \\ e^{i\lambda\xi}\cdot o(1) + e^{-i\lambda\xi}\cdot o(1) & e^{i\lambda\xi}\cdot o(1) + e^{-i\lambda\xi}\cdot(1+o(1)) \end{pmatrix}, \tag{10.6}$$

$\xi = x-a$, при $\mathbb{C} \ni \lambda \to \infty$ равномерно по $0 \leqslant a,\ x \leqslant \pi$.

Доказательство. То, что матрица $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (10.5), сразу следует из (10.4). Равенство $\mathcal{E}(a,a,\lambda) = I$ очевидно. Асимптотическое представление (10.6) следует из (9.5). □

Теорема 10.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ регулярен и $P \in L_1[0,\pi]$. Тогда найдется $\alpha > 1$ такое, что при $|\operatorname{Im}\lambda| > \alpha$ резольвента*

$$\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$$

существует как оператор из L_p в L_q для любых $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, и выполняется оценка

$$\|\mathfrak{R}(\lambda)\|_{L_p \to L_q} \leqslant C|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p-1/q} \tag{10.7}$$

с постоянной C, зависящей от α, но не зависящей от λ вне полосы Π_α.

Доказательство.
Шаг 1. Согласно утверждению 3.3, можем считать, что P имеет вид (3.8). Действительно, поскольку $\mathcal{L}_{P,U} = W(L_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I)W^{-1}$, то и

$$\mathfrak{R}(\lambda) = (L_{P,U} - \lambda I)^{-1} = W(L_{\widetilde{P},\widetilde{U}} - (\lambda-\gamma)I)^{-1}W^{-1} = W\widetilde{\mathfrak{R}}(\lambda-\gamma)W^{-1}.$$

Здесь краевые условия $\widetilde{U}$ по-прежнему регулярны, матрица $\widetilde{P}$ внедиагональна, а оператор W и число γ фиксированы.

Кроме того, мы уже доказали, что резольвента $\mathfrak{R}(\lambda_0) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda_0)^{-1}$ существует при некотором $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, а значит, образ $\mathfrak{R}(\lambda_0)$ совпадает с областью определения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, а потому содержится в пространстве $W_1^1[0,\pi]$.

Но вложение $W_1^1[0,\pi] \hookrightarrow L_2[0,\pi]$ компактно, следовательно, оператор $\mathfrak{R}(\lambda_0)$ компактен, а спектр $\mathcal{L}_{P,U}$ дискретен.

Шаг 2. Запишем для резольвенты $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{0,U} + P - \lambda I)^{-1}$ формальный ряд

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \mathfrak{R}_0(\lambda) + \mathfrak{R}_0(\lambda)P\mathfrak{R}_0(\lambda) + (\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^2\mathfrak{R}_0(\lambda)) + \ldots. \tag{10.8}$$

Все члены этого ряда корректно определены, так как оператор $\mathfrak{R}_0(\lambda) : L_1[0,\pi] \to L_\infty[0,\pi]$ ограничен. Наша цель — показать, что нормы слагаемых в этом ряде убывают со скоростью геометрической прогрессии и ряд сходится в норме $\mathbb{H}$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ (которое выберем позже) и найдем ограниченную функцию $V(x)$ такую, что

$$P_\varepsilon(x) = P(x) - V(x), \qquad \|P_\varepsilon\|_{L_1} < \varepsilon.$$

Обозначим $\mathcal{V} = \|V\|_{L_\infty}$ и заметим, что $\mathcal{V}$ зависит только от потенциала P и числа ε.

Тогда $(n+1)$-е слагаемое

$$[\mathfrak{R}_0(\lambda)(P_\varepsilon + V)]^n\,\mathfrak{R}_0(\lambda)$$

в ряде (10.8) запишется в виде $S_n(\lambda)\mathfrak{R}_0(\lambda)$, где $S_n(\lambda)$ — сумма, полученная при раскрытии скобок в выражении

$$[\mathfrak{R}_0(P_\varepsilon + V)]^n\,.$$

Эта сумма состоит из 2^n слагаемых (обозначим их через $T_{n,j}$, $j = 1,\ldots,2^n$), каждое из которых является произведением n множителей вида $\mathfrak{R}_0 P_\varepsilon$ или $\mathfrak{R}_0 V$.

Шаг 3. Оценим норму каждого слагаемого $\|T_{n,j}\|_{L_\infty \to L_q}$. Для этого воспользуемся теоремой 4.5, согласно которой найдется число α_0 такое, что при $\tau = |\operatorname{Im}\lambda| \geqslant \alpha_0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{L_1 \to L_\infty} < C, \qquad \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{L_1 \to L_q} < C\tau^{-1/q},$$
$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{L_2 \to L_\infty} < C\tau^{-1/2}, \qquad \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{L_2 \to L_q} < C\tau^{-1/2-1/q}.$$

Здесь величина C является единой для всех четырех оценок и определяется только краевыми условиями и индексом q, т. е. $C = C(U,q)$.

Выберем теперь число ε так, чтобы $\delta = C\varepsilon < 1/4$, а число $\alpha > \alpha_0$ выберем так, чтобы

$$\frac{C\mathcal{V}\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} < \delta. \tag{10.9}$$

Всюду далее оценки проводим при фиксированном λ и $\tau = |\operatorname{Im}\lambda| > \alpha$, где α удовлетворяет (10.9). С учетом неравенства $\|P_\varepsilon\|_{L_1} < \varepsilon$ получаем

$$\|P_\varepsilon\|_{L_\infty \to L_1} < \varepsilon, \qquad \|V\|_{L_\infty \to L_q} \leqslant \pi^{1/q}\mathcal{V}.$$

Из приведенных оценок для резольвенты $R_0(\lambda)$ следуют неравенства

$$\|\mathfrak{R}_0 P_\varepsilon\|_{L_\infty\to L_\infty} \leqslant \|P_\varepsilon\|_{L_\infty\to L_1}\ \|\mathfrak{R}_0\|_{L_1\to L_\infty} \leqslant C\varepsilon \leqslant \delta,$$
$$\|\mathfrak{R}_0 P_\varepsilon\|_{L_\infty\to L_q} \leqslant \|P_\varepsilon\|_{L_\infty\to L_1}\ \|\mathfrak{R}_0\|_{L_1\to L_q} \leqslant C\varepsilon\tau^{-1/q} \leqslant \delta\tau^{-1/q},$$
$$\|\mathfrak{R}_0 V\|_{L_\infty\to L_\infty} \leqslant \|\mathfrak{R}_0\|_{L_2\to L_\infty}\|V\|_{L_\infty\to L_2} \leqslant C\tau^{-1/2}\pi^{1/2}\mathcal{V} \leqslant \delta,$$
$$\|\mathfrak{R}_0 V\|_{L_\infty\to L_q} \leqslant \|\mathfrak{R}_0\|_{L_2\to L_q}\|V\|_{L_\infty\to L_2} \leqslant C\tau^{-1/2-1/q}\pi^{1/2}\mathcal{V} \leqslant \delta\tau^{-1/q}.$$

Теперь мы можем оценить $\|T_{n,j}\|_{L_\infty\to L_2}$. Это произведение составлено из n множителей $T_{n,j} = P_1P_2\dots P_n$, каждый из которых равен либо $\mathfrak{R}_0P_\varepsilon$, либо $\mathfrak{R}_0V$. Тогда

$$\|T_{n,j}\|_{L_\infty\to L_q} \leqslant \|P_1\|_{L_\infty\to L_q}\|P_2\|_{L_\infty\to L_\infty}\dots\|P_n\|_{L_\infty\to L_\infty} \leqslant \delta\tau^{-1/q}\cdot\delta^{n-1} = \delta^n\tau^{-1/q}.$$

Шаг 4. Сумма S_n составлена из 2^n операторов $T_{n,j}$, а значит,

$$\|S_n\|_{L_\infty\to L_q} \leqslant 2^n\delta^n\tau^{-1/q} < 2^{-n}\tau^{-1/q}.$$

Тогда каждое слагаемое ряда (10.8) оценивается следующим образом:

$$\|S_n\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{L_p\to L_q} \leqslant \|S_n\|_{L_\infty\to L_q}\|\mathfrak{R}_0\|_{L_p\to L_\infty} \leqslant 2^{-n}\tau^{-1/q}C\tau^{-1+1/p} = 2^{-n}C\tau^{-1+1/p-1/q}.$$

Тем самым, ряд (10.8) сходится и оценивается величиной $2C\tau^{-1+1/p-1/q}$. Теорема доказана. $\square$

Утверждение 10.2. *Пусть $\mathfrak{R}(\lambda)$ — резольвента оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с регулярными краевыми условиями U и потенциалом $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty]$, вида* (3.8). *Пусть индексы μ и ν связаны соотношением*

$$1 \leqslant \mu \leqslant \nu \leqslant \infty.$$

Тогда найдется такое число $a > 0$, зависящее только от $\|P\|_\varkappa$ и краевых условий U, что при всех $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\Pi_a$ оператор $\mathfrak{R}(\lambda)$ ограниченно действует из $L_\mu[0,\pi]$ в $L_\nu[0,\pi]$ и представляется рядом (*сходящимся по операторной норме $\|\cdot\|_{\mu\to\nu}$*)

$$\mathfrak{R}(\lambda) = \mathfrak{R}_0(\lambda) - \mathfrak{R}_0(\lambda)P\mathfrak{R}_0(\lambda) + \dots + (-\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^n\mathfrak{R}_0(\lambda) + \dots, \tag{10.10}$$

где $\mathfrak{R}_0(\lambda) = (\mathcal{L}_{0,U} - \lambda I)^{-1}$, а P — оператор умножения на матрицу $P(x)$. При этом для слагаемых ряда справедлива оценка

$$\|(\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^n\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\mu\to\nu} \leqslant C_{\mu,\nu}^{n+1}\cdot\|P\|_\varkappa^n\cdot|\operatorname{Im}\lambda|^{n(-1+1/\varkappa)-1+1/\mu-1/\nu},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ \ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Pi_a, \tag{10.11}$$

где $C_{\mu,\nu}$ — константа из оценки (4.10)*, зависящая только от краевых условий, а сама резольвента $\mathfrak{R}(\lambda)$ допускает оценку*

$$\|\mathfrak{R}(\lambda)\|_{\mu\to\nu} \leqslant 2C_{\mu,\nu}|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/\mu-1/\nu}, \qquad \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Pi_a. \tag{10.12}$$

Доказательство. Выберем вначале число a равным числу a_0 из теоремы 4.5. Сходимость ряда (10.10), а значит, и само утверждение, следует из оценок (10.11). Действительно, при всех

$$|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant (2C_{\mu,\nu}\|P\|_\varkappa)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$$

из (10.11) следует, что

$$\|(\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^n\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\mu\to\nu} \leqslant 2^{-n}C_{\mu,\nu}|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/\mu-1/\nu}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Это неравенство влечет сходимость ряда (10.10) и, с учетом (4.10), оценку (10.12). При этом

$$a := \max\left\{a_0, (2C_{\mu,\nu}\|P\|_\varkappa)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}\right\} \geqslant 1. \tag{10.13}$$

Итак, нам остается проверить справедливость неравенств (10.11).

Поскольку матрица $P(x)$ порождает ограниченный оператор $P:\mathbf{f}(x)\mapsto P(x)\mathbf{f}(x)$ из $L_\infty[0,\pi]$ в $L_\varkappa[0,\pi]$ с нормой $\|P\|_\varkappa$, то при всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Pi_a$

$$\|(\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^n\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\mu\to\nu} \leqslant \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\varkappa\to\nu}\|P\|_\varkappa\left(\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\varkappa\to\infty}\|P\|_\varkappa\right)^{n-1}\|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\mu\to\infty} \leqslant$$
$$\leqslant C_{\mu,\nu}^{n+1}\cdot\|P\|_\varkappa^n\cdot|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+\max\{1/\varkappa-1/\nu,0\}+(n-1)(-1+1/\varkappa)-1+1/\mu} \leqslant$$
$$\leqslant C_{\mu,\nu}^{n+1}\cdot\|P\|_\varkappa^n\cdot|\operatorname{Im}\lambda|^{n(-1+1/\varkappa)-1+1/\mu-1/\nu}$$

(в последнем неравенстве мы учли, что $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant a \geqslant 1$). $\square$

Далее через $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ обозначаем сопряженный оператор. Как уже обсуждалось выше, он порожден сопряженным дифференциальным выражением

$$\ell_{P^*}(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P^*(x)\mathbf{y}, \qquad \text{где } P^*(x) = \begin{pmatrix} 0 & \overline{p_3}(x) \\ \overline{p_2}(x) & 0 \end{pmatrix},$$

и сопряженными краевыми условиями

$$\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} \overline{J_{23}} & \overline{J_{13}} & -\overline{J_{12}} & 0 \\ 0 & -\overline{J_{34}} & \overline{J_{24}} & \overline{J_{23}} \end{pmatrix}.$$

Для любого регулярного (сильно регулярного) оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^* = \mathcal{L}_{P^*,U^*}$ также является регулярным (сильно регулярным).

Собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ совпадают (с учетом кратности) с числами $\overline{\lambda}_n$, где λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Для всякого $\lambda \notin \{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ определена резольвента

$$\mathfrak{R}^*(\lambda) = (\mathcal{L}_{P^*,U^*} - \lambda I)^{-1},$$

которая имеет вид

$$\mathfrak{R}^*(\lambda)\mathbf{f} = \int\limits_0^\pi G^*(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt.$$

Матрица $G^*(t,x,\lambda) = (g^*_{jk}(t,x,\lambda))$ связана с функцией $G(t,x,\lambda) = (g_{jk}(t,x,\lambda))$, введенной в (10.1), соотношениями

$$g^*_{jk}(t,x,\lambda) = \overline{g_{kj}}(x,t,\overline{\lambda}), \qquad j,\,k = 1,\,2, \quad x,\,t \in [0,\pi],\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{10.14}$$

Для сокращения записи далее будем обозначать

$$U_\delta(\lambda_n) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\}, \qquad \Omega_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(\lambda_n),$$
$$\Omega_{\alpha,\delta} = \Pi_\alpha \cap \Omega_\delta, \qquad \Omega_{\alpha,\delta,R} = \{z \in \Omega_{\alpha,\delta} : |\operatorname{Re} z| > R\}.$$

Лемма 10.2. *Для любого $\delta > 0$ существует такое число $M = M(P,U,\delta)$, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_\delta}$, характеристический определитель регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ удовлетворяет оценке*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant Me^{\pi|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Доказательство. Согласно теореме 9.1 и утверждению 9.2, найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что все круги $U_\delta(\lambda_n)$ лежат в полосе Π_{α_0} и при $\lambda \to \infty$ вне Π_{α_0} справедливо равенство

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)} = 1 + o(1).$$

Увеличивая, если нужно, число α_0, можно считать, что

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{|\Delta_0(\lambda)|}{2}$$

для всех $\lambda \notin \Pi_{\alpha_0}$.

Тогда из неравенства (9.12) следует доказываемое неравенство при $\operatorname{Im}\lambda > \alpha_0$. Случай $\operatorname{Im}\lambda < -\alpha_0$ аналогичен.

Для завершения доказательства остается показать, что для всех точек $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha_0,\delta}}$ справедлива оценка

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant M$$

при некотором $M > 0$. Согласно теореме 9.1, найдется такое число R, что для всех собственных значений λ_n, $|\lambda_n| > R$, справедливы неравенства

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| < \frac{\delta}{2}.$$

В силу периодичности функции $\Delta_0(\lambda)$ существует такое $m > 0$, что

$$|\Delta_0(\lambda)| \geqslant m$$

в Π_{α_0} вне кругов $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$.

Поскольку

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + o(1)$$

при $\lambda \to \infty$ в полосе $\lambda \in \Pi_{\alpha_0}$ (см. утверждение 9.2), то, увеличивая, если необходимо, число R, можно считать, что при $|\operatorname{Re}\lambda| > R$ выполнена оценка

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$$

в Π_{α_0} вне кругов $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$.

Так как при $|\operatorname{Re}\lambda| > R$ круг $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$ содержится в круге $U_\delta(\lambda_n)$, то оценка

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$$

выполнена при всех $\lambda \in \overline{\Omega}_{\alpha_0,\delta,R}$.

Наконец, на компакте

$$\{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \alpha_0,\ |\operatorname{Re}\lambda| \leqslant R,\ |\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

функция $\Delta(\lambda)$ не обращается в нуль, а значит, отделена от нуля. □

Теорема 10.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — произвольный оператор Дирака с потенциалом вида* (3.8) *и регулярными краевыми условиями U. Для любого $\delta > 0$ существует такое число $M = M(P,U,\delta)$, что в $\overline{\Omega_\delta}$ функция $G(t,x,\lambda) = (g_{jk}(t,x,\lambda))$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ удовлетворяет оценке*

$$|g_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant M.$$

Кроме того, для любых положительных чисел α и δ найдется такое $R > 0$, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ и всех $t, x \in [0,\pi]$ выполнено

$$|g_{jk}(t,x,\lambda) - g_{jk}^0(t,x,\lambda)| < C\Upsilon_0(\lambda), \quad C = C(P,U),$$

где $G_0(t,x,\lambda) = (g_{jk}^0(t,x,\lambda))$ — функция Грина оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Доказательство. Матрицы $E(x,\lambda)$, $M(\lambda)$, C и $E^{-1}(t,\lambda)$ явно выписаны в (9.1), (9.8), (3.4) и (10.4) соответственно. Тогда из (10.3) непосредственными вычислениями получаем, что

$$G(t,x,\lambda) = i\left(\frac{J_{12}}{\Delta(\lambda)} - \chi_{t>x}(t,x)\right)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(t,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(t,x,\lambda)\end{pmatrix} + \\ + \frac{i}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\pi,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\pi,x,\lambda)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}J_{14} & J_{24}\\ J_{13} & J_{23}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_{22}(t,\lambda) & e_{12}(t,\lambda)\\ -e_{21}(t,\lambda) & -e_{11}(t,\lambda)\end{pmatrix}, \quad (10.15)$$

где $\chi_{t>x}$ — характеристическая функция треугольника $t > x$, а $\Delta(\lambda)$ — определитель, введенный в определении 9.1.

Пусть $\alpha_0 > 0$ таково, что полоса Π_{α_0} содержит все круги $U_\delta(\lambda_n)$. Пусть вначале

$$|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant \alpha_0.$$

Проведем оценку функции $G(t,x,\lambda)$ на треугольнике $0 \leqslant t < x \leqslant \pi$.

В силу представлений (10.6) функции $\mathcal{E}_{jk}(t,x,\lambda)$ удовлетворяют оценкам

$$|\mathcal{E}_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-t)}.$$

Аналогично,

$$|\mathcal{E}_{jk}(\pi,x,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda|(\pi-x)},$$

а

$$|e_{jk}(t,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda|t},$$

где M не зависит от t, x и λ. Применяя лемму 10.2, видим, что вне полосы Π_{α_0}

$$|g_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant M\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-t-\pi)} + e^{|\operatorname{Im}\lambda|(t-x)}\right) \leqslant 2M,$$

поскольку оба числа $x - t - \pi$ и $t - x$ неположительны.

Для оценки функции $G(t,x,\lambda)$ на треугольнике $0 \leqslant x < t \leqslant \pi$ воспользуемся соотношением (10.14), согласно которому

$$|g_{jk}(t,x,\lambda)| = |g_{kj}^*(x,t,\overline{\lambda})|.$$

Поскольку координаты точки x и t поменялись местами, а $\overline{\lambda}$ по-прежнему лежит вне полосы Π_{α_0}, то мы можем применить рассуждения, приведенные выше, к функциям g^*_{kj} и вне полосы Π_{α_0}. Оценка функции G получена.

Согласно асимптотическим представлениям (9.6) и (10.6), функции e_{jk} и $\mathcal{E}_{jk}$ ограничены в произвольной полосе Π_α. Отсюда и из леммы 10.2 следует ограниченность функции $G(t,x,\lambda)$ в $\overline{\Omega}_{\alpha_0,\delta}$.

Докажем второе утверждение теоремы. Зафиксируем числа α и δ. Из (9.5) следует, что

$$\|e_{jk}(x,\lambda)-e^0_{jk}(x,\lambda)\|_C \leqslant C\Upsilon_0(\lambda)$$

при достаточно больших по модулю $\lambda\in\Pi_\alpha$. Далее из (10.6) следует, что и

$$\|\mathcal{E}_{jk}(a,x,\lambda)-\mathcal{E}^0_{jk}(a,x,\lambda)\|_C \leqslant C\Upsilon_0(\lambda)$$

при достаточно больших по модулю $\lambda\in\Pi_\alpha$.

Согласно лемме 10.2, найдутся такие положительные числа R и M, что при всех $\lambda\in\overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ выполнены неравенства

$$|\Delta(\lambda)|\geqslant M \qquad \text{и} \qquad |\Delta_0(\lambda)|\geqslant M.$$

Тогда из утверждения 9.2 следует

$$|\Delta^{-1}(\lambda)-\Delta_0^{-1}(\lambda)|\leqslant C\Upsilon_0(\lambda) \quad \text{при} \quad \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}\ni\lambda\to\infty.$$

Подставляя эти асимптотические представления в равенство (10.15) (записанное для $G(t,x,\lambda)$ и $G_0(t,x,\lambda)$) и учитывая равномерную ограниченность функций $\Delta^{-1}(\lambda)$, $e^0_{jk}(x,\lambda)$ и $\mathcal{E}^0_{jk}(t,x,\lambda)$ на множестве $\lambda\in\overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$, x, $t\in[0,\pi]$, получаем необходимую оценку. □

Полученное в теореме 10.2 асимптотическое представление для функции Грина позволяет нам получить асимптотические формулы для спектральных проекторов в случае слабо регулярных краевых условий. В этом случае все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны (см. утверждение 4.1), а именно

$$\lambda^0_{2n}=\lambda^0_{2n+1}, \qquad n\in\mathbb{Z}.$$

Поскольку $\lambda_n=\lambda^0_n+o(1)$, то

$$|\lambda_{2n}-\lambda_{2n+1}|\to 0, \quad n\to\pm\infty.$$

Определение 10.2. Выберем число N_0 так, чтобы для всех n, $|n|\geqslant N_0$, было выполнено

$$|\lambda_{2n}-\lambda^0_{2n}|<\frac{1}{8} \quad \text{и} \quad |\lambda_{2n+1}-\lambda^0_{2n}|<\frac{1}{8}.$$

Обозначим

$$\mathcal{P}_n:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda^0_{2n}|=1/4}\mathfrak{R}(\lambda)d\lambda, \quad n=\pm N_0,\,\pm(N_0+1),\dots, \tag{10.16}$$

где $\mathfrak{R}(\lambda)=(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda I)^{-1}$.

Из представления (12.1) следует, что $\mathcal{P}_n$ является спектральным проектором на корневое подпространство, отвечающее собственным значениям λ_{2n} и λ_{2n+1}, которое мы обозначим $\mathcal{H}_n$. Определим также операторы

$$\mathcal{P}^0_n:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda-\lambda^0_{2n}|=1/4}\mathfrak{R}_0(\lambda)d\lambda, \quad n=\pm N_0,\,\pm(N_0+1),\dots$$

— спектральные проекторы на корневые подпространства оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\lambda^0_{2n}=\lambda^0_{2n+1}$.

Заметим, что оператор

$$\mathfrak{R}(\lambda):\mathbf{f}\mapsto\int\limits_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt$$

корректно определен при $\lambda\neq\lambda_n$ не только как оператор в пространстве $\mathbb{H}$, но и как оператор из $L_1[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$. То же справедливо и для операторов $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}^0_n$.

В следующей теореме мы оценим норму их разности именно как операторов из $L_1[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$.

Теорема 10.3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — слабо регулярный. Положим*
$$p_n = \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_1\to C}.$$
Если $P \in L_1[0,\pi]$, то $p_n \to 0$ при $|n| \to \infty$.
Если $P \in L_p[0,\pi]$, $p \in (1,2]$, то
$$\{p_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\|P\|_{L_p}.$$
Если $P \in B^\theta_{1,\infty}[0,\pi]$, $\theta \in (0,1)$, то
$$\{n^\theta p_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_\infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^\theta p_n \leqslant C\|P\|_{B^\theta_{1,\infty}},$$
причем это утверждение при $\theta = 1$ справедливо для потенциалов $P \in W_1^1[0,\pi]$.
Если $P \in B^\theta_{1,\infty,0}[0,\pi]$, $\theta \in (0,1)$, то
$$n^\theta p_n \to 0 \text{ при } |n| \to \infty \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} n^\theta p_n \leqslant C\|P\|_{B^\theta_{1,\infty,0}}.$$
Если $P \in B^\theta_{p,p'}[0,\pi]$, $p \in (1,2]$, $\theta \in (0,1/p)$, то
$$\{n^\theta p_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l_{p'},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \quad \text{и} \quad \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{p'\theta} p_n^{p'}\right)^{1/p'} \leqslant C\|P\|_{B^\theta_{p,p'}}.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $|n| \geqslant N_0$
$$p_n = \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_1\to C} \leqslant \frac{1}{4} \max_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} \max_{j,k\in\{1,2\}} \sup_{t,x\in[0,\pi]} |g_{jk}(t,x,\lambda) - g_{jk}^0(t,x,\lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant C \max_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} \Upsilon_0(\lambda) = C\Upsilon_0(\mu_n),$$
где точки μ_n лежат на окружностях $|\lambda - \lambda_{2n}^0| = 1/4$. Тогда последовательность $\{\mu_n\}$ не сгущается и утверждение теоремы следует из следствия 7.1 и теорем 7.3 и 7.4. $\square$

Мы завершим изучение свойств резольвенты оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ утверждением о непрерывной зависимости оператор-функции $\mathfrak{R}_{P,U}$ от потенциала P.

Утверждение 10.3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым потенциалом P общего вида. Пусть точка λ^0 лежит в резольвентном множестве этого оператора, а функции P_ε сходятся к P в пространстве $L_1[0,\pi]$ при $\varepsilon \to +0$.*

Тогда найдется число δ такое, что при всех $\varepsilon < \delta$ точка λ^0 лежит в резольвентном множестве оператора $\mathcal{L}_\varepsilon := \mathcal{L}_{P_\varepsilon,U}$ и
$$\|\mathfrak{R}(\lambda^0) - \mathfrak{R}_\varepsilon(\lambda^0)\|_{L_1\to C} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{10.17}$$

Доказательство. Пусть $E(x,\lambda)$ и $E_\varepsilon(x,\lambda)$ — фундаментальные матрицы решений для дифференциальных выражений ℓ_P и ℓ_{P_ε} с начальными условиями $E(0,\lambda) = E_\varepsilon(0,\lambda) = I$. Согласно замечанию 2.2,
$$\|E(\cdot,\lambda^0) - E_\varepsilon(\cdot,\lambda^0)\|_{AC} \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$
Отсюда, согласно (9.8), следует сходимость
$$\Delta(\lambda^0) - \Delta_\varepsilon(\lambda^0) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0, \tag{10.18}$$
т. е. точка λ^0 действительно лежит в резольвентном множестве оператора L_ε при достаточно малом ε. Далее, из записи (10.4) матрицы $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$ следует сходимость
$$\max_{a,\,x\in[0,\pi]} |\mathcal{E}_{jk}(a,x,\lambda^0) - \mathcal{E}_{jk,\varepsilon}(a,x,\lambda^0)| \to 0 \tag{10.19}$$
при $\varepsilon \to 0$.

Остается воспользоваться представлением 10.15 для функции Грина, согласно которому
$$\max_{t,x\in[0,\pi]} |g_{jk}(t,x,\lambda^0) - g_{jk,\varepsilon}(t,x,\lambda^0)| \to 0 \tag{10.20}$$

при $\varepsilon \to 0$. □

Замечание 10.1. Очевидно, что в утверждении 10.3 норму $\|\cdot\|_{L_1\to C}$ можно заменить на $\|\cdot\|_{L_p\to L_q}$ для любых $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. В частности, при $p = q = 2$ получаем утверждение о непрерывной зависимости оператора $\mathfrak{R}_{P,U}$ в пространстве $\mathbb{H}$ от потенциала $P \in L_1[0,\pi]$.

Замечание 10.2. Точку λ^0 в утверждении 10.3 можно заменить на произвольный компакт K, лежащий в резольвентном множестве оператора $\mathcal{L}_{P,U}$:

$$\sup_{\lambda\in K} \|\mathfrak{R}(\lambda) - \mathfrak{R}_\varepsilon(\lambda)\|_{L_1\to C} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Заметим, что оценка (2.10) гарантирует нам равномерную на компакте K сходимость

$$\|E(\cdot,\lambda) - E_\varepsilon(\cdot,\lambda)\|_{AC} \to 0.$$

Тогда равномерными по $\lambda \in K$ являются и сходимость (10.18), и (10.19).

Поскольку функция $\Delta(\lambda)$ непрерывна на K и не обращается в нуль, то

$$\Delta^{-1}(\lambda) - \Delta_\varepsilon^{-1}(\lambda) \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$ также равномерно на K. Теперь непосредственно из (10.15) выводим равномерную по $\lambda \in K$ сходимость в (10.20). □

Из утверждения 10.3 следует, что собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ непрерывно зависят от потенциала P, в норме пространства $L_1[0,\pi]$. Доказательство сразу получается с помощью стандартной техники с использованием проекторов Рисса.

Следствие 10.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым потенциалом P общего вида. Пусть точка λ^0 является простым собственным значением этого оператора, а функции P_ε сходятся к P в пространстве $L_1[0,\pi]$ при $\varepsilon \to +0$.*

Обозначим $U'_r(\lambda^0) = \{\lambda : 0 < |\lambda - \lambda^0| < r\}$ — проколотый круг с произвольным достаточно малым радиусом r, целиком лежащий в резольвентном множестве оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Тогда найдется число δ такое, что при всех $\varepsilon \in (0,\delta)$ в круге

$$U_r(\lambda^0) = \{\lambda : |\lambda - \lambda^0| < r\}$$

лежит ровно одно простое собственное значение λ_ε оператора $\mathcal{L}_\varepsilon := \mathcal{L}_{P_\varepsilon,U}$.

11. Резольвента оператора Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}_{q,U}$

Покажем вначале, что резольвента $\mathcal{R}(\mathbf{z}) = (\mathcal{L}_{q,U} - \mathbf{z}I)^{-1}$ оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ является компактным интегральным оператором в $L_2[0,\pi]$.

Утверждение 11.1. *Пусть функция $u \in L_2[0,\pi]$, а краевые условия U регулярны. Резольвента $\mathcal{R}(\mathbf{z}) = (\mathcal{L}_{q,U} - \mathbf{z}I)^{-1}$ оператора $\mathcal{L}_{q,U}$, $q = u'$, определена при всех $\mathbf{z} \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $\mathbf{z}_n$ — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{q,U}$, и является интегральным оператором в $L_2[0,\pi]$:*

$$\mathcal{R}(\mathbf{z})f = \int_0^\pi G(t,x,\lambda)f(t)dt, \qquad \mathbf{z} = \lambda^2. \tag{11.1}$$

Функция $G(t,x,\lambda)$ непрерывна на квадрате $([0,\pi])^2$.

Доказательство. Как и выше, заменой

$$y_1 = \frac{1}{2}(\lambda y - iy^{[1]}), \qquad y_2 = \frac{1}{2}(\lambda y + iy^{[1]})$$

перейдем к системе типа Дирака

$$B\mathbf{y}' + P(x,\lambda)\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f},$$

где

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad P(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -\dfrac{u^2(x)}{2\lambda} & iu(x) - \dfrac{u^2(x)}{2\lambda} \\ -iu(x) - \dfrac{u^2(x)}{2\lambda} & -\dfrac{u^2(x)}{2\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f \\ f \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Новые краевые условия обозначим через $V(z)$.

Пусть теперь точка $\mathbf{z} = \lambda^2 \neq 0$ лежит в резольвентном множестве оператора $\mathcal{L}_{q,U}$. Мы уже знаем, что тогда уравнение $-y'' + q(x)y = \mathbf{z}y + f$ имеет единственное решение, удовлетворяющее краевым условиям $U(y) = 0$ при любой правой части $f \in L_2[0,\pi]$.

Поскольку переход к системе, описанный выше, был эквивалентным преобразованием, то оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,V}(\lambda)$ обратим (для данного λ). Но тогда, согласно утверждению 10.1, решение резольвентного уравнения записывается в виде (10.1):

$$\mathbf{y}(x,\lambda) = \int_0^\pi \mathbf{G}(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t,\lambda)dt, \qquad \text{где} \quad \mathbf{G}(t,x,\lambda) = \begin{pmatrix} g_{11}(t,x,\lambda) & g_{12}(t,x,\lambda) \\ g_{21}(t,x,\lambda) & g_{22}(t,x,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Остается заметить, что

$$y(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda}(y_1(x,\lambda) + y_2(x,\lambda)) = \frac{1}{2\lambda}\int_0^\pi (g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22})(t,x,\lambda)f(t)\,dt. \tag{11.3}$$

□

Определение 11.1. Функция

$$G(t,x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda}(g_{11} + g_{12} + g_{21} + g_{22})(t,x,\lambda)$$

называется *функцией Грина* оператора $\mathcal{L}_{q,U}$.

Для сокращения записи далее будем обозначать

$$U_\delta(\mathbf{z}_n) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} : |\mathbf{z} - \mathbf{z}_n| < \delta\}, \qquad \Omega_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_\delta(\mathbf{z}_n),$$

$$\Omega_{\alpha,\delta} = P_\alpha \cap \Omega_\delta, \qquad \Omega_{\alpha,\delta,R} = \{\lambda \in \Omega_{\alpha,\delta} : |\operatorname{Re}\sqrt{\mathbf{z}}| > R\}.$$

Теорема 11.1. *Пусть $\mathcal{L}_{q,U}$ — произвольный оператор Штурма—Лиувилля с потенциалом $q = u'$, $u \in L_2[0,\pi]$, и регулярными краевыми условиями U.*

Для любых положительных чисел α и δ найдется такое $R > 0$, что при всех $\mathbf{z} \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ и всех $t,x \in [0,\pi]$ выполнено

$$|\mathbf{G}(t,x,\lambda) - \mathbf{G}^0(t,x,\lambda)| < C\Upsilon_0(\lambda), \quad C = C(u,U), \quad \mathbf{z} = \lambda^2.$$

Доказательство. Формула (11.3) позволяет выписать функцию Грина оператора Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}_{q,U}$ с помощью функции Грина соответствующего оператора Дирака.

Мы не можем напрямую воспользоваться результатом теоремы 10.2, поскольку этот оператор Дирака зависит от параметра λ. Однако эта зависимость является асимптотически слабой — имеет порядок $O(\lambda^{-1})$, что позволяет, пользуясь результатами раздела 6, перенести доказательство на данный случай.

Пройдем по ключевым моментам доказательства, опуская очевидные детали. Пусть матрица

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda) \\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

— решение матричного уравнения

$$\mathrm{B}E'(x,\lambda) + P(x,\lambda)E(x,\lambda) = \lambda E(x,\lambda)$$

с начальным условием $E(0,\lambda) = \mathrm{I}$. Здесь $P(x,\lambda)$ — матрица, определенная в (11.2).

Напомним, что

$$E^0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^0_{11}(x,\lambda) & e^0_{12}(x,\lambda) \\ e^0_{21}(x,\lambda) & e^0_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\lambda x} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}\lambda x} \end{pmatrix}.$$

Согласно следствию 6.1, в полосе Π_α найдется фундаментальная система решений

$$\mathrm{Y}(x,\lambda) = \mathrm{Y}^0(x,\lambda) + \mathcal{A}(x,\lambda),$$

причем

$$\max_{x\in[0,\pi]} |a_{jk}(x,\lambda)| \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1}), \qquad \text{если} \quad |\lambda| > \Lambda_0.$$

Как и для оператора Дирака, получаем, что в любой полосе Π_α при достаточно больших по модулю λ выполнено

$$\max_{x\in[0,\pi]} |e_{jk}(x,\lambda) - e^0_{jk}(x,\lambda)| \leqslant C(\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1}). \tag{11.4}$$

Разница со случаем оператора Дирака состоит лишь в том, что в правой части оценки появляется добавка $|\lambda|^{-1}$.

Матрицу $M(\lambda)$ определим формулой (9.8):

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} v_{11} + v_{13}e_{11}(\pi,\lambda) + v_{14}e_{21}(\pi,\lambda) & v_{12} + v_{13}e_{12}(\pi,\lambda) + v_{14}e_{22}(\pi,\lambda) \\ v_{21} + v_{23}e_{11}(\pi,\lambda) + v_{24}e_{21}(\pi,\lambda) & v_{22} + v_{23}e_{12}(\pi,\lambda) + v_{24}e_{22}(\pi,\lambda) \end{pmatrix},$$

где $V(z) = (v_{jk}(z))$ — новые краевые условия.

Характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ положим, как и в определении 9.1, равным $\det M(\lambda)$. Через J_{jk} обозначаем определители, составленные из j-го и k-го столбцов матрицы V (отличие в том, что эти определители теперь зависят от λ).

Остается воспользоваться представлением (10.15) и повторить доказательство второго утверждения теоремы 10.2. □

Полученное в теореме 10.2 асимптотическое представление для функции Грина позволяет нам получить асимптотические формулы для спектральных проекторов в случае слабо регулярных краевых условий.

В этом случае все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ асимптотически двукратны (см. теорему 8.2), а именно

$$\lambda^0_{2n} = \lambda^0_{2n+1} + o(1), \quad n \in \mathbb{N}$$

(напомним, что $\lambda = \sqrt{\mathrm{z}}$). Поскольку $\lambda_n = \lambda^0_n + o(1)$, то

$$|\lambda_{2n} - \lambda_{2n+1}| \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Определение 11.2. Выберем число N_0 так, чтобы для всех n, $n \geqslant N_0$, было выполнено

$$|\lambda_{2n} - \lambda^0_{2n}| < \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad |\lambda_{2n+1} - \lambda^0_{2n}| < \frac{1}{8}.$$

Обозначим

$$\mathcal{P}_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda^0_{2n}|=1/4} \mathcal{R}(\mathrm{z})d\mathrm{z}, \quad n = N_0,\, N_0+1, \ldots, \tag{11.5}$$

где $\mathcal{R}(\mathrm{z}) = (\mathcal{L}_{q,U} - \mathrm{z}I)^{-1}$.

Таким образом, $\mathcal{P}_n$ является спектральным проектором на корневое подпространство, отвечающее собственным значениям z_{2n} и z_{2n+1}, которое мы обозначим $\mathcal{H}_n$.

Определим также операторы

$$\mathcal{P}^0_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda^0_{2n}|=1/4} \mathcal{R}_0(\mathrm{z})d\mathrm{z}, \quad n = N_0,\, N_0+1, \ldots$$

— спектральные проекторы на корневые подпространства оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\mathrm{z}^0_{2n} = \mathrm{z}^0_{2n+1}$.

Теорема 11.2. *Пусть оператор $\mathcal{L}_{q,U}$ слабо регулярен. Положим*

$$p_n = \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}^0_n\|_{L_2}.$$

Если $u \in L_2[0,\pi]$, то

$$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2,$$

Если $u \in W_2^\theta[0,\pi]$, $\theta \in (0, 1/2)$, *то*

$$\{n^\theta p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $n \geqslant N_0$

$$p_n = \|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_2} \leqslant \frac{1}{4} \max_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} \sup_{t,x\in[0,\pi]} |G(t,x,\lambda) - G^0(t,x,\lambda)| \leqslant$$
$$\leqslant C \max_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} (\Upsilon_0(\lambda) + |\lambda|^{-1}) = C(\Upsilon_0(\mu_n) + |\mu_n|^{-1}),$$

где точки $\mu_n = O(n)$ лежат на окружностях $|\lambda - \lambda_{2n}^0| = 1/4$. Тогда последовательность $\{\mu_n\}$ не сгущается и утверждение теоремы следует из следствия 7.1 и теоремы 7.4. □

12. Полнота и базисность Рисса системы собственных и присоединенных векторов регулярных операторов $\mathcal{L}_{q,U}$ и $\mathcal{L}_{P,U}$

Нашей первой задачей в этом разделе будет доказательство полноты и минимальности системы собственных и присоединенных функций регулярного оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$. Мы проведем это доказательство классическим способом, причем ключевую роль будет играть оценка, полученная в теореме 10.2.

Напомним, что система $\{x_n\}$ векторов банахова пространства H называется *полной*, если ее линейная оболочка плотна в H. Система называется *минимальной*, если при удалении произвольного вектора x_k из системы свойство полноты теряется.

Определение 12.1. Система функций

$$\mathbf{y}^{j,1}, \quad \mathbf{y}^{j,2}, \quad \ldots, \quad \mathbf{y}^{j,m}$$

называется *цепочкой функций, присоединенных к собственной функции* $\mathbf{y}^j$ оператора $L = \mathcal{L}_{q,U}$ или $L = \mathcal{L}_{P,U}$ с собственным значением λ_0, если все они лежат в области определения соответствующего оператора и удовлетворяют системе уравнений

$$L\mathbf{y}^{j,q} = \lambda_0 \mathbf{y}^{j,q} + \mathbf{y}^{j,q-1}, \quad q = 1, \ldots, m$$

(здесь и далее $\mathbf{y}^{j,0} = \mathbf{y}^j$ — собственные функции).

Будем говорить, что собственная функция $\mathbf{y}^j$ *имеет кратность* m_0, если существует цепочка из присоединенных к ней функций длины $m_0 - 1$, но не существует такой цепочки длины m_0.

Пусть p — размерность собственного подпространства $\mathcal{H}_0$, отвечающего собственному значению λ_0. Обозначим через $\mathbf{y}^1 \in \mathcal{H}_0$ собственную функцию, имеющую максимальную кратность, через $\mathbf{y}^2 \in \mathcal{H}_0$ — собственную функцию максимальной кратности, линейно независимую с $\mathbf{y}^1$, и т. д. Пусть m_j — кратность собственной функции $\mathbf{y}^j$, а $\mathbf{y}^{j,k}$, $k = 1, \ldots, m_j - 1$ — соответствующие присоединенные функции. Система

$$\{\mathbf{y}^{j,k}\}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant j \leqslant p, \quad \text{а} \quad 0 \leqslant k \leqslant m_j - 1,$$

называется *канонической системой* собственных и присоединенных функций оператора L, отвечающей собственному значению λ_0.

Легко видеть, что любая каноническая система $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ образуют базис в собственном подпространстве, отвечающем собственному значению λ_0. Следуя работе [31], обозначим через $\mathbf{yz}$ оператор в пространстве $\mathbb{H}$, действующий по правилу $\mathbf{f} \mapsto \langle \mathbf{f}, \overline{\mathbf{z}} \rangle \mathbf{y}$. В той же работе доказан следующий факт.

Теорема 12.I. *Для любого собственного значения* λ_0 *регулярного оператора Штурма—Лиувилля* $L = \mathcal{L}_{q,U}$ *или Дирака* $L = \mathcal{L}_{P,U}$ *размерность* p *собственного подпространства не превосходит* 2.

Кратность нуля функции $\Delta(\lambda)$ *в точке* λ_0 *совпадает с суммой* $m_1 + m_2$ *(в случае* $p = 1$ *полагаем* $m_2 = 0$*). При этом функция Грина* $G(t,x,\lambda)$ *имеет полюс порядка* m_1 *в точке* λ_0.

Пусть $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ *— произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций оператора* L, *отвечающая собственному значению* λ_0. *Тогда найдется такая каноническая* *система $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$ собственных и присоединенных функций сопряженного оператора L^*, отвечающая собственному значению $\overline{\lambda_0}$, что главная часть ряда Лорана резольвенты $R(\lambda) = (L-\lambda I)^{-1}$ в точке λ_0 будет иметь вид*

$$\frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_1}} + \frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,1}} + \mathbf{y}^{1,1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_1-1}} + \dots + \frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,m_1-1}} + \dots + \mathbf{y}^{1,m_1-1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{\lambda-\lambda_0} + \\ + \frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_2}} + \frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,1}} + \mathbf{y}^{2,1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_2-1}} + \dots + \frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,m_2-1}} + \dots + \mathbf{y}^{2,m_2-1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{\lambda-\lambda_0}. \quad (12.1)$$

Определение 12.2. Для каждого собственного значения λ_0 регулярного оператора Штурма—Лиувилля $L = \mathcal{L}_{q,U}$ или Дирака $L = \mathcal{L}_{P,U}$ выберем произвольную каноническую систему $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ собственных и присоединенных функций с тем лишь условием, что собственные функции этой системы имеют единичную норму. В силу теоремы 12.I количество векторов в системе $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ совпадает с порядком нуля λ_0 функции $\Delta(\lambda)$.

Занумеруем векторы этой системы (в порядке $\mathbf{y}^1,\ \mathbf{y}^{1,1}, \dots, \mathbf{y}^{1,m_1-1},\ \mathbf{y}^2,\ \mathbf{y}^{2,1}, \dots, \mathbf{y}^{2,m_2-1}$) индексами $n \in \mathbb{Z}$ в соответствии с нумерацией собственных значений. *Системой собственных и присоединенных функций* $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ оператора L мы будем называть объединение всех канонических систем. Оператор

$$\mathcal{P}_{\lambda_0} = \mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,m_1-1}} + \dots + \mathbf{y}^{1,m_1-1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}} + \mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,m_2-1}} + \dots + \mathbf{y}^{2,m_2-1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}$$

называется *спектральным проектором на корневое подпространство*, отвечающее собственному значению λ_0.

Вернемся к оператору Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$.

Теорема 12.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (3.8)*, а краевые условия* (3.4) *регулярны. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (см. определение* 12.2) *полна и минимальна в пространстве* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Вначале докажем полноту системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Пусть функция $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$ ортогональна всем векторам этой системы. Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{g} \in \mathbb{H}$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) := \langle \mathfrak{R}^*(\lambda)\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle,$$

определенную в области $\mathbb{C} \setminus \{\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Согласно (12.1), эта функция имеет устранимые особенности в точках $\overline{\lambda_n}$, т. е. после доопределения в них является целой. В силу теоремы 10.2, для любого $\delta > 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(\overline{\lambda_n})$ справедлива оценка

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant M\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}},$$

где M не зависит от λ. Заметим, что для случая сильно регулярных краевых условий

$$\inf_{n\neq m} |\overline{\lambda_n^0} - \overline{\lambda_m^0}| = d > 0$$

(см. утверждение 4.1).

В слабо регулярном случае $\inf\limits_{|n-m|\geqslant 2} |\overline{\lambda_n^0} - \overline{\lambda_m^0}| = d > 0$. Выберем число δ равным $\dfrac{d}{4}$ — тогда круги $U_\delta(\overline{\lambda_n^0})$ либо не пересекаются, либо разбиваются на пары, не пересекающиеся между собой. Этим же свойством, очевидно, обладают и круги $U_\delta(\overline{\lambda_n})$ для всех n таких, что

$$|\overline{\lambda_n} - \overline{\lambda_n^0}| < \frac{d}{4}.$$

В силу теоремы 9.1 последнее неравенство выполнено при $|n| \geqslant N$ для некоторого N. Таким образом, вне некоторого круга $\{|z| \leqslant R\}$ множество точек λ, для которых неравенство

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant M\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}}$$

еще не доказано, представляет собой счетное объединение ограниченных непересекающихся областей. По принципу максимума, это неравенство будет справедливо в каждой из данных областей, значит, и всюду в области $\{|z| > R\}$, а следовательно, и во всей комплексной плоскости.

Из теоремы Лиувилля следует, что функция $\Phi(\lambda)$ является постоянной. Тогда функция

$$\Phi'(\lambda) = \langle (\mathfrak{R}^*(\lambda))'\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle (\mathfrak{R}^*(\lambda))^2\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle \equiv 0.$$

Поскольку функция $\mathbf{g}$ выбиралась произвольной, то $(\mathfrak{R}^*(\lambda))^2\mathbf{f} \equiv 0$, откуда $\mathbf{f} = 0$. Полнота системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ доказана.

Для доказательства минимальности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ достаточно доказать существование биортогональной системы. Мы построим ее на базе системы $\{\mathbf{z}_n\}$, полученной объединением всех канонических систем $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$, определенных в разложении (12.1) (т. е. системы собственных и присоединенных функций оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$).

Рассмотрим некоторое фиксированное собственное значение λ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ алгебраической кратности p и обозначим соответствующее корневое подпространство через $\mathcal{H}_\lambda$. Корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\overline{\lambda}$ оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ обозначим $\mathcal{H}^*_\lambda$.

Прежде всего заметим, что если

$$\mathcal{L}_{P,U}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}, \qquad (\mathcal{L}_{P,U})^*\,\mathbf{z} = \mu\mathbf{z}$$

и $\mu \neq \overline{\lambda}$, то $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$, т. е. $\mathcal{H}_\lambda \perp \mathcal{H}^*_\mu$ при $\lambda \neq \overline{\mu}$.

Таким образом, для построения биортогональной системы достаточно в каждом пространстве $\mathcal{H}^*_\lambda$ построить базис $\{\mathbf{w}^{j,k}\}$, биортогональный системе $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$. Нам не потребуется явное представление векторов $\mathbf{w}^{j,k}$, так что мы ограничимся доказательством существования такого базиса.

Представим этот базис в виде линейных комбинаций системы $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$, определенной в (12.1). Записав условия биортогональности, получим систему линейных уравнений с матрицей Грама

$$\bigl(\langle \mathbf{y}^{j,k}, \mathbf{z}^{l,m}\rangle\bigr).$$

Разрешимость системы равносильна невырожденности данной матрицы.

Если же матрица вырождена, то найдется ненулевой вектор $\sum c_{j,k}\mathbf{z}^{j,k}$, ортогональный всем функциям $\mathbf{y}^{j,k}$, а значит, и вообще всей системе собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это противоречит полноте данной системы. Минимальность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ доказана. $\square$

Определение 12.3. Объединение всех систем $\{\mathbf{w}^{j,k}\}$ будем называть *биортогональной системой* и обозначать $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. При этом нумерацию мы ведем так, что $\langle \mathbf{y}_n, \mathbf{w}_m\rangle = \delta_{nm}$.

Мы переходим к доказательству базисности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Мы докажем, что для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в $\mathbb{H}$.

Отметим, что этот факт не является простым. Так, например, он не следует из асимптотических формул (9.23). Мы проведем здесь доказательство, основываясь на теореме Бари—Боаса 18.II, причем основную роль будут играть представление (9.24) и лемма 12.1, приведенная ниже. Определение пространств Харди см. в приложении B.

Лемма 12.1. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P(\cdot) \in L_1[0,\pi]$ и регулярными краевыми условиями U. Тогда для всех $f \in L_2[0,\pi]$ справедлива оценка*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}\,dx \right|^2 \leqslant C\|f\|^2_{L_2}, \quad \text{где} \ \ C = C(P,U).$$

Доказательство. Напомним, что все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ лежат в полосе Π_α для некоторого $\alpha = \alpha(P,U) > 0$. Рассмотрим целую функцию

$$F(z) = \int_0^\pi f(x)e^{(iz+\alpha+1)x}\,dx.$$

Из теоремы Пэли—Винера следует, что функция F принадлежит пространству Харди $H^2(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости, причем $\|F\|_{H^2} \leqslant C\|f\|_{L_2}$.

Положим $z_n = \lambda_n + i\alpha + i$ и заметим, что
$$F(z_n) = \int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}\,dx.$$
Пусть теперь $\mu(Q_{a,h})$ — количество точек z_n (с учетом кратности), лежащих внутри квадрата
$$Q_{a,h} = \{z : \operatorname{Re} z \in (a, a+h),\ \operatorname{Im} z \in (0, h)\}.$$
Легко видеть, что $\mu(Q_{a,h}) = 0$ при $h < 1$. Поскольку
$$\lambda_n = n + \varkappa_n + o(1),$$
где $\varkappa_n$ зависят только от четности номера n, то функция
$$s(h) = \sup_{a\in\mathbb{R}} \mu(Q_{a,h})$$
конечна для любого h и $s(h) \sim h$ при $h \to \infty$.

Тогда найдется число $\gamma > 0$ такое, что $s(h) \leqslant \gamma h$ при всех $h > 0$. Применив теорему 17.VI с мерой $\sigma = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{z_n}$, получим оценку
$$\|\{F(z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l_2} \leqslant C(\gamma)\|F\|_{H^2},$$
что и влечет утверждение леммы. □

Напомним, что все собственные векторы системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ нормированы. Поскольку все собственные значения сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ просты, начиная с некоторого номера N, то при всех $|n| > N$: $\|\mathbf{y}_n\| = 1$.

Спектр оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадает с множеством $\{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с совпадением кратностей, а значит, при $|n| > N$ все векторы $\mathbf{w}_n$ биортогональной системы также являются собственными для оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$. Однако, в отличие от $\mathbf{y}_n$, они уже могут иметь неединичную норму.

Лемма 12.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — произвольный сильно регулярный оператор Дирака, а $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система, биортогональная к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$* (*см. определение* 12.3). *Тогда последовательность $\{\|\mathbf{w}_n\|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{\mathbf{w}}_n = \dfrac{\mathbf{w}_n}{\|\mathbf{w}_n\|}$ и заметим, что
$$1 = \langle \mathbf{y}_n, \mathbf{w}_n\rangle = \|\mathbf{w}_n\|\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle,$$
а значит, $\langle \mathbf{y}_n, \mathbf{w}_n\rangle \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, неравенство $\|\mathbf{w}_n\| < C$ равносильно неравенству
$$\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle > \frac{1}{C}.$$
Пусть $\mathbf{y}_n^0$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, а $\mathbf{w}_n^0$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U^*}$. Используя (4.4), получим
$$\mathbf{y}_n^0 = \big(\omega_{1,j}\, e^{i\lambda_n^0 x},\, \omega_{2,j}\, e^{-i\lambda_n^0 x}\big)^t, \qquad \mathbf{w}_n^0 = \big(\omega_{1,j}^*\, e^{i\overline{\lambda_n^0}x},\, \omega_{2,j}^*\, e^{-i\overline{\lambda_n^0}x}\big)^t,$$
где $j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n. Тогда
$$\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle = \pi(\omega_{1,j}\overline{\omega_{1,j}^*} + \omega_{2,j}\overline{\omega_{2,j}^*}),$$
т. е. скалярные произведения $\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle$ зависят только от четности индекса n.

Поскольку по определению $\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle \neq 0$, то
$$|\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle| \geqslant C > 0$$
при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Все векторы $\mathbf{y}_n$ и $\mathbf{w}_n$ при достаточно больших $|n|$ являются собственными. Из теоремы 9.4 имеем
$$\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle = \langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle + o(1),$$
т. е. числа $|\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle|$ отделены от нуля при достаточно больших (а значит, и при всех) n. □

Нам потребуется еще одно несложное утверждение. Оно, однако, является ключевым для доказательства теоремы 12.2.

Лемма 12.3. *Пусть система* $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *является бесселевой в пространстве* $L_2[a,b]$, *а* $\{\tau_n(x)\}_1^\infty$ — *абсолютно непрерывные на* $[a,b]$ *функции, причем*

$$|\tau_n(a)| \leqslant T, \qquad |\tau_n'(x)| \leqslant \tau(x) \in L_1[a,b], \quad n = 1, 2, \dots, \tag{12.2}$$

где число T *и функция* τ *не зависят от* n. *Тогда система* $\{\varphi_n(x)\tau_n(x)\}_1^\infty$ *также является бесселевой в пространстве* $L_2[a,b]$.

Доказательство. Поскольку

$$\varphi_n(x)\tau_n(x) = \varphi_n(x)\tau_n(a) + \varphi_n(x)(\tau_n(x) - \tau_n(a)),$$

а из оценки $|\tau_n(a)| \leqslant T$ следует бесселевость системы $\{\varphi_n(x)\tau_n(a)\}$, то далее, заменив $\tau_n(x)$ на $\tau_n(x) - \tau_n(a)$, можно считать, что $\tau_n(a) = 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^N |(f, \varphi_n\tau_n)|^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^N \left| \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x) \int_a^x \overline{\tau}_n'(\xi)\,d\xi\,dx \cdot \int_a^b \overline{f}(y)\varphi_n(y) \int_a^y \tau_n'(\zeta)\,d\zeta\,dy \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^N \left| \int_a^b \int_a^b \overline{\tau}_n'(\xi)\tau_n'(\zeta) \left(\int_\xi^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\,dx \int_\zeta^b \overline{f}(y)\varphi_n(y)\,dy \right) d\xi\,d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta) \sum_{n=1}^N \left|(f\chi_{[\xi,b]}, \varphi_n)\right| \left|(\varphi_n, f\chi_{[\zeta,b]})\right|\,d\xi\,d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c^2 \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta) \cdot \|f\chi_{[\xi,b]}\| \cdot \|f\chi_{[\zeta,b]}\|\,d\xi\,d\zeta \leqslant c^2 \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta)\,d\xi\,d\zeta \cdot \|f\|^2.$$

Устремив $N \to \infty$, получаем утверждение леммы. $\square$

Теорема 12.2. *Для любого сильно регулярного оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$ *с потенциалом* $P \in L_1[0,\pi]$ *вида* (3.8) *система* $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *собственных и присоединенных функций, введенная в определении* 12.2, *образует базис Рисса в пространстве* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 18.II. Полнота и минимальность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ уже доказаны в теореме 12.1, так что остается проверить бесселевость систем $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Вначале мы докажем бесселевость системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Поскольку краевые условия сильно регулярны, то все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ просты при $|n| > N$ для некоторого N. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$ состоит только из нормированных собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, и мы можем воспользоваться асимптотическим представлением (9.24)

$$y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x), \qquad y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x).$$

Тогда из леммы 12.1 и леммы 12.3 следует бесселевость систем $\{y_{1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{y_{2,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$, что и означает бесселевость системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{H}$.

Перейдем к биортогональной системе $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Поскольку функции $\mathbf{w}_n$ при $|n| > N$ являются собственными функциями сопряженного оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, то к системе $\{\mathbf{w}_n/\|\mathbf{w}_n\|\}_{|n|>N}$ применимы те же рассуждения, что и к системе $\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$.

Для завершения доказательства достаточно вспомнить (лемма 12.2), что $\|\mathbf{w}_n\| < C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ для некоторой константы C. $\square$

Следствие 12.1. *Для любого сильно регулярного оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$ *с потенциалом* $P \in L_1[0,\pi]$ *общего вида система* $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *собственных и присоединенных функций, введенная в определении* 12.2, *образует базис Рисса в пространстве* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Воспользуемся утверждением 3.3, согласно которому найдется оператор $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}}$ с внедиагональным потенциалом и сильно регулярными краевыми условиями, подобный оператору $\mathcal{L}_{P,U}$. Остается заметить, что при переходе к подобному оператору свойство базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций сохраняется. □

В случае слабо регулярных краевых условий система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ уже не обязана образовывать базис Рисса (см., например, [10,114]). Можно, однако, показать, что в этом случае всегда имеется базисность Рисса из подпространств, причем все подпространства двумерны. Мы докажем этот факт, следуя классическим работам [30, 45] и опираясь на теоремы фон Неймана и Карлесона. Определение базиса Рисса из подпространств см. в приложении C.

Начнем с доказательства следующего полезного утверждения.

Лемма 12.4. *Любой* (*не обязательно сильно*) *регулярный оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом вида* (3.8) *представим в виде суммы*

$$\mathcal{L}_{P,U} = A + V,$$

ограниченного в $\mathbb{H}$ оператора V и неограниченного замкнутого оператора A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A) \subset \mathbb{H}$ и компактной резольвентой.

При этом спектр $\sigma(A)$ расположен в некоторой полосе Π_α и состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Нумерацию этих собственных значений (*с учетом их алгебраической кратности*) *можно провести так, чтобы выполнялись асимптотические равенства*

$$\lambda_n = n + \varkappa_j + o(1) \qquad \text{при} \qquad |n| \to \infty,$$

где $j = 0$, если n четно и $j = 1$, если n нечетно, причем геометрическая и алгебраическая кратности каждого собственного значения совпадают, т. е. оператор A не имеет присоединенных функций. Система нормированных собственных функций оператора A образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{P,U} + V_0$, где $V_0 : (y_1, y_2) \mapsto (\mathrm{k}y_1, -\mathrm{k}y_2)$.

Если краевые условия, задаваемые матрицей $\mathcal{U} = (C,\, D)$, сильно регулярны, то положим $\mathrm{k} = 0$. В противном случае подберем k следующим образом. Поскольку $\mathcal{L}_{P,U} + V_0$ есть оператор Дирака вида (3.1) с потенциалом

$$\begin{pmatrix} \mathrm{k} & p_2(x) \\ p_3(x) & -\mathrm{k} \end{pmatrix},$$

то к нему применимо утверждение 3.3. Из (3.5) следует, что $\gamma = 0$, $\widetilde{p}_2 = p_2$, $\widetilde{p}_3 = p_3$, т. е.

$$\mathcal{L}_{P,U} + V_0 = W\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}W^{-1}.$$

При этом краевые условия $\widetilde{U}$ задаются матрицей $\widetilde{\mathcal{U}} = (C,\, e^{i\pi\mathrm{k}}D)$. По определению 3.2, краевые условия $\widetilde{U}$ сильно регулярны, если

$$(J_{12} + e^{2i\pi\mathrm{k}}J_{34})^2 + 4e^{2i\pi\mathrm{k}}J_{14}J_{23} \neq 0.$$

Таким образом, достаточно выбрать k так, чтобы точка $\mu = e^{2i\pi\mathrm{k}}$ не являлась нулем функции

$$\mu^2 J_{34}^2 + 2\mu(J_{12}J_{34} + 2J_{14}J_{23}) + J_{12}^2,$$

что возможно, поскольку эта функция не равна нулю тождественно (это следует из регулярности краевых условий U). Итак, мы представили оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ в виде

$$\mathcal{L}_{P,U} = W\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}W^{-1} - V_0,$$

где краевые условия $\widetilde{U}$ сильно регулярны. Тогда лишь конечное число собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ могут иметь алгебраическую кратность, большую единицы.

Пусть λ_0 — одно из таких собственных значений, $\mathcal{H}_0$ — соответствующее корневое подпространство, $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ — произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций в $\mathcal{H}_0$, построенная в определении 12.2, а $\mathcal{P}_0$ — спектральный проектор на $\mathcal{H}_0$ (см. определение 12.2). Определим оператор K_0 на подпространстве $\mathcal{H}_0$ равенствами

$$K_0\mathbf{y}^{j,0} = 0, \qquad K_0\mathbf{y}^{j,k} = -\mathbf{y}^{j,k-1}$$

для всех $k \neq 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K_0\mathcal{P}_0$ диагонален на подпространстве $\mathcal{H}_0$.

Пусть оператор K равен сумме операторов $K_0\mathcal{P}_0$ по всем корневым подпространствам, отвечающим кратным собственным значениям оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ (число слагаемых в этой сумме конечно, так что оператор K ограничен). Операторы $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K$ и $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ имеют одинаковый спектр и одинаковую систему собственных и присоединенных функций, причем все эти функции являются для оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K$ собственными. Остается положить

$$A := W(\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K)W^{-1} \quad \text{и} \quad V := -WKW^{-1} - V_0.$$

□

Приступим к доказательству базисности Рисса из подпространств. Нам потребуется теорема фон Неймана (см. [54, гл. XI]).

Теорема 12.II (Дж. фон Нейман). *Пусть T — произвольное сжатие в гильбертовом пространстве, т. е. $\|T\| \leqslant 1$, а функция f голоморфна в круге $|z| < r$, $r > 1$, и ограничена в круге $|z| \leqslant 1$ константой μ. Тогда $\|f(T)\| \leqslant \mu$.*

Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ слабо регулярен. Пусть $\mathcal{H}_n = \operatorname{Rn}\mathcal{P}_n$, $|n| \geqslant N_0$, — корневые подпространства этого оператора, введенные в определении 10.2.

Определим дополнительно подпространство $\mathcal{H}_0 = \operatorname{Rn}\mathcal{S}_{N_0}$, где

$$\mathcal{S}_{N_0} := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \mathfrak{R}(\lambda)\, d\lambda,$$

а замкнутый кусочно-гладкий жорданов контур γ охватывает все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с номерами $n : |n| < 2N_0$, и только их.

Теорема 12.3. *Система $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$ образует базис Рисса из подпространств в пространстве $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Применим теорему 18.III. Из теоремы 12.1 следует, что замыкание линейной оболочки системы $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{H}$, так что остается доказать выполнение свойства (18.1).

Пользуясь леммой 12.4, представим оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A + V$. Поскольку система собственных функций оператора A образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, то найдется такое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, топологически эквивалентное исходному (т. е. $c_1\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\| \leqslant c_2\|\cdot\|_1$ для некоторых c_1 и c_2), относительно которого эта система является ортонормированным базисом (см. 18.I).

В силу оценки на нормы, свойство базисности системы подпространств $\{\mathcal{H}_n\}$ не изменится при переходе к новому скалярному произведению. В новом скалярном произведении оператор A диагонален в ортонормированном базисе из своих собственных векторов, т. е. нормален. Тогда числовой образ

$$\{\langle A\mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle_1 : \ \|\mathbf{f}\|_1 = 1\}$$

оператора A равен замыканию выпуклой оболочки спектра $\sigma(A)$, а значит, лежит в некоторой горизонтальной полосе. Следовательно, числовой образ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (относительно нового скалярного произведения) также лежит в некоторой полосе Π_α.

Поскольку сдвиг не меняет свойств базисности, то далее можно работать с оператором $B = \mathcal{L}_{P,U} + i(\alpha+1)$, числовой образ и спектр которого лежат в полосе $1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h$, где $h = \alpha + 1$.

Точки $\{\lambda_n + i(\alpha+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ спектра оператора B удовлетворяют условиям утверждения 17.3. Пусть числа N и μ определены в формулировке этого утверждения (они зависят только от оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и, по построению, $N \geqslant N_0$), а

$$\nu := \|\mathcal{S}_{N_0}\|_1 + \sum_{|n|=N_0}^{N-1} \|\mathcal{P}_n\|_1.$$

Пусть $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N\}$ — произвольное конечное подмножество, K — произвольный номер такой, что $K > \max\{|n| : n \in J\}$, а f_K — рациональная функция, построенная в утверждении.

Из общей теории функционального исчисления операторов (см., например, [54, гл. IX, § 151]) и представления (12.1) следует, что
$$f_K(B) = \sum_{n\in J} \mathcal{P}_n.$$
Пусть $T := (B-i)(B+i)^{-1}$ — преобразование Кэли оператора B. Легко видеть, что
$$\forall x \in \mathfrak{D}(B): \ \|(B+i)x\|_1^2 - \|(B-i)x\|_1^2 = 4\,\mathrm{Im}(Bx,x)_1 > 0,$$
откуда
$$\|(B-i)(B+i)^{-1}x\|_1 \leqslant \|x\|_1.$$
Так как подпространство $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})$ плотно в $\mathbb{H}$, то оператор T продолжается на все пространство и $\|T\|_1 \leqslant 1$.

Обозначим
$$g_K(z) = f_K\left(\frac{iz+i}{1-z}\right).$$
Тогда, согласно теореме 12.II, $\|g_K(T)\|_1 \leqslant \mu$. Далее, $\forall x \in H_n$, $|n| > N$, выполнено
$$g_K(T)x = f_K(B)x \quad \text{при} \quad K \geqslant n.$$
Переходя к пределу при $K \to \infty$, получим, что
$$\|\sum_{n\in J} \mathcal{P}_n\|_1 \leqslant \mu\|x\|_1$$
на подпространстве $\overline{\bigcup\limits_{|n|\geqslant N} H_n}$.

Тогда для произвольного $x \in \mathbb{H}$:
$$\left\|\sum_{n\in J} \mathcal{P}_n x\right\|_1 = \left\|\sum_{n\in J} \mathcal{P}_n\left(x - \left(\sum_{|k|=N_0}^{N-1} \mathcal{P}_k + \mathcal{S}_{N_0}\right)x\right)\right\|_1 \leqslant \mu(1+\nu)\|x\|_1.$$
Если теперь $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N_0\} \cup \{0\}$ — конечное подмножество, то нормы $\|\sum\limits_{n\in J} \mathcal{P}_n\|_1$ ограничены числом $\mu + \nu + \mu\nu$, не зависящим от J. □

Перейдем к оператору Штурма—Лиувилля $\mathcal{L}_{q,U}$.

Теорема 12.4. *Система $\{y_n\}_1^\infty$ собственных и присоединенных функций любого регулярного оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ полна в пространстве $L_2[0,\pi]$.*

Доказательство. Пусть функция $f \in L_2[0,\pi]$ ортогональна всем векторам системы $\{y_n\}_1^\infty$. Зафиксируем произвольный вектор $g \in L_2[0,\pi]$ и рассмотрим функцию
$$\Phi(\mathrm{z}) := \langle \mathcal{R}^*(\sqrt{\mathrm{z}})f, g\rangle,$$
определенную в области $\mathbb{C} \setminus \{\overline{\mathrm{z}_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Эта функция имеет устранимые особенности в точках $\overline{\mathrm{z}_n}$, т. е. после доопределения в них является целой. В силу теоремы 11.1, для любого $\delta > 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_\delta(\overline{\mathrm{z}_n})$ справедлива оценка
$$|\Phi(\mathrm{z})| \leqslant M\|f\|_{L_2}\|g\|_{L_2},$$
где M не зависит от z.

Выберем число δ так, чтобы круги $U_\delta(\overline{\mathrm{z}_n^{00}})$ либо не пересекались, либо разбивались на пары, не пересекающиеся между собой (в слабо регулярном случае). Этим же свойством будут обладать и круги $U_\delta(\overline{\mathrm{z}_n})$ для всех достаточно больших n. Таким образом, вне некоторого круга $\{|z| \leqslant R\}$ множество точек z, для которых неравенство
$$|\Phi(\mathrm{z})| \leqslant M\|f\|_{L_2}\|g\|_{L_2}$$
еще не доказано, представляет собой счетное объединение ограниченных непересекающихся областей. По принципу максимума это неравенство будет справедливо в каждой из данных областей, значит, и всюду в области $\{|z| > R\}$, а следовательно, и во всей комплексной плоскости.

Из теоремы Лиувилля следует, что функция $\Phi(\mathbf{z})$ является постоянной. Тогда

$$\Phi'(\mathbf{z}) = \langle(\mathcal{R}^*(\mathbf{z}))'f, g\rangle = \langle(\mathcal{R}^*(\mathbf{z}))^2 f, g\rangle \equiv 0.$$

Поскольку функция g выбиралась произвольной, то $(\mathcal{R}^*(\mathbf{z}))^2 f \equiv 0$, откуда $f = 0$. Полнота системы $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ доказана. □

Докажем теперь теорему о базисности Рисса собственных и присоединенных функций.

Теорема 12.5. *Пусть $q(x) \in W_2^{-1}$, а оператор $\mathcal{L}_{q,U}$ определен согласно теореме* 8.2. *Если соответствующие краевые условия U сильно регулярны, то система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$.*

Доказательство. В теореме 5.2 мы уже доказали, что система собственных и присоединенных функций (число присоединенных функций конечно) $\{y_n^0(x)\}_{n=1}^\infty$ оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ образует базис Рисса в $L_2[0,\pi]$. Согласно теореме 8.4, собственные функции $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ образуют асимптотически квадратично близкую систему, т. е.

$$\sum_{n=1}^\infty \|y_n(x) - y_n^0(x)\|^2 < \infty.$$

В силу теоремы Бари (см. [19, гл. 6]) система $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ также образует базис Рисса в пространстве $L_2[0,\pi]$. □

В определении 11.2 мы ввели подпространства $\mathcal{H}_n$ только при достаточно больших $n \geqslant N_0$. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ подпространство, порожденное собственными и присоединенными функциями y_n оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ при $n < N_0$.

Теорема 12.6. *Пусть $q \in W_2^{-1}[0,\pi]$, а оператор $\mathcal{L}_{q,U}$ определен согласно теореме* 8.2 *и регулярен. Тогда система подпространств $\{\mathcal{H}_0,\ \mathcal{H}_n\}_{n=N_0}^\infty$ образует базис Рисса в $L_2[0,\pi]$.*

Доказательство. Известно (см. [90]), что в любом регулярном случае система собственных функций $\{y_n^0\}_{n=1}^\infty$ оператора $\mathcal{L}_{q,U}$ есть базис Рисса из подпространств, причем в подпространства нужно объединять не более двух функций.

В теореме 11.2 мы доказали квадратичную близость системы проекторов $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_n^0$. Теперь базисность Рисса из подпространств следует из [19, гл. VI, теорема 5.2].

Доказательство полноты и минимальности системы $\{\mathcal{H}_0,\ \mathcal{H}_n\}_{n=N_0}^\infty$ проводится так же, как в доказательстве теоремы 12.5. □

13. Равномерность базисности Рисса для оператора $\mathcal{L}_{P,U}$

Нам уже известно, что для каждого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с внедиагональным потенциалом P система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса, т. е. существует ограниченный и обратимый оператор T, переводящий векторы ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в векторы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, а константа Рисса $\varkappa$ (см. определение 18.2) конечна. Можно ли выбрать число $\varkappa$ единым для данного семейства потенциалов?

Ниже будет показано, в каких случаях на этот вопрос можно дать положительный ответ. Вначале мы изучим случай, когда P пробегает некоторый компакт $\mathcal{X}$ в пространстве $L_1[0,\pi]$. К этому случаю, например, относятся такие семейства потенциалов, как замкнутый шар пространства Бесова $B_{s,r}^\theta[0,\pi]$ при любых $\theta > 0$, s, $r \in [1,\infty]$.

Утверждение 13.1. *Пусть $P \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — произвольный компакт в $L_1[0,\pi]$, матрица P имеет вид* (3.8)*, а краевые условия U фиксированы и регулярны. Тогда в теореме* 10.1 *константы α и C в оценке* (10.7) *можно выбрать едиными на $\mathcal{X}$, т. е. $\alpha = \alpha(\mathcal{X}, U, p, q)$, $C = C(\mathcal{X}, U, p, q)$.*

Доказательство. Анализируя доказательство теоремы 10.1, видим, что числа α и C полностью определяются величинами $C(U,p,q)$, $\varepsilon(U,p,q)$ и $C_\varepsilon = C_\varepsilon(P,U,p,q)$, так что зависимость от потенциала заключена только в величине C_ε.

Пусть P_0 — некоторый фиксированный потенциал, а V_ε приближает его с точностью до $\varepsilon/2$, т. е.

$$\|P_0 - V_\varepsilon\|_{L_1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда V_ε приближает любой потенциал из шара $\|P - P_0\| < \varepsilon/4$ с точностью ε. Это означает, что числа α и C в оценке (10.7) можно выбрать едиными на данном шаре.

Остается покрыть компакт $\mathcal{X}$ конечным числом таких шаров и выбрать α и C максимальными по конечному набору. □

Для краткости обозначим

$$\Pi_{\alpha,\beta} = \{\lambda : \,|\operatorname{Im}\lambda| < \alpha,\ |\operatorname{Re}\lambda| > \beta\}.$$

Начнем со следующей леммы.

Лемма 13.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (3.8) *и принадлежит некоторому компакту $\mathcal{X} \subset L_1[0,\pi]$. Для любых $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется число $\beta = \beta(\mathcal{X}, \alpha, \varepsilon)$ такое, что неравенство*

$$\Upsilon_0(P;\lambda) \leqslant \varepsilon$$

выполнено для всех $\lambda \in \Pi_{\alpha,\beta}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный потенциал $P \in \mathcal{X}$. Согласно лемме 6.1,

$$\Upsilon_0(\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad \Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty.$$

Найдем такое число β_P, что $\Upsilon_0(P,\lambda) < \varepsilon/2$ при всех $\lambda \in \Pi_{\alpha,\beta_P}$. Поскольку

$$|\Upsilon_0(P_1,\lambda) - \Upsilon_0(P_2,\lambda)| \leqslant 4\|P_1 - P_2\|_{L_1},$$

неравенство $\Upsilon_0(\lambda) < \varepsilon$ сохранится для всех потенциалов из шара $B_{L_1}(P, \varepsilon/8)$. Остается покрыть компакт $\mathcal{X}$ конечным числом таких шаров и положить $\beta = \max \beta_P$, где максимум берется по всем центрам этих шаров. □

Утверждение 13.2. *Пусть $P \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — произвольный компакт в $L_1[0,\pi]$, матрица P имеет вид* (3.8)*, а краевые условия U фиксированы и регулярны.*

Тогда для каждого оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\mathcal{X}, U, \varepsilon)$ такой, что при всех n, $|n| \geqslant N$, выполнено

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| < \varepsilon,$$

где $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — собственные значения операторов $\mathcal{L}_{P,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U}$ соответственно.

Доказательство. Из утверждения 13.1 мы уже знаем, что все собственные значения любого из операторов $\mathcal{L}_{P,U}$, $P \in \mathcal{X}$ лежат в полосе Π_α, где $\alpha = \alpha(\mathcal{X}, U)$.

Согласно теореме 9.1 для каждого оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ выполнено

$$\lambda_n - \lambda_n^0 \to 0 \quad \text{при} \quad |n| \to \infty.$$

Очевидно, что доказательство достаточно проводить лишь для малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Мы выберем число $\varepsilon_0 \leqslant 1$ так, чтобы круги

$$U_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \leqslant \varepsilon_0\}$$

не пересекались (для слабо регулярных краевых условий $U_{2n} = U_{2n+1}$ не пересекались с $U_{2m} = U_{2m+1}$ при $n \neq m$) и лежали в полосе Π_α.

Итак, зафиксируем число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и положим

$$m_n = \min_{|\lambda - \lambda_n^0| = \varepsilon} |\Delta_0(\lambda)|.$$

В силу периодичности функции $\Delta_0(\lambda)$ имеем $\min\limits_{n\in\mathbb{Z}} m_n = \mu > 0$, причем $\mu = \mu(U, \varepsilon)$. Из утверждения 9.2 аналогично следствию 8.1 получаем, что найдется число $k_0 = k_0(\alpha, \|P\|_{L_1})$ такое, что для всех точек области

$$\lambda \in \Pi_{0,\alpha} = \{\lambda : \,|\operatorname{Im}\lambda| < \alpha,\ \Upsilon_0(\lambda) < k_0\},$$

справедлива оценка

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leqslant M\Upsilon_0(\lambda), \tag{13.1}$$

где $M = M(\alpha, \|P\|_{L_1})$. Таким образом, для всех индексов n, для которых оба неравенства

$$\Upsilon_0(\lambda) < k_0, \qquad \Upsilon_0(\lambda) < \mu/M$$

выполнены всюду на ∂U_n, из теоремы Руше имеем $|\lambda_n - \lambda_n^0| < \varepsilon$.

Положим число h минимумом правых частей этих неравенств. Тогда

$$h = h(\alpha, \|P\|_{L_1}, \mu, M) = h(\mathcal{X}, U, \|P\|_{L_1}, \varepsilon) = h(\mathcal{X}, U, \varepsilon).$$

Пользуясь леммой 13.1, найдем такое число $\beta = \beta(\mathcal{X}, \alpha, h) = \beta(\mathcal{X}, U, \varepsilon)$, что $\Upsilon(\lambda) < h$ в $\Pi_{\alpha,\beta}$. Остается вспомнить, что

$$n - 2 \leqslant \operatorname{Re} \lambda_n^0 \leqslant n + 1,$$

т. е. круги U_n содержатся в $\Pi_{\alpha,\beta}$ при всех $|n| \geqslant [\beta] + 3$. Теперь $N = N(\mathcal{X}, U, \varepsilon) = [\beta] + 3$. □

Утверждение 13.3. *Пусть $P \in \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — произвольный компакт в $L_1[0, \pi]$, матрица P имеет вид* (3.8)*, а краевые условия U фиксированы и регулярны.*

Тогда для каждого оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\mathcal{X}, U, \varepsilon)$ такой, что при всех n, $|n| \geqslant N$, выполнено

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^0\|_C < \varepsilon,$$

где $\mathbf{y}_n$ и $\mathbf{y}_n^0$ — нормированные собственные функции операторов $\mathcal{L}_{P,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям λ_n и λ_n^0 соответственно.

Более того, справедливо представление (9.24) *с оценками*

$$|\tau_{j,n}(0)| + \max_{x\in[0,\pi]} |\tau'_{j,n}(x)| \leqslant C(|p_2(x)| + |p_3(x)|), \tag{13.2}$$

где $C = C(\|P\|_{L_1}, \alpha) = C(\mathcal{X}, U)$ (здесь Π_α — полоса, содержащая спектр оператора $\mathcal{L}_{P,U}$).

Доказательство. Проанализируем доказательство теоремы 9.4. Далее пользуемся обозначениями, введенными в этом доказательстве.

Прежде всего заметим, что все точки λ_n лежат в некоторой горизонтальной полосе, ширина которой зависит только от краевых условий U и компакта $\mathcal{X}$ (утверждение 13.1). Число δ, введенное в начале доказательства теоремы 9.4, заведомо не превосходит 1, так что расширяя полосу так, чтобы точки λ_n лежали в ней вместе со своими δ-окрестностями, мы все равно можем считать, что ширина полосы зависит только от U и $\mathcal{X}$.

Номер N_1, начиная с которого выполнена оценка

$$|\lambda_n - \lambda_n^0| < \delta,$$

зависит, согласно утверждению 13.2, только от U и $\mathcal{X}$. Номер N_2, начиная с которого справедливо неравенство (9.30), определяется условием

$$\Upsilon_0(\lambda) < k_0.$$

Поскольку выбор константы k_0 зависит только от $a = \|P\|_{L_1}$ и ширины полосы $\alpha = \alpha(U, \mathcal{X})$, то (согласно лемме 13.1) неравенство $\Upsilon_0(\lambda) < k_0$ выполнено при всех $\lambda \in \Pi_{r,\beta}$, где $\beta = \beta(U, \mathcal{X})$.

Учитывая теперь, что $\operatorname{Re} \lambda_n^0 \in [n-2, n+1]$, видим, что номер N_2 можно положить равным $\max\{N_1,\ [\beta] + 3\}$. Наконец, константа C, фигурирующая в правой части (9.30), определяется только величинами $a = \|P\|_{L_1}$ и $\alpha = \alpha(U, \mathcal{X})$.

Итак, мы доказали, что оценка (9.30) с константой $C = C(U, \mathcal{X})$ выполнена при всех n, $|n| > N$, $N = N(U, \mathcal{X})$. Тогда то же самое верно и для оценок (9.32), (9.33) и (9.34). Таким образом, остается оценить величины $\Upsilon(\lambda_n)$ и $|\lambda_n - \lambda_n^0|$. Оценка первой из них проведена в лемме 13.1, а второй — в утверждении 13.2.

Докажем вторую часть утверждения. Из представления (9.4) с оценками (9.6) для ненормированных собственных функций имеем

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{1,n}(x) = e^{\mathrm{i}\lambda_n x}\left(\omega_{1,n} + \omega_{1,n}\eta_{11}(x, \lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{12}(x, \lambda_n)\right), \\ \widetilde{y}_{2,n}(x) = e^{-\mathrm{i}\lambda_n x}\left(\omega_{2,n} + \omega_{1,n}\eta_{21}(x, \lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{22}(x, \lambda_n)\right), \end{cases}$$

для всех n. Введем обозначения

$$\widetilde{\tau}_{1,n}(x) = \widetilde{y}_{1,n}(x)e^{-\mathrm{i}\lambda_n x} \quad \text{и} \quad \widetilde{\tau}_{2,n}(x) = \widetilde{y}_{2,n}(x)e^{\mathrm{i}\lambda_n x}.$$

Тогда

$$\widetilde{\tau}_{1,n}(0) = \omega_{1,n} = u_{12} + u_{13}e_{12}(\pi, \lambda_n) + u_{14}e_{22}(\pi, \lambda_n),$$
$$\widetilde{\tau}_{2,n}(0) = \omega_{2,n} = -u_{11} - u_{13}e_{11}(\pi, \lambda_n) - u_{14}e_{21}(\pi, \lambda_n)$$

— последовательности, ограниченные величиной, зависящей только от $\|P\|_{L_1}$ и ширины полосы $|\operatorname{Im}\lambda| < \alpha$ (см. доказательство утверждения 9.1). Из этого же утверждения следует оценка производных

$$\widetilde{\tau}'_{j,n}(x) = \omega_{1,n}\eta'_{j1}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta'_{j2}(x,\lambda_n),$$

а значит, согласно (9.6),

$$|\widetilde{\tau}'_{1,n}(x)| \leqslant M|p_2(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|), \qquad |\widetilde{\tau}'_{2,n}(x)| \leqslant M|p_3(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|),$$

$M = M(\|P\|_{L_1}, \alpha)$. Отсюда сразу следует оценка (9.25) для ненормированных функций $\widetilde{\mathbf{y}}_n$. Так как нормы $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{|n|>N}$ отделены от нуля, то эта оценка сохранится и после нормировки. □

Переходим к основной цели этого раздела — изучить зависимость свойства базисности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ от потенциала P при фиксированных сильно регулярных граничных условиях U. В качестве характеристики базиса $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ мы выбираем константу Рисса этого базиса (см. определение 18.2).

Сразу же ясно, что получить равномерные оценки на величину $\varkappa$ невозможно даже при варьировании потенциала вида $tP(x)$, $t \in [0,1]$. Конечно, согласно следствию 10.1, собственные значения являются непрерывными функциями потенциала. Однако собственные значения могут сталкиваться, образуя жордановы клетки. В этом случае константа Рисса неограниченно растет, меняясь при столкновении собственных чисел скачком к конечному значению.

Тем не менее, сильная регулярность краевых условий гарантирует асимптотическую простоту спектра оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Тогда, подправляя систему $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ на конечномерном подпространстве (размерность которого равномерно ограничена по $\mathcal{X}$), мы получим следующий результат.

Теорема 13.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in \mathcal{X}$ вида* (3.8)*, где $\mathcal{X}$ — компакт в $L_1[0,\pi]$. Пусть*

$$E_N = \overline{\operatorname{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{|n|>N}}, \quad E_0 = \operatorname{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{|n|\leqslant N},$$
$$\mathcal{H}_N = \overline{\operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}}, \quad \mathcal{H}_0 = \operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{|n|\leqslant N}.$$

Тогда найдется номер $N = N(\mathcal{X}, U) \in \mathbb{N}$ и постоянная $C = C(\mathcal{X}, U) > 0$ такие, что

$$\|T_N\| \cdot \|T_N^{-1}\| \leqslant C,$$

где оператор T_N определен как сужение оператора T на подпространство E_N.

Нам потребуется доказать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 13.2. *Пусть $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, $P \in \mathcal{X}$ имеет вид* (3.8)*, $\mathcal{X}$ — компакт в $L_1[0,\pi]$* (*собственные функции нормированы*).

Тогда найдется номер $N = N(\mathcal{X}, U)$ и постоянная $\gamma_1 = \gamma_1(\mathcal{X}, U) > 0$ такие, что при всех n, $|n| > N$, для любой функции $\mathbf{f} \in (L_2[0,\pi])^2$ выполнено:

$$\sum_{|n|>N} |(\mathbf{f}, \mathbf{y}_n)|^2 \leqslant \gamma_1 \|\mathbf{f}\|^2_{L_2}. \tag{13.3}$$

Доказательство. Согласно утверждениям 13.2 и 13.3, существует такое натуральное $N = N(\mathcal{X}, U)$, что при $|n| > N$ все собственные значения просты, а собственные функции имеют асимптотику

$$y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x), \quad y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x),$$

причем $|\tau_{j,n}(0)| \leqslant C = C(\mathcal{X}, U)$, $j = 1, 2$, а производные функций $\tau_{j,n}(x)$ подчинены оценке

$$|\tau'_{j,n}(x)| \leqslant C(R, U)(|p_2(x)| + |p_3(x)|)$$

почти всюду на $[0,\pi] \ni x$. Из этого представления и леммы 12.3 сразу вытекает требуемое утверждение. □

Лемма 13.3. *Пусть $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с внедиагональным потенциалом $P \in \mathcal{X}$, соответствующих собственным значениям λ_n (собственные функции нормированы).*

Пусть, далее, $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^* = \mathcal{L}_{P^*,U^*}$, соответствующих собственным значениям $\overline{\lambda}_n$, причем все собственные функции также нормированы на единицу. Тогда найдутся такой номер $N = N(\mathcal{X}, U)$ и постоянная $C = C(\mathcal{X}, U) > 0$, что при $|n|, |m| > N$:

$$\langle \mathbf{w}_n, \mathbf{y}_m\rangle = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ a_n, & n = m, \end{cases}$$

причем $\sup\limits_{|n|>N} \{1/|a_n|\} < C$.

Доказательство. Согласно утверждению 13.2, начиная с некоторого номера $N = N(\mathcal{X}, U)$, все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (а значит, и $(\mathcal{L}_{P,U})^*$) просты, а функции $\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$ и $\{\mathbf{z}_n\}_{|n|>N}$ являются соответственно нормированными собственными функциями данных операторов. Пусть сначала $n \neq m$. Тогда

$$\overline{\lambda}_n \langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_m\rangle = \langle \mathcal{L}^* \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_m\rangle = \langle \mathbf{z}_n, \mathcal{L}\mathbf{y}_m\rangle = \overline{\lambda}_m \langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_m\rangle.$$

Поскольку $\lambda_n \neq \lambda_m$, то $\langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_m\rangle = 0$.

Рассмотрим случай $n = m$. Пусть $\{\mathbf{y}_n^0\}$ и $\{\mathbf{z}_n^0\}$ — нормированные системы собственных функций операторов $\mathcal{L}_{0,U}$ и $(\mathcal{L}_{0,U})^*$ соответственно. Положим

$$\nu_0 = \inf_{n\in\mathbb{Z}} |\langle \mathbf{z}_n^0, \mathbf{y}_n^0\rangle| > 0.$$

Увеличивая при необходимости номер $N(\mathcal{X}, U)$, из утверждения 13.3 получаем, что при $|n| > N$:

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^0\| < \nu_0/3 \quad \text{и, аналогично,} \quad \|\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_n^0\| < \nu_0/3.$$

Тогда

$$|\langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_n\rangle| = |\langle (\mathbf{z}_n^0 + (\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_n^0)), \mathbf{y}_n^0 + (\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^0)\rangle| \geqslant |\langle \mathbf{z}_n^0, \mathbf{y}_n^0\rangle| - |\langle \mathbf{z}_n - \mathbf{z}_n^0, \mathbf{y}_n^0\rangle| - |\langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_n - \mathbf{y}_n^0\rangle| \geqslant \nu_0/3.$$

□

Доказательство теоремы 13.1. Пусть число $N = N(\mathcal{X}, U)$ выбрано в лемме 13.3. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $\mathbb{H}$.

Пусть $\mathbf{x} \in E_N$. Тогда

$$\mathbf{x} = \sum_{|n|>N} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n\rangle \mathbf{e}_n,$$

следовательно,

$$T_N \mathbf{x} = \sum_{|n|>N} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n\rangle \mathbf{y}_n.$$

Отсюда в силу леммы 13.2 для любого $\mathbf{y} \in \mathcal{H}_N$ справедливо

$$|\langle T_N \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle| = \left| \sum_{|n|>N} \langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_n\rangle \langle \mathbf{y}_n, \mathbf{y}\rangle \right| \leqslant \sqrt{\gamma_1} \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

где $\gamma_1 = \gamma_1(\mathcal{X}, U)$. Отсюда $\|T_N\|_{E_N \to \mathcal{H}_N} \leqslant \sqrt{\gamma_1}$.

Пусть теперь $\mathbf{y} \in \mathcal{H}_N$, $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$, введенная в лемме 13.3.

Поскольку система $\{\mathbf{y}_n\}$ является базисом Рисса, а система $\{\mathbf{w}_n\}$, где $\mathbf{w}_n = \dfrac{\mathbf{z}_n}{\langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_n\rangle}$, — биортогональная к ней, то

$$\mathbf{y} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \mathbf{y}, \mathbf{w}_n\rangle \mathbf{y}_n = \sum_{|n|>N} \langle \mathbf{y}, \mathbf{w}_n\rangle \mathbf{y}_n = \sum_{|n|>N} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_n\rangle}{\langle \mathbf{z}_n, \mathbf{y}_n\rangle} \mathbf{y}_n.$$

Значит,

$$T_N^{-1}\mathbf{y} = \sum_{|n|>N} \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_n \rangle}{a_n} \mathbf{e}_n,$$

следовательно, в силу леммы 13.2, примененной к системе $\{\mathbf{z}_n\}$ и леммы 13.3, найдутся такие постоянные $\gamma_2 = \gamma_2(\mathcal{X}, U)$ и $C = C(\mathcal{X}, U)$, что

$$\|T_N^{-1}\mathbf{y}\|^2 = \sum_{|n|>N} \frac{|\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_n \rangle|^2}{a_n^2} \leqslant C^2 \sum_{|n|>N} |\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}_n \rangle|^2 \leqslant C^2 \gamma_2 \|\mathbf{y}\|^2.$$

В силу произвольности выбора $\mathbf{y} \in \mathcal{H}_N$, отсюда следует утверждение теоремы. □

Теорема 13.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in \mathcal{X}$ вида* (3.8)*, где $\mathcal{X}$ — компакт в $L_1[0,\pi]$.*

Пусть E_N, E_0, $\mathcal{H}_N$, $\mathcal{H}_0$ — подпространства, введенные в теореме 13.1. *Выберем в пространстве $\mathcal{H}_0$ произвольный ортонормированный базис $\{\varphi_n\}_{|n|\leqslant N}$ и определим оператор S в пространстве $\mathbb{H}$*

$$S\mathbf{f} = \begin{cases} T\mathbf{f}, & \mathbf{f} \in E_N, \\ \sum\limits_{|n|\leqslant N} (\mathbf{f}, \mathbf{e}_n)\varphi_n, & \mathbf{f} \in E_0. \end{cases}$$

Тогда оценка

$$\|S\| \cdot \|S^{-1}\| \leqslant C$$

по-прежнему выполнена с некоторой новой константой $C = C(\mathcal{X}, U)$.

Лемма 13.4. *Пусть $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ — резольвента сильно регулярного оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in \mathcal{X}$ вида* (3.8)*, $\mathcal{X}$ — компакт в $L_1[0,\pi]$.*

Пусть номер $N = N(\mathcal{X}, U)$ зафиксирован в лемме 13.3. *Тогда найдутся такие $\alpha = \alpha(\mathcal{X}, U)$, $\beta = \beta(\mathcal{X}, U)$, что все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ при $|n| \leqslant N$ лежат внутри контура γ, составленного из отрезков*

$$\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha, \quad -\beta \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \beta \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\lambda = \pm\beta, \quad -\alpha \leqslant \operatorname{Im}\lambda \leqslant \alpha,$$

а при $|n| > N$ — вне этого контура. Более того, если обозначить

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \mathfrak{R}(\lambda) d\lambda,$$

то имеем оценку $\|\mathcal{P}\| \leqslant C = C(\mathcal{X}, U)$.

Доказательство. Пусть постоянная $\alpha = \alpha(\mathcal{X}, U)$ выбрана в утверждении 13.1. Обозначим $d_0 = \inf\limits_{n \neq m} |\lambda_n^0 - \lambda_m^0|$.

Возьмем число $\beta_0^U \in (0, 2)$ так, чтобы

$$|\operatorname{Re}\lambda_j^0 - \beta_0^U| \geqslant \frac{d_0}{2}.$$

Тогда найдется натуральное $m = m(U)$ такое, что постоянная $\beta = \beta_0^U + 2m$ удовлетворяет условиям следствия из утверждения 13.2, и все собственные значения λ_n^0 оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ при $|n| \leqslant N$ лежат внутри контура γ, а при $|n| > N$ — вне контура.

В силу утверждения 13.2 об асимптотике собственных значений λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ имеем:

$$|\operatorname{Re}\lambda_n - \beta| \geqslant \frac{d_0}{6}$$

(положили в утверждении $\varepsilon = d_0/3$). Значит, резольвента $\mathfrak{R}(\lambda)$ определена на контуре γ.

Пусть теперь $\lambda \in \gamma$ — фиксированная точка. Из утверждения 13.1 следует равномерная ограниченность резольвенты на отрезках $\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha$. Тогда в силу равномерной отделенности собственных значений от отрезков $\operatorname{Re}\lambda = \pm\beta$, непрерывной зависимости от потенциала в пространстве L_1 (следствие 10.1) и компактности $\mathcal{X}$ имеем оценку

$$\|\mathfrak{R}(\lambda)\| \leqslant C = C(\mathcal{X}, U).$$

Действительно, пусть для некоторой последовательности P_n потенциалов из $\mathcal{X}$ выполнено:

$$\sup_{\lambda\in\gamma}\|(\mathcal{L}_{P_n,U}-\lambda I)^{-1}\|\to+\infty \quad \text{при} \quad n\to+\infty.$$

В силу компактности $\mathcal{X}$ существует подпоследовательность P_{k_n} такая, что

$$\|P_{k_n}-P\|_{L_1}\to 0, \quad P\in\mathcal{X}.$$

Но тогда

$$\sup_{\lambda\in\gamma}\|(\mathcal{L}_{P_n,U}-\lambda I)^{-1}-(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda I)^{-1}\|\to 0,$$

что противоречит нашему предположению. Отсюда вытекает утверждение леммы. □

Доказательство теоремы 13.2. По определению оператора S имеем:

$$S=T_0\mathcal{P}_0+T_N(I-\mathcal{P}_0),$$

где $\mathcal{P}_0$ — ортопроектор на E_0 вдоль E_N, $T_0\mathbf{e}_n=\varphi_n$, $|n|\leqslant N$. Тогда $\|S\|\leqslant\|T_N\|+1$.

Далее,

$$S^{-1}=T_0^{-1}\mathcal{P}+T_N^{-1}(I-\mathcal{P}),$$

следовательно, в силу предыдущей леммы,

$$\|S^{-1}\|\leqslant\|\mathcal{P}\|+\|T_N^{-1}\|(1+\|\mathcal{P}\|).$$

Отсюда и из теоремы 13.1 получаем требуемое утверждение. □

Теперь изучим случай $\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R$, $\varkappa>1$. Потенциал P вновь будем считать внедиагональным. Ясно, что ситуация здесь сложнее — например, утверждения вида 13.3 не могут иметь место, поскольку разности $\lambda_n-\lambda_n^0$, нестрого говоря, ведут себя как коэффициенты Фурье потенциала P, а значит, не могут иметь равномерных по шару $B_\varkappa(0,R)$ оценок на убывание к нулю. Тем не менее, утверждение 13.1 сохраняется.

Утверждение 13.4. *Пусть $P\in B_\varkappa(0,R)$, т. е. $\|P\|_{L_\varkappa[0,\pi]}\leqslant R$, где $\varkappa>1$, матрица P имеет вид* (3.8)*, а краевые условия U фиксированы и регулярны.*

Тогда в теореме 10.1 *константы α и C в оценке* (10.7) *можно выбрать едиными на шаре $B_\varkappa(0,R)$, т. е. $\alpha=\alpha(R,U,p,q,\varkappa)$, $C=C(R,U,p,q,\varkappa)$.*

Доказательство. В силу вложения $L_\varkappa[0,\pi]\subset L_2[0,\pi]$ при $\varkappa>2$ можно считать, что $\varkappa\leqslant 2$. Запишем резольвенту $\mathfrak{R}_{P,U}(\lambda)$ виде формального ряда

$$\mathfrak{R}_{P,U}(\lambda)=\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)+\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)P\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)+\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)P\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)P\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)+\dots. \tag{13.4}$$

Теперь оценим норму $\|\cdot\|_{L_p\to L_q}$ каждого слагаемого. При этом мы будем пользоваться оценкой (4.10). Прежде всего,

$$\|\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)\|_{L_p\to L_q}\leqslant C(U,p,q)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p-1/q},$$
$$\|\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)\|_{L_p\to L_\infty}\leqslant C(U,p)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p},$$
$$\|\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)\|_{L_\varkappa\to L_\infty}\leqslant C(U,\varkappa)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/\varkappa},$$
$$\|\mathfrak{R}_{0,U}(\lambda)\|_{L_\varkappa\to L_q}\leqslant C(U,\varkappa,q)|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/\varkappa-1/q}$$

(напомним, что у нас $1<\varkappa\leqslant 2$, $1\leqslant p\leqslant 2$, $2\leqslant q\leqslant\infty$). Обозначим максимум этих четырех констант через $M=M(U,\varkappa,p,q)$. Тогда

$$\|\mathfrak{R}_{0,U}P\mathfrak{R}_{0,U}\|_{L_p\to L_q}\leqslant\|\mathfrak{R}_{0,U}\|_{L_\varkappa\to L_q}\|P\|_{L_\varkappa}\|\mathfrak{R}_{0,U}\|_{L_p\to L_\infty}\leqslant M^2R|\operatorname{Im}\lambda|^{-2+1/p+1/\varkappa-1/q},$$

$$\|\mathfrak{R}_{0,U}(P\mathfrak{R}_{0,U})^2\|_{L_p\to L_q}\leqslant\|\mathfrak{R}_{0,U}\|_{L_\varkappa\to L_q}\|P\|_{L_\varkappa}\|\mathfrak{R}_{0,U}\|_{L_\varkappa\to L_\infty}\|P\|_{L_\varkappa}\|\mathfrak{R}_{0,U}\|_{L_p\to L_\infty}\leqslant$$
$$\leqslant M^3R^2|\operatorname{Im}\lambda|^{-3+1/p+2/\varkappa-1/q},\dots$$

Продолжая, увидим, что норма n-го слагаемого ряда (13.4) оценивается величиной

$$M^nR^{n-1}|\operatorname{Im}\lambda|^{-n+(n-1)/\varkappa+1/p-1/q}.$$

Тогда ряд сходится, если

$$|\operatorname{Im}\lambda|>\alpha=(2MR)^{\varkappa/(\varkappa-1)}$$

и его сумма допускает оценку

$$\|\mathfrak{R}_{P,U}(\lambda)\|_{L_p\to L_q} \leqslant 2M|\operatorname{Im}\lambda|^{-1+1/p-1/q}, \quad M = M(U,\varkappa,p,q). \tag{13.5}$$

□

Начиная с этого момента, мы зафиксируем ширину полосы α так, чтобы она удовлетворяла условиям утверждения 13.4. Более того, увеличивая при необходимости число α, можно считать, что полоса Π_α содержит все точки $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с их $d/4$-окрестностями (напомним, что $d = \inf\limits_{n\neq m}|\lambda_n^0 - \lambda_m^0|$). Важно отметить, что величина α зависит только от R и U.

Определение меры Карлесона см. в приложении B, определение 17.3. Для дальнейших рассуждений нам потребуется зафиксировать меру Карлесона следующим образом. Мы уже определяли семейство контуров γ_n и разделяли собственные значения на регулярные и иррегулярные. Сейчас нам будет удобно внести в эти определения небольшие коррективы, так что мы повторим процесс построения. Итак, построим семейство контуров γ_n, $n\in\mathbb{Z}$. Вначале определим контур γ_n как объединение окружности

$$C_n = \{|\lambda-\lambda_n^0| = d/4\}$$

и двух отрезков

$$I_n^+ = [\lambda_n^0 + id/4, \operatorname{Re}\lambda_n^0 + i\alpha_0] \quad \text{и} \quad I_n^- = [\operatorname{Re}\lambda_n^0 - i\alpha_0, \lambda_n^0 - id/4].$$

Может случится так, что отрезок I_n^+ пересекает окружность C_{n+1}. В этом случае мы заменим часть отрезка I_n^+, лежащую внутри C_{n+1}, на *левую* дугу окружности C_{n+1}. Аналогично, если отрезок I_n^- пересекает окружность C_{n-1}, то заменим его часть, попавшую внутрь окружности, на *правую* дугу. Отметим, что в силу построения (и распределения собственных значений λ_n^0) отрезок I_n^+ не может пересечься ни с какой окружностью, кроме C_{n+1}, и, аналогично, I_n^- может пересечь только C_{n-1}.

Заметим, что для любой точки $\lambda\in\gamma_n$ выполнены ограничения

$$\operatorname{Re}\lambda_n^0 - d/4 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n^0 + d/4.$$

Поскольку $\operatorname{Re}(\lambda_{n+2}^0-\lambda_n^0) = 2$, а $d\leqslant 1$, то расстояние между контурами γ_n и γ_{n+2} не меньше, чем $2-d/2\geqslant 3/2$.

Определение 13.1. Положим

$$\breve{\gamma}_n = \gamma_n \cup \operatorname{int} C_n \cup \operatorname{int} C_n^*,$$

где $\operatorname{int} C_n = \{\lambda : |\lambda-\lambda_n^0| < d/4\}$, а $\operatorname{int} C_n^* = \{\lambda : |\lambda-\overline{\lambda}_n^0| < d/4\}$. Теперь определим множества K_n как замкнутые $d/4$ окрестности множеств $\breve{\gamma}_n$.

Отметим, что $\lambda_n^0\in K_n$, а площадь множества K_n не превосходит $2rd+\pi d^2/2$. Обозначим далее $K = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} K_n$ и определим меру μ как обычную плоскую меру Лебега с носителем K.

Лемма 13.5. *Мера μ является карлесоновой, причем число γ_μ зависит только от R и U. При этом для любой функции $f\in L_\nu(K)$ имеет место оценка*

$$\|f\|_{L_\nu(K)}^\nu \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|f\|_{L_\nu(K_n)}^\nu \leqslant 2\|f\|_{L_\nu(K)}^\nu \tag{13.6}$$

для любого $\nu\in[1,\infty)$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует непосредственно из определения и построения множества K.

Заметим теперь, что возможны три ситуации: множества K_n попарно не пересекаются; каждое множество K_{2n} имеет непустое пересечение с множеством K_{2n+1}, но других попарных пересечений нет; каждое множество K_{2n} имеет непустое пересечение с множеством K_{2n-1}, а других попарных пересечений нет.

В любом случае расстояние между K_n и K_{n+2} равно, по меньшей мере, $2-d\geqslant 1$, откуда вытекает неравенство (13.6). □

Следующее утверждение уже использовалось нами в разделе 9, но для удобства читателя мы оформим его здесь отдельной леммой.

Лемма 13.6. *Пусть* $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,2]$, $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, *а число* $h > 0$ *произвольно. Тогда неравенство*

$$\sup_{\lambda \in \check{\gamma}_n} \Upsilon(\lambda) \leqslant h$$

выполнено для всех множеств $\check{\gamma}_n$ *за исключением конечного числа* N, *причем* $N \leqslant C(R,U)h^{-\varkappa'}$.

Согласно теореме 9.2, нумерация точек спектра оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ проводится так, что

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1) \quad \text{при } |n| \to \infty. \tag{13.7}$$

Ясно, что последнее условие задает индексацию точек спектра неоднозначно, а лишь с точностью до перестановки конечного числа номеров. Здесь нам потребуется эту нумерацию уточнить. Для этого обозначим

$$\mu = \mu(U) := \inf_{\lambda \in \gamma_0 \cup \gamma_1} |\Delta_0(\lambda)| > 0,$$

где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель задачи с нулевым потенциалом. В силу 2-периодичности функции $\Delta_0(\lambda)$ неравенство $|\Delta_0(\lambda)| \geqslant \mu$ выполнено для всех точек $\lambda \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n$. Строки матрицы $\mathcal{U}$ всегда можно домножить на ненулевые коэффициенты так, чтобы неравенство $|J_{\alpha\beta}| \leqslant 1$ выполнялось для всех индексов α и β. Напомним, что число k_0

$$k_0 = \frac{e^{-2\pi\alpha}}{16(\|p_2\|_{L_1} + \|p_3\|_{L_1})}$$

и величина M — константа в неравенстве (13.1), зависят только от α и $\|P\|_{L_1}$. В свою очередь, α зависит только от R и U.

Определение 13.2. Назовем контур γ_n *регулярным*, если

$$\sup_{\lambda \in \check{\gamma}_n} \Upsilon_0(\lambda) \leqslant k_0 \quad \text{и} \quad \sup_{\lambda \in \gamma_n} \Upsilon_0(\lambda) \leqslant \frac{\mu}{2M}.$$

В противном случае γ_n назовем *иррегулярным*.

В силу леммы 13.6, количество иррегулярных контуров оценивается величиной $N = N(R,U)$. Для регулярных контуров

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leqslant M\Upsilon_0(\lambda) \leqslant \frac{\mu}{2}$$

для всех $\lambda \in \gamma_n$, откуда $|\Delta(\lambda)| \geqslant \mu/2$.

Из теоремы Руше для голоморфных функций $\Delta_0(\lambda)$, $\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$ и контура

$$C_n = \{|\lambda - \lambda_n^0| = d/4\}$$

следует, что внутри окружности C_n, отвечающей регулярному контуру γ_n, лежит ровно одно собственное значение оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это собственное значение мы индексируем номером n и назовем *регулярным* собственным значением.

Далее, существует такое натуральное число n_0, что все контуры γ_n при $|n| \geqslant n_0$ регулярны, так что введенная здесь нумерация согласована с соотношением (13.7), т. е. является уточнением предыдущей нумерации. Оставшиеся собственные значения занумеруем оставшимися в нашем распоряжении целыми индексами произвольным образом и назовем *иррегулярными* собственными значениями. Дефекта нумерации при этом не возникает (множество иррегулярных собственных значений конечно и равномощно множеству оставшихся индексов), поскольку он отсутствовал в предыдущей нумерации.

Множество целых индексов, отвечающих регулярным и иррегулярным собственным значения обозначим через $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и $\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}$ соответственно. Из леммы 13.6 вытекает следующее важное утверждение.

Следствие 13.1. *Число иррегулярных собственных значений* $\operatorname{mes} \mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}$ *не только конечно для каждого фиксированного потенциала* P, *но и равномерно ограничено по любому шару* $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, *если* $\varkappa > 1$.

Подчеркнем, что число $n_0 = n_0(P, U) := \max\{|n| : n \in \mathbb{Z}_\mathfrak{J}\}$ также конечно, но величина

$$\sup_{\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R} n_0(P, U)$$

может быть бесконечной (более того, это действительно так для достаточно больших R).

Лемма 13.7. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa$ вида* (3.8)*, причем $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, а $\varkappa > 1$.*

Тогда на любом регулярном контуре γ_n резольвента $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ допускает оценку

$$\sup_{\lambda \in \gamma_n} \|\mathfrak{R}(\lambda)\| \leqslant C(R, U). \tag{13.8}$$

Доказательство. Согласно утверждению 9.1, для любого $\lambda \in \gamma_n$ справедливо представление $e_{jk}(x, \lambda) = e^0_{jk}(x, \lambda) + \eta_{jk}(x, \lambda)$. Учитывая оценку

$$\max_{x \in [0,\pi]} |\eta_{jk}(x, \lambda)| \leqslant C(R, U)\Upsilon_0(\lambda)$$

и явный вид функций $e^0_{jk}(x, \lambda)$, приходим к неравенству

$$\sup_{x \in [0,\pi],\, \lambda \in \gamma_n} |e_{jk}(x, \lambda)| \leqslant C_1(R, U), \quad j,\, k = 1,\, 2.$$

Тогда, с учетом равенств (10.4) и оценки $\inf\limits_{\lambda \in \gamma_n} |\Delta(\lambda)| \geqslant \mu/2$, где $\mu = \mu(U)$, из (10.15) получаем

$$\sup_{\lambda \in \gamma_n,\, 0 \leqslant \xi,\, x \leqslant \pi} |g_{jk}(\xi, x, \lambda)| \leqslant C(R, U), \qquad j,\, k = 1,\, 2,$$

где мы обозначили $G(\xi, x, \lambda) = (g_{jk}(\xi, x, \lambda))_{j,\,k=1,\,2}$. Доказанная оценка влечет утверждение леммы. □

Обозначим через γ^+_n контур, полученный из γ_n удалением левой половины окружности C_n и добавлением двух вертикальных лучей $(\operatorname{Re}\lambda^0_n - i\infty, \operatorname{Re}\lambda^0_n - ir]$ и $[\operatorname{Re}\lambda^0_n + ir, \operatorname{Re}\lambda^0_n + i\infty)$. Ориентируем γ^+_n по убыванию $\operatorname{Im}\lambda$. Аналогично, через γ^-_n будем обозначать контур, полученный из γ_n добавлением тех же лучей, удалением правой половины окружности C_n и ориентированный по возрастанию $\operatorname{Im}\lambda$.

Лемма 13.8. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa$ вида* (3.8)*, причем $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$, а $\varkappa > 1$. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}_\mathfrak{R}$*

$$\left\| \int_{\gamma^\pm_n} \mathfrak{R}(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant C(R, U).$$

Доказательство. Воспользуемся представлением (13.4) для резольвенты в виде операторного ряда. Все слагаемые этого ряда, кроме первого, оцениваются одинаково.

По определению, длина контура γ_n не превосходит $\pi d + 2\alpha_0$. Тогда, в силу неравенства (13.8), остается провести оценку только двух несобственных интегралов по лучам $(\operatorname{Re}\lambda^0_n - i\infty, \operatorname{Re}\lambda^0_n - ir]$ и $[\operatorname{Re}\lambda^0_n + ir, \operatorname{Re}\lambda^0_n + i\infty)$. Оценим интеграл по верхнему лучу (рассуждения для другого интеграла полностью аналогичны):

$$\left\| \int_{\sigma+ir}^{\sigma+i\infty} (-\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^k \mathfrak{R}_0(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant \int_{\alpha_0}^{\infty} C^{k+1}(U) R^k \tau^{-k/\varkappa'} \frac{d\tau}{\tau} \leqslant \frac{\varkappa' C^{k+1}(U) R^k}{k r^{k/\varkappa'}},$$

где $k \geqslant 1$, а $\lambda = \sigma + i\tau$. Полученный ряд сходится в силу выбора числа r, и его сумма не превосходит $2\varkappa' C(U)$.

Таким образом, остается оценить слагаемое ряда (13.4) с номером $k = 0$, т. е. доказать, что величина $\left\| \int_{\gamma^\pm_n} \mathfrak{R}_0(\lambda)\, d\lambda \right\|$ конечна. Воспользуемся представлением резольвенты невозмущенного оператора в виде ряда

$$\mathfrak{R}_0(\lambda) = \sum\nolimits_{j \in \mathbb{Z}} \frac{(\cdot, \mathbf{z}^0_j)\mathbf{y}^0_j}{\lambda - \lambda^0_j}.$$

Здесь $\{\mathbf{y}_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — система собственных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом (напомним, что краевые условия сильно регулярны, а значит, все собственные значения λ_j^0 однократны), $\{\mathbf{z}_j^0\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к ней. Каждая из этих систем образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, следовательно, для любой функции $\mathbf{f}\in\mathbb{H}$ справедлива оценка

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}}|(\mathbf{f},\mathbf{z}_j^0)|^2\leqslant C\|f\|^2. \tag{13.9}$$

Непосредственным интегрированием получаем, что

$$\int\limits_{\gamma_n^-}\mathfrak{R}_0(\lambda)\,d\lambda=\sum_{j\leqslant n}i\pi(\cdot,\mathbf{z}_j^0)\mathbf{y}_j^0-\sum_{j>n}i\pi(\cdot,\mathbf{z}_j^0)\mathbf{y}_j^0.$$

Отсюда и из (13.9) вытекает ограниченность величины $\left\|\int\limits_{\gamma_n^-}\mathfrak{R}_0(\lambda)\,d\lambda\right\|$. Оценка для интеграла по γ_n^+ получается аналогично. □

Для любого $n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ собственное значение λ_n однократно. Обозначим через $\mathbf{y}_n$ соответствующую собственную функцию, нормированную условием $\|\mathbf{y}_n\|=1$, а также

$$\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}:=\overline{\operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}}.$$

Наша ближайшая цель — построить спектральный проектор на подпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}$. Для этого необходимо построить контур, охватывающий все регулярные собственные значения и не содержащий ни одного иррегулярного собственного значения. Мы построим такой контур следующим образом.

Будем говорить, что два регулярных индекса $n<n'$ лежат в одной компоненте, если все целые числа $k\in(n,n')$ также регулярны. Легко видеть, что множество $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ состоит из $\nu\leqslant N+1$ компонент, где $N:=\operatorname{mes}\mathbb{Z}_{\mathfrak{J}}=N(R,U)$. Занумеруем эти компоненты по возрастанию и обозначим через $n_1<n_2<\dots<n_{2(\nu-1)}$ их крайние точки. Таким образом, множество $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ теперь записано в виде

$$\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}=(-\infty,n_1]\sqcup[n_2,n_3]\sqcup\dots\sqcup[n_{2(\nu-1)},+\infty).$$

Выберем произвольное число $b>r$ и для каждого $n\in\mathbb{Z}$ обозначим через $\gamma_{n,b}^{\pm}$ часть контура $\gamma_n^{\pm}$, расположенную в полосе $\{|\operatorname{Im}\lambda|\leqslant b\}$. Теперь рассмотрим контур

$$\Gamma_b=\bigsqcup_{j=1}^{\nu-1}\Gamma_{j,b},$$

где

$$\Gamma_{j,b}=\gamma_{n_{2j-1},b}^+\cup[\operatorname{Re}\lambda_{n_{2j-1}}^0-ib,\operatorname{Re}\lambda_{n_{2j}}^0-ib]\cup\gamma_{n_{2j},b}^-\cup[\operatorname{Re}\lambda_{n_{2j}}^0+ib,\operatorname{Re}\lambda_{n_{2j-1}}^0+ib].$$

Лемма 13.9. *Контур Γ_b охватывает все иррегулярные собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и не содержит ни одного регулярного собственного значения. Таким образом, оператор $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}:=I-\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}$, где*

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{J}}:=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b}\mathfrak{R}(\lambda)\,d\lambda,$$

является спектральным проектором на подпространство $\mathcal{H}_{\mathfrak{R}}$.

Доказательство. По построению, контур Γ_b действительно не охватывает ни одного регулярного собственного значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, так что нам остается проследить за иррегулярными λ_n. Для этого мы рассмотрим семейство потенциалов $P_t(x)=tP(x)$, $t\in[0,1]$, и обозначим

$$\mathcal{L}_t=\mathcal{L}_{P_t,U},\quad \mathfrak{R}_t(\lambda)=(\mathcal{L}_t-\lambda I)^{-1}\quad\text{и}\quad \mathcal{P}_{\mathfrak{J},t}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b}\mathfrak{R}_t(\lambda)\,d\lambda.$$

Непосредственно из определения имеем:

$$\Upsilon(tP;\lambda)=t\Upsilon(P;\lambda),$$

а значит, любой регулярный для потенциала P контур γ_n остается регулярным и для потенциала tP. Таким образом, проектор $\mathcal{P}_{\mathfrak{I},t}$ корректно определен для любого $t \in [0,1]$.

Теперь воспользуемся утверждением 10.3 и замечаниями 10.1 и 10.2 о непрерывной зависимости резольвенты от потенциала. А именно, для любой фиксированной точки $t \in [0,1]$, для любого $\varepsilon > 0$, найдется такая δ-окрестность точки t, что для любого s из этой окрестности выполнено

$$\sup_{\lambda \in \Gamma_b} \|\mathfrak{R}_t(\lambda) - \mathfrak{R}_s(\lambda)\| < \varepsilon.$$

Тогда семейство операторов $\mathcal{P}_{\mathfrak{I},t}$ непрерывно по $t \in [0,1]$ в операторной норме. Остается заметить, что контур Γ_b содержит все точки λ_n^0 спектра оператора $\mathcal{L}_0$ с номерами $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$ и не содержит ни одной точки с номером $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$.

Таким образом,

$$\dim \mathcal{P}_{\mathfrak{I},0} = \operatorname{mes} \mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}.$$

В силу непрерывной зависимости (см. [27, гл. 1, лемма 4.10]), ту же размерность имеет и проектор $\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}$. □

Оценка (13.5) позволяет осуществить предельный переход

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{I}} := \lim_{b \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_b} \mathfrak{R}(\lambda)\, d\lambda = \int_{\Gamma} \mathfrak{R}(\lambda)\, d\lambda,$$

где $\Gamma = \bigsqcup_{j=1}^{\nu-1} \Gamma_j$, а $\Gamma_j = \gamma^+_{n_{2j-1}} \cup \gamma^-_{n_{2j}}$. Следующее утверждение о равномерной ограниченности нормы проекторов $\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}$ и $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}$ является ключевым для доказательства теоремы 13.3.

Утверждение 13.5. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с внедиагональным потенциалом $P \in L_{\varkappa}[0,\pi]$, $\varkappa > 1$, $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$. Тогда*

$$\|\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}\| + \|\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}\| \leqslant C(R,U).$$

Доказательство. В силу леммы 13.8,

$$\|\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}\| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2\nu-2} \left\| \int_{\gamma^{\pm}_{n_j}} \mathfrak{R}(\lambda)\, d\lambda \right\| \leqslant \frac{\nu-1}{\pi} C(R,U).$$

Остается заметить, что $\nu \leqslant N+1$, где $N = \operatorname{mes} \mathbb{Z}_{\mathfrak{I}} = N(R,U)$ согласно следствию 13.1. □

Для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ функция $\mathbf{y}_n$ является собственной. В случае $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}$ могут появиться присоединенные функции (см. определение 12.2).

Как доказано в теореме 12.2, система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P \in L_1[0,\pi]$. Однако утверждение о равномерной базисности такой системы в общей ситуации неверно. Поэтому в подпространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{I}} := \operatorname{Rn} \mathcal{P}_{\mathfrak{I}}$ мы (произвольным образом) выберем ортонормированный базис $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}}$. Полученную систему $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}}$ будем называть системой корневых функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$.

Конечно, замена линейного базиса на конечномерном подпространстве $\mathcal{H}_{\mathfrak{I}}$ не нарушает свойства базисности Рисса системы. Наша цель сейчас — описать систему, биортогональную к системе

$$\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}}.$$

Утверждение 13.6. *Множества $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, построенные по операторам $\mathcal{L}_{P,U}$ и $(\mathcal{L}_{P,U})^*$, совпадают. Спектральные проекторы, построенные по множеству регулярных (иррегулярных) собственных значений оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ равны $\mathcal{P}_{\mathfrak{R}}{}^*$ и $\mathcal{P}_{\mathfrak{I}}{}^*$ соответственно.*

Доказательство. Действительно, для любого регулярного (сильно регулярного) оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^* = \mathcal{L}_{P^*,U^*}$ также является регулярным (сильно регулярным).

Собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U^*}$ совпадают с числами $\overline{\lambda_n^0}$, где λ_n^0 — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Таким образом, хотя контуры γ_n, отвечающие операторам $\mathcal{L}_{0,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U^*}$, в общей ситуации отличны, но множества $\breve{\gamma}_n$ совпадают (см. определение 13.1). Поскольку

$$\upsilon_{2,\pm}(P^*;x,\lambda) = \overline{\upsilon_{3,\mp}(P;x,\overline{\lambda})} \quad \text{и} \quad \upsilon_{3,\pm}(P^*;x,\lambda) = \overline{\upsilon_{2,\mp}(P;x,\overline{\lambda})},$$

то

$$\Upsilon(P^*;\lambda) = \Upsilon(P;\overline{\lambda}).$$

Тогда, согласно определению 13.2, множества $\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, построенные по операторам $\mathcal{L}_{P,U}$ и $(\mathcal{L}_{P,U})^*$, совпадают. Поскольку резольвента $\mathfrak{R}_{P^*,U^*}(\lambda)$ сопряженного оператора равна $\big(\mathfrak{R}_{P,U}(\overline{\lambda})\big)^*$, то проектор Рисса

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{I},P^*,U^*} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathfrak{R}^*_{P,U}(\overline{\lambda})\,d\lambda,$$

построенный по множеству иррегулярных собственных значений оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ равен

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_b} \mathfrak{R}_{P,U}(\overline{\mu})\,d\mu\right)^* = \big(\mathcal{P}_{\mathfrak{I},P,U}\big)^*.$$

□

Зафиксируем теперь произвольный индекс $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$ и рассмотрим спектральный проектор

$$\mathcal{P}_n := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_n} \mathfrak{R}(\lambda)\,d\lambda$$

(окружность $C_n = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| = d/4\}$ мы ориентируем против часовой стрелки). Поскольку внутри контура лежит ровно одно собственное значение λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, то $\mathcal{P}_n$ — одномерный проектор вида $\mathcal{P}_n = (\cdot, \mathbf{z}_n)\mathbf{y}_n$. Очевидно, что $(\mathcal{L}_{P,U})^*\,\mathbf{z}_n = \overline{\lambda_n}\mathbf{z}_n$.

При этом норма $\|\mathbf{z}_n\|$ может не равняться 1, хотя

$$1 \leqslant \|\mathbf{z}_n\| = \|\mathcal{P}_n\| \leqslant \frac{d}{4}\sup_{\lambda\in C_n}\|\mathfrak{R}(\lambda)\| \leqslant C(R,U).$$

Известно, что $(\mathbf{z}_n, \mathbf{y}_m) = \delta_{nm}$ (здесь $n \in \mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}$, а $m \in \mathbb{Z}$), так что мы в результате предъявили часть биортогональной системы к системе $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}} \cup \{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{I}}}$.

Утверждение 13.7. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}$ — последовательность регулярных собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с внедиагональным потенциалом $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa > 1$, $\|P\|_{L_\varkappa} \leqslant R$ и сильно регулярными краевыми условиями U. Тогда найдется константа $\beta = \beta(R,U)$ такая, что*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}\left|\int\limits_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}dx\right|^2 \leqslant \beta\|f\|^2_{L_2}$$

для произвольной функции $f \in L_2$.

Доказательство. Рассмотрим преобразование Фурье $F(\lambda) = \int\limits_0^\pi f(x)e^{i\lambda x}dx$. Согласно теореме Пэли—Винера, $F \in H^2(\Pi_\alpha)$ и $\|F\|_{H^2} \leqslant C_{abs}\|f\|_{L_2}$. Рассмотрим точечную меру $d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}_{\mathfrak{R}}}\delta_{\lambda_n}$. Поскольку для любых двух регулярных собственных значений

$$|\lambda_n - \lambda_m| \geqslant |\lambda_n^0 - \lambda_m^0| - |\lambda_n - \lambda_n^0| - |\lambda_m - \lambda_m^0| \geqslant d - \frac{d}{4} - \frac{d}{4} = \frac{d}{2},$$

то последовательность $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}$ — несгущающаяся. Тогда $d\mu$ является карлесоновой мерой (более того, легко видеть, что $\gamma_\mu \leqslant \dfrac{16r^2}{\pi d^2}$, т. е. зависит только от R и U). Отсюда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}} \left| \int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}dx \right|^2 = \|F\|^2_{L_2(d\mu)} \leqslant \beta(R,U)\|f\|^2_{L_2}.$$

□

Мы готовы определить оператор T смены базиса, оценку на норму которого вместе с оценкой нормы $\|T^{-1}\|$ намереваемся доказать.

Выберем произвольный ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $\mathbb{H}$ и положим

$$\mathrm{E}_\mathfrak{J} = \mathrm{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{J}} \quad \text{и} \quad \mathrm{E}_\mathfrak{R} = \overline{\mathrm{Lin}\{\mathbf{e}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}}.$$

Операторы ортогонального проектирования на $\mathrm{E}_\mathfrak{J}$ и $\mathrm{E}_\mathfrak{R}$ обозначим $Q_\mathfrak{J}$ и $Q_\mathfrak{R}$ соответственно. Определим операторы

$$T_\mathfrak{R} : \mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{y}_n \quad \text{для всех} \quad n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}$$

и

$$T_\mathfrak{J} : \mathbf{e}_n \mapsto \widetilde{\mathbf{y}}_n \quad \text{для} \quad n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{J}.$$

Система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}$ составляет базис Рисса в замыкании своей линейной оболочки, а система $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{J}}$ конечна, так что оба оператора $T_\mathfrak{R}$ и $T_\mathfrak{J}$ по непрерывности продолжаются на подпространства $\mathrm{E}_\mathfrak{R}$ и $\mathrm{E}_\mathfrak{J}$ соответственно. Положим

$$T := T_\mathfrak{R}Q_\mathfrak{R} + T_\mathfrak{J}Q_\mathfrak{J}.$$

Легко видеть, что

$$T^{-1} = T_\mathfrak{R}^{-1}\mathcal{P}_\mathfrak{R} + T_\mathfrak{J}^{-1}\mathcal{P}_\mathfrak{J}.$$

Теорема 13.3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с внедиагональным потенциалом $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in(1,2]$, $\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R$. Пусть краевые условия U фиксированы.*

Тогда для каждого P, $\|P\|_{L_\varkappa}\leqslant R$, оператор T смены базиса, построенный выше, допускает оценку

$$\|T\|\cdot\|T^{-1}\|\leqslant C,$$

где величина C зависит только от радиуса шара R и краевых условий U.

Отметим, что число N иррегулярных собственных значений зависит только от R и U. Таким образом, оператор T отличается от оператора $\mathbf{e}_n\mapsto\mathbf{y}_n$ лишь на подпространстве конечной размерности $N = N(R,U)$.

Доказательство. Поскольку

$$T:\ x = \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}(x,\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{J}}(x,\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n \ \mapsto\ \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}(x,\mathbf{e}_n)\mathbf{y}_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{J}}(x,\mathbf{e}_n)\widetilde{\mathbf{y}}_n,$$

то

$$T^*y = \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}(y,\mathbf{y}_n)\mathbf{e}_n + \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{J}}(y,\widetilde{\mathbf{y}}_n)\mathbf{e}_n.$$

Тогда

$$\|T^*y\|\leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}|(y,\mathbf{y}_n)|^2 + \|y\|^2,$$

так что оценка нормы $\|T\|$ сводится к оценке константы Бесселя системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}$. Далее, в силу утверждения 13.5

$$\|T^{-1}\|\leqslant\|T_\mathfrak{R}^{-1}\|\|\mathcal{P}_\mathfrak{R}\| + \|\mathcal{P}_\mathfrak{J}\|\leqslant C(R,U)\|T_\mathfrak{R}^{-1}\|.$$

Так как $T_\mathfrak{R}^{-1} : \mathcal{H}_\mathfrak{R}\to\mathrm{E}_\mathfrak{R}$, $T_\mathfrak{R}^{-1}\mathbf{y}_n = \mathbf{e}_n$, $n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}$, то

$$\|T_\mathfrak{R}^{-1}x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}|(x,\mathbf{z}_n)|^2.$$

Перейдем к нормированным векторам $\mathbf{z}_n/\|\mathbf{z}_n\|$ и учтем, что $\|\mathbf{z}_n\| \leqslant C(R,U)$. Теперь заметим, что векторы $\mathbf{z}_n/\|\mathbf{z}_n\|$ суть нормированные собственные векторы оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, отвечающие регулярным его собственным значениям, а значит, оценка для этой системы повторяет оценку для системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}}$.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 13.3 нам остается получить оценку вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}_\mathfrak{R}} |(x,\mathbf{y}_n)\|^2 \leqslant \beta(R,U)\|x\|^2 \tag{13.10}$$

для произвольного вектора $x \in \mathbb{H}$.

Вспомним, что для любого $n \in \mathbb{Z}_\mathfrak{R}$ неравенство $\Upsilon(\lambda) \leqslant \kappa$ выполнено не только на γ_n, но и для всех точек круга $|\lambda-\lambda_n^0| \leqslant d/4$, в частности, для точек λ_n. Заметим, что в утверждении 13.3 мы доказали представления (9.24) с оценками (13.2). Важно то, что константы в этих оценках зависят только от $\|P\|_{L_1}$ и ширины полосы r, которая, в свою очередь, согласно утверждению 13.4 зависит только от R и U.

Соединяя вместе эти оценки, утверждение 13.7 и лемму 12.3, выводим оценку (13.10). Теорема 13.3 доказана. □

14. Равносходимость спектральных разложений операторов $\mathcal{L}_{P,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U}$

В этом разделе мы обсудим вопросы равносходимости спектральных разложений по системе собственных и присоединенных функций регулярного оператора Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$. Начнем с необходимых обозначений.

Определение 14.1. Пусть нам даны потенциал $P \in L_1[0,\pi]$ и регулярные краевые условия U. Положим

$$d = \min_{j\neq k} |\lambda_j^0 - \lambda_k^0|/4$$

в сильно регулярном случае и $d = 1/8$ в слабо регулярном случае.

Выберем число N_0 минимальным среди всех натуральных индексов N, для которых выполнены следующие два условия:

1) для всех n, $|n| \geqslant N$, выполнены неравенства $|\lambda_{2n}-\lambda_{2n}^0| < d$ и $|\lambda_{2n+1}-\lambda_{2n+1}^0| < d$;
2) для всех целых чисел $n \in [-2N+2, 2N-1]$ выполнены неравенства

$$\operatorname{Re}\lambda_{-2N+2}^0 - d < \operatorname{Re}\lambda_n < \operatorname{Re}\lambda_{2N-1}^0 + d.$$

Поскольку $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$, $|n| \to \infty$, то номер N_0 корректно определен.

В разделе 10 мы уже давали определение спектральных проекторов $\mathcal{P}_n$ для случая слабо регулярных краевых условий. Перенесем это определение и на сильно регулярный случай.

Определение 14.2. Пусть число N_0 определено выше, а $|n| > N_0$. В сильно регулярном случае определим контур γ_n как объединение двух окружностей $|\lambda-\lambda_{2n}^0| = d$ и $|\lambda-\lambda_{2n+1}^0| = d$, ориентированных против часовой стрелки.

В слабо регулярном случае все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны, а именно $\lambda_{2n}^0 = \lambda_{2n+1}^0$, $n \in \mathbb{Z}$, и в качестве γ_n мы выберем одну окружность $|\lambda-\lambda_{2n}^0| = 1/8$, ориентированную так же. Обозначим

$$\mathcal{P}_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} \mathfrak{R}(\lambda)d\lambda, \quad n = \pm(N_0+1),\, \pm(N_0+2), \ldots, \quad \mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}.$$

Теперь мы построим семейство контуров $\Gamma_{m,b}$ в комплексной плоскости.

Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака, N_0 и d — числа из определения 14.1, а полоса $\Pi_a = \{\lambda : |\operatorname{Im}\lambda| < a\}$ содержит все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и λ_n^0 оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Зафиксируем произвольное положительное число $b \geqslant a + 2d$. Теперь для каждого натурального m, $m \geqslant N_0$, определим контур $\Gamma_{m,b}$ вначале как прямоугольник с вершинами

$$\operatorname{Re}\lambda_{2m+1}^0 \pm ib \quad \text{и} \quad \operatorname{Re}\lambda_{-2m}^0 \pm ib,$$

ориентированный против часовой стрелки. Легко видеть, что контур $\Gamma_{m,b}$ пересекает круг

$$U(\lambda_{2m+1}^0, 2d) := \{\lambda : |\lambda - \lambda_{2m+1}^0| < 2d\}$$

по диаметру.

Мы деформируем контур $\Gamma_{m,b}$, заменим этот диаметр на правую полуокружность

$$\{\lambda : |\lambda - \lambda^0_{2m+1}| = 2d, \operatorname{Re}\lambda \geqslant \operatorname{Re}\lambda^0_{2m+1}\}.$$

Заметим, что круги $U(\lambda^0_{2m+1}, 2d)$ и $U(\lambda_{2m}, 2d)$ не пересекаются по определению числа d, но контур $\Gamma_{m,b}$ может пересечь и круг $U(\lambda^0_{2m}, 2d)$ (по вертикальной хорде). Тогда мы заменим эту хорду на соответствующую правую дугу окружности

$$\{\lambda : |\lambda - \lambda^0_{2m}| = 2d, \operatorname{Re}\lambda \geqslant \operatorname{Re}\lambda^0_{2m+1}\}.$$

Наконец, контур $\Gamma_{m,b}$ может пересечь круг $U(\lambda^0_{2m+2}, 2d)$ по вертикальной хорде. Тогда мы заменим эту хорду на *левую* дугу

$$\{\lambda : |\lambda - \lambda^0_{2m+2}| = 2d, \operatorname{Re}\lambda \leqslant \operatorname{Re}\lambda^0_{2m+1}\}.$$

Аналогично поступим для собственных значений λ^0_{-2m}, λ^0_{-2m+1} и λ^0_{-2m-1}, заменив хорды на левую, левую и правую дуги соответственно.

Заметим еще, что контур $\Gamma_{m,b}$ не может пересекать никакие другие круги $U(\lambda^0_n, 2d)$ в силу определения числа d. Полученный в результате контур (именно его мы, начиная с этого места, будем обозначать $\Gamma_{m,b}$) охватывает в точности собственные значения λ^0_n с номерами $n \in [-2m, 2m+1]$. Кроме того, по построению, имеем

$$\operatorname{dist}(\lambda^0_n, \Gamma_{m,b}) \geqslant 2d \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{14.1}$$

Далее, заметим, что все собственные значения λ_n с номерами $n \in [-2m+2, 2m-1]$ удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda^0_{-2m+2} - d \leqslant \operatorname{Re}\lambda_n \leqslant \operatorname{Re}\lambda^0_{2m-1} + d.$$

Действительно, для всех $n \in [-2N_0+2, 2N_0-1]$ это следует из условия (2) определения 14.1, а для других $n \in [-2m+2, 2m-1]$ — из условия (1) того же определения.

По построению, для всех точек $\lambda \in \Gamma_{m,b} \cap \Pi_a$ выполнено:

$$\operatorname{Re}\lambda^0_{-2m} - 2d \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \operatorname{Re}\lambda^0_{2m+1} + 2d.$$

Поскольку по определению числа d

$$|\lambda^0_{2m-1} - \lambda^0_{2m+1}| \geqslant 4d \quad \text{и} \quad |\lambda^0_{-2m+2} - \lambda^0_{-2m}| \geqslant 4d,$$

то отсюда следует, что все собственные значения λ_n с номерами $n \in [-2m+2, 2m-1]$ лежат внутри контура $\Gamma_{m,b}$ и удалены от него как минимум на d.

Поскольку при всех остальных целых n выполнено $|\lambda_n - \lambda^0_n| < d$, а $\operatorname{dist}(\lambda^0_n, \Gamma_{m,b}) \geqslant 2d$, то

$$\operatorname{dist}(\lambda_n, \Gamma_{m,b}) \geqslant d \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{14.2}$$

Кроме того, по построению контура, числа λ_{2m}, λ_{2m+1}, λ_{-2m} и λ_{-2m+1} лежат внутри $\Gamma_{m,b}$, а все числа λ_n с номерами $n \geqslant 2m+2$ и $n \leqslant -2m-1$ лежат вне $\Gamma_{m,b}$, так что контур $\Gamma_{m,b}$ охватывает в точности собственные значения λ_n с номерами $n \in [-2m, 2m+1]$.

Определение 14.3. Положим

$$S_m := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{m,b}} \mathfrak{R}(\lambda)\, d\lambda, \qquad m = N_0,\, N_0+1, \ldots.$$

Из определения следует, что

$$S_m = S_{N_0} + \sum_{|n|=N_0+1}^{m} P_n, \quad m > N_0.$$

Пусть $\mathcal{H}_n = \operatorname{Rn}\mathcal{P}_n$, $|n| > N_0$, — корневые подпространства оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, введенные в определении 14.2. Определим дополнительно подпространство $\mathcal{H}_0 := \operatorname{Rn} S_{N_0}$.

Пусть N_0 — натуральное число, введенное в определении 14.1, а $\mathcal{P}_n$ и S_m — операторы, введенные в определениях 10.2 и 14.3. Заметим, что операторы S_m можно задать в виде

$$S_m(\mathbf{f}) = \sum_{|n|\leqslant m} \Big[\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_{2n}\rangle \mathbf{y}_{2n} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_{2n+1}\rangle \mathbf{y}_{2n+1}\Big], \tag{14.3}$$

где $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, построенная в определении 12.2, а $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к ней система.

Для удобства мы определим с помощью последнего равенства операторы S_m для всех $0 \leqslant m \leqslant N_0 - 1$. Положим также

$$S_m^0(\mathbf{f}) = \sum_{|n|\leqslant m} \Big[\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_{2n}^0\rangle \mathbf{y}_{2n}^0 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_{2n+1}^0\rangle \mathbf{y}_{2n+1}^0\Big], \quad m = 0, 1, \ldots, \tag{14.4}$$

где $\{\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом, а $\{\mathbf{z}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к ней система.

Легко видеть, что $S_m(\mathbf{f})$ и $S_m^0(\mathbf{f})$ представляют собой частичные суммы разложений функции $\mathbf{f}$ по системам $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ соответственно. Под равносходимостью этих разложений мы будем понимать утверждения вида

$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Такое определение равносходимости позволит нам вести рассуждения одновременно и в случае сильной, и в случае слабой регулярности. Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема 14.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом вида* (3.8) $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty]$. *Пусть $\mathbf{f} \in L_\mu[0,\pi]$, где $\mu \in [1,\infty]$. Тогда*

$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_{L_\nu[0,\pi]} \longrightarrow 0 \quad \text{при } m \to +\infty, \tag{14.5}$$

если индекс $\nu \in [1,\infty]$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant 1, \tag{14.6}$$

за исключением случая $\varkappa = \nu = \infty$, $\mu = 1$.

Замечание 14.1. Сразу же отметим, что здесь мы не разбираем предельный случай $\varkappa = 1$ — он более сложен. Заметим, однако, что из теорем о базисности Рисса собственных и присоединенных функций сразу следует равносходимость (14.5) для случая $\varkappa = 1$, $\mu = \nu = 2$.

Замечание 14.2. Поскольку все слагаемые в суммах $S_m(\mathbf{f})$ и $S_m^0(\mathbf{f})$ абсолютно непрерывны, то при $\nu = \infty$ мы получаем равномерную на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость. В частности, она имеет место для случая $\varkappa = \mu = 2$.

Утверждение 14.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом вида* (3.8) $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa > 1$. *Для любой непрерывной на $[0,\pi]$ функции $\mathbf{f}$, имеющей ограниченную вариацию на $[0,\pi]$ и удовлетворяющей краевым условиям $U(\mathbf{f}) = 0$, имеет место равномерная на $[0,\pi]$ сходимость $S_m(\mathbf{f}) \to \mathbf{f}$ при $m \to \infty$.*

Доказательство. Это утверждение следует из основной теоремы (случай $\mu = \nu = \infty$) и утверждения 4.4. □

Замечание 14.3. При доказательстве основной теоремы можно ограничиться случаем $\mu \leqslant \nu$. Действительно, зафиксируем индексы $\varkappa$ и ν и заметим, что при $\mu > \nu$

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} < 1.$$

Тогда мы можем взять $\mu' = \nu$, неравенство

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1'}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant 1$$

будет выполнено, и из основной теоремы будет следовать равносходимость для любой функции $\mathbf{f} \in L_{\mu'}[0,\pi] \supset L_\mu[0,\pi]$.

Замечание 14.4. При доказательстве основной теоремы можно не рассматривать случай $\mu = \nu = \infty$. Действительно, выбрав

$$\mu' = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}$$

(напомним, что $\varkappa > 1$), получим

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1'}{\mu} - \frac{1}{\nu} = 1,$$

и из основной теоремы будет следовать равносходимость для любой функции $\mathbf{f} \in L_{\mu'}[0,\pi] \supset L_\infty[0,\pi]$.

Замечание 14.5. Аналогично, можно не рассматривать случай $\mu = \nu = 1$. Действительно, выбрав $\nu' = \varkappa > 1$, получим

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1'}{\nu} = 1,$$

и из основной теоремы будет следовать равносходимость для любой функции $\mathbf{f} \in L_1[0,\pi]$ по норме $\|\cdot\|_{\nu'}$, а значит, и по норме $\|\cdot\|_1 \prec \|\cdot\|_{\nu'}$.

Замечание 14.6. Наконец, можно не рассматривать случай $\varkappa = \infty$. Действительно, если потенциал лежит в L_∞, то он лежит в любом $L_\varkappa$, $1 < \varkappa < \infty$, и из основной теоремы следует равносходимость для любой функции $\mathbf{f} \in L_\mu[0,\pi]$ по норме $\|\cdot\|_\nu$ при всех $\mu \in [1,\infty)$,

$$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} < 1.$$

Равенство же в последнем соотношении может достигаться лишь при $\mu = 1$, $\nu = \infty$, что исключено.

Итак, всюду далее будем считать, что

(i) $\varkappa \in (1,\infty)$;
(ii) $\nu \in (1,\infty]$;
(iii) $\mu \in [1,\infty)$ *и* $\mu \leqslant \nu$;
(iv) $\dfrac{1}{\varkappa} + \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\nu} \leqslant 1$;
(v) *случай* $\begin{cases} \varkappa = \nu = \infty, \\ \mu = 1 \end{cases}$ *исключен.*

Следствие 14.1. *В случае оператора Дирака с потенциалом P общего вида и регулярными условиями $U = (C, D)$ утверждение основной теоремы сохраняется, с той лишь разницей, что в определении* (14.4) *последовательности $\{S_m^0\}$ в качестве системы $\{\mathbf{y}_n^0\}$ следует взять систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P_0,\widetilde{U}}$ с потенциалом*

$$P_0(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_4(x) \end{pmatrix}$$

и краевыми условиями

$$\widetilde{U} = (\widetilde{C}, \widetilde{D}), \quad \widetilde{C} = C, \quad \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int\limits_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))dt\right) D.$$

При этом мы, как и ранее, считаем, что собственные функции системы $\{\mathbf{y}_n^0\}$ имеют единичную в пространстве $\mathbb{H}$ норму, а система $\{\mathbf{z}_n^0\}$ биортогональна к $\{\mathbf{y}_n^0\}$.

Доказательство. Пусть

$$W = \begin{pmatrix} e^{i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\psi(x)} \end{pmatrix},$$

$$\varphi(x) = \gamma x - \int\limits_0^x p_1(t)dt, \quad \psi(x) = \int\limits_0^x p_4(t)dt - \gamma x, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi (p_1(t) + p_4(t))dt$$

— оператор, введенный в доказательстве утверждения 3.3. Тогда $\mathcal{L}_{P,U} = W\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}}W^{-1} + \gamma I$, где

$$\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\psi(x)-\varphi(x))}, \qquad \widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\varphi(x)-\psi(x))}.$$

Легко видеть, что векторы $\widetilde{\mathbf{y}}_n = W^{-1}\mathbf{y}_n$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют систему собственных и присоединенных функций для оператора $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}}$.

Через $\{\widetilde{\mathbf{z}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обозначим биортогональную систему. Заметим, что

$$W^{-1}\ell_{P_0}(W\mathbf{f}) = W^{-1}BW\mathbf{f}' + \left(W^{-1}P_0W + W^{-1}BW'\right)\mathbf{f} = \\ = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\mathbf{f}' + \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_4 \end{pmatrix}\mathbf{f} + \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & -\psi' \end{pmatrix}\mathbf{f} = l_0(\mathbf{f}) + \gamma\mathbf{f}.$$

Таким образом, $\mathcal{L}_{P_0,U} = W\mathcal{L}_{0,\widetilde{U}}W^{-1} + \gamma I$.

Обозначим через $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{0,\widetilde{U}}$, а через $\{\widetilde{\mathbf{z}}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональную к ней систему.

Тогда векторы

$$\{\mathbf{y}_n^0 = W\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

образуют систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P_0,U}$, а система

$$\{\mathbf{z}_n^0 = W\widetilde{\mathbf{z}}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

будет ей биортогональна.

В силу основной теоремы,

$$\left\|\sum_{|n|\leqslant m}\Big[\langle\mathbf{f},\widetilde{\mathbf{z}}_{2n}\rangle\widetilde{\mathbf{y}}_{2n} + \langle\mathbf{f},\widetilde{\mathbf{z}}_{2n+1}\rangle\widetilde{\mathbf{y}}_{2n+1}\Big] - \sum_{|n|\leqslant m}\Big[\langle\mathbf{f},\widetilde{\mathbf{z}}_{2n}^0\rangle\widetilde{\mathbf{y}}_{2n}^0 + \langle\mathbf{f},\widetilde{\mathbf{z}}_{2n+1}^0\rangle\widetilde{\mathbf{y}}_{2n+1}^0\Big]\right\|_{L_\nu} \to 0$$

при $m \to \infty$ для любой функции $\mathbf{f} \in L_\mu$. Подставляя в это соотношение выражения для функций $\widetilde{\mathbf{y}}_n$, $\widetilde{\mathbf{z}}_n$, $\widetilde{\mathbf{y}}_n^0$ и $\widetilde{\mathbf{z}}_n^0$, получаем

$$\Bigg\|\sum_{|n|\leqslant m}W^{-1}\Big[\langle W\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n}\rangle\mathbf{y}_{2n} + \langle W\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n+1}\rangle\mathbf{y}_{2n+1}\Big] - \\ - \sum_{|n|\leqslant m}W^{-1}\Big[\langle W\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n}^0\rangle\mathbf{y}_{2n}^0 + \langle W\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n+1}^0\rangle\mathbf{y}_{2n+1}^0\Big]\Bigg\|_{L_\nu} \to 0, \quad m \to \infty.$$

Поскольку оператор W является изоморфизмом как в пространстве L_μ, так и в пространстве L_ν, то отсюда вытекает утверждение следствия. □

Функции $\mathbf{y}_n^0$ можно выписать явно:

$$\mathbf{y}_n^0 = \begin{pmatrix} y_{1,n}^0(x) \\ \\ y_{2,n}^0(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} y_{1,n}^0(x) = \widetilde{y}_{1,n}^0(x)\cdot\exp\{-i\int\limits_0^x p_1(t)dt\}, \\ y_{2,n}^0(x) = \widetilde{y}_{2,n}^0(x)\cdot\exp\{i\int\limits_0^x p_4(t)dt\}. \end{cases}$$

Такие же представления справедливы и для функций $\mathbf{z}_n^0$.

Доказательство основной теоремы мы проведем по классической схеме. Нам необходимо доказать сильную сходимость к нулю последовательности операторов $S_m - S_m^0$, действующих из пространства $L_\mu[0,\pi]$ в $L_\nu[0,\pi]$.

Для этого достаточно проверить ограниченность норм этих операторов величиной, не зависящей от m, и сходимость

$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_{L_\nu} \to 0$$

на всюду плотном в $L_\mu[0,\pi]$ множестве функций $\mathbf{f}$.

В качестве этого множества мы выберем линейную оболочку системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ — здесь мы воспользуемся утверждением 4.4 и утверждением 14.2, доказанным ниже.

Наибольшие сложности вызовет доказательство равномерной ограниченности семейства операторов $S_m - S_m^0$, $m \in \mathbb{N}$. Здесь мы воспользуемся представлением

$$S_m - S_m^0 := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{m,b}} (\mathfrak{R}(\lambda) - \mathfrak{R}_0(\lambda))\, d\lambda, \qquad m = 0,\, N_0,\, N_0+1, \ldots$$

и разложением

$$\mathfrak{R}(\lambda) - \mathfrak{R}_0(\lambda) = -\mathfrak{R}_0 P \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_0 P \mathfrak{R}_0 P \mathfrak{R}_0 + \ldots.$$

В этом разложении, в свою очередь, наибольшие трудности нам доставит оценка первого слагаемого (остальные слагаемые мы оценим единым образом). Здесь ключевую роль будет играть явный вид функции Грина невозмущенного оператора (4.6)-(4.7) и оценки операторов типа Харди.

При этом мы будем пользоваться теоремой 17.I об интерполяции линейных операторов.

Теперь докажем утверждение о полноте системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $(L_\alpha[0,\pi])^2$, $\alpha \in [1,\infty)$.

Этот результат для случая невозмущенного регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ уже сформулирован в утверждении 4.5. Здесь мы перенесем его на случай регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с произвольным суммируемым потенциалом.

Утверждение 14.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с суммируемым потенциалом вида* (3.8). *Система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ его собственных и присоединенных функций полна в пространстве $(L_\alpha[0,\pi])^2$ для любого $\alpha \in [1,\infty)$.*

Доказательство. Предположим противное: система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ не полна в $(L_\alpha[0,\pi])^2$. Тогда, согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала, найдется функция $\mathbf{f} \in (L_{\alpha'}[0,\pi])^2$, $1/\alpha' + 1/\alpha = 1$, для которой

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{y}_n \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{g} \in (L_\alpha[0,\pi])^2$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) := \langle \mathfrak{R}^*(\lambda)\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle,$$

определенную в области $\mathbb{C} \setminus \{\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (здесь оператор $\mathfrak{R}^*(\lambda)$ действует в пространстве $(L'_\alpha[0,\pi])^2$).

Согласно построению биортогональной системы, эта функция имеет устранимые особенности в точках $\overline{\lambda_n}$, т. е. после доопределения в них является целой.

Обозначим через $U_\delta(\lambda)$ открытый круг с центром λ радиуса δ. В силу теоремы 10.1 для любого $\delta > 0$ в области $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(\overline{\lambda_n})$ справедлива оценка

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant M \|\mathbf{f}\|_{\alpha'} \|\mathbf{g}\|_\alpha,$$

где M не зависит от λ.

Пусть d — число, введенное в определении 14.1. Тогда круги $U_d(\overline{\lambda_n^0})$ в сильно регулярном случае не пересекаются, а в слабо регулярном случае разбиваются на пары, не пересекающиеся между собой. Этим же свойством, очевидно, обладают и круги $U_d(\overline{\lambda_n})$ для всех n таких, что

$$|\overline{\lambda_n} - \overline{\lambda_n^0}| < \frac{d}{4}.$$

В силу теоремы об асимптотике собственных значений, последнее неравенство выполнено при $|n| \geqslant N$ для некоторого N.

Таким образом, вне некоторого круга $\{|z| \leqslant R\}$ множество точек λ, для которых неравенство

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant M \|\mathbf{f}\|_{\alpha'} \|\mathbf{g}\|_\alpha$$

еще не доказано, представляет собой счетное объединение ограниченных непересекающихся областей. По принципу максимума, это неравенство будет справедливо в каждой из данных областей, значит, и всюду в области $\{|z| > R\}$, а следовательно, и во всей комплексной плоскости.

Из теоремы Лиувилля следует, что функция $\Phi(\lambda)$ является постоянной. Тогда

$$\Phi'(\lambda) = \langle (\mathfrak{R}^*(\lambda))'\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle (\mathfrak{R}^*(\lambda))^2 \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle \equiv 0.$$

Поскольку функция $\mathbf{g} \in L_\alpha$ выбиралась произвольной, то

$$(\mathfrak{R}^*(\lambda))^2 \mathbf{f} \equiv 0,$$

откуда $\mathbf{f} = 0$. Полнота системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ доказана. □

Доказательство теоремы 14.1.
Шаг 1. Центральной частью доказательства является оценка нормы

$$\|S_m - S_m^0\|_{\mu\to\nu}.$$

В силу определения 14.3,

$$S_m - S_m^0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{m,b}} (\mathfrak{R}(\lambda) - \mathfrak{R}_0(\lambda))\, d\lambda, \tag{14.7}$$

где $m \geqslant N_0$, а N_0 введено в определении 14.1.

Параметр b контура $\Gamma_{m,b}$ мы выберем следующим образом. Пусть a — число, введенное в утверждении 10.2, а d введено в определении 14.1. Обозначим для сокращения записи

$$c = a + 2d, \qquad c_+ = \operatorname{Re}\lambda^0_{2m+1} \qquad \text{и} \qquad c_- = \operatorname{Re}\lambda^0_{-2m}.$$

Заметим теперь, что $-1 + \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\nu} < 0$ за исключением случая $\mu = 1$, $\nu = \infty$, который невозможен в силу условий (iv) и (v) основной теоремы. Кроме того, из условия (iii) следует, что

$$-1 + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \geqslant -1.$$

Положим

$$b := \max\{c;\ |c_+ - c_-|^{\frac{1}{1-1/\mu+1/\nu}}\}. \tag{14.8}$$

Контур $\Gamma_{m,b}$ мы разобьем на части

$$\Gamma_{m,b} = [c_+ - ib, c_+ - ic] \cup [c_+ - ic \rightsquigarrow c_+ + ic] \cup [c_+ + ic, c_+ + ib] \cup [c_+ + ib, c_- + ib] \cup$$
$$\cup [c_- + ib, c_- + ic] \cup [c_- + ic \rightsquigarrow c_- - ic] \cup [c_- - ic, c_- - ib] \cup [c_- - ib, c_+ - ib], \tag{14.9}$$

обозначив через $[c_+ - ic \rightsquigarrow c_+ + ic]$ деформированный (так, как это описано в определении $\Gamma_{m,b}$) отрезок $[c_+ - ic, c_+ + ic]$ и, соответственно, через $[c_- + ic \rightsquigarrow c_- - ic]$ деформированный отрезок $[c_- + ic, c_- - ic]$.

Теперь мы проведем оценку нормы $\|\cdot\|_{\mu\to\nu}$ интеграла (14.7) на каждом участке контура по отдельности (напомним, что нам достаточно оценить эту норму величиной, не зависящей от индекса m).

Оценки для второго и шестого участка (здесь и далее мы нумеруем части контура $\Gamma_{m,b}$ в том порядке, в котором они входят в разбиение (14.9)) получить легко. В силу неравенств (14.1) и (14.2) и последнего утверждения теоремы 10.1 найдется такое число C, зависящее от потенциала и краевых условий, но не зависящее от m, что

$$|G(t,x,\lambda)| \leqslant C \qquad \text{и} \qquad |G_0(t,x,\lambda)| \leqslant C \qquad \forall t,x \in [0,\pi],\ \lambda \in \Gamma_{m,b}.$$

Тогда

$$\|\mathfrak{R}(\lambda)\|_{\mu\to\nu} \leqslant 2\pi C \quad \text{и} \quad \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\mu\to\nu} \leqslant 2\pi C$$

на контуре $\Gamma_{m,b}$.

Поскольку длины кривых $[c_+ - ic \rightsquigarrow c_+ + ic]$ и $[c_- + ic \rightsquigarrow c_- - ic]$ не превосходят $2(a+2d) + 6\pi d$, то

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{[c_+ - ic \rightsquigarrow c_+ + ic]} + \int\limits_{[c_- + ic \rightsquigarrow c_- - ic]} \right) (\mathfrak{R}(\lambda) - \mathfrak{R}_0(\lambda))\, d\lambda \right\|_{\mu\to\nu} \leqslant 8C(a + (3\pi + 2)d). \tag{14.10}$$

Теперь проведем оценки для четвертого и восьмого отрезка из разбиения (14.9). Здесь мы воспользуемся оценками (4.10) и (10.12) при $\alpha = \mu$ и $\beta = \nu$.

В силу определения (14.8) числа b имеем

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{[c_+ + ib, c_- + ib]} + \int\limits_{[c_- - ib, c_+ - ib]} \right) (\mathfrak{R}(\lambda) - \mathfrak{R}_0(\lambda))\, d\lambda \right\|_{\mu\to\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(C_0 b^{-1+1/\mu-1/\nu} + 2C_0 b^{-1+1/\mu-1/\nu}) \cdot 2|c_+ - c_-|}{2\pi} \leqslant \frac{3C_0}{\pi}. \quad (14.11)$$

Оценка нормы интеграла (14.7) для оставшихся частей контура $\Gamma_{m,b}$ существенно сложнее. Здесь мы воспользуемся разложением (10.10), из которого следует, что

$$\mathfrak{R}(\lambda) - \mathfrak{R}_0(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^n \mathfrak{R}_0(\lambda), \qquad |\operatorname{Im}\lambda| \geqslant a. \quad (14.12)$$

Выделим отдельно первое слагаемое этой суммы — его мы оценим позже. Для остальных слагаемых с учетом оценок (10.11) имеем

$$\left\| \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{[c_+ + ic, c_+ + ib]} + \int\limits_{[c_- + ib, c_- + ic]} + \int\limits_{[c_- - ic, c_- - ib]} + \int\limits_{[c_+ - ib, c_+ - ic]} \right) \sum_{n=2}^{\infty} (-\mathfrak{R}_0(\lambda)P)^n \mathfrak{R}_0(\lambda)\, d\lambda \right\|_{\mu\to\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} C_0^{n+1} \cdot \|P\|_{\varkappa}^n \cdot \int\limits_c^b \tau^{-2+1/\varkappa+1/\mu-1/\nu+(n-1)(-1+1/\varkappa)}\, d\tau$$

(здесь и далее мы будем обозначать $\lambda = \sigma + i\tau$). В силу условия (iv) основной теоремы и определения (10.13) числа a, последняя сумма не превосходит

$$\frac{2C_0^2\|P\|_{\varkappa}}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} (C_0\|P\|_{\varkappa})^{n-1} \int\limits_a^b \tau^{-1+(n-1)(-1+1/\varkappa)}\, d\tau \leqslant \quad (14.13)$$

$$\leqslant \frac{2C_0^2\|P\|_{\varkappa}}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(C_0\|P\|_{\varkappa} a^{-1+1/\varkappa})^{n-1}}{(n-1)(1-1/\varkappa)} \leqslant \frac{2C_0^2\|P\|_{\varkappa}}{\pi(1-1/\varkappa)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{1-n}}{n-1} = \frac{2\ln 2 \cdot C_0^2\|P\|_{\varkappa}}{\pi(1-1/\varkappa)}.$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь первое слагаемое в сумме (14.12). Согласно неравенству (10.11), норму $\|\mathfrak{R}_0(\lambda)P\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{\mu\to\nu}$ можно оценить величиной

$$C_0^2\|P\|_{\varkappa} |\operatorname{Im}\lambda|^{-2+1/\varkappa+1/\mu-1/\nu}.$$

Видно, что если условие (iv) основной теоремы заменить на строгое неравенство, то интеграл по вертикальному лучу от получившейся функции сходится, и мы можем провести оценки так же, как в (14.13).

Однако если неравенство (14.6) обращается в равенство, мы приходим к расходящемуся интегралу. Наша цель — получить для оператора

$$\int \mathfrak{R}_0(\lambda)P\mathfrak{R}_0(\lambda)\, d\lambda$$

более тонкие оценки.

Прежде всего докажем, что достаточно рассмотреть случай верхней полуплоскости

$$\int\limits_c^b \mathfrak{R}_0(\sigma + i\tau)P\mathfrak{R}_0(\sigma + i\tau)\, d\tau.$$

Действительно, учитывая, что $\mu \leqslant \nu$, $\mu \in [1, \infty)$, $\nu \in (1, \infty]$, в силу утверждения 17.1 получим

$$\left\| \int\limits_{[\sigma - ib, \sigma - ic]} \mathfrak{R}_0(\lambda)P\mathfrak{R}_0(\lambda)\, d\lambda \right\|_{L_\mu \to L_\nu} = \left\| \left(\int\limits_{[\sigma - ib, \sigma - ic]} \mathfrak{R}_0(\lambda)P\mathfrak{R}_0(\lambda)\, d\lambda \right)^* \right\|_{L_{\nu'} \to L_{\mu'}} =$$

$$= \left\| \left(\int\limits_c^b (\mathcal{L}_{0,U} - (\sigma - i\tau)I)^{-1} P (\mathcal{L}_{0,U} - (\sigma - i\tau)I)^{-1}\, d\tau \right)^* \right\|_{L_{\nu'} \to L_{\mu'}} = \quad (14.14)$$

$$= \left\| \int_c^b (\mathcal{L}_{0,U^*} - (\sigma + i\tau)I)^{-1} P^* (\mathcal{L}_{0,U^*} - (\sigma + i\tau)I)^{-1}\, d\tau \right\|_{L_{\nu'} \to L_{\mu'}}.$$

Заметим, что $\mu' \in (1, \infty]$, $\nu' \in [1, \infty)$, $\nu' \leqslant \mu'$,

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\mu'} = \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant 1,$$

и исключен случай

$$\begin{cases} \varkappa = \mu' = \infty, \\ \nu' = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \varkappa = \nu = \infty, \\ \mu = 1. \end{cases}$$

Заметим еще, что краевые условия U^* по-прежнему регулярны, а потенциал $P^* \in L_\varkappa$ по-прежнему имеет вид (3.8).

Таким образом, получив в условиях теоремы оценку для интеграла

$$\int_c^b \mathfrak{R}_0(\sigma + i\tau) P \mathfrak{R}_0(\sigma + i\tau)\, d\tau$$

в верхней полуплоскости величиной, не зависящей от b и σ, мы в силу (14.14) получим оценку и для случая нижней полуплоскости. Отсюда будет следовать ограниченность нормы интеграла (14.7) сразу на первом, третьем, пятом и седьмом участках контура $\Gamma_{m,b}$.

Покажем теперь, что дальнейшие рассуждения можно проводить с *упрощенной функцией Грина*

$$\widetilde{G}_0(t, x, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{i}{J_{14}} \begin{pmatrix} J_{14} e^{i\lambda(x-t)} & -J_{24} e^{i\lambda(x+t)} \\ -J_{13} e^{i\lambda(2\pi - x - t)} & -J_{12} e^{i\lambda(\pi + t - x)} \end{pmatrix}, & t < x, \\ \dfrac{i}{J_{14}} \begin{pmatrix} -J_{34} e^{i\lambda(x-t+\pi)} & -J_{24} e^{i\lambda(x+t)} \\ -J_{13} e^{i\lambda(2\pi - x - t)} & J_{14} e^{i\lambda(t-x)} \end{pmatrix}, & t > x. \end{cases} \tag{14.15}$$

Для этого обозначим через

$$\widetilde{\mathfrak{R}}_0(\lambda) : \mathbf{f} \mapsto \int_0^\pi \widetilde{G}_0(t, x, \lambda) \mathbf{f}(t)\, dt$$

интегральный оператор, который мы будем называть *упрощенной резольвентой*, и оценим

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda) - \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} = \max_{1 \leqslant j,\, k \leqslant 2}\ \max_{t,\, x \in [0,\pi]} |g^0_{jk}(t, x, \lambda) - \widetilde{g}^0_{jk}(t, x, \lambda)|, \qquad \operatorname{Im} \lambda = \tau \geqslant a + 2d.$$

С учетом представлений (4.5) и (4.6), определения (14.15), равенства (4.3) и оценки (4.11) имеем

$$|g^0_{11}(t, x, \lambda) - \widetilde{g}^0_{11}(t, x, \lambda)| = \left| \frac{e^{i\lambda(x-t)}}{\Delta_0(\lambda)} \left[J_{23} e^{i\pi\lambda} - J_{34} \right] \right| \leqslant C e^{-\pi\tau}, \qquad t < x;$$

$$|g^0_{11}(t, x, \lambda) - \widetilde{g}^0_{11}(t, x, \lambda)| = \left| \frac{e^{i\lambda(x-t+\pi)}}{J_{14}\Delta_0(\lambda)} \left[J_{23} J_{14} + J_{12} J_{34} + J_{34}^2 - J_{34} J_{23} e^{i\pi\lambda} \right] \right| \leqslant C e^{-\pi\tau}, \qquad t > x;$$

$$|g^0_{12}(t, x, \lambda) - \widetilde{g}^0_{12}(t, x, \lambda)| = \left| \frac{J_{24} e^{i\lambda(x+t)}}{J_{14}\Delta_0(\lambda)} \left[J_{12} + J_{34} - J_{23} e^{i\pi\lambda} \right] \right| \leqslant C e^{-\pi\tau};$$

$$|g^0_{21}(t, x, \lambda) - \widetilde{g}^0_{21}(t, x, \lambda)| = \left| \frac{J_{13} e^{i\lambda(2\pi - x - t)}}{J_{14}\Delta_0(\lambda)} \left[J_{12} + J_{34} - J_{23} e^{i\pi\lambda} \right] \right| \leqslant C e^{-\pi\tau};$$

$$|g^0_{22}(t, x, \lambda) - \widetilde{g}^0_{22}(t, x, \lambda)| = \left| \frac{e^{i\lambda(\pi + t - x)}}{J_{14}\Delta_0(\lambda)} \left[J_{23} J_{14} + J_{12}^2 + J_{12} J_{34} - J_{12} J_{23} e^{i\pi\lambda} \right] \right| \leqslant C e^{-\pi\tau}, \qquad t < x;$$

$$|g^0_{22}(t, x, \lambda) - \widetilde{g}^0_{22}(t, x, \lambda)| = \left| \frac{e^{i\lambda(t-x)}}{\Delta_0(\lambda)} \left[-J_{12} + J_{23} e^{i\pi\lambda} \right] \right| \leqslant C e^{-\pi\tau}, \qquad t > x,$$

где константа C зависит только от краевых условий. Воспользовавшись теоремой 4.5, получим

$$\|\mathfrak{R}_0(\lambda) - \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} \leqslant Ce^{-\pi\tau}, \qquad \|\mathfrak{R}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} \leqslant C, \qquad \|\widetilde{\mathfrak{R}}_0(\lambda)\|_{1\to\infty} \leqslant C.$$

Тогда

$$\left\|\int\limits_c^b \mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau)P\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau)\,d\tau\right\|_{\mu\to\nu} - \left\|\int\limits_c^b \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)P\widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)\,d\tau\right\|_{\mu\to\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int\limits_c^b \mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau)P\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau)\,d\tau - \int\limits_c^b \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)P\widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)\,d\tau\right\|_{\mu\to\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\int\limits_c^b (\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau) - \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau))P\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau)\,d\tau - \right.$$

$$\left. - \int\limits_c^b \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)P(\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau) - \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau))\,d\tau\right\|_{\mu\to\nu} \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^2 \int\limits_c^b \|\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau) - \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)\|_{1\to\infty}\cdot\|P\|_{\varkappa}\cdot\|\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau)\|_{1\to\infty}\,d\tau +$$

$$+(2\pi)^2 \int\limits_c^b \|\widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)\|_{1\to\infty}\cdot\|P\|_{\varkappa}\cdot\|\mathfrak{R}_0(\sigma+i\tau) - \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma+i\tau)\|_{1\to\infty}\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 8\pi^2C^2\|P\|_{\varkappa}\int\limits_c^b e^{-\pi\tau}\,d\tau \leqslant 8\pi C^2\|P\|_{\varkappa}.$$

Шаг 3. Итак, нам необходимо доказать ограниченность выражения

$$\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_0^\pi\int\limits_c^b \widetilde{G}_0(t,x,\sigma+i\tau)P(t)\widetilde{G}_0(s,t,\sigma+i\tau)d\tau\,\mathbf{f}(s)ds\,dt\,\mathbf{g}(x)dx, \qquad \mathbf{f}\in L_\mu[0,\pi], \quad \mathbf{g}\in L_{\nu'}[0,\pi], \tag{14.16}$$

где $\mu\in[1,\infty)$, $\nu\in(1,\infty]$, $\mu\leqslant\nu$, $1/\nu+1/\nu'=1$, величиной, не зависящей от b и σ. Возможны четыре случая:

a) $0\leqslant s<t<x\leqslant\pi$;
b) $0\leqslant t<s\leqslant\pi$, $0\leqslant t<x\leqslant\pi$;
c) $\pi\geqslant s>t>x\geqslant 0$;
d) $\pi\geqslant t>s\geqslant 0$, $\pi\geqslant t>x\geqslant 0$.

Рассмотрим сначала подробно случай a). После перемножения матриц выражение, стоящее во внутреннем интеграле, примет вид

$$-\frac{1}{J_{14}^2}\begin{pmatrix}\widetilde{G}_{11}(x,t,s,\lambda) & \widetilde{G}_{12}(x,t,s,\lambda)\\ \widetilde{G}_{21}(x,t,s,\lambda) & \widetilde{G}_{22}(x,t,s,\lambda)\end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{G}_{11}(x,t,s,\lambda) = -J_{14}J_{24}e^{i\lambda(x+2t-s)}p_3(t) - J_{13}J_{14}e^{i\lambda(2\pi+x-2t-s)}p_2(t),$$

$$\widetilde{G}_{12}(x,t,s,\lambda) = J_{24}^2e^{i\lambda(x+2t+s)}p_3(t) - J_{14}J_{12}e^{i\lambda(\pi+x-2t+s)}p_2(t),$$

$$\widetilde{G}_{21}(x,t,s,\lambda) = -J_{12}J_{14}e^{i\lambda(\pi-x+2t-s)}p_3(t) + J_{13}^2e^{i\lambda(4\pi-x-2t-s)}p_2(t),$$

$$\widetilde{G}_{22}(x,t,s,\lambda) = J_{12}J_{24}e^{i\lambda(\pi-x+2t+s)}p_3(t) + J_{12}J_{13}e^{i\lambda(3\pi-x-2t+s)}p_2(t).$$

Проинтегрируем функцию $\widetilde{G}_{11}(x,t,s,\sigma+i\tau)$ по переменной τ от c до b, получим выражение

$$J_{14}J_{24}\frac{e^{(-c+i\sigma)(x+2t-s)}-e^{(-b+i\sigma)(x+2t-s)}}{x+2t-s}p_3(t)+J_{13}J_{14}\frac{e^{(-c+i\sigma)(2\pi+x-2t-s)}-e^{(-b+i\sigma)(2\pi+x-2t-s)}}{2\pi+x-2t-s}p_2(t).$$

Заметим, что первое слагаемое в нем можно оценить следующим образом:

$$\left|J_{14}J_{24}e^{i\sigma(x+2t-s)}\frac{e^{-c(x+2t-s)}-e^{-b(x+2t-s)}}{x+2t-s}p_3(t)\right|\leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x+2t-s}\leqslant C\frac{2|p_3(t)|}{x+t+s},$$

поскольку $0\leqslant s<t<x\leqslant\pi$; постоянная C зависит только от краевых условий. Аналогично второе слагаемое не превосходит величины

$$C\frac{|p_2(t)|}{2\pi+x-2t-s}\leqslant C\frac{2|p_2(t)|}{\xi+\eta+\zeta},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ \eta=\pi-t>0,\ \zeta=\pi-s>0.$$

При интегрировании остальных элементов матрицы будут получаться выражения, которые можно оценить соответственно:

$$C\frac{|p_3(t)|}{x+2t+s}\leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x+t+s},\qquad x>t>s\geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{\pi+x-2t+s}\leqslant C\frac{2|p_2(t)|}{\xi+\eta+s},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ \eta=\pi-t>0,\ s>0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{\pi-x+2t-s}\leqslant C\frac{2|p_3(t)|}{\xi+t+s},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ t>0,\ s\geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{4\pi-x-2t-s}\leqslant C\frac{|p_2(t)|}{\xi+\eta+\zeta},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ \eta=\pi-t>0,\ \zeta=\pi-s>0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{\pi-x+2t+s}\leqslant C\frac{|p_3(t)|}{\xi+t+s},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ t>0,\ s\geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{3\pi-x-2t+s}\leqslant C\frac{|p_2(t)|}{\xi+\eta+s},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ \eta=\pi-t>0,\ s\geqslant 0.$$

Таким образом, все элементы матрицы

$$\int_0^\pi\int_c^b \widetilde{G}_0(t,x,\sigma+i\tau)P(t)\widetilde{G}_0(s,t,\sigma+i\tau)d\tau dt$$

при $0\leqslant s<t<x\leqslant\pi$ представляют собой сумму двух слагаемых, каждое из которых по модулю не превосходит выражения

$$C\int_0^\pi\frac{|p(\eta)|}{\xi+\eta+\zeta}d\eta,\qquad p(\eta)\in L_\varkappa[0,\pi],\quad \xi,\zeta\in[0,\pi]. \tag{14.17}$$

В случае $0\leqslant t<s\leqslant\pi$, $0\leqslant t<x\leqslant\pi$ выражения, полученные после интегрирования по τ, оцениваются так:

$$C\frac{|p_3(t)|}{\pi+x+2t-s}\leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x+t+\zeta},\qquad x>0,\ t\geqslant 0,\ \zeta=\pi-s\geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{2\pi+x-2t-s}\leqslant C\frac{2|p_2(t)|}{\xi+\eta+\zeta},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ \eta=\pi-t>0,\ \zeta=\pi-s\geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{x+2t+s}\leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x+t+s},\qquad x>0,\ t\geqslant 0,\ s>0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{x-2t+s},\qquad x>0,\ t\geqslant 0,\ s>0;\quad t\leqslant\min\{x,s\},$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{2\pi-x+2t-s}\leqslant C\frac{|p_3(t)|}{\xi+t+\zeta},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ t\geqslant 0,\ \zeta=\pi-s\geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{4\pi-x-2t-s}\leqslant C\frac{|p_2(t)|}{\xi+\eta+\zeta},\qquad \xi=\pi-x\geqslant 0,\ \eta=\pi-t>0,\ \zeta=\pi-s\geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{\pi - x + 2t + s} \leqslant C\frac{|p_3(t)|}{\xi + t + s}, \qquad \xi = \pi - x \geqslant 0,\ t \geqslant 0,\ s > 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{2\pi - x - 2t + s} \leqslant C\frac{2|p_2(t)|}{\xi + \eta + \zeta}, \qquad \xi = \pi - x \geqslant 0,\ \eta = \pi - t > 0,\ \zeta = \pi - s \geqslant 0.$$

Значит, в случае $0 \leqslant t < s \leqslant \pi$, $0 \leqslant t < x \leqslant \pi$ все элементы матрицы

$$\int\limits_0^\pi \int\limits_c^b \widetilde{G}_0(t, x, \sigma + i\tau) P(t) \widetilde{G}_0(s, t, \sigma + i\tau)\, d\tau dt,$$

кроме одного, также можно оценить с помощью выражений вида (14.17).

Единственное исключение — слагаемое, содержащее множитель $\dfrac{|p_2(t)|}{x - 2t + s}$, $0 \leqslant t < \min\{x, s\}$. Его мы будем рассматривать отдельно.

Случай $\pi \geqslant s > t > x \geqslant 0$ аналогичен первому случаю. Здесь все элементы матрицы оцениваются следующими выражениями:

$$C\frac{|p_3(t)|}{\pi + x + 2t - s} \leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x + t + \zeta}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ \zeta = \pi - s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{3\pi + x - 2t - s} \leqslant C\frac{|p_2(t)|}{x + \eta + \zeta}, \qquad x \geqslant 0,\ \eta = \pi - t > 0,\ \zeta = \pi - s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{x + 2t + s} \leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x + t + s}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ s > 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{\pi + x - 2t + s} \leqslant C\frac{2|p_3(t)|}{x + \eta + \zeta}, \qquad x \geqslant 0,\ \eta = \pi - t > 0,\ \zeta = \pi - s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{\pi - x + 2t - s} \leqslant C\frac{2|p_3(t)|}{x + t + \zeta}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ \zeta = \pi - s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{4\pi - x - 2t - s} \leqslant C\frac{|p_2(t)|}{\xi + \eta + \zeta}, \qquad \xi = \pi - x > 0,\ \eta = \pi - t > 0,\ \zeta = \pi - s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{-x + 2t + s} \leqslant C\frac{2|p_3(t)|}{x + t + s}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ s > 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{2\pi - x - 2t + s} \leqslant C\frac{2|p_2(t)|}{\xi + \eta + \zeta}, \qquad \xi = \pi - x > 0,\ \eta = \pi - t > 0,\ \zeta = \pi - s \geqslant 0.$$

Наконец, при $\pi \geqslant t > x \geqslant 0$, $\pi \geqslant t > s \geqslant 0$ имеем оценки вида:

$$C\frac{|p_3(t)|}{x + 2t - s} \leqslant C\frac{2|p_3(t)|}{x + t + s}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{3\pi + x - 2t - s} \leqslant C\frac{|p_2(t)|}{x + \eta + \zeta}, \qquad x \geqslant 0,\ \eta = \pi - t \geqslant 0,\ \zeta = \pi - s > 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{x + 2t + s} \leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x + t + s}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{2\pi + x - 2t + s} \leqslant C\frac{|p_2(t)|}{x + \eta + s}, \qquad x \geqslant 0,\ \eta = \pi - t \geqslant 0,\ s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{-x + 2t - s}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{4\pi - x - 2t - s} \leqslant C\frac{|p_2(t)|}{\xi + \eta + \zeta}, \qquad \xi = \pi - x > 0,\ \eta = \pi - t \geqslant 0,\ \zeta = \pi - s > 0,$$

$$C\frac{|p_3(t)|}{-x + 2t + s} \leqslant C\frac{|p_3(t)|}{x + t + s}, \qquad x \geqslant 0,\ t > 0,\ s \geqslant 0,$$

$$C\frac{|p_2(t)|}{3\pi - x - 2t + s} \leqslant C\frac{|p_2(t)|}{\xi + \eta + \zeta}, \qquad \xi = \pi - x > 0,\ \eta = \pi - t \geqslant 0,\ \zeta = \pi - s > 0.$$

Здесь исключение составляет слагаемое, содержащее выражение $\dfrac{|p_3(t)|}{-x + 2t - s}$, $\max\{x, s\} < t \leqslant \pi$.

Таким образом, мы показали, что все ядра в интеграле (14.16) оцениваются выражением одного из трех типов. Теперь мы сможем применить теорему об интерполяции для получения оценки всего интеграла. Докажем сначала вспомогательное утверждение.

Утверждение 14.3. *Для любых функций* $h_1 \in L_1[0,\pi]$, $h_2 \in L_q[0,\pi]$, $h_3 \in L_{q'}[0,\pi]$, $q \in (1,\infty)$, $1/q + 1/q' = 1$, *продолженных нулем за отрезок* $[0,\pi]$, *справедливы следующие оценки*:

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{h_1(x)h_2(t)h_3(s)}{x+t+s}dtdsdx\right| \leqslant C\|h_1\|_{L_1}\|h_2\|_{L_q}\|h_3\|_{L_{q'}}, \tag{14.18}$$

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{\min\{x,s\}} \frac{h_1(x)h_2(t)h_3(s)}{x-2t+s}dtdsdx\right| \leqslant C\|h_1\|_{L_1}\|h_2\|_{L_q}\|h_3\|_{L_{q'}}, \tag{14.19}$$

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\int_{\max\{x,s\}}^{\pi} \frac{h_1(x)h_2(t)h_3(s)}{-x+2t-s}dtdsdx\right| \leqslant C\|h_1\|_{L_1}\|h_2\|_{L_q}\|h_3\|_{L_{q'}}, \tag{14.20}$$

с некоторой абсолютной постоянной C.

Доказательство. Рассмотрим первое из выражений. Имеем

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{h_1(x)h_2(t)h_3(s)}{x+t+s}dtdsdx\right| \leqslant \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}\left|\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{h_2(t)h_3(s)}{x+t+s}dtds\right| \cdot \int_0^\pi |h_1(x)|dx \leqslant$$

$$\leqslant \|h_1\|_{L_1}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{|h_2(t)|\cdot|h_3(s)|}{t+s}dtds \leqslant C\|h_1\|_{L_1}\|h_2\|_{L_q}\|h_3\|_{L_{q'}}.$$

В последнем неравенстве использовалось известное утверждение об ограниченности оператора типа Харди (см., например, [81, п. 9.3]).

Для доказательства второго неравенства сделаем в интеграле замену переменных:

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^{\min\{x,s\}} \frac{h_1(x)h_2(t)h_3(s)}{x-2t+s}dtdsdx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\pi\left(\int_0^x\int_0^s \frac{|h_1(x)h_2(t)h_3(s)|}{x-2t+s}dtds + \int_x^\pi\int_0^x \frac{|h_1(x)h_2(t)h_3(s)|}{x-2t+s}dtds\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \|h_1\|_{L_1}\cdot\left(\sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}\int_0^x\int_\zeta^x \frac{|h_2(x-\eta)|\cdot|h_3(x-\zeta)|}{2\eta-\zeta}d\eta d\zeta + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\leqslant x\leqslant\pi}\int_0^{\pi-x}\int_0^x \frac{|h_2(x-\eta)|\cdot|h_3(x+\zeta)|}{\zeta+2\eta}d\eta d\zeta\right) \leqslant C\|h_1\|_{L_1}\|h_2\|_{L_q}\|h_3\|_{L_{q'}} \tag{14.21}$$

в силу элементарного неравенства $\dfrac{1}{2\eta-\zeta} \leqslant \dfrac{2}{\eta+\zeta}$ при $\zeta \leqslant \eta$ и ограниченности оператора типа Харди. Третье из неравенств проверяется совершенно аналогично. ☐

Шаг 4. Воспользуемся теоремой 17.I и утверждением 14.3 для получения окончательной оценки выражения (14.16).

Зафиксируем произвольную функцию $h_2 \in L_q[0,\pi]$, $q \in (1,\infty)$. Введем вспомогательные операторы B_j, $j = 1,2,3$, следующим образом:

$$(B_1 h_3)(x) = \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{h_2(t)h_3(s)}{x+t+s} dtds,$$

$$(B_2 h_3)(x) = \int_0^\pi \int_0^{\min\{x,s\}} \frac{h_2(t)h_3(s)}{x-2t+s} dtds,$$

$$(B_3 h_3)(x) = \int_0^\pi \int_{\max\{x,s\}}^\pi \frac{h_2(t)h_3(s)}{-x+2t-s} dtds.$$

Из утверждения 14.3 следует, что для любой функции $h_1 \in L_1[0,\pi]$

$$\left| \int_0^\pi (B_j h_3)(x) h_1(x) dx \right| \leqslant C \|h_1\|_{L_1} \|h_2\|_{L_q} \|h_3\|_{L'_q}, \quad j = 1,2,3,$$

следовательно, каждый из операторов B_j ограниченно действует из пространства $L_{q'}[0,\pi]$ в $L_\infty[0,\pi]$.

Заметим теперь, что переменные s и x входят в оценки (14.18)–(14.20) симметрично. Следовательно, поменяв ролями функции h_1 и h_3, получаем, что любой из операторов B_j также ограниченно действует из $L_1[0,\pi]$ в $L_q[0,\pi]$. Отсюда и из теоремы 17.I следует, что любой из операторов B_j ограниченно действует из пространства $L_{\alpha_\theta}[0,\pi]$ в $L_{\beta_\theta}[0,\pi]$, где

$$\alpha_\theta = \frac{q}{q-\theta}, \qquad \beta_\theta = \frac{q}{1-\theta}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Положим

$$q = \varkappa, \quad \mu = \frac{\varkappa}{\varkappa - \theta};$$

получим, что B_j ограниченно действуют из $L_\mu[0,\pi]$ в $L_\nu[0,\pi]$ при

$$\nu = \frac{\mu\varkappa}{\mu + \varkappa - \mu\varkappa},$$

а значит, и при

$$1 < \nu \leqslant \frac{\mu\varkappa}{\mu + \varkappa - \mu\varkappa}, \quad \text{то есть при} \quad \frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant 1.$$

Следовательно, нормы $\|B_j\|_{\mu\to\nu}$, $j = 1,2,3$, ограничены при всех $\varkappa \in (1,\infty)$, $\mu \in [1,\infty)$, $\nu \in (1,\infty]$,

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant 1.$$

Отсюда и из оценок для элементов матрицы, проведенных в шаге 3, получаем ограниченность выражения (14.16) при $P \in L_\varkappa$, $1 < \varkappa < \infty$, $\mathbf{f} \in L_\mu$, $\mathbf{g} \in L_{\nu'}$, $\mu \in [1,\infty)$, $\nu \in (1,\infty]$,

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant 1.$$

Таким образом, мы получили оценку выражения

$$\left\| \int_c^b \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma + i\tau) P \widetilde{\mathfrak{R}}_0(\sigma + i\tau)\, d\tau \right\|_{L_\mu \to L_\nu},$$

а значит, и

$$\left\| \int_c^b \mathfrak{R}_0(\sigma + i\tau) P \mathfrak{R}_0(\sigma + i\tau)\, d\tau \right\|_{L_\mu \to L\nu},$$

не зависящую от σ и b.

Из (14.14) следует, что аналогичные оценки справедливы и для нижней полуплоскости. Значит, оценка нормы
$$\|S_m - S_m^0\|_{\mu\to\nu} \leqslant M, \quad \text{где} \quad m \geqslant N_0,$$
где постоянная M зависит от нормы потенциала и краевых условий, но не зависит от m, полностью доказана.

Шаг 5. Теперь доказательство завершается стандартным приемом. Нам достаточно доказать сходимость
$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_\nu \to 0, \quad m\to\infty, \tag{14.22}$$
для некоторого всюду плотного в $L_\mu[0,\pi]$ множества функций $\mathbf{f}$.

В качестве этого множества мы выберем линейную оболочку системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Напомним, что $\mu\in[1,\infty)$ согласно условию (iii), а полнота системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в этом случае доказана в утверждении 14.2.

Остается доказать соотношение (14.22) для случая $\mathbf{f}=\mathbf{y}_n$, $n\in\mathbb{Z}$. Из представления (14.3) следует, что $S_m(\mathbf{y}_n)=\mathbf{y}_n$ при всех $m>|n|/2$, т. е.
$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_\nu = \|S_m^0(\mathbf{y}_n) - \mathbf{y}_n\|_\nu, \quad \text{при} \;\; m>|n|/2.$$
Применяя утверждение 4.4 к функции $\mathbf{y}_n$ (она абсолютно непрерывна и удовлетворяет краевым условиям U), получим что $S_m^0(\mathbf{y}_n)$ стремится к $\mathbf{y}_n$ при $m\to\infty$ равномерно на отрезке $[0,\pi]$, а значит, и по норме $\|\cdot\|_\nu$. Теорема доказана. □

15. Базисность системы корневых функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ в шкалах пространств

Целью данного раздела является доказательство базисности Рисса или Шаудера системы собственных и присоединенных функций регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (в слабо регулярном случае — базисности со скобками) в различных шкалах пространств. Мы будем отталкиваться от теорем 12.2 (с учетом следствия 12.1) и 12.3: *для любого суммируемого потенциала $P(x)$ общего вида система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является в сильно регулярном случае базисом Рисса в пространстве $\mathbb{H}$.*

В слабо регулярном случае базис Рисса в $\mathbb{H}$ из двумерных подпространств образует система $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где $\mathcal{H}_n=\mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_{2n},\mathbf{y}_{2n+1}\}$.

Конечно, задачу о базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L можно ставить в абстрактной форме. Здесь хорошо известно следующее утверждение (см. [36, теорема 22.1] и [90, лемма 3]): *если оператор L равномерно положителен, а его резольвента компактна, то он порождает шкалу пространств $\mathcal{H}_\theta$, $\theta\in[0,1]$, ассоциированных со степенями L^θ, а система корневых функций оператора L (после надлежащей нормировки) образует базис Рисса в каждом из пространств $\mathcal{H}_\theta$.*

Это наблюдение неприменимо в нашей ситуации, поскольку оператор Дирака не положителен[1]. Мы, однако, покажем (и это совсем не сложно), что при условии $P\in L_2[0,\pi]$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ действительно образует базис Рисса во всей шкале пространств $\mathbb{H}^\theta$, $\theta\in[0,1]$.

В общей ситуации, когда $P\in L_1[0,\pi]$, имеет место базисность Рисса при $\theta\in[0,1/2)$ (доказательство этого факта уже нетривиально). Помимо шкалы пространств Соболева с дробным показателем гладкости мы будем изучать базисность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в шкале пространств Бесова. Эти результаты не имеют абстрактных аналогов.

Начнем со свойств базисности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространствах Лебега $L_\mu[0,\pi]$, $\mu\in(1,\infty)$. Хорошо известно, что тригонометрическая система является базисом Шаудера в пространстве $L_\mu[0,\pi]$ для любого $\mu\in(1,\infty)$ (не являясь при этом при $\mu\neq 2$ безусловным базисом). Мы покажем, что то же выполнено и для системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Вначале, в теоремах 15.1–15.4, мы будем считать матрицу P внедиагональной.

Теорема 15.1. *Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P\in L_\varkappa[0,\pi]$ вида* (3.8)*, $\varkappa>1$, сильно регулярен. Тогда при любом $\mu\in(1,\infty)$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера в пространстве $L_\mu[0,\pi]$.*

Если оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ слабо регулярен, то система $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathcal{H}_n=\mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_{2n},\mathbf{y}_{2n+1}\}$ образует в $L_\mu[0,\pi]$ базис Шаудера из подпространств.

[1] Можно заметить, что после умножения на i и подходящего сдвига оператор Дирака является равномерно позитивным (см. определение в [36, глава 4]), но обобщения абстрактных результатов на этот случай нам неизвестны.

Доказательство. Свойство базисности системы сохраняется при непрерывном изоморфизме пространства (теорема 18.IV), а значит, в силу теоремы 12.2 система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Шаудера в любом пространстве $(L_\mu[0,\pi])^2$, $\mu\in(1,\infty)$.

Если оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярен, то в силу теоремы 14.1 каждый вектор $\mathbf{f}\in L_\mu[0,\pi]$ представляется в виде ряда

$$\mathbf{f}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_n\rangle\mathbf{y}_n.$$

Единственность такого разложения следует из минимальности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (см. теорему 14.2), и первое утверждение теоремы доказано.

В слабо регулярном случае также воспользуемся теоремой 14.1:

$$\mathbf{f}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=-m}^{m}\Big[\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n}\rangle\mathbf{y}_{2n}+\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n+1}\rangle\mathbf{y}_{2n+1}\Big].$$

Единственность разложения вновь следует из минимальности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, и мы доказали второе утверждение теоремы. □

Утверждение 15.1. *Пусть* $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in[1,\infty]$, $\mathcal{L}_{P,U}$ *— регулярный оператор Дирака, а* $\lambda^0\notin\sigma(\mathcal{L}_{P,U})$ *(здесь* σ *— спектр оператора).*

Тогда $(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}$ *является ограниченным и ограниченно обратимым оператором из* $L_\mu[0,\pi]$ *в* $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$ *при любом* $\mu\in[1,\varkappa]$.

Доказательство. Операторы дифференцирования $\mathbf{f}\mapsto\mathbf{f}'$ и умножения на функцию $\mathbf{f}\mapsto P\mathbf{f}$, $P\in L_\varkappa$, ограничены из $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$ в $L_\mu[0,\pi]$, а значит, ограничен и оператор $\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I$.

С другой стороны, для любой правой части $\mathbf{f}\in L_\mu[0,\pi]$ определена абсолютно непрерывная функция $\mathbf{g}$, для которой

$$\ell_P(\mathbf{g})-\lambda^0\mathbf{g}=\mathbf{f},$$

удовлетворяющая краевым условиям $U(\mathbf{g})=0$ (см. [63, утверждение 3.1]). Тогда

$$\mathbf{g}'=B^{-1}(\mathbf{f}+\lambda^0\mathbf{g}-P\mathbf{g})$$

и, поскольку правая часть является элементом пространства $L_\varkappa[0,\pi]\subset L_\mu[0,\pi]$, функция $\mathbf{g}$ принадлежит $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$.

Теперь ограниченность оператора $(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}:L_\mu[0,\pi]\to W^1_{\mu,U}[0,\pi]$ следует из теоремы Банаха об обратном операторе. □

Утверждение 15.2. *Пусть* $\mathcal{L}_{P,U}$ *— произвольный регулярный оператор Дирака с потенциалом* $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in(1,\infty)$, *а* $\lambda^0\notin\sigma(\mathcal{L}_{P,U})\cup\sigma(\mathcal{L}_{0,U})$ *произвольно*[1].

Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I$ *является изоморфизмом пространства* $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi]$ *на* $B^{1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q}[0,\pi]$ *при любых* $\mu\in(\varkappa,\infty)$, $q\in(1,\infty)$.

Доказательство. Зафиксируем индексы μ и q из условия и рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{0,U}-\lambda^0 I$ с нулевым потенциалом и теми же краевыми условиями. Он является изоморфизмом из $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$ в $\mathcal{L}_\mu[0,\pi]$.

Рассмотрим сопряженный оператор $\mathcal{L}_{0,U^*}-\overline{\lambda^0}I$ (здесь U^* — сопряженные к U краевые условия), являющийся изоморфизмом из $W^1_{\mu',U^*}[0,\pi]$ в $\mathcal{L}_{\mu'}[0,\pi]$, $1/\mu+1/\mu'=1$. Переходя к дуальным пространствам, видим, что оператор $\mathcal{L}_{0,U}-\lambda^0 I$ — изоморфизм $\mathcal{L}_\mu[0,\pi]$ на $W^{-1}_{\mu,U}[0,\pi]$.

Проводя интерполяцию

$$B^s_{\mu,q,U}[0,\pi]=(L_\mu[0,\pi],W^1_{\mu,U}[0,\pi])_{s,q},\quad B^{s-1}_{\mu,q,U}[0,\pi]=(W^{-1}_{\mu,U}[0,\pi],L_\mu[0,\pi])_{s,q},$$

получаем: оператор $\mathcal{L}_{0,U}-\lambda^0 I$ есть изоморфизм $B^s_{\mu,q,U}[0,\pi]$ на $B^{s-1}_{\mu,q,U}[0,\pi]$ для любых $s\in(0,1)$, $q\in(1,\infty)$.

[1] Условие $\lambda^0\notin\sigma(\mathcal{L}_{0,U})$ можно опустить, мы вводим его только для упрощения доказательства.

Положим $s = 1+\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\varkappa}$ (заметим, что в этом случае $B^{s-1}_{\mu,q,U}[0,\pi] = B^{s-1}_{\mu,q}[0,\pi]$) и обратимся к оператору умножения $\mathbf{y} \mapsto P\mathbf{y}$. Поскольку $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi] \subset C[0,\pi]$ (утверждение 4 теоремы 17.XIX), то этот оператор ограниченно действует из $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi]$ в $L_\varkappa[0,\pi]$.

В силу компактного вложения $L_\varkappa[0,\pi] \subset B^{1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q}[0,\pi]$ (утверждение 3 теоремы 17.XV) оператор $\mathbf{y} \mapsto P\mathbf{y}$ компактно действует из $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi]$ в $B^{1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q}[0,\pi]$.

Итак, оператор
$$\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I : B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi] \to B^{1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q}[0,\pi]$$
ограничен. Для завершения доказательства остается проверить его биективность. В силу альтернативы Фредгольма (мы представили оператор $\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I$ в виде суммы изоморфизма и компактной добавки) достаточно проверить инъективность.

Оператор $\mathcal{L}_{P^*,U^*} - \overline{\lambda^0} I$ является изоморфизмом пространств $W^1_{\nu,U^*}[0,\pi]$ и $L_\nu[0,\pi]$ при любом $\nu \in (1,\varkappa]$ (см. утверждение 15.1). Переходя к дуальным пространствам, получаем, что оператор $\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I$ является изоморфизмом пространств $\mathcal{L}_{\nu'}[0,\pi]$ и $W^{-1}_{\nu',U}[0,\pi]$. Зафиксируем произвольное число $\nu \in (1,\varkappa]$ так, что $\nu' > \mu$, и отметим вложение
$$B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi] \subset B^{1+1/\nu'-1/\varkappa}_{\nu',q,U}[0,\pi] \subset L_{\nu'}[0,\pi]$$
(см. утверждение 3 теоремы 17.XIX).

Поскольку оператор $\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I$ имеет тривиальное ядро в пространстве $\mathcal{L}_{\nu'}[0,\pi]$, то отсюда следует его инъективность как оператора
$$\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I : B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi] \to B^{1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q}[0,\pi].$$
$\square$

Теорема 15.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty)$, вида* (3.8).

При $\mu \in (1,\varkappa]$ в сильно регулярном случае имеет место базисность Шаудера системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, а в слабо регулярном случае — базисность Шаудера системы подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространствах Соболева $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$ и в пространствах Бесова $B^\theta_{\mu,q,U}[0,\pi]$ для любых $0<\theta<1$, $1<q<\infty$.

При $\mu \in (\varkappa,\infty)$ утверждение остается справедливым при любых $0<\theta<1+\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\varkappa}$, $1<q<\infty$ и при $\theta = 1+\dfrac{1}{\mu}-\dfrac{1}{\varkappa}$, $q=\mu$.

Доказательство. Пусть вначале $\mu \in (1,\varkappa]$. В сильно регулярном случае в силу теоремы 15.1 система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера в $L_\mu[0,\pi]$.

Оператор
$$(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1} : L_\mu[0,\pi] \to W^1_{\mu,U}[0,\pi]$$
ограничен и ограниченно обратим (утверждение 15.1), а значит, система $\{(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Шаудера в $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$.

Поскольку
$$(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1}\mathbf{y}_n = (\lambda_n - \lambda^0)^{-1}\mathbf{y}_n \quad \text{при} \quad |n| > N$$
и $(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1}$ является линейным изоморфизмом на подпространстве $\mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{|n|\leqslant N}$, то и система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, является базисом Шаудера в $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$. Остается воспользоваться теоремой 18.V, согласно которой $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — базис Шаудера в любом пространстве Бесова
$$B^\theta_{\mu,q,U}[0,\pi] = (L_\mu[0,\pi], W^1_{\mu,U}[0,\pi])_{\theta,q}, \quad \theta \in (0,1), \quad q \in (1,\infty).$$

В слабо регулярном случае система $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера из подпространств в $L_\mu[0,\pi]$. Поскольку
$$(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1}\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n$$
(вновь с точностью до конечномерного подпространства), то $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — базис Шаудера из подпространств в $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$. Остается вновь воспользоваться теоремой 18.V.

Теперь рассмотрим случай $\mu > \varkappa$. Зафиксируем произвольное число $\nu > \max\{\mu, \varkappa'\}$.

По доказанному, биортогональная к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ система $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Шаудера (в слабо регулярном случае — базисом Шаудера из двумерных подпространств) в пространстве $B^{\theta}_{\nu',\nu',U^*}[0,\pi]$, где $\theta\in(0,1)$ произвольно. Тогда (см. утверждение 2 теоремы 18.IV) система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — базис Шаудера в дуальном пространстве $B^{-\theta}_{\nu,\nu,U}[0,\pi]$.

Положим $\theta = \dfrac{1}{\varkappa} - \dfrac{1}{\nu}$ и воспользуемся утверждением 15.2, согласно которому оператор $(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1}$ является изоморфизмом между $B^{1/\nu-1/\varkappa}_{\nu,\nu}[0,\pi]$ и $B^{1+1/\nu-1/\varkappa}_{\nu,\nu,U}[0,\pi]$.

Таким образом, система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера в пространстве $B^{1+1/\nu-1/\varkappa}_{\nu,\nu,U}[0,\pi]$. Теперь интерполяция (см. пп. 1 и 3 теоремы 17.XVIII)

$$(B^{1+1/\nu-1/\varkappa}_{\nu,\nu,U}[0,\pi], W^1_{\varkappa,U}[0,\pi])_{\tau,\mu} = B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,\mu,U}[0,\pi], \qquad \text{где}\ \ \frac{1}{\mu} = \frac{1-\tau}{\nu} + \frac{\tau}{\varkappa},$$

$$(L_\mu[0,\pi], B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,\mu,U}[0,\pi])_{s,q} = B^{s(1+1/\mu-1/\varkappa)}_{\mu,q,U}[0,\pi], \quad 0<s<1, \quad 1<q<\infty$$

завершает доказательство теоремы. □

Перейдем к изучению базисности Рисса. Хорошо известно, что тригонометрическая система

$$\{\pi^{-1/2}(k^2+1))^{-\theta/2}e^1_k, \quad \pi^{-1/2}(k^2+1))^{-\theta/2}e^2_k\}_{k\in 2\mathbb{Z}},$$

где

$$e^1_k = \begin{pmatrix} e^{ikx} \\ 0 \end{pmatrix}, \ e^2_k = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{ikx} \end{pmatrix}, \tag{15.1}$$

является ортонормированным базисом в пространстве $\mathbb{H}^\theta$ при любом $\theta\in[0,1/2)$.

При $\theta\in[1/2,1]$ система имеет в пространстве $\mathbb{H}^\theta$ дефект 2. Мы покажем, что система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ обладает аналогичными свойствами.

Теорема 15.3. *Пусть $P\in L_2[0,\pi]$, а оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярен. Тогда при любом $\theta\in[0,1]$ система*

$$\{(n^2+1)^{-\theta/2}\mathbf{y}_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}^\theta_U$.

В случае слабой регулярности система $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где

$$\mathcal{H}_n = \mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_{2n}, \mathbf{y}_{2n+1}\},$$

образует в $\mathbb{H}^\theta_U$ базис Рисса из подпространств.

Подобные теоремы хорошо известны для случая шкалы пространств, построенных по положительному самосопряженному оператору (см., например, [90, лемма 3.3]). В нашем случае оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ не полуограничен, так что мы приведем доказательство этого утверждения. Как и в [90], оно основано на том, что оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ является изоморфизмом между $\mathbb{H}^1_U$ и $\mathbb{H}$.

Доказательство. Вначале рассмотрим сильно регулярный случай. В силу теоремы 12.2 система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$.

Зафиксируем произвольное число $\lambda^0\notin\sigma(\mathcal{L}_{P,U})$ и рассмотрим оператор $(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}$, действующий из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}^1_U$. В силу утверждения 15.1 этот оператор является изоморфизмом.

Так как краевые условия сильно регулярны, то найдется номер N такой, что при всех $|n|>N$ функции $\mathbf{y}_n$ являются собственными. Для этих функций

$$(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}\mathbf{y}_n = (\lambda_n-\lambda^0)^{-1}\mathbf{y}_n,$$

а так как $\lambda_n = n + O(1)$ (см. теорему 9.3 и утверждение 4.1), то последовательность

$$|\lambda_n-\lambda^0|(n^2+1)^{-1/2}$$

отделена и от нуля, и от бесконечности.

Это означает, что система

$$\{(n^2+1)^{-1/2}\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$$

является базисом Рисса в замыкании своей линейной оболочки. Подпространство $\mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{|n|\leqslant N}$ инвариантно относительно оператора $(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}$, который является здесь линейным изоморфизмом.

Таким образом, система

$$\{(n^2+1)^{-1/2}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

является базисом Рисса в $\mathbb{H}^1_U$. Теперь из теоремы 18.VI следует первое утверждение.

Перейдем к слабо регулярному случаю. В силу теоремы 12.3 система $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса из подпространств в $\mathbb{H}$. Оператор

$$(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}:\mathbb{H}\to\mathbb{H}^1_U$$

ограничен и ограниченно обратим, причем

$$(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}\mathcal{H}_n=\mathcal{H}_n,$$

так что $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — базис Рисса из подпространств в $\mathbb{H}^1_U$. Остается воспользоваться утверждением теоремы 18.V. $\square$

Теорема 15.3 не дает нам никакой информации о свойствах системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (в слабо регулярном случае, соответственно, $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$) в пространствах $\mathbb{H}^\theta_U$, если $P\notin L_2[0,\pi]$.

С одной стороны, базисность Рисса системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (соответственно, $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$) в $\mathbb{H}=\mathbb{H}^0_U$ имеет место для любого $P\in L_1[0,\pi]$. С другой стороны, базисность в $\mathbb{H}^1_U$ не может иметь место для произвольного $P\in L_1[0,\pi]$.

Утверждение 15.3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом $P\in L_1[0,\pi]$ вида* (3.8)*, причем все его собственные и присоединенные функции $\mathbf{y}_n(x)$ лежат в $\mathbb{H}^1_U$. Тогда $P\in L_2[\alpha,\beta]$ для любых $0<\alpha<\beta<\pi$.*

Доказательство. Пусть

$$\omega(x)=\begin{pmatrix}\omega_1(x)\\ \omega_2(x)\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad \omega_j(x),\quad j=1,\,2,$$

— бесконечно гладкие функции, равные тождественной единице на $[\alpha,\beta]$ и нулю в точках 0 и π.

Поскольку система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ полна в пространстве $L_1[0,\pi]$ (теорема 14.2), а оператор $(\mathcal{L}_{P,U}-\lambda^0 I)^{-1}$ при $\lambda^0\notin\sigma(\mathcal{L}_{P,U})$ является изоморфизмом пространства $L_1[0,\pi]$ на $W^1_{1,U}[0,\pi]$ (утверждение 15.1), то $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ полна в $W^1_{1,U}[0,\pi]$.

Пользуясь этим, рассмотрим конечную линейную комбинацию $\widetilde{\omega}(x)=\sum c_n\mathbf{y}_n$ такую, что

$$\|\omega-\widetilde{\omega}\|_{W^1_1}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Тогда функции $\widetilde{\omega}_j(x)\geqslant\dfrac{1}{2}$, $j=1,\,2$, на отрезке $[\alpha,\beta]$, а значит, функции $\dfrac{1}{\widetilde{\omega}_j(x)}$ лежат в $W^1_1[\alpha,\beta]$. Далее,

$$P(x)\widetilde{\omega}(x)=\sum\lambda_n c_n\mathbf{y}_n(x)-B\sum c_n\mathbf{y}'_n(x).$$

Если теперь, согласно условию, все функции $\mathbf{y}_n$ лежат в $\mathbb{H}^1_U[0,\pi]$, то функция

$$P(x)\widetilde{\omega}(x)=\begin{pmatrix}p_2(x)\widetilde{\omega}_2(x)\\ p_3(x)\widetilde{\omega}_1(x)\end{pmatrix}$$

принадлежит пространству $\mathbb{H}[\alpha,\beta]$.

Рассматривая каждую компоненту этого вектора отдельно и учитывая, что функции $\dfrac{1}{\widetilde{\omega}_j(x)}$ принадлежат пространству $L_\infty[\alpha,\beta]$, приходим к выводу, что $p_j(x)\in L_2[\alpha,\beta]$, $j=2,\,3$. $\square$

Нашей целью теперь будет доказательство следующего утверждения.

Теорема 15.4. *Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P\in L_\varkappa[0,\pi]$ вида* (3.8)*, $\varkappa\in[1,2)$, сильно регулярен.*

Тогда для любого $\theta\in[0,3/2-1/\varkappa)$ система $\{(n^2+1)^{-\theta/2}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в пространстве $\mathbb{H}^\theta_U$.

Для доказательства нам потребуется несколько вспомогательных фактов.

Лемма 15.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_1[0,\pi]$, $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система его собственных и присоединенных функций, а $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная в $\mathbb{H}$ система.*

Тогда последовательности $\{\|\mathbf{y}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\|\mathbf{z}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ отделены от нуля и от бесконечности: найдутся такие положительные числа c_1 и c_2, что

$$\inf_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{y}_n\|_{\mathbb{H}} \geqslant c_1, \quad \inf_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{z}_n\|_{\mathbb{H}} \geqslant c_1, \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{y}_n\|_{\mathbb{H}} \leqslant c_2 \quad \text{и} \quad \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{z}_n\|_{\mathbb{H}} \leqslant c_2.$$

Доказательство. В силу теоремы 12.2, система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в $\mathbb{H}$. Тогда тем же свойством обладает и биортогональная система $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, а значит, обе эти системы почти нормированы. □

Лемма 15.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_1[0,\pi]$, $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система его собственных и присоединенных функций, а $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная в $\mathbb{H}$ система. Тогда справедливы представления*

$$\mathbf{z}_n(x) = \begin{pmatrix} z_{1,n}(x) \\ z_{2,n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\overline{\lambda_n}x}\sigma_{1,n}(x) \\ e^{-i\overline{\lambda_n}x}\sigma_{2,n}(x) \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{15.2}$$

При этом найдется постоянная $C = C(P,U)$ такая, что

$$|\sigma_{1,n}(0)| + |\sigma_{2,n}(0)| \leqslant C, \qquad |\sigma'_{1,n}(x)| + |\sigma'_{2,n}(x)| \leqslant C(|p_2(x)| + |p_3(x)|), \quad x \in [0,\pi]. \tag{15.3}$$

Доказательство. Векторы биортогональной системы $\mathbf{z}_n(x)$ при $|n| \geqslant N$ являются собственными для сопряженного оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ (теорема 9.4). Тогда после нормировки они допускают представление (9.24) с оценками (9.25). Остается заметить (лемма 15.1), что последовательность $\{\|\mathbf{z}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена. □

Утверждение 15.4. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in [1,2)$.*

Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ его собственных и присоединенных функций полна и минимальна в пространстве $\mathbb{H}^\theta_U$ при любом $\theta \in [0, 3/2 - 1/\varkappa)$.

Доказательство. Зафиксируем индекс $\theta \in [0, 3/2-1/\varkappa)$. В силу п. 3 теоремы 17.XIX пространство $W^1_{\varkappa,U}$ непрерывно и плотно вложено в $\mathbb{H}^\theta_U$. Таким образом, полнота системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{H}^\theta_U$ следует из полноты этой системы в $W^1_{\varkappa,U}[0,\pi]$ (теорема 15.2).

С другой стороны, $\mathbb{H}^\theta_U$ непрерывно и плотно вложено в пространство $\mathbb{H}$. Тогда минимальность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $\mathbb{H}^\theta_U$ следует из минимальности этой системы в $\mathbb{H}$ (теорема 12.1). □

Лемма 15.3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_1[0,\pi]$, а $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — его спектр. Тогда для любой функции $f \in W^\theta_2[0,\pi]$, $\theta \in [0,1/2)$, выполнено*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2\theta} \left| \int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}\,dx \right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{2\theta} \left| \int_0^\pi f(x)e^{-i\lambda_n x}\,dx \right|^2 \leqslant C\|f\|^2_{W^\theta_2},$$

где $C = C(P,U,\theta)$.

Доказательство. Очевидно, что достаточно доказать оценку для одной из сумм. Случай $\theta = 0$ разобран в лемме 12.1. Иными словами, оператор

$$T: f \mapsto \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \text{где} \quad f_n := \int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}\,dx,$$

ограниченно действует из пространства $L_2[0,\pi]$ в пространство $l_2(\mathbb{Z})$. Обозначим

$$W^1_{2,0}[0,\pi] = \{f \in W^1_2[0,\pi] \mid f(0) = f(\pi) = 0\}.$$

Для случая $f \in W^1_{2,0}[0,\pi]$ имеем

$$f_n = -\frac{1}{i\lambda_n}\int\limits_0^\pi f'(x)e^{i\lambda_n x}\,dx.$$

Учитывая, что $\lambda_n = n + O(1)$ при $|n| \to \infty$, а $f' \in L_2[0,\pi]$, выводим ограниченность оператора T из пространства $W^1_{2,0}[0,\pi]$ в весовое пространство $l^1_2 := l_2((n^2+1)^{1/2})$.

Интерполируя, получим ограниченность оператора T из $[L_2[0,\pi], W^1_{2,0}[0,\pi]]_\theta$ в $l^\theta_2 = l_2((n^2+1)^{\theta/2})$.

В силу теоремы 17.XVII имеем $[L_2[0,\pi], W^1_{2,0}[0,\pi]]_\theta = W^\theta_2[0,\pi]$ при любом $\theta \in [0,1/2)$, что и доказывает утверждение. □

Лемма 15.4. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_1[0,\pi]$, а $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — его спектр. Тогда для любой функции $f \in W^{-\theta}_2[0,\pi]$, $\theta \in [0,1/2)$, выполнено*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{-2\theta}\left|\langle e^{i\lambda_n x}, f\rangle\right|^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^{-2\theta}\left|\langle e^{-i\lambda_n x}, f\rangle\right|^2 \leqslant C\|f\|^2_{W^{-\theta}_2}, \quad C = C(P,U,\theta),$$

где под $\langle\varphi, f\rangle$ понимается действие функционала f на тестовую функцию φ относительно скалярного произведения $L_2[0,\pi]$.

Доказательство. Вновь будем работать только с первой суммой и вновь рассмотрим оператор

$$T:\, f \mapsto \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \quad f_n := \langle e^{i\lambda_n x}, f\rangle,$$

ограниченность которого из $L_2[0,\pi]$ в l_2 мы уже отмечали. Докажем его ограниченность из пространства $W^{-1}_2[0,\pi]$ в весовое пространство $l_2((n^2+1)^{-1/2}) =: l^{-1}_2$.

Пусть вначале $f \in L_2[0,\pi]$. Обозначим

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt, \quad [f] = \int\limits_0^\pi f(t)\,dt$$

и проведем интегрирование по частям:

$$f_n = \int\limits_0^\pi e^{i\lambda_n x}\,dF(x) = [f]e^{i\pi\lambda_n} - i\lambda_n\int\limits_0^\pi F(x)e^{i\lambda_n x}\,dx.$$

Учитывая, что $\lambda_n = n + O(1)$, имеем

$$\|\{f_n\}\|_{l^{-1}_2} \leqslant |[f]|\left(\sum_n n^{-2}|e^{i\pi\lambda_n}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_n n^{-2}|\lambda_n|^2|F_n|^2\right)^{1/2} \leqslant C(|[f]| + \|F\|_{L_2}) \leqslant C\|f\|_{W^{-1}_2},$$

так как выражение $C(|[f]| + \|F\|_{L_2})$ задает на $W^{-1}_2[0,\pi]$ эквивалентную норму.

Итак, мы доказали ограниченность оператора

$$T:\, W^{-1}_2[0,\pi] \to l^{-1}_2$$

на плотном множестве $L_2[0,\pi] \subset W^{-1}_2[0,\pi]$, а значит, и на всем $W^{-1}_2[0,\pi]$.

Интерполируя, получаем ограниченность оператора

$$T:\, [L_2[0,\pi], W^{-1}_2[0,\pi]]_\theta = W^{-\theta}_2[0,\pi] \to l^{-\theta}_2 := l_2((n^2+1)^{-\theta/2}).$$

□

Доказательство теоремы 15.4.
Случай $\varkappa = 1$. Пусть $\mathbf{f} \in \mathbb{H}^\theta$ с некоторым $\theta \in [0,1/2)$, а $\{e^1_k, e^2_k\}_{k\in 2\mathbb{Z}}$ — тригонометрическая система, введенная в (15.1) (для удобства будем ее далее нумеровать одним целочисленным индексом k в порядке $e_k = e^1_k$ для четных k и $e_k = e^2_{k-1}$ для нечетных k).

Прежде всего, заметим, что оператор

$$V_0:\, \mathbf{f} \mapsto \{\langle\mathbf{f}, e_k\rangle_{\mathbb{H}}\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

является изоморфизмом пространств $\mathbb{H}^\theta$ и l_2^θ при любом $\theta \in [0, 1/2)$. На линейном пространстве $\operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{H}^\theta$ зададим оператор

$$V : \mathbf{f} \mapsto \{\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_n\rangle_{\mathbb{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

(напомним, что $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ система).

Тогда в силу представления (15.2)

$$\|V\mathbf{f}\|^2_{l_2^\theta} \leqslant 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi f_1(x)\overline{z}_{1,k}(x)\right|^2 + 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi f_2(x)\overline{z}_{2,k}(x)\right|^2.$$

Проведем оценку для первой суммы (вторая сумма аналогична).

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi f_1(x)\overline{z}_{1,k}(x)\right|^2 \leqslant 2\sum_k(k^2+1)^\theta\left|\overline{\sigma}_{1,k}(0)\int_0^\pi f_1(x)e^{-i\lambda_k x}\,dx\right|^2 +$$
$$+2\sum_k(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi \overline{\sigma}'_{1,k}(t)\int_t^\pi f_1(x)e^{-i\lambda_k x}\,dx\,dt\right|^2.$$

Здесь первый ряд в правой части сходится и оценивается величиной $C\|f_1\|^2_{W_2^\theta}$ в силу (15.3) и леммы 15.3. Продолжим оценку второго ряда. Перепишем его в виде

$$\sum_k(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi\int_0^\pi \overline{\sigma}'_{1,k}(t)\sigma'_{1,k}(s)\int_t^\pi f_1(x)e^{-i\lambda_k x}\,dx\int_s^\pi \overline{f_1}(y)e^{i\overline{\lambda_k}y}dy\,dsdt\right| \leqslant$$
$$\leqslant C^2\sum_k(k^2+1)^\theta\int_0^\pi\int_0^\pi(|p_2(s)|+|p_3(s)|)(|p_2(t)|+|p_3(t)|)\times \tag{15.4}$$
$$\times\left|\int_t^\pi f_1(x)e^{-i\lambda_k x}\,dx\int_s^\pi \overline{f_1}(y)e^{i\overline{\lambda_k}y}\,dy\right|dsdt.$$

Пользуясь теоремой Леви, переставим суммирование и интегрирование по переменным s и t. Обозначим через χ_t индикатор отрезка $[t,\pi]$ и оценим внутреннюю сумму.

$$\sum_k(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi f_1(x)\chi_t(x)e^{-i\lambda_k x}\,dx\int_0^\pi \overline{f_1}(y)\chi_s(y)e^{i\overline{\lambda_k}y}\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_k(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi f_1(x)\chi_t(x)e^{-i\lambda_k x}dx\right|^2\cdot\sum_k(k^2+1)^\theta\left|\int_0^\pi \overline{f_1}(y)\chi_s(y)e^{i\overline{\lambda_k}y}dy\right|^2\right)^{\frac12}.$$

В силу леммы 15.3 первый множитель здесь не превосходит $C\|f_1\chi_t\|_{W_2^\theta}$, а второй $C\|f_1\chi_s\|_{W_2^\theta}$. Оператор умножения на характеристическую функцию ограничен в пространстве $W_2^\theta[0,\pi]$ при любом $\theta \in [0, 1/2)$, причем его норма не превосходит единицы (п. 2 теоремы 17.XVI). Таким образом, получаем единую оценку величиной $C\|f_1\|^2_{W_2^\theta}$.

Итак, сумма (15.4) не превосходит

$$C\left(\int_0^\pi |p_2(t)|+|p_3(t)|\,dt\right)^2\|f_1\|^2_{W_2^\theta}.$$

Тем самым мы показали, что оператор V, действующий в пространство l_2^θ, ограничен на подпространстве

$$\operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{H}^\theta, \quad \theta\in[0,1/2).$$

Продолжая его на все пространство $\mathbb{H}^\theta$ (система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ плотна в $\mathbb{H}^\theta$ в силу утверждения 15.4) и вычисляя композицию $V_0^{-1}V$, получим ограниченный в $\mathbb{H}^\theta$ оператор, переводящий $\mathbf{y}_n \mapsto e_n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Для оценки обратного оператора $V^{-1}V_0$ необходимо оценить норму оператора

$$V^{-1} : l_2^\theta \to \mathbb{H}^\theta.$$

Он определен на линейном подпространстве финитных последовательностей равенством

$$V^{-1}\{f_k\}_{k\in\mathbb{Z}} = \sum_k f_k \mathbf{y}_k.$$

Далее, для любого функционала $\langle\cdot,\mathbf{g}\rangle_{\mathbb{H}}$, порожденного на пространстве $\mathbb{H}^\theta$ функцией $\mathbf{g}\in\mathbb{H}$, имеем

$$|\langle V^{-1}\{f_k\},\mathbf{g}\rangle_{\mathbb{H}}| \leqslant \sum_k (k^2+1)^{-\theta/2} c_k |\langle \mathbf{y}_k,\mathbf{g}\rangle| \leqslant \left(\sum_k c_k^2\right)^{1/2} \cdot \left(\sum_k (k^2+1)^{-\theta} |\langle \mathbf{y}_k,\mathbf{g}\rangle|^2\right)^{1/2},$$

где

$$c_k := |f_k|(k^2+1)^{\theta/2}, \quad \text{а} \quad \sum_k c_k^2 = \|\{f_k\}\|^2_{l_2^\theta}.$$

Повторяя оценки, проведенные выше, с заменой θ на $-\theta$, $f(x)$ на $g(x)$, $\mathbf{z}_k(x)$ на $\mathbf{y}_k(x)$ и пользуясь леммой 15.4, получим

$$|\langle V^{-1}\{f_k\},\mathbf{g}\rangle_{\mathbb{H}}| \leqslant C\left(\sum_k c_k^2\right)^{1/2} \|\mathbf{g}\|_{W_2^{-\theta}} \leqslant C\|\{f_k\}\|_{l_2^\theta}\|\mathbf{g}\|_{W_2^{-\theta}}.$$

Таким образом, V^{-1} продолжается до ограниченного оператора

$$V^{-1} : l_2^\theta \to \mathbb{H}^\theta,$$

что и доказывает эквивалентность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ системе $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Вспоминая, что система

$$\{\pi^{-1/2}(n^2+1)^{-\theta/2}e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

является ортонормированным базисом в пространстве $\mathbb{H}^\theta$, $\theta\in[0,1/2)$, выводим базисность Рисса в $\mathbb{H}^\theta$ системы

$$\{(n^2+1)^{-\theta/2}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Случай $\varkappa\in(1,2)$. Пусть теперь $P\in L_\varkappa[0,\pi]$ для некоторого $\varkappa\in(1,2)$.

Прежде всего, заметим, что биортогональная к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}}$ система $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является системой собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$.

Поскольку краевые условия U^* по-прежнему сильно регулярны, то к системе

$$\{\|\mathbf{z}_n\|^{-1}_{\mathbb{H}}(n^2+1)^{-\tau/2}\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

применимы все приведенные выше рассуждения. Таким образом, эти функции образуют базис Рисса в $\mathbb{H}^\tau$, $\tau\in[0,1/2)$.

Поскольку последовательность $\{\|\mathbf{z}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена, то базисом Рисса является и система

$$\{(n^2+1)^{-\tau/2}\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Тогда базисом Рисса в $\mathbb{H}^\tau$ является и биортогональная к ней (в смысле скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{H}^\tau}$) система $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Однако, между пространствами $(\mathbb{H}^\tau)^*\simeq\mathbb{H}^\tau$ и $\mathbb{H}^{-\tau}$ существует канонический изоморфизм J:

$$\langle\varphi, Jf\rangle = \langle\varphi, f\rangle_{\mathbb{H}^\tau},$$

переводящий векторы $\mathbf{w}_n$ в $(n^2+1)^{\tau/2}\mathbf{y}_n$, $n\in\mathbb{Z}$. Таким образом, система

$$\{(n^2+1)^{\tau/2}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

является базисом Рисса в пространстве $\mathbb{H}^{-\tau}$, $\tau\in[0,1/2)$.

Зафиксируем теперь $\tau\in(1/\varkappa-1/2,1/2)$, выберем произвольную точку

$$\lambda^0\notin\sigma(\mathcal{L}_{P,U})\cup\sigma(\mathcal{L}_{0,U})$$

и применим к этой системе оператор $(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1}$, являющийся изоморфизмом $\mathbb{H}^{-\tau}$ на $\mathbb{H}_U^{1-\tau}$ (утверждение 15.2).

В результате мы приходим к системе

$$\{(\mathcal{L}_{P,U} - \lambda^0 I)^{-1}\mathbf{y}_n\}_{|n|\leqslant N} \cup \{(n^2+1)^{\tau/2}(\lambda_n - \lambda^0)^{-1}\mathbf{y}_n\}_{|n|>N},$$

которая, таким образом, является базисом Рисса в $\mathbb{H}_U^{1-\tau}$.

Обозначим

$$\theta = 1 - \tau \in (1/2, 3/2 - 1/\varkappa)$$

и заметим, что

$$(n^2+1)^{\tau/2}|\lambda_n - \lambda^0|^{-1} \sim (n^2+1)^{-\theta/2}.$$

Перенормировав векторы системы и переходя к новому линейному базису в подпространстве $\mathrm{Lin}\{\mathbf{y}_n\}_{|n|\leqslant N}$, получаем базисность Рисса в пространстве $\mathbb{H}_U^{\theta}$, $\theta \in (1/2, 3/2 - 1/\varkappa)$, системы

$$\{(n^2+1)^{-\theta/2}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Базисность системы

$$\{(n^2+1)^{-1/4}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

в пространстве $\mathbb{H}_U^{1/2}$ следует из теоремы 18.VI при интерполяции

$$[\mathbb{H}, \mathbb{H}_U^{\theta}]_{1/(2\theta)} = \mathbb{H}_U^{1/2}$$

(число θ здесь берем произвольным из интервала $(1/2, 3/2 - 1/\varkappa)$). □

Мы уже говорили о том, что случай потенциала общего вида можно свести к изученному нами виду (3.8). Сформулируем точное утверждение, доказательство которого основано на утверждении 3.3.

Утверждение 15.5. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом общего вида $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in [1,\infty)$. Определим функцию $\widetilde{P}$ равенствами* (3.5)*, а краевые условия $\widetilde{U}$ равенствами* (3.6).

Если система $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}}$ является базисом Рисса (*базисом Рисса со скобками*) *в пространстве $\mathbb{H}_U^{\theta}$ для некоторого $\theta \in [0, 3/2 - 1/\varkappa)$* (*при $\varkappa \geqslant 2$ — для произвольного $\theta \in [0,1]$*)*, то тем же свойством обладает система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$.*

Далее, пусть система $\{\widetilde{\mathbf{y}}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера (*базис Шаудера со скобками*) *в пространстве $L_\mu[0,\pi]$, $\mu \in (1,\infty)$, $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$, $\mu \in (1,\varkappa]$ или $B^{\theta}_{\mu,q,U}[0,\pi]$, где либо*

$$q \in (1,\infty), \quad \mu \in (1,\varkappa], \quad \text{а} \quad \theta \in (0,1),$$

либо

$$q \in (1,\infty), \quad \mu \in (\varkappa,\infty), \quad \text{а} \quad \theta \in (0, 1 - 1/\varkappa + 1/\mu].$$

Тогда тем же свойством обладает и система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Доказательство. Пусть W — оператор умножения на матрицу $W(x) \in W^1_\varkappa[0,\pi]$, определенный в (3.7). Легко видеть, что этот оператор ограничен в любом пространстве $L_\mu[0,\pi]$, $\mu \in (1,\infty)$, и $W^1_\mu[0,\pi]$ при $\mu \in (1,\varkappa]$. Поскольку

$$W^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi(x)} \end{pmatrix},$$

то W ограниченно обратим в каждом из перечисленных пространств.

В силу п. 3 теоремы 17.XVI оператор W ограничен и ограниченно обратим и в каждом пространстве

$$B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q}[0,\pi], \quad \mu \in (\varkappa,\infty), \quad q \in (1,\infty).$$

Ограничим этот оператор на подпространство

$$B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,\widetilde{U}}[0,\pi] = \{\mathbf{f} \in B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q}[0,\pi] | \widetilde{U}(\mathbf{f}) = 0\}$$

(см. теорему 17.XVII). Поскольку $W(0)=I$, а $W(\pi)=\kappa I$, то функция $W\mathbf{f}$ удовлетворяет условиям $U(W\mathbf{f})=0$, т. е. W действует ограниченно из $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,\widetilde U}[0,\pi]$ в $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi]$.

Аналогично проверяем, что W^{-1} действует из $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi]$ в $B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,\widetilde U}[0,\pi]$.

В случае пространств Соболева точно так же проверяем, что

$$W: W^1_{\mu,\widetilde U}[0,\pi]\to W^1_{\mu,U}[0,\pi], \quad \text{а} \quad W^{-1}: W^1_{\mu,U}[0,\pi]\to W^1_{\mu,\widetilde U}[0,\pi].$$

Легко видеть, что функции $\widetilde{\mathbf{y}}_n=W\mathbf{y}_n$ образуют систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{\widetilde P,\widetilde U}$.

Остается провести интерполяцию (см. пп. 2 и 3) теоремы 17.XVIII)

$$(L_\mu[0,\pi],B^{1+1/\mu-1/\varkappa}_{\mu,q,U}[0,\pi])_{\frac{\theta}{1+1/\mu-1/\varkappa},q}=B^\theta_{\mu,q,U}[0,\pi],\quad \mu\in(\varkappa,\infty),\ \theta\in(0,1+1/\mu-1/\varkappa),$$
$$(L_\mu[0,\pi],W^1_{\mu,U}[0,\pi])_{\theta,q}=B^\theta_{\mu,q,U}[0,\pi],\quad \mu\in(1,\varkappa],\ \theta\in(0,1),$$

и воспользоваться теоремой 18.IV. □

Теперь мы готовы перенести результат о базисности в пространствах $\mathbb{H}^\theta_U$ на случай слабо регулярного оператора Дирака.

Теорема 15.5. *Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in[1,2)$, слабо регулярен. Тогда для любого $\theta\in[0,3/2-1/\varkappa)$ система подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где*

$$\mathcal{H}_n=\operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_{2n},\mathbf{y}_{2n+1}\},$$

является базисом Рисса в $\mathbb{H}^\theta_U$.

Доказательство. Случай $\theta=0$ уже разобран в теореме 12.3.

В силу утверждения 15.5 достаточно провести доказательство для случая внедиагонального потенциала P. Применим теорему 18.III. Из теоремы 12.3 следует, что замыкание в $L_\varkappa[0,\pi]$ линейной оболочки системы

$$\{\mathcal{H}_0,\,\mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$$

совпадает со всем пространством $L_\varkappa[0,\pi]$. Учитывая утверждение 15.1, выводим полноту этой системы подпространств в $W^1_{\varkappa,U}[0,\pi]$.

Теперь из плотности вложения $W^1_{\varkappa,U}[0,\pi]\subset\mathbb{H}^\theta_U$ следует, что замыкание линейной оболочки нашей системы по норме $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^\theta}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{H}^\theta_U$, так что остается доказать выполнение свойства (18.1). Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 12.3 (с заменой, естественно, $\|\cdot\|_{\mathbb{H}}$ на $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^\theta}$), и мы его здесь опускаем.

Отметим лишь, что к утверждению леммы 12.4 надо добавить тот факт, что система нормированных собственных функций оператора A образует базис Рисса в $\mathbb{H}^\theta_U$ при всех $\theta\in[0,3/2-1/\varkappa)$. □

Подведем итоги этого раздела.

Теорема 15.6. *Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$, заданный* (3.1) *и* (3.4)*, с потенциалом $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in[1,2)$, сильно регулярен. Тогда для любого $\theta\in[0,3/2-1/\varkappa)$ система*

$$\{(n^2+1)^{-\theta/2}\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

является базисом Рисса в пространстве $\mathbb{H}^\theta_U$.

При $\varkappa\geqslant 2$ имеет место базисность Рисса в $\mathbb{H}^\theta_U$ для любого $\theta\in[0,1]$. В случае слабой регулярности оператора базисом Рисса в соответствующем пространстве $\mathbb{H}^\theta_U$ является система двумерных подпространств

$$\mathcal{H}_n=\operatorname{Lin}\{\mathbf{y}_{2n},\mathbf{y}_{2n+1}\}.$$

Теорема 15.7. *Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in(1,\infty)$, сильно регулярен. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера в пространствах $L_\mu[0,\pi]$ при любом $\mu\in(1,\infty)$, в пространствах $W^1_{\mu,U}[0,\pi]$ при любом $\mu\in(1,\varkappa]$ и в пространствах $B^\theta_{\mu,q,U}[0,\pi]$, где либо*

$$\mu\in(1,\varkappa],\quad q\in(1,\infty),\quad \theta\in(0,1),$$

либо

$$\mu \in (\varkappa, \infty), \quad q \in (1, \infty), \quad \theta \in (0, 1 + 1/\mu - 1/\varkappa),$$

либо

$$\mu \in (\varkappa, \infty), \quad q = \mu, \quad \theta = 1 + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\varkappa}.$$

Если оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ слабо регулярен, то система $\{\mathcal{H}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует в соответствующем пространстве базис Шаудера из двумерных подпространств.

Доказательство. Теорема 15.6 получается объединением теорем 15.3, 15.4 и 15.5.
Теорема 15.7 есть объединение теорем 15.1, 15.2 и утверждения 15.5. □

Замечание 15.1. Мы сознательно не рассматриваем в теореме 15.7 случаи $\mu = 1$, $\mu = \infty$ и $q = \infty$, поскольку в соответствующих пространствах система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ заведомо не образует базиса.

В случае бесконечных индексов это следует из несепарабельности соответствующего пространства, а при $\mu = 1$ — из теоремы 14.1 и хорошо известного факта о том, что тригонометрическая система не является базисом в пространстве $L_1[0, \pi]$ (см., например, [141, гл. 4, § 1]).

В случае $\varkappa = 1$, $\mu \in [1, \infty)$, $\mu \neq 2$, вопрос о базисности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ пока остается открытым.

Если $q = 1$, а индексы θ и μ удовлетворяют ограничениям из условия теоремы 15.7, а также в случае $\theta = 1 + \dfrac{1}{\mu} - \dfrac{1}{\varkappa}$, $\mu > \varkappa$, $q \in [1, \infty)$ утверждения теоремы сохраняются. Эти случаи мы исключаем из соображений компактности доказательств.

При $\varkappa \in (1, 2)$, $\mu = q = 2$, $\theta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{\varkappa}$ (в этом случае $B^{\theta}_{\mu,\,q,\,U}[0, \pi] = \mathbb{H}^{\theta}_{U}$) из теоремы 15.7 следует базисность Шаудера системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

16. Приложение A

Вначале напомним некоторые обозначения и определения из теории интерполяции банаховых пространств.

Определение 16.1. Два комплексных банаховых пространства X_0 и X_1 образуют *комплексную банахову пару* $\{X_0, X_1\}$, если оба эти пространства линейно и непрерывно вложены в некоторое линейное комплексное хаусдорфово топологическое пространство X, т. е. $X_0 \subset X$ и $X_1 \subset X$.

Про пространства, образующие банахову пару, часто говорят, что они *совместимы*. Для краткости далее обозначаем нормы в этих пространствах $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ соответственно.

Определение 16.2. Пространство $X_\cap = X_0 \cap X_1$, снабженное нормой

$$\|x\|_\cap := J(1, x), \qquad J(t, x) := \max\{\|x\|_0, t\|x\|_1\},\ x \in X_\cap,$$

называется *пересечением пространств* X_0 и X_1. При этом нелинейный однородный функционал $J(t, x)$ называется *J-функционалом*. Пространство

$$X_+ = X_0 + X_1 = \{x \in X : x = x_0 + x_1,\ x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1\},$$

снабженное нормой

$$\|x\|_+ := K(1, x),$$
$$K(t, x) := \inf\{\|x_0\|_0 + t\|x_1\|_1 : x = x_0 + x_1,\ x_0 \in X_0,\ x_1 \in X_1\},$$

называется *суммой пространств* X_0 и X_1. При этом нелинейный однородный функционал $K(t, x)$ называется K-функционалом.

Легко проверить (см., например, [4]), что пространства $X_\cap$ и X_+ банаховы. Без потери общности далее будем считать, что $X = X_+$.

Определение 16.3. Банахова пара $\{X_0, X_1\}$ называется *регулярной*, если $X_1 \subset X_0$ (X_1 непрерывно вложено в X_0), т. е. существует константа $c > 0$ такая, что

$$\|x_0\| \leqslant c\|x\|_1 \quad \forall x \in X_1.$$

Опишем *вещественный метод интерполяции*. Этот метод соединяет в себе несколько различных подходов (K-метод, J-метод, L-метод, метод средних, метод следов, см., например, [79]), которые ведут к одному и тому же результату.

А именно, интерполяционные пространства, построенные различными методами, совпадают (при этом различные методы определяют в этом пространстве различные, но эквивалентные нормы). Мы дадим определение, основываясь на K-методе.

Определение 16.4. Зафиксируем числа $p \in [1, \infty)$ и $\theta \in (0, 1)$ и определим пространство $X_{\theta,p} := (X_0, X_1)_{\theta,p}$ следующим образом:

$$X_{\theta,p} := \left\{ x \in X_+ : \|x\|_{\theta,p} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, x))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

При $p = \infty$ положим

$$X_{\theta,\infty} := \left\{ x \in X_+ : \|x\|_{\theta,\infty} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t, x) < \infty \right\}.$$

Теперь обратимся к *комплексному методу интерполяции*. Обозначим через S вертикальную полосу в комплексной плоскости

$$S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}, \qquad \overline{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}.$$

Для любой банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ введем комплексное векторное пространство $\mathcal{H}(X_0, X_1)$, составленное из отображений $f : \overline{S} \to X_+$ со следующими свойствами:

($\mathcal{H}0$) $f : \overline{S} \to X_+$ непрерывно и ограничено;

($\mathcal{H}1$) $f : S \to X_+$ аналитично;

($\mathcal{H}2$) для любого $t \in \mathbb{R}$ выполнено $f(it) \in X_0$, $f(1 + it) \in X_1$, причем отображения

$$t \mapsto f(it) \quad \text{и} \quad t \mapsto f(1 + it)$$

непрерывны и ограничены.

Снабдим пространство $\mathcal{H}(X_0, X_1)$ нормой

$$\|f\|_{\mathcal{H}} := \max\big\{ \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_0, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_1 \big\}.$$

Определение 16.5. Зафиксируем число $\theta \in (0, 1)$. *Интерполяционным пространством*, построенным с помощью *комплексного метода интерполяции*, называют пространство

$$X_\theta := [X_0, X_1]_\theta = \{x \in X_+ : \exists f \in \mathcal{H}(X_0, X_1),\ f(\theta) = x\}.$$

Это пространство снабжается нормой

$$\|x\|_\theta := \inf\{\|f\|_{\mathcal{H}} : f \in \mathcal{H},\ f(\theta) = x\}.$$

Результат комплексной интерполяции X_θ в общем случае отличен от вещественной интерполяции $X_{\theta,p}$. Отметим, однако следующий факт.

Теорема 16.I (см., например, [79]). *Если пространства X_0 и X_1 гильбертовы, то при любом $\theta \in (0, 1)$ пространства X_θ и $X_{\theta,2}$ совпадают и также являются гильбертовыми.*

Хорошо известно, что интерполяционные пространства $X_{\theta,p}$ и X_θ обладают *интерполяционным свойством*.

Теорема 16.II (см., например, [79]). *Пусть $\{X_0, X_1\}$ и $\{Y_0, Y_1\}$ — две произвольные банаховы пары. Пусть $T : X_+ \to Y_+$ — ограниченный линейный оператор, причем*

$$\|Tx\|_{Y_0} \leqslant M_0\|x\|_{X_0}\ \forall x \in X_0 \quad \text{и} \quad \|Tx\|_{Y_1} \leqslant M_1\|x\|_{X_1}\ \forall x \in X_1.$$

Тогда, во-первых, для любых $\theta \in (0, 1)$ и $p \in [1, \infty]$ оператор T является ограниченным линейным оператором

$$T : X_{\theta,p} \to Y_{\theta,p} \quad \text{и} \quad T : X_\theta \to Y_\theta.$$

Во-вторых,

$$\|Tx\|_{Y_\theta} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|x\|_{X_\theta}, \qquad \|Tx\|_{Y_{\theta,p}} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|x\|_{X_{\theta,p}}.$$

Пространства X и Y называют *интерполяционными* относительно пар $\{X_0, X_1\}$ и $\{Y_0, Y_1\}$, если выполнено первое свойство из заключения предыдущей теоремы. При добавлении второго свойства говорят о *точных интерполяционных пространствах типа* θ.

Любой метод интерполяции, обладающий первым свойством, называют *интерполяционным функтором*. При добавлении второго свойства говорят о *точном интерполяционном функторе типа* θ.

Таким образом, интерполяционное свойство можно сформулировать коротко: *и вещественный, и комплексный метод интерполяции являются точными интерполяционными функторами на категории банаховых пространств*.

Промежуточное положение занимают *равномерные интерполяционные пространства*. Интерполяционное пространство X, построенное по паре банаховых пространств $\{X_0, X_1\}$, называется *равномерным интерполяционным пространством*, если для любого оператора T, ограниченного и в X_0, и в X_1, выполнено: T ограничен в X и

$$\|T\|_X \leqslant C \max\{\|T\|_{X_0}, \|T\|_{X_1}\}.$$

Приведем теперь несколько важных свойств из общей теории интерполяции.

Теорема 16.III (о ретракции, см. [79, теорема 1.2.4]). *Пусть $\{X_0, X_1\}$, $\{Y_0, Y_1\}$ — две произвольные банаховы пары, а F — произвольный интерполяционный функтор. Обозначим*

$$F(\{X_0, X_1\}) = X, \qquad F(\{Y_0, Y_1\}) = Y.$$

Пусть оператор S ограниченно действует из X_+ в Y_+, из X_0 в Y_0 и из X_1 в Y_1.

Пусть $S : X_j \to Y_j$, $j = 0, 1$, является коретракцией, т. е. обладает ограниченным левым обратным оператором $R : Y_j \to X_j$, $j = 0, 1$. Тогда оператор S осуществляет изоморфизм пространства X на подпространство $SR(Y)$ в Y.

Теорема 16.IV (о двойственности, см. [4, следствие 4.5.2]). *Пусть $\{X_0, X_1\}$ — банахова пара, причем хотя бы одно из пространств X_j, $j = 0, 1$, рефлексивно, а пространство $X_\cap$ плотно и в X_0, и в X_1. Тогда*

$$([X_0, X_1]_\theta)^* = [X_0^*, X_1^*]_\theta$$

(*символом* * *обозначен переход к сопряженному пространству*).

Теорема 16.V. *Для любой банаховой пары $\{X_0, X_1\}$ выполнены свойства*:

1) $[X_0, X_1]_\theta = [X_1, X_0]_{1-\theta}$;
2) *если $X_1 \subset X_0$, то $[X_0, X_1]_\theta \subset [X_0, X_1]_\tau$ при $\theta > \tau$*;
3) $[X_0, X_0]_\theta = X_0$;
4) *если $X_1 \subset X$, то и $[X_0, X_1]_\theta \subset [X_0, X]_\theta$ для любого $\theta \in (0, 1)$* (*имеется в виду, что пространства $\{X_0, X\}$ также образуют банахову пару, а оба вложения непрерывны*).

17. Приложение B

Мы регулярно используем классические пространства измеримых функций

$$L_p(\mathbb{R}) := \left\{ f \text{ измерима и } \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} := \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad p \in [1, \infty).$$

Часто в качестве f фигурирует вектор-функция $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Тогда мы подразумеваем $f_j \in L_p(\mathbb{R})$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$, причем

$$\|\mathbf{f}\|_{L_p} := \left(\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{f}\|_{L_p}^p \right)^{1/p}.$$

Иногда нам придется иметь дело с матрицами $\mathrm{T}(x) = (t_{jk}(x))_{j,\,k=1}^n$. В этом случае запись $\mathrm{T} \in L_p(\mathbb{R})$ означает, что $t_{j,\,k} \in L_p(\mathbb{R})$ для всех $1 \leqslant j,\ k \leqslant n$, причем

$$\|\mathrm{T}(x)\|_{L_p} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} |t_{jk}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = \infty$

$$L_\infty(\mathbb{R}) = \{f \text{ измерима и } \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < \infty\}.$$

Для случая вектор-функций $\mathbf{f}(x)$ и матриц-функций $\mathrm{T}(x)$ считаем

$$\|\mathbf{f}\|_{L_\infty} = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|f_j\|_{L_\infty}, \qquad \|\mathrm{T}\|_{L_\infty} = \max_{1\leqslant j,\,k\leqslant n} \|t_{jk}\|_{L_\infty}.$$

Подпространство непрерывных функций в $L_\infty(\mathbb{R})$ обозначаем $C(\mathbb{R})$.

Для пространств $L_p[0,\pi]$ меняем в определениях $\mathbb{R}$ на $[0,\pi]$.

Для пространств $L_p(\mu)$, где $d\mu$ — некоторая u-аддитивная мера в $\mathbb{C}$ с носителем $\operatorname{supp}\mu$, меняем в определении все интегралы на $\int\limits_{\operatorname{supp}\mu} \cdot\, d\mu$.

В частности, отдельно рассмотрим случай $d\mu(\lambda) = w(\lambda)\,d\lambda$, $\operatorname{supp}\mu = \mathbb{R}$, $w(\lambda)$ — вес, интегрируемая неотрицательная функция. Получаем весовые пространства $L_p(w)$, $1 < p < \infty$, снабженные нормой

$$\|f\|_{L_p(w)} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^p w(\lambda)\,d\lambda \right)^{1/p}.$$

Если $p = \infty$, то

$$\|f\|_{L_\infty(w)} = \sup_{\mathbb{R}} |f(\lambda)| w(\lambda).$$

Выбирая

$$w(\lambda) = (1+|\lambda|)^{p\theta}, \quad 1 < p < \infty, \quad \text{и} \quad w(\lambda) = (1+|\lambda|)^\theta \quad \text{при} \quad p = \infty,$$

введем весовые пространства $L_p^\theta(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, $\theta \in \mathbb{R}$, снабженные нормой

$$\|f\|_{L_p^\theta} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^p (1+|\lambda|)^{p\theta}\,d\lambda \right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$, естественно,

$$\|f\|_{L_\infty^\theta} = \sup_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|(1+|\lambda|)^\theta.$$

Рассмотрим также случай дискретных мер μ. Пусть μ сосредоточена на некоторой последовательности точек, т. е. $\mu = \sum w_j \delta(z-z_j)$. Тогда интеграл в определении пространств $L_p(\mu)$ меняется на сумму. Такие пространства мы будем записывать в координатном виде, положив $x_j := f(z_j)$,

$$l_p(w) := \left\{ x = (x_j) : \|x\|_{l_p(w)} = \left(\sum_j w_j |x_j|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}, \quad 1 < p < \infty,$$

$$l_\infty(w) := \left\{ x = (x_j) : \|x\|_{l_\infty(w)} = \sup_j w_j |x_j| < \infty \right\}.$$

Мы намеренно не указываем здесь множество суммирования для индекса j, поскольку нам потребуется и случай $j \in \mathbb{N}$, и случай $j \in \mathbb{Z}$. В частности, при

$$w_j = (1+|j|)^{p\theta}, \quad 1 < p < \infty, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

получаем весовое пространство l_p^θ.

В случае $j \in \mathbb{N}$, $\theta \geqslant 0$ удобно изменить вес на $w_j = j^{p\theta}$ (это меняет норму на эквивалентную). Все введенные выше пространства укладываются в следующее общее определение.

Определение 17.1. Пусть $(X, u, d\mu)$ — измеримое пространство, а $\omega(x)$ — интегрируемая неотрицательная функция на нем. Положим $L_p(\omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, — *пространство измеримых функций* f, интегрируемых в степени p на X с весом $\omega(x)$,

$$\|f\|_{L_p(\omega)} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p \omega(x)\, d\mu\right)^{1/p}.$$

При $p = \infty$ положим $L_\infty(\omega)$ — *пространство измеримых ограниченных с весом* $\omega(x)$ *функций* на X с нормой

$$\|f\|_{L_\infty(\omega)} = \sup_{x \in X} |f(x)|\omega(x).$$

Прежде всего, сформулируем теоремы об интерполяции введенных пространств.

Теорема 17.I (см. [4, теорема 5.5.3 и следствие 5.5.4])**.** *Пусть* $1 \leqslant p_1,\ p_2 < \infty$. *Тогда*

$$[L_{p_1}(\omega_1), L_{p_2}(\omega_2)]_\theta = L_p(\omega), \qquad 0 < \theta < 1,$$

где

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \omega(x) = \omega_1(x)^{p(1-\theta)/p_1} \omega_2(x)^{p\theta/p_2}.$$

Пусть $1 \leqslant q_1,\ q_2 < \infty$, *и линейный оператор*

$$T:\, L_{p_1}(\omega_1) \to L_{q_1}(\widetilde{\omega}_1)$$

ограничен с нормой M_1, *а*

$$T:\, L_{p_2}(\omega_2) \to L_{q_2}(\widetilde{\omega}_2)$$

ограничен с нормой M_2. *Тогда ограничен оператор*

$$T:\, L_p(\omega) \to L_q(\widetilde{\omega}), \quad \textit{где}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_1} + \frac{\theta}{q_2}, \quad \widetilde{\omega}(x) = \widetilde{\omega}_1(x)^{q(1-\theta)/q_1} \widetilde{\omega}_2(x)^{q\theta/q_2},$$

причем его норма не превосходит $M_1^{1-\theta} M_2^{\theta}$.

В этой теореме индексы p_1 и p_2 могут совпадать, но могут и различаться. Для $p_1 = p_2$ сформулируем теорему Стейна—Вейса.

Теорема 17.II (см. [4, теорема 5.4.1])**.** *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$[L_p(\omega_1), L_p(\omega_2)]_\theta = L_p(\omega), \qquad 0 < \theta < 1,$$

где $\omega(x) = \omega_1(x)^{1-\theta} \omega_2(x)^{\theta}$. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *и линейный оператор*

$$T:\, L_p(\omega_1) \to L_q(\widetilde{\omega}_1)$$

ограничен с нормой M_1, *а*

$$T:\, L_p(\omega_2) \to L_q(\widetilde{\omega}_2)$$

ограничен с нормой M_2. *Тогда*

$$T:\, L_p(\omega) \to L_q(\widetilde{\omega}), \quad \textit{где} \quad \widetilde{\omega}(x) = \widetilde{\omega}_1(x)^{1-\theta} \widetilde{\omega}_2(x)^{\theta},$$

причем его норма не превосходит $M_1^{1-\theta} M_2^{\theta}$.

Теорема 17.III. *При любых* $0 < s_1 < 1/2$, $s_1 < s_2 < 1$

$$[L_2^{s_1}(\mathbb{R}), L_\infty^{s_2}(\mathbb{R})]_\theta = L_{p'}^{s}(\mathbb{R}), \qquad \theta \in (0,1), \quad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2, \quad p = \frac{2}{1+\theta}. \tag{17.1}$$

Доказательство. Мы не можем применить ни одну из предыдущих теорем теорему напрямую. Недостающее звено доказательства — теорема двойственности для комплексного метода интерполяции (см. 16.IV). Мы положим

$$X_0 = L_2((1+|x|)^{-2s_1};\mathbb{R}), \quad X_1 = L_1((1+|x|)^{-s_2};\mathbb{R}), \quad \text{где} \quad 0 < s_1 < 1/2, \quad s_1 < s_2 < 1.$$

Легко видеть, что $X_0^* = L_2^{s_1}(\mathbb{R})$, $X_1^* = L_\infty^{s_2}(\mathbb{R})$ (относительно стандартного действия $\int\limits_{\mathbb{R}} fg$).

Ясно также, что X_0 рефлексивно, а $X_0 \cap X_1$ плотно в каждом пространстве, поскольку включает пространство Шварца. Далее,

$$[X_0, X_1]_\theta = [L_2(\omega_1), L_1(\omega_2)]_\theta = L_{2/(1+\theta)}(\omega),$$

$$\omega(x) = (1+|x|)^{-s_1\frac{2(1-\theta)}{1+\theta} - s_2\frac{2\theta}{1+\theta}} = (1+|x|)^{-ps}.$$

Легко видеть, что

$$([X_0, X_1]_\theta)^* = L_p(\omega) = L_{p'}(\omega^{-p'/p}) = L^s_{2/(1-\theta)}(\mathbb{R}), \qquad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2,$$

где $p = 2/(1+\theta)$, $p' = 2/(1-\theta)$. Таким образом,

$$[L_2^{s_1}(\mathbb{R}), L_\infty^{s_2}(\mathbb{R})]_\theta = [X_0^*, X_1^*]_\theta = ([X_0, X_1]_\theta)^* = L^s_{p'}(\mathbb{R}).$$

□

Докажем теперь необходимое нам простое утверждение.

Утверждение 17.1. *Пусть линейный оператор T ограниченно действует из пространства $(L_\alpha[0,\pi])^2$ в пространство $(L_\beta[0,\pi])^2$ для любых индексов $\alpha \leqslant \beta$, $\alpha \in [1,\infty)$, $\beta \in (1,\infty]$. Пусть T^* — эрмитов сопряженный оператор к оператору T, действующему в пространстве $(L_2[0,\pi])^2$. Тогда T^* продолжается до ограниченного оператора, действующего из пространства $(L_\gamma[0,\pi])^2$ в пространство $(L_\delta[0,\pi])^2$ для любых индексов $\gamma \leqslant \delta$, $\gamma \in [1,\infty)$, $\delta \in (1,\infty]$, причем*

$$\|T^*\|_{\gamma\to\delta} = \|T\|_{\delta'\to\gamma'}, \quad \textit{где} \;\; \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma'} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta'} = 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{f} \in (L_{\max\{2,\gamma\}}[0,\pi])^2$, а $\mathbf{g} \in (L_{\max\{2,\delta'\}}[0,\pi])^2$. Тогда модуль билинейной формы $\langle T^*\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$ допускает оценку

$$|\langle T^*\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle| = |\langle \mathbf{f}, T\mathbf{g}\rangle| \leqslant \|T\|_{L'_\delta \to L_{\gamma'}} \|\mathbf{f}\|_{L_\gamma} \|\mathbf{g}\|_{L'_\delta}. \tag{17.2}$$

Это означает, что вектор $T^*\mathbf{f}$ порождает непрерывный по норме $\|\cdot\|_{\delta'}$ функционал, определенный либо на всем $(L_{\delta'}[0,\pi])^2$ (при $\delta' \geqslant 2$), либо на всюду плотном в $(L_{\delta'}[0,\pi])^2$ подпространстве. В последнем случае продолжим этот функционал по непрерывности на все $(L_{\delta'}[0,\pi])^2$. Поскольку $\delta' < \infty$, то, в силу теорему Рисса об общем виде линейного функционала на $(L_{\delta'}[0,\pi])^2$, имеем $T^*\mathbf{f} \in (L_\delta[0,\pi])^2$. Далее, из (17.2) следует оценка

$$\|T^*\mathbf{f}\|_{L_\delta} \leqslant \|T\|_{L'_\delta \to L'_\gamma} \|\mathbf{f}\|_{L_\gamma},$$

т. е. $\|T^*\|_{L_\gamma \to L_\delta} \leqslant \|T\|_{L'_\delta \to L'_\gamma}$. Применяя эту оценку второй раз, с учетом $\gamma < \infty$, имеем

$$\|T^{**}\|_{L'_\delta \to L'_\gamma} \leqslant \|T^*\|_{L_\gamma \to L_\delta}.$$

□

Сформулируем классический результат о преобразовании Фурье функций $f \in L_p(\mathbb{R})$, но вначале напомним определение пространств Харди.

Определение 17.2. *Пространство Харди* $H^p(\mathbb{C}_+)$, $p \in [1,\infty)$, состоит из аналитических в открытой верхней полуплоскости функций $F(\lambda)$ с конечной нормой

$$\|F(\lambda)\|_{H^p} = \sup_{\tau>0} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |F(u+i\tau)|^p \, du \right)^{1/p}.$$

Пространством Харди $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ называется пространство голоморфных и ограниченных в $\mathbb{C}_+$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}_+} |f(z)|$.

Пространством Харди H^p в полосе $\Pi_\alpha = \{z : |\operatorname{Im} z| < \alpha\}$ называется банахово пространство голоморфных в Π_α функций с конечной нормой

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{|y|<\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^p\,dx \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty.$$

Теорема 17.IV (Пэли—Винер, Хаусдорф—Юнг)**.** *Одностороннее преобразование Фурье*

$$\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t} f(t)\,dt$$

любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,2]$, *есть функция пространства Харди* $H^{p'}(\mathbb{C}_+)$ *с сопряженным индексом* $p' = \dfrac{p}{p-1}$. *При этом*

$$\|\hat{f}\|_{H^{p'}(\mathbb{C}_+)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}, \qquad C = C(p).$$

Кроме того,

$$\|\hat{f}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_p(\mathbb{R}_+)}, \qquad C = C(p).$$

Обобщением последнего результата является следующая чрезвычайно тонкая теорема, которую мы неоднократно используем в наших доказательства.

Теорема 17.V (см. [125, теорема 11.2.1])**.** *Нелинейный оператор Карлесона*

$$\mathcal{C}(f) := \sup_{N>0} \left| \int\limits_{-N}^{N} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi \right|, \tag{17.3}$$

где $\hat{f}$ — *классическое преобразование Фурье функции* f, *ограниченно действует в* $L_p(\mathbb{R})$ *для любого* $p \in (1,\infty)$.

Более того, оператор Карлесона ограниченно действует в пространстве $L_r(w)$ *для любого* $r \in (1,\infty)$, *если вес* w *принадлежит классу Макенхаупта* A_r, *а именно,*

$$\sup_{-\infty<a<b<\infty} \left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b w(x)\,dx \right) \left(\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b w(x)^{-1/(r-1)}\,dx \right)^{r-1} < \infty.$$

Еще один красивый и важный результат из теории пространств Харди, который нам потребуется, связан с карлесоновыми мерами.

Определение 17.3. Положительная мера μ с носителем в полуплоскости

$$G_{+,r} := \{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > r\}, \quad r \in \mathbb{R},$$

называется *мерой Карлесона*, если величина

$$\gamma := \sup_{x\in\mathbb{R},\, y>0} \mu(Q_{x,y}) y^{-1}, \qquad Q_{x,y} = \{z : \operatorname{Re} z \in (x, x+y),\ \operatorname{Im} z \in (r, r+y)\}, \tag{17.4}$$

конечна.

Мерой Карлесона в полосе Π_α называется любая мера μ, для которой конечна величина

$$\gamma_\mu := \sup_{u\in\mathbb{R}} \mu(Q_u),$$

где Q_u — квадрат с вершинами $u \pm \alpha \pm i\alpha$.

Отметим важный для нас частный случай меры Карлесона. Назовем последовательность λ_n, $n \in \mathbb{N}$, точек полосы $\alpha_1 < \operatorname{Im}\lambda < \alpha_2$ для некоторых α_1 и α_2, $0 < \alpha_1 < \alpha_2$, *несгущающейся*, если найдется число $\beta > 0$ такое, что в любом прямоугольнике $\operatorname{Re}\lambda \in [x, x+1]$, $\operatorname{Im}\lambda \in [\alpha_1, \alpha_2]$ заключено не более β элементов последовательности.

Утверждение 17.2. *Любая несгущающаяся последовательность* $\{\lambda_n\}$ *полосы* $\{\lambda : 0 < \alpha_1 < \operatorname{Im}\lambda < \alpha_2\}$ *индуцирует меру Карлесона* $\mu = \sum\limits_n \delta(\lambda - \lambda_n)$ *в верхней полуплоскости.*

Теорема 17.VI (Л. Карлесон, см., например, [17, теорема I.5.6, теорема II.3.9])**.** *Пусть* u — *мера Карлесона в верхней полуплоскости. Тогда*

$$\forall f \in H^s(\mathbb{C}_+): \quad \int |f|^s\,d\mu \leqslant C\|f\|^s_{H^s}, \quad \text{где } \ C = C(\gamma). \tag{17.5}$$

для любого $s \in [1, \infty)$.

Для любой функции $f \in H^p(\Pi_\alpha)$ *и любой меры Карлесона* μ *в полосе* Π_α *выполнено* $f \in L_p(d\mu)$ *и*

$$\|f\|_{L_p(d\mu)} \leqslant C\|f\|_{H^p}$$

с константой C, *зависящей только от* α *и* γ.

Перейдем к шкалам пространств Соболева и Бесова. Через $W^1_\mu[0,\pi]$, $\mu \in [1,\infty)$, мы обозначаем классическое пространство Соболева на отрезке $[0,\pi]$, составленное из функций $f(x)$, для которых $f' \in L_\mu[0,\pi]$, и наделенное нормой $\|f\|_{W^1_\mu} = \left(\int\limits_0^\pi |f(x)|^\mu + |f'(x)|^\mu\,dx\right)^{1/\mu}$. Положим также

$$\mathring{W}^1_2[0,\pi] = \{y \in W^1_2[0,\pi] : y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

Определение 17.4. Пусть U — линейная форма на пространстве вектор-функций $\mathbf{y}(x)$ вида

$$U(\mathbf{y}) = u_{j1}y_1(0) + u_{j2}y_2(0) + u_{j3}y_1(\pi) + u_{j4}y_2(\pi)$$

Положим

$$W^1_{\mu,U}[0,\pi] := \{\mathbf{y} \in W^1_\mu[0,\pi] \,|\, U(\mathbf{y}) = 0\}, \ \mu \in [1,\infty).$$

В случае когда $\mathbf{f} \in L_\mu[0,\pi]$, $\mathbf{g} \in L_{\mu'}[0,\pi]$, $1/\mu + 1/\mu' = 1$, обозначим

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle := \int\limits_0^\pi f_1(x)\overline{g_1}(x) + f_2(x)\overline{g_2}(x)\,dx.$$

Нам также потребуется работать в пространствах с отрицательным индексом гладкости. Мы определим пространство $W^{-1}_\mu[0,\pi]$, $\mu \in (1,\infty)$, как дуальное пространство к $W^1_{\mu'}[0,\pi]$ относительно действия $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Определим также пространство $W^{-1}_{\mu,U}[0,\pi]$ как дуальное пространство к $W^1_{\mu',U}[0,\pi]$. Непосредственно из определения видно, что $W^{-1}_{\mu,U}[0,\pi]$ является подпространством коразмерности 2 в пространстве $W^{-1}_\mu[0,\pi]$. При этом его дополняющее подпространство порождается функционалами

$$u_{j1}y_1(0) + u_{j2}y_2(0) + u_{j3}y_1(\pi) + u_{j4}y_2(\pi), \quad j = 1,\,2.$$

Дадим определение пространств Бесова. Заметим (см. [4, гл. 6], [79, гл. 2, 4] или [100, § 5.4]), что эти пространства могут быть определены множеством различных эквивалентных способов. Мы начнем с «внутреннего» описания.

Определение 17.5. $f \in B^\theta_{1,\infty}(\mathbb{R})$, если

$$\|f\|_{B^\theta_{1,\infty}} := \|f\|_{L_1} + \sup_{y\in\mathbb{R}} y^{-\theta}\omega_1(f;y) < \infty,$$

где

$$\omega_1(f;y) := \sup_{z\in[0,y]} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x+z) - f(x)|\,dx$$

— интегральный модуль непрерывности функции f. Пространство $B^\theta_{p,q}(\mathbb{R})$ состоит из L_p-функций с конечной нормой

$$\|f\|_{B^\theta_{p,q}} := \|f\|_{L_p} + \left(\int\limits_0^1 \left(y^{-\theta}\omega_p(f;y)\right)^q \,\frac{dy}{y}\right)^{1/q} < \infty,$$

где

$$\omega_p(f;y) := \sup_{z\in[0,y]} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+z) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

— интегральный модуль непрерывности функции $f \in L_p(\mathbb{R})$. Здесь $\theta \in (0,1)$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty)$. При $q = \infty$

$$\|f\|_{B^\theta_{p,\infty}} := \|f\|_{L_p} + \sup_{y\in\mathbb{R}} y^{-\theta}\omega_p(f;y) < \infty.$$

Отметим, что пространства $B^\theta_{1,\infty}(\mathbb{R})$ несепарабельны. Обозначим через $B^\theta_{1,\infty,0}(\mathbb{R})$ подпространство в $B^\theta_{1,\infty}(\mathbb{R})$, полученное замыканием линеала абсолютно непрерывных функций по норме $\|\cdot\|_{B^\theta_{1,\infty}}$.

Меняя разность первого порядка в определении модуля непрерывности на вторую, третью и т. д., можно определить пространства Бесова с индексом $\theta > 1$, но нам эта шкала пространств не понадобится. Не понадобятся нам и пространства Бесова с индексом $p = \infty$. Приведем важный результат об интерполяции.

Теорема 17.VII (см. [100, следствие 4.13]). *При интерполяции вещественным методом имеем*

$$B^\theta_{p,\,q}(\mathbb{R}) = (L_p(\mathbb{R}), W^1_p(\mathbb{R}))_{\theta,q}$$

при всех $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$.

Мы определили пространства Бесова $B^\theta_{p,q}(\mathbb{R})$. Рассмотрим теперь случай конечного отрезка.

Определение 17.6. Функция $f \in B^\theta_{p,q}[0,\pi]$, если найдется такая функция $g \in B^\theta_{p,q}(\mathbb{R})$, что $f(x) = g(x)|_{x\in[0,\pi]}$. При этом

$$\|f\|_{B^\theta_{p,q}[0,\pi]} := \inf\{\|g\|_{B^\theta_{p,q}(\mathbb{R})} : f(x) = g(x)|_{x\in[0,\pi]}\}. \tag{17.6}$$

Теорема 17.VIII (см. [79, п. 2.8.7]). *Оператор умножения на характеристическую функцию отрезка* $T: f \to \chi_{[a,b]}f$ *ограничен в пространстве* $B^\theta_{p,q}(\mathbb{R})$, *если* $\theta \in (0, 1/p)$.

Таким образом, пространства Бесова $B^\theta_{p,q}[0,\pi]$ при $\theta \in (0,1/p)$ допускают эквивалентное описание.

Теорема 17.IX. *Пусть* $\theta \in (0,1/p)$. *Пространство* $B^\theta_{p,q}[0,\pi]$ *состоит из* L_p*-функций с конечной нормой*

$$\|f\|_{B^\theta_{p,q}[0,\pi]} := \|f\|_{L_p[0,\pi]} + \left(\int_0^\pi \left(y^{-\theta}\omega_p(f;y)\right)^q \frac{dy}{y} \right)^{1/q} < \infty, \tag{17.7}$$

где

$$\omega_p(f;y) := \sup_{z\in[0,y]} \left(\int_0^\pi |f(x+z) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

— интегральный модуль непрерывности функции $f \in L_p[0,\pi]$ (*мы продолжаем ее за пределы отрезка* $[0,\pi]$ *нулем*). *При* $q = \infty$

$$\|f\|_{B^\theta_{p,\infty}} := \|f\|_{L_p} + \sup_{y\in\mathbb{R}} y^{-\theta}\omega_p(f;y) < \infty.$$

При этом введенные здесь нормы $\|\cdot\|_{\theta,p,q}$ *эквивалентны стандартной норме пространства* $B^\theta_{p,q}[0,\pi]$ *из определения* 17.6.

Доказательство. Будем обозначать $\|\cdot\|_{\theta,p,q}$ норму (17.7), а через $\|\cdot\|_{B^\theta_{p,q}}$ норму (17.6).

Через T обозначаем оператор умножения на характеристическую функция отрезка $[0,\pi]$. Пусть $f \in B^\theta_{p,q}[0,\pi]$ в смысле определения 17.6. Тогда найдется функция $g \in B^\theta_{p,q}(\mathbb{R})$ такая, что $g(x) = f(x)$ на $[0,\pi]$. Поскольку

$$\|f\|_{\theta,p,q} = \|Tg\|_{B^\theta_{p,q}} \leqslant C\|g\|_{B^\theta_{p,q}} < \infty,$$

то $f \in B^{\theta}_{p,q}[0,\pi]$ в смысле определения из формулировки теоремы.

Обратно, если норма $\|f\|_{\theta,p,q}$ конечна, то функция $\widetilde{f}$, равная $f(x)$ на $[0,\pi]$ и тождественно равная нулю вне $[0,\pi]$, попадает в $B^{\theta}_{p,q}$. Очевидно, что ее ограничение на $[0,\pi]$ совпадает с f, так что $\|f\|_{B^{\theta}_{p,q}} \leqslant \|f\|_{\theta,p,q}$. Мы доказали первое утверждение теоремы и подчинение $\|\cdot\|_{B^{\theta}_{p,q}} \leqslant \|\cdot\|_{\theta,p,q}$.

Обратная оценка следует из теоремы Банаха об обратном операторе. □

Для нас важно то, что шкала пространств $B^{\theta}_{p,q}[0,\pi]$ также замкнута относительно вещественной интерполяции.

Теорема 17.X (см. [79, п. 2.10.1]). *При интерполяции вещественным методом имеем*

$$B^{\theta}_{p,\,q}[0,\pi] = (L_p[0,\pi], W^1_p[0,\pi])_{\theta,q}$$

при всех $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$, $\theta \in (0,1)$.

В гильбертовом случае, когда $\mu = 2$, обозначим $B^{\theta}_{2,\,2}$ через W^{θ}_2, а $W^{\theta}_2[0,\pi])^2$ через $\mathbb{H}^{\theta}$, $\theta \in [0,1]$.

Поскольку при интерполяции гильбертовых пространств вещественный $(\cdot,\cdot)_{\theta,2}$ и комплексный $[\cdot,\cdot]_{\theta}$ методы совпадают, то $\mathbb{H}^{\theta} = [\mathbb{H},\mathbb{H}^1]_{\theta}$.

Определение 17.7. Положим $B^{-\theta}_{\mu,\,q} = (L_{\mu}, W^{-1}_{\mu})_{\theta,q}$, $\mu,\,q \in (1,\infty)$, $\theta \in (0,1)$. Обозначим $B^{\theta}_{2,\,2}$ через W^{θ}_2, а $(W^{\theta}_2[0,\pi])^2$ через $\mathbb{H}^{\theta}$, $\theta \in [-1,0)$.

Данное определение относится и к пространствам на $\mathbb{R}$, и к пространствам на $[0,\pi]$. Обращаем внимание на то, что *введенная нами шкала пространств* $B^{\theta}_{\mu,\,q}[0,\pi]$ *совпадает с классическими пространствами Бесова при* $-1+\dfrac{1}{\mu} < \theta < 0$ *и отличается от них при* $-1 \leqslant \theta \leqslant -1+\dfrac{1}{\mu}$ (см. [79, п. 4.8.2]) *в силу граничных эффектов, возникающих в концах отрезка.*

Поскольку $L_{\mu} = (L_{\mu'})'$ и $W^{-1}_{\mu} = \left(W^1_{\mu'}\right)'$ (сопряженные пространства здесь следует понимать в смысле действия $\langle\cdot,\cdot\rangle$), где $1/\mu + 1/\mu' = 1$, то из теоремы двойственности для вещественного метода интерполяции (см. [79, п. 1.11.2]) следует теорема.

Теорема 17.XI. *И в случае всей оси, и в случае отрезка*

$$B^{-\theta}_{\mu,\,q} = \left(B^{\theta}_{\mu',\,q'}\right)', \qquad \text{где } \ \theta \in (0,1),\ \mu,\,q \in (1,\infty),\ \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\mu}' = \frac{1}{q}+\frac{1}{q}' = 1. \tag{17.8}$$

Положим

$$B^{0}_{\mu,\,q} = (B^{-\varepsilon}_{\mu,\,q}, B^{\varepsilon}_{\mu,\,q})_{1/2,\,q}$$

(здесь число ε из интервала $0 < \varepsilon < \min(1/\mu, 1/\mu')$ произвольно — то, что определение не зависит от выбора ε, вытекает из следующей теоремы).

Отметим, что пространства $B^0_{\mu,\,q}$ не совпадают с пространствами L_{μ} (за исключением равенства $B^0_{2,\,2} = L_2$), хотя

$$B^0_{\mu,\,\mu} \subset L_{\mu} \subset B^0_{\mu,\,2} \quad \text{при} \quad \mu \in (1,2]$$

и

$$B^0_{\mu,\,\mu} \supset L_{\mu} \supset B^0_{\mu,\,2} \quad \text{при} \quad \mu \in [2,\infty).$$

Теорема 17.XII (см. [79, п. 4.3.1]).

1) *Пусть* $1 < \mu,\ \varkappa < \infty$, $0 < s < 1$, $\theta \in (0,1)$. *Определим число* p *равенством* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{\mu} + \dfrac{\theta}{\varkappa}$. *Тогда*

$$(B^{s}_{\mu,\,\mu}, W^1_{\varkappa})_{\theta,p} = B^{(1-\theta)s+\theta}_{p,\,p}.$$

2) *Пусть* $1 < \mu < \infty$, $1 < q_1,\ q_2,\ q < \infty$, $-1+\dfrac{1}{\mu} < s_1,\ s_2 < 1$, $\theta \in (0,1)$. *Тогда*

$$(B^{s_1}_{\mu,\,q_1}, B^{s_2}_{\mu,\,q_2})_{\theta,\,q} = B^{s}_{\mu,\,q}, \quad \text{где } \ s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2.$$

3) *Если* $1 < \mu < \infty$, $s \in (0,1)$, $1 < p,\ q < \infty$, *а* $\theta \in (0,1)$, *то*

$$(L_{\mu}, B^{s}_{\mu,\,q})_{\theta,p} = B^{\theta s}_{\mu,\,p}.$$

Теорема 17.XIII (см. [4, теорема 6.4.5]). *Пусть* $s_1 \neq s_2$, *а* p_1, p_2, q_1, $q_2 \in [1, \infty]$. *Тогда*

$$[B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mathbb{R}), B^{s_2}_{p_2,q_2}(\mathbb{R})]_\theta = B^s_{p,q}(\mathbb{R}), \tag{17.9}$$

где $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_1} + \dfrac{\theta}{p_2}$, $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_1} + \dfrac{\theta}{q_2}$.

Теорема 17.XIV. *При любых* $0 < s_1 < 1/2$, $s_1 < s_2 < 1$

$$[B^{s_1}_{2,2}[0,\pi], B^{s_2}_{1,\infty}[0,\pi]]_\theta = B^s_{p,p'}[0,\pi], \qquad \theta \in (0,1), \quad s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2, \quad p = \frac{2}{1+\theta}. \tag{17.10}$$

Доказательство. Выбирая $0 < s_1 < s_2 < 1$, $p_1 = q_1 = 2$, $p_2 = 1$, $q_2 = \infty$, получим $p = \dfrac{2}{1+\theta}$, $q = \dfrac{2}{1-\theta} = p'$.

Переход к пространствам Бесова на отрезке $[0,\pi]$ осуществляется стандартным образом с помощью теоремы о ретракции (см. 16.III). В нашем случае мы выбираем

$$X_0 = B^{s_1}_{2,2}(\mathbb{R}), \quad X_1 = B^{s_2}_{1,\infty}(\mathbb{R}), \quad Y_0 = B^{s_1}_{2,2}[0,\pi], \quad Y_1 = B^{s_2}_{1,\infty}[0,\pi],$$

$R : f(x) \to f(x)\chi_{[0,\pi]}(x)$ — оператор умножения на характеристическую функцию отрезка, $S : f(x) \to \widetilde{f}(x)$ — оператор, продолжающий функцию $f(x)$ за пределы отрезка $[0,\pi]$ тождественным нулем.

Поскольку $s_1 < 1/2$, $s_2 < 1$, то оба эти оператора ограничены (из X_j в Y_j для оператора S; из Y_j в X_j для оператора R, $j = 0$, 1). В качестве интерполяционного функтора F выберем комплексный метод интерполяции $[\cdot,\cdot]_\theta$, $\theta \in (0,1)$.

Согласно (17.9), $Y = B^s_{p,p'}(\mathbb{R})$, где $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$, $p = \dfrac{2}{1+\theta}$.

Остается заметить, что $SR(Y)$ есть подпространство функций f в Y, равных нулю вне отрезка $[0,\pi]$, т. е. может быть отождествлено с $B^s_{p,p'}[0,\pi]$ (условие $s \in (0, 1/p)$, как легко проверить, выполнено).

Тогда, согласно теореме о ретракции, пространство

$$X = [B^{s_1}_{2,2}[0,\pi], B^{s_2}_{1,\infty}[0,\pi]]_\theta$$

изоморфно $B^s_{p,p'}[0,\pi]$. □

Теорема 17.XV (см. [79, п. 4.6.1]).

1) *При фиксированном* $\mu \in (1,\infty)$ *и любых* $1 < q_1$, $q_2 < \infty$ *справедливы непрерывные плотные компактные вложения*

$$B^{s_1}_{\mu,\,q_1} \supset B^{s_2}_{\mu,\,q_2} \supset W^1_\mu, \quad \textit{если} \quad -1 < s_1 < s_2 < 1.$$

2) *Пусть* $1 < \mu_1 < \mu_2 < \infty$. *При любом* s *из интервала* $(-1,1)$ *и любом* $q \in (0,\infty)$ *справедливы непрерывные и плотные вложения*

$$B^s_{\mu_1,q} \supset B^s_{\mu_2,\,q}.$$

Пусть $1 < q_1 < q_2 < \infty$. *Тогда при любом* $\mu \in (1,\infty)$, *при любом* $s \in (-1,1)$ *справедливы непрерывные и плотные вложения*

$$B^s_{\mu,q_2} \supset B^s_{\mu,\,q_1}.$$

3) *Пусть* $1 < \mu_2 < \mu_1 < \infty$, $-1 < s_1 < s_2 < 1$, *причем* $s_1 - \dfrac{1}{\mu_1} = s_2 - \dfrac{1}{\mu_2} > -1$, *а индексы* $1 < q_1$, $q_2 < \infty$ *произвольны. Тогда справедливы непрерывные плотные компактные вложения*

$$B^{s_1}_{\mu_1,\,q_1} \supset B^{s_2}_{\mu_2,\,q_2}.$$

Если $s \in (0,1)$, $1 < \mu$, $q < \infty$ *и* $s - \dfrac{1}{\mu} = 1 - \dfrac{1}{\nu}$ *для некоторого* $1 \leqslant \nu < \infty$, *то*

$$B^s_{\mu,\,q} \supset W^1_\nu.$$

Если $1 < \mu,\, q < \infty$ *и* $s - \dfrac{1}{\mu} = -\dfrac{1}{\nu}$ *для некоторого* $1 < \nu < \infty$, *то*

$$B^s_{\mu,\,q} \subset L_\nu \text{ при } s > 0 \quad \text{и} \quad B^s_{\mu,\,q} \supset L_\nu \text{ при } s < 0.$$

4) *Пусть* $\mu \in (1,\infty)$, $q \in (1,\infty)$, *а* $s \in (1/\mu, 1)$. *Тогда пространство* $B^s_{\mu,\,q}$ *непрерывно плотно и компактно вложено в пространство* $C[0,\pi]$ *непрерывных функций.*

Следующие факты относятся к теории мультипликаторов в пространствах Бесова.

Теорема 17.XVI.

1) *При* $s > \dfrac{1}{\mu}$, *где* $\mu \in (1,\infty)$, *и* $q \in (1,\infty)$, *пространство* $B^s_{\mu,\,q}$ *является банаховой алгеброй относительно операции поточечного умножения. Банаховыми алгебрами являются также все пространства* W^1_μ *при* $\mu \in [1,\infty)$.
2) *При* $-1 + \dfrac{1}{\mu} < s < \dfrac{1}{\mu}$, *где* $\mu \in (1,\infty)$, *и* $q \in (1,\infty)$ *оператор умножения на характеристическую функцию произвольного отрезка ограничен в пространстве* $B^s_{\mu,\,q}$, *причем его норма не превосходит единицы.*
3) *Оператор умножения в пространстве Бесова* $B^\theta_{p,r}(\mathbb{R})$ *ограничен, если* $m \in B^{1/p}_{p,\infty} \cap L_\infty$.
4) *Пусть функция* $m(x)$ *принадлежит пространству* $W^1_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty)$. *Тогда оператор умножения*

$$T_m : f \mapsto mf$$

ограничен в пространстве Лебега $L_\mu[0,\pi]$ *для любого* $\mu \in [1,\infty]$, *в пространствах Соболева* W^1_μ *для любого* $\mu \in [1,\varkappa]$ *и в пространствах Бесова* $B^s_{\mu,\,q}[0,\pi]$, *где либо* $q \in (1,\infty)$, $\mu \in (1,\varkappa]$, *а* $s \in (0,1)$, *либо* $q \in (1,\infty)$, $\mu \in (\varkappa,\infty)$, *а* $s \in (0, 1 - 1/\varkappa + 1/\mu]$.

Доказательство. Первые три утверждения хорошо известны (см. [80, пп. 2.8.3, 2.8.5 и 2.8.7]).

4) Утверждение о пространствах L_μ очевидно, поскольку $m(x)$ ограничена. Поскольку $W^1_\mu \supset W^1_\varkappa$ при $\mu \leqslant \varkappa$, а W^1_μ — алгебра, то для пространств Соболева утверждение также очевидно.

Сосредоточимся на шкале пространств Бесова. Интерполируя, получаем ограниченность T_m в пространствах $B^s_{\mu,\,q} = (L_\mu, W^1_\mu)_{s,q}$, $\mu \in (1,\varkappa]$, $q \in (1,\infty)$, $s \in (0,1)$.

В случае $\mu \in (\varkappa,\infty)$ воспользуемся теоремой вложения $W^1_\varkappa \subset B^s_{\mu,\,q}$, где $s = 1 - \dfrac{1}{\varkappa} + \dfrac{1}{\mu}$, $q \in (1,\infty)$. Поскольку пространства $B^s_{\mu,\,q}$ являются банаховыми алгебрами относительно операции умножения при $s > \dfrac{1}{\mu}$ (что в нашем случае выполнено) и любом $q \in (1,\infty)$, то оператор T_m ограничен в $B^s_{\mu,\,q}$ при $s = 1 - \dfrac{1}{\varkappa} + \dfrac{1}{\mu}$, $q \in (1,\infty)$, $\mu \in (\varkappa,\infty)$.

Проводя теперь интерполяцию (см. п. 3 теоремы 17.XII) $B^\theta_{\mu,\,q} = (L_\mu, B^s_{\mu,\,q})_{\theta/s,\,q}$, где $s = 1 - \dfrac{1}{\varkappa} + \dfrac{1}{\mu}$, а $\theta \in (0,s)$, приходим к окончательному утверждению. $\square$

Кроме классических пространств Бесова, нам потребуются пространства, учитывающие краевые условия.

Определение 17.8. Положим

$$B^\theta_{\mu,\,q,\,U} := (L_\mu, W^1_{\mu,\,U})_{\theta,q}, \qquad 1 < \mu,\, q < \infty,\ 0 < \theta < 1$$

(напомним, что $W^1_{\mu,U} := \{\mathbf{y} \in W^1_\mu : U(\mathbf{y}) = 0\}$). В частности, при $\mu = q = 2$ имеем

$$W^\theta_{2,U} = (L_2, W^1_{2,U})_{\theta,2} = [L_2, W^1_{2,U}]_\theta, \qquad \theta \in (0,1).$$

Сразу же отметим важное для нас соотношение между пространствами $B^\theta_{\mu,\,q,\,U}$ и $B^\theta_{\mu,\,q}$.

Теорема 17.XVII (см. [79, § 4.3.3]). *Зафиксируем пару индексов $\mu \in (1,\infty)$, $q \in (1,\infty)$. При $\theta \in (0,1/\mu)$ пространства $B^{\theta}_{\mu,q,U}$ и $B^{\theta}_{\mu,q}$ совпадают. При $\theta \in (1/\mu,1)$ оба пространства вложены в пространство непрерывных функций, нормы в них совпадают и*

$$B^{\theta}_{\mu,q,U} = \{\mathbf{y} \in B^{\theta}_{\mu,q} | U(\mathbf{y}) = 0\}.$$

В частности, $W^{\theta}_{2,U} = W^{\theta}_{2}$ при $\theta \in (0,1/2)$.

Пространства $B^{-\theta}_{\mu,q,U}$ мы вновь определим интерполяцией

$$B^{-\theta}_{\mu,q,U} = (L_\mu, W^{-1}_{\mu,U})_{\theta,q}, \quad \mu,\, q \in (1,\infty), \quad \theta \in (0,1).$$

Отметим, что как и выше

$$B^{-\theta}_{\mu,q,U} = (B^{\theta}_{\mu',q',U^*})',$$

где U^* — сопряженные к U краевые условия, $\theta \in (0,1)$, $\mu \in (1,\infty)$ и $q \in (1,\infty)$.

Наконец, положим

$$B^{0}_{\mu,q,U} = (B^{-\varepsilon}_{\mu,q,U}, B^{\varepsilon}_{\mu,q,U})_{1/2,q},$$

где число ε из интервала $0 < \varepsilon < \min(1/\mu, 1/\mu')$ произвольно.

Из теоремы 17.XVII следует, что при $\theta \in (-1+1/\mu, 0]$, $\mu \in (1,\infty)$ и $q \in (1,\infty)$

$$B^{\theta}_{\mu,q,U} = B^{\theta}_{\mu,q}.$$

Теорема 17.XVIII.

1) *Пусть $1 < \mu,\, \varkappa < \infty$, $\dfrac{1}{\mu} < s < 1$, $\theta \in (0,1)$. Определим число p равенством $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{\mu} + \dfrac{\theta}{\varkappa}$. Тогда*

$$(B^{s}_{\mu,\mu,U}, W^{1}_{\varkappa,U})_{\theta,p} = B^{(1-\theta)s+\theta}_{p,p,U}.$$

2) *Пусть $1 < \mu < \infty$, $1 < q_1,\, q_2,\, q < \infty$, $\theta \in (0,1)$ и, либо $0 < s_1,\, s_2 < 1$, либо $-1 < s_1,\, s_2 < 0$. Тогда*

$$(B^{s_1}_{\mu,q_1,U}, B^{s_2}_{\mu,q_2,U})_{\theta,q} = B^{s}_{\mu,q,U}, \quad \text{где} \ \ s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2.$$

3) *Если $1 < \mu < \infty$, $s \in (0,1)$, $1 < p,\, q < \infty$, а $\theta \in (0,1)$, то*

$$(L_\mu, B^{s}_{\mu,q,U})_{\theta,p} = B^{\theta s}_{\mu,p,U}.$$

Доказательство.

1) Положим

$$\mu^* = \max\{\mu, \varkappa\} \quad \text{и} \quad s^* = \min\left\{s - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\varkappa}\right\} + \frac{1}{\mu}^*.$$

Тогда, согласно утверждениям 1)–3) теоремы 17.XV, имеют место непрерывные и плотные вложения $B^{s}_{\mu,\mu} \subset B^{s^*}_{\mu^*,\mu^*}$ и $W^{1}_{\varkappa} \subset B^{s^*}_{\mu^*,\mu^*}$.

Кроме того, $s^* > \dfrac{1}{\mu}^*$. Тогда, учитывая теорему 17.XVII, подпространство

$$B = \{\mathbf{y} \in B^{s^*}_{\mu^*,\mu^*} | U(\mathbf{y}) = 0\}$$

является дополняемым, а оператор проектирования на него ограничен в $B^{s}_{\mu,\mu}$ и в $W^{1}_{\varkappa}$. Остается воспользоваться п. 1) теоремы 17.XII и теоремой об интерполяции подпространств (см., например, [79, п. 1.17.1]).

Утверждения 2) и 3) суть теоремы о реитерации (см., например, [79, п. 1.10.2]), сформулированные для пространств $B^{s}_{\mu,q,U}$. □

Теорема 17.XIX.

1) *При фиксированном $\mu \in (1,\infty)$ и любых $1 < q_1,\, q_2 < \infty$ справедливы непрерывные плотные компактные вложения*

$$B^{s_1}_{\mu,q_1,U} \supset B^{s_2}_{\mu,q_2,U} \supset W^{1}_{\mu,U},$$

если $-1 < s_1 < s_2 < 1$.

2) *Пусть* $1 < \mu_2 < \mu_1 < \infty$. *При любом* $s \in (-1, 1)$ *и любом* $1 < q < \infty$ *справедливы непрерывные и плотные вложения*
$$B^s_{\mu_1, q, U} \supset B^s_{\mu_2, q, U}.$$
Пусть $1 < q_1 < q_2 < \infty$. *Тогда при любом* $\mu \in (1, \infty)$, *при любом* $s \in (-1, 1)$ *справедливы непрерывные и плотные вложения*
$$B^s_{\mu, q_2, U} \supset B^s_{\mu, q_1 U}.$$

3) *Пусть* $1 < \mu_2 < \mu_1 < \infty$, $-1 < s_1 < s_2 < 1$, *причем*[1] $s_1 - \dfrac{1}{\mu_1} = s_2 - \dfrac{1}{\mu_2} \in (-1, 0) \cup (0, 1)$, *а индексы* $1 < q_1, q_2 < \infty$ *произвольны. Тогда справедливы непрерывные плотные компактные вложения*
$$B^{s_1}_{\mu_1, q_1, U} \supset B^{s_2}_{\mu_2, q_2, U}.$$
Если $s \in (0, 1)$, $1 < \mu, q < \infty$ *и* $s - \dfrac{1}{\mu} = 1 - \dfrac{1}{\nu}$ *для некоторого* $1 < \nu < \infty$, *то*
$$B^s_{\mu, q, U} \supset W^1_{\nu, U}.$$
Если $1 < \mu, q < \infty$ *и* $s - \dfrac{1}{\mu} = -\dfrac{1}{\nu}$ *для некоторого* $1 < \nu < \infty$, *то*
$$B^s_{\mu, q, U} \subset L_\nu \quad \text{при} \quad s > 0 \quad \text{и} \quad B^s_{\mu, q, U} \supset L_\nu \quad \text{при} \quad s < 0.$$

4) *Пусть* $\mu \in (1, \infty)$, $q \in (1, \infty)$, *а* $s \in (1/\mu, 1)$. *Тогда пространство* $B^s_{\mu, q, U}$ *непрерывно и компактно вложено в пространство* $C[0, \pi]$ *непрерывных функций.*

Доказательство.

1) Если $-1 + \dfrac{1}{\mu} < s_1, s_2 < \dfrac{1}{\mu}$, то утверждение следует из п. 1) теоремы 17.XV и теоремы 17.XVII. При $s_2 > s_1 > 0$ оно вытекает из непрерывного вложения $W^1_{\mu, U} \subset L_\mu$ (см., например, [79, пп. 1.6.2 и 1.16.4]).

Аналогично утверждение доказывается при $0 > s_2 > s_1$. Остальные случаи следуют из уже доказанных.

Утверждение 2) следует из определения пространств $B^s_{\mu, q, U}$ и непрерывных плотных вложений $\mathcal{L}_{\mu_1} \subset L_{\mu_2}$, $W^1_{\mu_1, U} \subset W^1_{\mu_2, U}$ и $W^{-1}_{\mu_1, U} \subset W^{-1}_{\mu_2, U}$.

Утверждения 3) и 4) следует из пп. 3) и 4) теоремы 17.XV и теоремы 17.XVII. □

Напомним также о пространствах бесселевых потенциалов.

Определение 17.9 (см. [4]). *Пространства бесселевых потенциалов* $H^\theta_p(\mathbb{R})$, $p \in (1, 2]$ (случай $p > 2$ нам не потребуется) состоят из функций $f \in L_p(\mathbb{R})$, для которых конечна норма
$$\|f\|_{H^\theta_p} = \|J^\theta f\|_{L_p(\mathbb{R})}, \qquad \text{где } J^\theta f := F^{-1}\{(1 + |\cdot|^2)^{\theta/2}) F[f](\cdot)\} \tag{17.11}$$
(здесь F — классическое преобразование Фурье).

При этом, вновь учитывая ограниченность в $H^\theta_p(\mathbb{R})$, $0 < \theta < 1/p$, оператора умножения на характеристическую функцию отрезка, норму (17.11) можно использовать для определения пространств H^θ_p, $0 < \theta < 1/p$, на отрезке.

Лемма 17.1. *Преобразование Фурье является ограниченным линейным оператором из* $H^\theta_p(\mathbb{R})$ *в* $L^\theta_{p'}(\mathbb{R})$, $p \in (1, 2]$.

Доказательство. В силу теоремы Хаусдорфа—Юнга, для любой функции $f \in H^\theta_p$
$$\|F[f]\|_{L^\theta_{p'}} \leqslant 2^{\theta/2} \|(1 + |\cdot|^2)^{\theta/2} F[f]\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} = 2^{\theta/2} \|F[J^\theta f]\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C_{abs} \|J^\theta f\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} = C_{abs} \|f\|_{H^\theta_p}.$$
□

[1] В формулировке мы исключили случай $s_1 - 1/\mu_1 = s_2 - 1/\mu_2 = 0$, хотя утверждение остается справедливым и здесь. Его доказательство, однако, требует описания пространств $B^{1/\mu}_{\mu, q, U}$.

Следующее утверждение известно в теории пространств Харди. Мы, однако, затрудняемся дать точную ссылку и потому приведем его с полным доказательством.

Утверждение 17.3. *Пусть последовательность* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *лежит в полосе* $1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h$ *для некоторого* $h > 1/2$, *причем*

$$z_{2n} = 2n + \varkappa + o(1) \qquad \text{и} \qquad z_{2n+1} = 2n + \varkappa + o(1)$$

при $|n| \to \infty$. *Тогда существует такой номер* $N \in \mathbb{N}$ *и такое число* μ, *что для всякого конечного подмножества* $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N\}$ *и всякого номера* $K \geqslant \max\{|n| : n \in J\}$ *найдется рациональная функция* $f_K \in H_\infty$, $\|f_K\|_\infty \leqslant \mu$, *такая, что при всех* n, $N \leqslant |n| \leqslant K$,

$$f_K(z_{2n}) = f_K(z_{2n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in J, \\ 0, & \text{если } n \notin J, \end{cases} \quad \text{а если } z_{2n} = z_{2n+1}, \text{ то } f_K'(z_{2n}) = 0. \tag{17.12}$$

Определение 17.10 (см. [17, гл. VII]). Последовательность точек $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{C}_+$ называется *интерполяционной*, если

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\neq n} \frac{|z_k - z_n|}{|z_k - \overline{z}_n|} \geqslant \delta > 0. \tag{17.13}$$

Теорема 17.XX (Л. Карлесон, см., например, [17, гл. VII]). *Пусть* $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *является интерполяционной последовательностью точек верхней полуплоскости. Тогда для любого* $K \in \mathbb{N}$ *существуют рациональные функции* $f_{j,K} \in H_\infty$, $1 \leqslant j \leqslant K$, *такие, что*

$$f_{j,K}(z_l) = \delta_{j\,l}, \ \ 1 \leqslant j,\, l \leqslant K,$$

причем

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \sum_{j=1}^{K} |f_{j,K}(z)| \leqslant M, \quad \text{где} \ \ M = \frac{9(3-\delta^2)^2}{4\delta^4}.$$

Лемма 17.2. *Пусть точки* z_1 *и* z_2, $z_2 \neq z_1$, *лежат в полосе* $\{z : 1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h\}$, *а числа* w_1 *и* w_2 *произвольны. Тогда существует такая рациональная функция* $\varphi \in H_\infty$, *что* $\varphi(z_1) = w_1$, $\varphi(z_2) = w_2$, *причем*

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant 8h \left| \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \right| + 2|w_1| + 2|w_2|. \tag{17.14}$$

Пусть точка z_0 *лежит в той же полосе, а* $w_0 \in \mathbb{C}$ *произвольно. Тогда существует такая рациональная функция* $\varphi \in H_\infty$, *что* $\varphi(z_0) = 1$, $\varphi'(z_0) = w_0$, *причем*

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant 1 + 4h|w_0|. \tag{17.15}$$

Доказательство. В первом случае возьмем $\varphi(z) = k\dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$, где числа $z_0 \in \mathbb{C}_+$ и $k \in \mathbb{C}$ находятся из условий $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$. Во втором случае положим $\varphi(z) = 1 + k\dfrac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$, где число k находится из условия $\varphi'(z_0) = w_0$.

Легко видеть, что в первом случае $\|\varphi\|_\infty = |k|$, а во втором случае $\|\varphi\|_\infty = |k| + 1$. Оценки (17.14) и (17.15) получаются теперь прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем. □

Лемма 17.3. *Если точки* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *лежат в полосе* $\{z : 1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h\}$ *и* $\inf\limits_{n\neq k} |z_n - z_k| \geqslant 1$, *то из условия*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\neq n} \frac{\operatorname{Im} z_n \cdot \operatorname{Im} z_k}{|\overline{z}_n - z_k|^2} \leqslant m < \infty$$

следует (17.13) *с* $\delta = e^{-32mh}$.

Доказательство. Зафиксируем номер n и обозначим $p_k = \dfrac{|z_k - z_n|}{|z_k - \overline{z}_n|}$. Заметим, что

$$\frac{1}{1 + 4h} \leqslant p_k \leqslant 1, \quad \text{откуда} \quad -\ln p_k \leqslant 8h(1 - p_k^2).$$

Тогда

$$-\ln\prod_{k\neq n}\frac{|z_k-z_n|}{|z_k-\overline{z}_n|}\leqslant 8h\sum_{k\neq n}(1-p_k^2)=32h\sum_{k\neq n}\frac{\operatorname{Im}z_k\cdot\operatorname{Im}z_n}{|z_k-\overline{z}_n|^2}\leqslant 32mh.$$

Отсюда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\prod_{k\neq n}p_k\geqslant e^{-32mh}.$$

□

Доказательство утверждения 17.3. Найдем номер N_0 такой, что $|z_{2n}-(2n+\varkappa)|<\dfrac{1}{8}$ и $|z_{2n+1}-(2n+\varkappa)|<\dfrac{1}{8}$ при всех $|n|>N_0$. Отсюда следует, что

$$|z_{2n}-\overline{z}_{2k}|\geqslant 2|k-n|-1,\qquad |n|>N_0,\ |k|>N_0,$$

а значит,

$$\sum_{\substack{n\neq k,\\ |n|\geqslant N_0}}\frac{\operatorname{Im}z_n\cdot\operatorname{Im}z_k}{|z_n-\overline{z}_k|^2}\leqslant 4h^2\sum_{\substack{n\neq k,\\ |n|\geqslant N_0}}\frac{1}{(2|n-k|-1)^2}\leqslant 8h^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-1)^2}=\pi^2h^2.$$

Та же оценка справедлива и для последовательности $\{z_{2n+1}\}_{|n|>N_0}$.

Положим $m=\pi^2h^2$. Из леммы 17.3 следует, что обе последовательности являются интерполяционными, причем число δ из оценки (17.13) можно взять равным $e^{-32\pi^2h^3}$. Положим $M=9(3e^{64\pi^2h^3}-1)^2/4$ (см. теорему 17.XX) и найдем номер $N\geqslant N_0$ такой, что

$$M|z_{2n}-z_{2n+1}|<1/4\qquad\text{для всех }\ |n|>N.$$

Пусть J — произвольное конечное подмножество $\{n:|n|\geqslant N\}$, а $K\geqslant\max\{|n|:n\in J\}$ — произвольный номер. Обозначим через

$$\{g_{j,K}\}_{|j|=N}^{K}\quad\text{и}\quad\{h_{j,K}\}_{|j|=N}^{K}$$

рациональные функции из теоремы 17.XX, построенные по последовательностям $\{z_{2j}\}_{|j|=N}^{K}$ и $\{z_{2j+1}\}_{|j|=N}^{K}$ соответственно, т. е.

$$g_{j,K}(z_{2l})=h_{j,K}(z_{2l+1})=\delta_{jl}.$$

Далее, для каждого j, $N\leqslant|j|\leqslant K$, построим, пользуясь леммой 17.2, функцию $\varphi_{j,K}$ следующим образом. Если $z_{2j}\neq z_{2j+1}$, то потребуем, чтобы

$$\varphi_{j,K}(z_{2j})=w_1=\frac{1}{h_{j,K}(z_{2j})},\qquad\varphi_{j,K}(z_{2j+1})=w_2=\frac{1}{g_{j,K}(z_{2j+1})}.$$

Заметим, что для любой функции $f\in H_\infty$ из интегральной формулы Коши следует оценка

$$\sup_{\operatorname{Im}z\geqslant 1}|f'(z)|\leqslant\|f\|_\infty.$$

Поскольку

$$|h_{j,K}(z_{2j})-1|=|h_{j,K}(z_{2j})-h_{j,K}(z_{2j+1})|\leqslant\sup_{\operatorname{Im}z\geqslant 1}|h'_{j,K}(z)||z_{2j}-z_{2j+1}|\leqslant M|z_{2j}-z_{2j+1}|\leqslant\frac{1}{4},$$

то числа $|1-w_1|$ и $|1-w_2|$ не превосходят $\min\{4/3M|z_{2j}-z_{2j+1}|,\,1/3\}$. Тогда из (17.14) следует, что

$$\|\varphi_{j,K}\|_\infty\leqslant 24hM+6.$$

Если $z_{2j}=z_{2j+1}$, то потребуем

$$\varphi_{j,K}(z_{2j})=1,\qquad\varphi'_{j,K}(z_{2j})=-(g_{j,K}h_{j,K})'(z_{2j})=-g'_{j,K}(z_{2j})-h'_{j,K}(z_{2j}).$$

Тогда из (17.15) следует, что

$$\|\varphi_{j,K}\|_\infty\leqslant 8hM+1.$$

Таким образом, для каждого j, $N\leqslant|j|\leqslant K$, определена рациональная функция

$$f_{j,K}(z):=g_{j,K}(z)h_{j,K}(z)\varphi_{j,K}(z)\in H_\infty,$$

для которой
$$f_{j,K}(z_{2l}) = f_{j,K}(z_{2l+1}) = \delta_{j\,l}, \quad l \neq j,\ N \leqslant |j|,\ l| \leqslant K,$$
причем
$$f'_{j,K}(z_{2l}) = 0, \text{ если } z_{2l} = z_{2l+1}.$$
Искомую функцию $f_K(z)$ определим суммой $f_K(z) = \sum\limits_{j\in J} f_{j,K}(z)$. Тогда равенства (17.12) выполнены, и для любого $z \in \mathbb{C}_+$
$$|f_K(z)| \leqslant \sum_{j\in J} |f_{j,K}(z)| \leqslant (24hM+6) \sum_{|j|=N}^{K} |g_{j,K}(z)||h_{j,K}(z)| \leqslant (24hM+6)M^2 = \mu.$$
□

18. Приложение C

Приведем необходимые нам результаты об условных и безусловных базисах.

Определение 18.1. Система $\{\varphi_k\}_1^\infty$ называется *базисом Шаудера* (или *условным базисом*) в банаховом пространстве X, если любой вектор $x \in X$ единственным образом раскладывается в ряд $x = \sum\limits_1^\infty c_k\varphi_k$, $c_k \in \mathbb{C}$, сходящийся по норме пространства.

Система векторов в гильбертовом пространстве H называется *базисом Рисса* (или *безусловным базисом*), если существует ограниченный и обратимый оператор в H, который переводит эту систему в ортонормированный базис.

Система φ_k в H называется *бесселевой* системой, если для любого вектора $f \in H$ ряд $\sum |\langle f, \varphi_k\rangle|^2$ сходится.

Системы $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ называются *биортогональными*, если $\langle \varphi_k, \psi_j\rangle = \delta_{kj}$, где δ_{kj} — символ Кронекера.

Систему $\{\varphi_k\}$ называют *почти нормированной*, если числа $\|\varphi_k\|$ равномерно ограничены и равномерно отделены от нуля.

Теорема 18.I (см. [19, гл. VI, § 2])**.** *Следующие условия эквивалентны*:

1) *система $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является базисом Рисса*;
2) *любой вектор $x \in H$ единственным образом раскладывается в ряд $x = \sum\limits_1^\infty x_k\varphi_k$, причем*
$$c\|x\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \left(\sum_1^\infty |x_k|^2\right)^{1/2} \leqslant C\|x\|_{\mathfrak{H}}$$
для некоторых положительных c и C;
3) *найдется такое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, топологически эквивалентное исходному (т. е. $c_1\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\| \leqslant c_2\|\cdot\|_1$ для некоторых c_1 и c_2), относительно которого эта система является ортонормированным базисом.*

Мы неоднократно используем известную теорему Бари—Боаса (см. [19, гл. 6]).

Теорема 18.II. *Пусть система $\{\mathbf{y}_n\}$ гильбертова пространства H полна и минимальна, равно как и биортогональная к ней система $\{\mathbf{z}_n\}$. Если обе эти системы обладают свойством бесселевости, то они являются базисами Рисса в H.*

Определение 18.2. Пусть T — оператор перехода от фиксированного ортонормированного базиса $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ к базису $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $(Te_n = \varphi_n,\ n \in \mathbb{Z})$ конечна. Величина $\varkappa = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ называется *константой Рисса* этого базиса.

Очевидно, что определение константы Рисса не зависит от выбора базиса $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Определение 18.3. Система подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ называется *базисом* в гильбертовом пространстве H, если любой вектор $x \in H$ разлагается единственным образом в виде ряда $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, где $x_n \in \mathcal{H}_n$.

Базис $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ из подпространств является *ортогональным*, если $\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$ при $n \neq m$.

Система $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ называется *базисом Рисса из подпространств*, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор A такой, что система $\{A(\mathcal{H}_n)\}_1^\infty$ является ортогональным базисом из подпространств в H.

Сформулируем теорему Гельфанда (см. [19, гл. VI, § 5]).

Теорема 18.III (И. М. Гельфанд). *Следующие три условия эквивалентны.*

i) *система $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ является базисом Рисса из подпространств в гильбертовом пространстве H;*

ii) *каждый вектор $x \in H$ единственным образом раскладывается в ряд*
$$x = \sum_1^\infty x_k, \qquad x_k \in \mathcal{H}_k,$$
сходящийся по норме $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ при любой перестановке (т. е. система $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ является безусловным базисом Шаудера из подпространств);

iii) $H = \overline{\operatorname{Lin}\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty}$, *и для системы проекторов $\{\mathcal{P}_n\}$, $\mathcal{P}_n\big|_{\mathcal{H}_k} = \delta_{nk}$, выполнено*
$$\sup_J \|\sum_{n\in J} \mathcal{P}_n\| < \infty, \tag{18.1}$$
где супремум берется по всем конечным подмножествам индексов.

Отметим, что базисность Шаудера системы $\{\varphi_k\}_1^\infty$ эквивалентна базисности Шаудера системы одномерных подпространств $\{\operatorname{Lin}(\varphi_k)\}_1^\infty$ (для базисов Рисса это неверно — требуется еще почти нормированность системы $\{\varphi_k\}_1^\infty$). Мы будем часто пользоваться следующими простыми соображением.

Теорема 18.IV.

1) *При изоморфизме пространств (ограниченном и ограниченно обратимом линейном отображении) базис Шаудера (Рисса) преобразуется в базис Шаудера (соответственно, Рисса), базис Шаудера из подпространств (базис Рисса из подпространств) преобразуется в базис Шаудера из подпространств (соответственно, базис Рисса из подпространств).*

   В частности, если система $\{\varphi_n\}_1^\infty$ образует базис Шаудера (Рисса), а последовательность $\{\alpha_n\}_1^\infty$ отделена от нуля и от бесконечности: $0 < c \leqslant \alpha_n \leqslant C < \infty$, то $\{\alpha_n\varphi_n\}_1^\infty$ — также базис Шаудера (Рисса)[1].

   Аналогично, если система $\{\varphi_n\}_1^\infty$ образует базис Шаудера (Рисса),
$$\psi_n = \varphi_n \quad \text{при} \quad n > N, \quad \psi_n = \sum_{k=1}^N \alpha_{k,n}\varphi_k \quad \text{при} \quad n \in [1, N],$$
   причем система $\{\psi_n\}_1^N$ линейно независима, то $\{\psi_n\}_1^\infty$ — базис Шаудера (Рисса).

2) *Базисность Шаудера (Шаудера из подпространств) системы $\{\varphi_n\}_1^\infty$ в рефлексивном банаховом пространстве X влечет соответствующую базисность биортогональной системы $\{\psi_n\}_1^\infty$ в сопряженном пространстве X^*.*

   Базисность Рисса (Рисса из подпространств) системы $\{\varphi_n\}_1^\infty$ в гильбертовом пространстве H влечет соответствующую базисность биортогональной системы $\{\psi_n\}_1^\infty$.

[1] Непосредственно из определения базиса Шаудера видно, что в этом случае условия на последовательность $\{\alpha_n\}$ можно ослабить. Достаточно потребовать $0 < \alpha_n < \infty$.

Теорема 18.V. *Пусть банахово пространство X_1 непрерывно и плотно вложено в банахово пространство X_0. Пусть система подпространств $\{\mathcal{H}_k\}_1^\infty$ образует базис Шаудера* (*обычный или безусловный*) *из подпространств и в X_0, и в X_1.*

Тогда эта система является базисом Шаудера из подпространств (*обычным или, соответственно, безусловным*) *в любом равномерном интерполяционном для пары (X_0, X_1) пространстве X* (*см. определение в приложении* A) *при условии, что X_1 плотно в X.*

В частности, если X_0, X_1 и X — гильбертовы пространства, то $\{\mathcal{H}_k\}_1^\infty$ — базис Рисса из подпространств в X.

Доказательство. По определению, каждый вектор $x \in X_1$ допускает разложение

$$x = \sum_1^\infty x_k, \qquad x_k \in \mathcal{H}_k.$$

Рассмотрим операторы $T_m : x \mapsto \sum\limits_1^m x_k$, действующие в X_1.

Хорошо известно (см., например, [19, гл. VI, § 5]), что они непрерывны,

$$\sup_m \|T_m\|_{X_1} = C_1 < \infty,$$

а по определению базиса $\|T_m x - x\|_{X_1} \to 0$ для любого $x \in X_1$.

Аналогично, каждый вектор $x \in X_0$ допускает разложение

$$x = \sum_1^\infty \widetilde{x}_k, \quad \widetilde{x}_k \in \mathcal{H}_k,$$

и на X_0 определены ограниченные операторы $\widetilde{T}_m : x \mapsto \sum\limits_1^m \widetilde{x}_k$, $\sup\limits_m \|\widetilde{T}_m\|_{X_0} = C_0 < \infty$,

$$\|\widetilde{T}_m x - x\|_{X_0} \to 0 \quad \forall x \in X_0.$$

В силу непрерывности вложения $X_1 \subset X_0$ из сходимости ряда $x = \sum\limits_1^\infty x_k$ в норме X_1 следует его сходимость по норме X_0 (здесь $x \in X_1$). Тогда единственность разложения вектора $x \in X_1$ по базису подпространств $\{\mathcal{H}_k\}_1^\infty$ в X_0 влечет $\widetilde{x}_k = x_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким образом, $\widetilde{T}_m = T_m$ на подпространстве X_1 пространства X_0, а из плотности вложения $X_1 \subset X_0$ и ограниченности операторов следует равенство $\widetilde{T}_m = T_m$ на всем X_0.

Так как X является интерполяционным пространством для пары (X_0, X_1), то

$$\|T_m\|_X \leqslant C \max\{\|T_m\|_{X_1}, \|T_m\|_{X_0}\} < \infty.$$

Далее, из непрерывности и плотности вложения $X_1 \subset X_0$ следует непрерывность и плотность вложения $X_1 \subset X$. Таким образом, $T_m x \to x$ в X для любого $x \in X_1$ (т. е. для плотного в X подпространства).

Критерий сильной сходимости операторов теперь влечет сходимость $T_m x \to x$ на всем X. Единственность разложения $x = \sum\limits_1^\infty x_k$ в X следует из непрерывного вложения $X \subset X_0$ и единственности разложения в X_0.

Если теперь дополнительно известно, что система $\{\mathcal{H}_k\}_1^\infty$ является безусловным базисом и в X_0, и в X_1, то рассмотрим произвольную перестановку (i_k), $k \in \mathbb{N}$, натурального ряда и операторы

$$S_m : x \mapsto \sum_{k=1}^m x_{i_k}.$$

По определению, операторы S_m сильно сходятся к тождественному оператору и в X_0, и в X_1. Повторяя предыдущие рассуждения (о равномерной ограниченности и сходимости на плотном множестве), выводим их сильную сходимость к тождественному оператору в X. □

Теорема 18.VI. *Пусть гильбертово пространство H_1 непрерывно вложено в гильбертово пространство H_0.*

Пусть система $\{\varphi_k\}_1^\infty$ образует базис Рисса в гильбертовом пространстве H_0, а система $\{\alpha_k\varphi_k\}_1^\infty$, где $\alpha_k > 0$ — некоторая последовательность чисел, образует базис Рисса в H_1. Тогда система $\{\alpha_k^\theta\varphi_k\}_1^\infty$ является базисом Рисса в пространстве $H_\theta = [H_0, H_1]_\theta$ для любого $\theta \in [0, 1]$.

Доказательство. По определению базиса Рисса каждый вектор $x \in H_0$ единственным образом раскладывается в ряд $x = \sum\limits_1^\infty x_k\varphi_k$, причем

$$c_0\|x\|_{H_0} \leqslant \left(\sum_1^\infty |x_k|^2\right)^{1/2} \leqslant C_0\|x\|_{H_0}$$

для некоторых c_0 и C_0.

Рассмотрим оператор

$$T: x \mapsto (x_1, x_2, \dots), \qquad T: H_0 \to l_2,$$

— он ограничен и ограниченно обратим. С другой стороны, любой вектор $x \in H_1$ раскладывается в ряд

$$x = \sum_1^\infty \widetilde{x}_k\alpha_k\varphi_k.$$

Поскольку H_1 непрерывно вложено в H_0, последний ряд сходится и по норме H_0, а тогда, в силу единственности разложения x по базису $\{\varphi_k\}_1^\infty$ в H_0, имеем

$$\widetilde{x}_k\alpha_k = x_k.$$

Так как

$$c_1\|x\|_{H_1} \leqslant \left(\sum_1^\infty |\widetilde{x}_k|^2\right)^{1/2} \leqslant C_1\|x\|_{H_1}$$

с некоторыми постоянными c_1 и C_1, то оператор T, суженный на H_1, является ограниченным и ограниченно обратимым оператором из H_1 в весовое пространство $l_2(\{\alpha_k^{-1}\})$.

Интерполируя, получим, что T ограничен и ограниченно обратим как оператор из H_θ в весовое пространство $l_2(\{\alpha_k^{-\theta}\})$. Это и означает, что $\{\alpha_k^\theta\varphi_k\}_1^\infty$ — базис Рисса в H_θ. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.
2. *Баскаков А.Г., Кацарян Т.К.* Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, № 8. — С. 1424–1433.
3. *Беляев А.А., Шкаликов А.А.* Мультипликаторы в пространствах бесселевых потенциалов: случай индексов неотрицательной гладкости// Мат. заметки. — 2017. — *102*, № 5. — С. 684–699.
4. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. — М.: Мир, 1980.
5. *Богачев В.И., Смолянов О.Г.* Действительный и функциональный анализ. — Москва—Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
6. *Бурлуцкая М.Ш., Корнев В.В., Хромов А.П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2012. — *52*, № 9. — С. 1621–1632.
7. *Бурлуцкая М.Ш., Курдюмов В.П., Хромов А.П.* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака// Докл. РАН. — 2012. — *443*, № 4. — С. 414–417.
8. *Вагабов А.И.* Об уточнении асимптотической теоремы Тамаркина// Дифф. уравн. — 1993. — *29*, № 1. — С. 41–49.
9. *Вагабов А.И.* Об асимптотике по параметру решений дифференциальных систем с коэффициентами из класса L_q// Дифф. уравн. — 2010. — *46*, № 1. — С. 16–22.
10. *Велиев О.А., Шкаликов А.А.* О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 5. — С. 671–686.

11. *Винокуров В. А., Садовничий В. А.* Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ-функции// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 6. — С. 735–751.
12. *Владимиров А. А.* О сходимости последовательностей обыкновенных дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 2004. — *75*, № 6. — С. 941–943.
13. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* Индефинитная задача Штурма—Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов// Тр. МИАН. — 2006. — *255*. — С. 88–98.
14. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* Самоподобные функции в пространстве $L_2[0,1]$ и задача Штурма—Лиувилля с сингулярным индефинитным весом// Мат. сб. — 2006. — *197*, № 11. — С. 13–30.
15. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* О задаче Неймана для уравнения Штурма—Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа// Функц. анализ и его прилож. — 2013. — *47*, № 4. — С. 18–29.
16. *Владыкина В. Е.* Спектральные характеристики оператора Штурма—Лиувилля при минимальных условиях на гладкость коэффициентов// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — № 6. — С. 23–28.
17. *Гарнетт Д.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.
18. *Гомилко А. М., Радзиевский Г. В.* Равносходимость рядов по собственным функциям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов// Докл. РАН. — 1991. — *316*, № 2. — С. 265–270.
19. *Гохберг И., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
20. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. I, II, III. — М.: Мир, 1962, 1966, 1974.
21. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 5. — С. 771–794.
22. *Ильин В. А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. II// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 6. — С. 980–1009.
23. *Ильин В. А.* Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом класса L_1// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 4. — С. 577–597.
24. *Ильин В. А.* Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ равносходимость с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряженному расширения оператора Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 12. — С. 1957–1967.
25. *Ильин В. А., Антониу И.* О равномерной на всей прямой $\mathbb{R}$ равносходимости с интегралом Фурье спектрального разложения произвольной функции из класса $L_p(\mathbb{R})$, отвечающего самосопряженному расширению оператора Хилла// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 8. — С. 1310–1322.
26. *Ильин В. А., Антониу И.* О спектральных разложениях, соответствующих оператору Лиувилля, порожденному оператором Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 1996. — *32*, № 4. — С. 435–440.
27. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
28. *Кац И. С.* О существовании спектральных функций некоторых сингулярных дифференциальных систем второго порядка// ДОКЛ. АН СССР. — 1956. — *106*, № 1. — С. 15–18.
29. *Кац И. С., Крейн М. Г.* Дополнение II «О спектральных функциях струны» к книге Ф. Аткинсона «Дискретные и непрерывные граничные задачи». — М.: Мир, 1968.
30. *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов// Функц. анализ и его прилож. — 1967. — *1*, № 2. — С. 39–51.
31. *Келдыш М. В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 4. — С. 15–41.
32. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям конкретных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1964. — *39*, № 2. — С. 82–93.
33. *Коддингтон Э., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1958.
34. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и антипериодическими краевыми условиями// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2013. — *13*, № 3. — С. 28–35.
35. *Костюченко А. Г., Шкаликов А. А.* О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свертки// Функц. анализ и его прилож. — 1978. — *12*, № 4. — С. 24–40.
36. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.

37. *Крейн М. Г.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма—Лиувилля в интервале $(0, \infty)$// Изв. РАН. Сер. Мат. — 1952. — *16*, № 4. — С. 293–324.
38. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1953. — *17*. — С. 331–367.
39. *Левитан Б. М.* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям. II// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1955. — *19*, № 1. — С. 33–58.
40. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
41. *Лидский Б. В.* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1962. — *11*. — С. 3–35.
42. *Ломов И. С.* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами. I, II// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 3. — С. 328–342.
43. *Лунев А. А., Маламуд М. М.* О базисности Рисса системы корневых векторов для 2×2-системы типа Дирака// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 3. — С. 1–6.
44. *Макин А. С.* О сходимости разложений по корневым функциям периодической краевой задачи// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 4. — С. 452–457.
45. *Маркус А. С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора// Докл. АН СССР. — 1962. — *142*, № 3. — С. 538–541.
46. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. I// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1952. — *1*. — С. 327–420.
47. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка. II// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1953. — *1*. — С. 3–83.
48. *Мирзоев К. А.* Операторы Штурма—Лиувилля// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2014. — *75*, № 2. — С. 335–359.
49. *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 5. — С. 788–793.
50. *Михайлов В. П.* О базисности Рисса в $L_2(0, 1)$// Докл. АН СССР. — 1962. — *144*. — С. 981–984.
51. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
52. *Нейман-заде М. И., Шкаликов А. А.* Операторы Шредингера с сингулярными потенциалами из пространств мультипликаторов// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 5. — С. 723–733.
53. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во Акад. Наук Укр. ССР, 1954.
54. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
55. *Рыхлов В. С.* Асимптотика системы решений для квазидифференциального оператора// В сб.: «Диф. уравнения и теория функций. Разложения и сходимость», вып. *5*. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1983. — С. 51–59.
56. *Рыхлов В. С.* О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной// Докл. АН СССР. — 1984. — *279*, № 5. — С. 1053–1056.
57. *Савчук А. М.* Система Дирака с потенциалом из пространств Бесова// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 4. — С. 454–469.
58. *Савчук А. М.* Оператор типа Кальдерона—Зигмунда и его связь с асимптотическими оценками для обыкновенных дифференциальных операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 4. — С. 689–702.
59. *Савчук А. М.* О базисности системы собственных и присоединенных функций одномерного оператора Дирака// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2018. — *82*, № 2. — С. 113–139.
60. *Савчук А. М.* Равномерные оценки остатков, возникающие при спектральном анализе линейных дифференциальных систем// Дифф. уравн. — 2019. — *55*, № 5. — С. 625–635.
61. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 5. — С. 573–584.
62. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Базисность Рисса из подпространств для системы Дирака с суммируемым потенциалом// Докл. РАН. — 2015. — *462*, № 3. — С. 274–277.
63. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 128–152.
64. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Равномерная базисность системы корневых векторов оператора Дирака// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 1. — С. 180–193.

65. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма—Лиувилля с сингулярными потенциалами// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 6. — С. 897–912.
66. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Формула следа для оператора Штурма—Лиувилля с сингулярными потенциалами// Мат. заметки. — 2000. — *68*, № 3. — С. 427–442.
67. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2003. — *64*. — С. 159–219.
68. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* О собственных значениях оператора Штурма—Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева// Мат. заметки. — 2006. — *80*, № 6. — С. 864—-884.
69. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Обратные задачи для оператора Штурма—Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость// Функц. анализ и его прилож. — 2010. — *44*, № 4. — С. 34–53.
70. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Равномерная устойчивость обратной задачи Штурма—Лиувилля по спектральной функции в шкале соболевских пространств// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 188–203.
71. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями// Мат. сб. — 2020 (принято в печать).
72. *Садовничая И. В.* О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 9. — С. 61–76.
73. *Садовничая И. В.* Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега// Тр. МИАН. — 2016. — *293*. — С. 296–324.
74. *Садовничая И. В.* Сходимость спектральных разложений для оператора Штурма—Лиувилля// Сб. тезисов Межд. конф. по диф. уравнениям и динам. системам, Суздаль, Россия, 6–11 июля 2018. — Владимир: Изд-во ВлГУ, 2018. — С. 185–186.
75. *Садовничая И. В.* Равносходимость спектральных разложений для обыкновенных дифференциальных операторов второго порядка с коэффициентами-распределениями// Сб. тезисов Межд. конф. по диф. уравнениям и динам. системам, Суздаль, Россия, 3–8 июля 2020. — Владимир: Изд-во ВлГУ, 2020. — С. 107-108.
76. *Седлецкий А. М.* О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье// Тр. МИАН. — 1991. — *200*. — С. 299–309.
77. *Стеклов В. А.* Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions// Сообщ. Харьков. мат. об-ва. Вторая сер. — 1907. — *10*. — С. 97–199.
78. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольной функции в ряды. — Петроград: Типография Фроловой, 1917.
79. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
80. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. — М.: Мир, 1986.
81. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Гос. изд-во иностранной литературы, 1948.
82. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов на конечном интервале// Докл. АН СССР. — 1962. — *146*, № 6. — С. 1294–1297.
83. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями// Мат. сб. — 1966. — *70*. — С. 310–329.
84. *Хромов А. П.* О суммировании разложений по собственным функциям краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с распадающимися краевыми условиями и об одном аналоге теоремы Вейерштрасса// В сб.: «Обыкновенные дифференциальные уравнения и разложения в ряды Фурье». — Саратов: Саратовский ун-т, 1968. — С. 29–41.
85. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов второго порядка. II// В сб.: «Дифференциальные уравнения и вычислительная математика», вып. *5*. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1975. — С. 3–20.
86. *Шин Д.* Теорема существования квазидифференциального уравнения n-го порядка// Докл. АН СССР. — 1938. — *18*, № 8. — С. 515–518.
87. *Шин Д.* О решениях линейного квазидиференциального уравнения n-го порядка// Мат. сб. — 1940. — *7*, № 3. — С. 479–532.
88. *Шин Д.* О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1943. — *13*, № 1. — С. 39–70.

89. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 5. — С. 235–236.
90. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных векторов квадратичных операторных пучков// Мат. заметки. — 1981. — *30*, № 3. — С. 371–385.
91. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 113–174.
92. *Юрко В. А.* Введение в теорию обратных спектральных задач. — М.: Физматлит, 2007.
93. *Albeverio S., Gesztesy F., Höegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. — Providence: AMS Chelsea Publishing, 2005.
94. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
95. *Atkinson F., Everitt W., Zettl A.* Regularization of a Sturm—Liouville problem with an interior singularity using quasi-derivatives// Differ. Integral Equ. — 1988. — *1*, № 2. — С. 213–221.
96. *Bak J.-G., Shkalikov A. A.* Multipliers in dual Sobolev spaces and Schrödinger operators with distribution potentials// Math. Notes. — 2002. — *71*. — С. 587–594.
97. *Baskakov A. G., Polyakov D. M.* Spectral properties of the Hill operator// Math. Notes. — 2016. — *99*, № 3-4. — С. 598–602.
98. *Baskakov A. G., Polyakov D. M.* The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potential// Sb. Math. — 2017. — *208*, № 1. — С. 1–43.
99. *Ben Amara J., Shkalikov A. A.* Oscillation theorems for Sturm—Liouville problems with distribution potentials// Moscow Univ. Math. Bull. — 2009. — *64*, № 3. — С. 132–137.
100. *Bennett C., Sharpley R. C.* Interpolation of operators. — Boston etc.: Academic press, 1988.
101. *Bennewitz C.* Spectral asymptotics for Sturm—Liouville equations// Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 1989. — *59*, № 2. — С. 294–338.
102. *Bennewitz C., Everitt W. N.* On second-order left-definite boundary value problems// В сб.: «Ordinary differential equations and operators. A tribute to F. V. Atkinson», Proc. Symp., Dundee, Scotland, March–July 1982. — Berlin etc.: Springer-Verlag, 1983. — С. 31–67.
103. *Benzinger H. E.* Green's function for ordinary differential operators// J. Differ. Equ. — 1970. — *7*, № 3. — С. 478–496.
104. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*, № 2. — С. 219–231.
105. *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*, № 4. — С. 373–395.
106. *Camassa R., Holm D.* An integrable shallow water equation with peaked solitons// Phys. Rev. Lett. — 1993. — *71*. — С. 1661–1664.
107. *Djakov P., Mityagin B.* Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators// Russ. Math. Surv. — 2006. — *61*, № 4. — С. 663–766.
108. *Djakov P., Mityagin B.* Bari—Markus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials// Contemp. Math. — 2009. — *481*. — С. 59–80.
109. *Djakov P., Mityagin B.* Spectral gap asymptotics of one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials// Integral Transforms Spec. Funct. — 2009. — *20*, № 3-4. — С. 265–273.
110. *Djakov P., Mityagin B.* Fourier method for one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials// В сб.: «Topics in operator theory. Vol. 2: Systems and mathematical physics», Proc. 19th Int. Workshop Operator Theory Appl. (IWOTA), Williamsburg, USA, July 22–26, 2008. — Basel: Birkhäuser, 2010. — С. 195–236.
111. *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators// J. Funct. Anal. — 2012. — *263*, № 8. — С. 2300–2332.
112. *Djakov P., Mityagin B.* Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// J. Approx. Theory. — 2012. — *164*, № 7. — С. 879–927.
113. *Djakov P., Mityagin B.* Equiconvergence of spectral decompositions of Hill operators// Dokl. Math. — 2012. — *86*, № 1. — С. 542–544.
114. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — *61*, № 1. — С. 359–398.
115. *Djakov P., Mityagin B.* Equiconvergence of spectral decompositions of Hill—Schrödinger operators// J. Differ. Equ. — 2013. — *255*, № 10. — С. 3233–3283.
116. *Djakov P., Mityagin B.* Riesz basis property of Hill operators with potentials in weighted spaces// Trans. Moscow Math. Soc. — 2014. — *75*. — С. 151–172.

117. *Dunford N.* A survey of the thoery of spectral operators// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.). — 1958. — *64.* — С. 217–274.
118. *Eckhardt J., Kostenko A.* The inverse spectral problem for indefinite strings// Invent. Math. — 2016. — *204*, № 3. — С. 939–977.
119. *Eckhardt J., Kostenko A. S., Malamud M. M., Teschl G.* One-dimensional Schrödinger operators with δ'-interactions on Cantor-type sets// J. Differ. Equ. — 2014. — *257.* — С. 415–449.
120. *Eckhardt J., Gesztesy F., Nichols R., Teschl G.* Weyl—Titchmarsh theory for Sturm—Liouville operators with distributional potentials// Opuscula Math. — 2013. — *33*, № 3. — С. 467–563.
121. *Eckhardt J., Teschl G.* Sturm—Liouville operators with measure-valued coefficients// J. d'Anal. Math. — 2013. — *120*, № 1. — С. 151–224.
122. *Everitt W. N., Markus L.* Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators. — Providence: Amer. Math. Soc., 1999.
123. *Feller W.* Generalized second order differential operators and their lateral conditions// Illinois J. Math. — 1957. — *1*, № 4. — С. 459–504.
124. *Frayer C., Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V., Perry P. A.* Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials. I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS system// Inverse Problems. — 2009. — *25*, № 11. — 115007.
125. *Grafakos L.* Modern Fourier analysis. — New York: Springer, 2009.
126. *Grudsky S., Rybkin A.* On positive type initial profiles for the KdV equation// Proc. Am. Math. Soc. — 2014. — *142*, № 6. — С. 2079–2086.
127. *Gunson J.* Perturbation theory for a Sturm—Liouville problem with an interior singularity// Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1987. — *414.* — С. 255–269.
128. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Erste Mitteilung.)// Math. Ann. — 1910. — *69*, № 3. — С. 331–371.
129. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Zweite Mitteilung.)// Math. Ann. — 1912. — *71*, № 1. — С. 38–53.
130. *Hobson E. W.* On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions// Proc. Lond. Math. Soc. (2). — 1908. — *6.* — С. 349–395.
131. *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* 1D Schrödinger operators with singular periodic potentials// Methods Funct. Anal. Topol. — 2001. — *7*, № 4. — С. 31–42.
132. *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problems for Sturm—Liouville operators with singular potentials// Inverse Problems. — 2003. — *19*, № 3. — С. 665–684.
133. *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problems for Sturm—Liouville operators with singular potentials. III. Reconstruction by three spectra// J. Math. Anal. Appl. — 2003. — *284*, № 2. — С. 626–646.
134. *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Transformation operators for Sturm—Liouville operators with singular potentials// Math. Phys. Anal. Geom. — 2004. — *7*, № 2. — С. 119–149.
135. *Hryniv R., Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problems for Sturm—Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale// Proc. Edinb. Math. Soc. (2). — 2006. — *49*, № 2. — С. 309–329.
136. *Hryniv R., Mykytyuk Ya., Perry P. A.* Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials. II. Different Riccati representatives// Commun. Part. Differ. Equ. — 2011. — *36.* — С. 1587–1623.
137. *Hryniv R., Mykytyuk Ya., Perry P. A.* Sobolev mapping properties of the scattering transform for the Schrödinger equation// В сб.: «Spectral theory and geometric analysis», Int. Conf. in honor of Mikhail Shubin's 65th birthday, Boston, USA, July 29 — August 2, 2009. — Providence: Am. Math. Soc., 2011. — С. 79–93.
138. *Kappeler T., Möhr C.* Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schrödinger operator with singular potentials// J. Funct. Anal. — 2001. — *186.* — С. 62–91.
139. *Kappeler T., Topalov P.* Global well-posedness of mKdV in $L_2(\mathbb{T},\mathbb{R})$// Commun. Part. Differ. Equ. — 2005. — *30.* — С. 435–449.
140. *Kappeler T., Topalov P.* Global wellposedness of KdV in $H^{-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$// Duke Math. J. — 2006. — *135.* — С. 327–360.
141. *Kashin B. S., Saakyan A. A.* Orthogonal series. — Providence: Am. Math. Soc., 1989.
142. *Korotyaev E.* Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions// Int. Math. Res. Not. IMRN. — 2003. — *37.* — С. 2019–2031.
143. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* 1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set// J. Differ. Equ. — 2010. — *249.* — С. 253–304.
144. *Kostenko A. S., Malamud M. M.* One-dimensional Schrödinger operator with δ-interactions// Funct. Anal. Appl. — 2010. — *44*, № 2. — С. 151–155.

145. *Kurasov P.* On the Coulomb potentials in one dimension// J. Phys. A. — 1996. — *29*, № 8. — С. 1767–1771.
146. *Langer H.* Zur Spektraltheorie verallgemeinerter gewönlicher Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit einer nichtmonotonen Gewichtsfunktion. — Jyväskylä: Univ. Jyväskylä Math. Inst., 1972.
147. *Lunyov A. A., Malamud M. M.* On the completeness of the root vectors for first order systems// Dokl. Math. — 2013. — *88*, № 3. — С. 678–683.
148. *Lunyov A. A., Malamud M. M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators// J. Math. Anal. Appl. — 2016. — *441*. — С. 57–103.
149. *Malamud M. M., Oridoroga L. L.* On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations// J. Funct. Anal. — 2012. — *263*. — С. 1939–1980.
150. *Maz'ya V. G., Verbitsky I. E.* Boundedness and compactness criteria for the one-dimensional Schrödinger operator// В сб.: «Function spaces, interpolation theory and related topics», Proc. Int. Conf. in honour of J. Peetre on his 65th birthday, Lund, Sweden, August 17–22, 2000. — Berlin: de Gruyter, 2002. — С. 369–382.
151. *Maz'ya V. G., Verbitsky I. E.* The form boundedness criterion for the relativistic Schrödinger operator// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 2004. — *54*, № 2. — С. 317–339.
152. *Maz'ya V. G., Verbitsky I. E.* Infinitesimal form boundedness and Trudinger's subordination for the Schrödinger operator// Invent. Math. — 2005. — *162*. — С. 81–136.
153. *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* Singular eigenvalue problems on the circle// Methods Funct. Anal. Topol. — 2004. — *10*, № 3. — С. 44–53.
154. *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials// Methods Funct. Anal. Topol. — 2008. — *14*, № 2. — С. 184–200.
155. *Mikhailets V. A., Molyboga V. M.* Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials// Methods Funct. Anal. Topol. — 2009. — *15*, № 1. — С. 31–40.
156. *Mingarelli A. B.* Volterra—Stieltjes integral equations and generalized ordinary differential expressions. — Berlin: Springer, 1983.
157. *Minkin A.* Equiconvergence theorems for differential operators// J. Math. Sci. (N. Y.). — 1999. — *96*. — С. 3631–3715.
158. *Radzievskii G. V.* Boundary value problems and related moduli of continuity// Funct. Anal. Appl. — 1995. — *29*, № 3. — С. 217–219.
159. *Rybkin A.* Regularized perturbation determinants and KdV conservation laws for irregular initial profiles// В сб.: «Topics in operator theory. Vol. 2: Systems and mathematical physics», Proc. 19th Int. Workshop Operator Theory Appl. (IWOTA), Williamsburg, USA, July 22–26, 2008. — Basel: Birkhäuser, 2010. — С. 427–444.
160. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order// Results Math. — 1999. — *36*. — С. 342–353.
161. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — С. 3–36.
162. *Stekloff V. A.* Solution générale du problème de développement d'une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm—Liouville// Rom. Acc. L. Rend. (5). — 1910. — *19*. — С. 490–496.
163. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff// Trans. Am. Math. Soc. — 1926. — *28*, № 4. — С. 695–761.
164. *Tamarkine J. D.* Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques// Сообщ. Харьков. мат. об-ва. Вторая сер. — 1911. — *12*. — С. 19–46.
165. *Tamarkine J. D.* Addition à l'article intitulé «Application de la méthode des fonctions fondamentales à l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques»// Сообщ. Харьков. мат. об-ва. Вторая сер. — 1911. — *12*. — С. 65–69.
166. *Tamarkine Y. D.* Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions// Math. Z. — 1928. — *27*, № 1. — С. 1–54.
167. *Volkmer H.* Eigenvalue problems of Atkinson, Feller and Krein, and their mutual relationship// Electron. J. Differ. Equ. — 2005. — *48*.
168. *Weidmann J.* Spectral theory of ordinary differential operators. — Berlin: Springer, 1987.
169. *Zettl A.* Formally self-adjoint quasi-differential operators// Rocky Mountain J. Math. — 1975. — *5*. — С. 453–474.

А. М. Савчук
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

И. В. Садовничая
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
E-mail: ivsad@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-3-373-530 UDC 517.984.5

Spectral Analysis of One-Dimensional Dirac System with Summable Potential and Sturm–Liouville Operator with Distribution Coefficients

© 2020 **A. M. Savchuk, I. V. Sadovnichaya**

Abstract. We consider one-dimensional Dirac operator $\mathcal{L}_{P,U}$ with Birkhoff regular boundary conditions and summable potential $P(x)$ on $[0,\pi]$. We introduce strongly and weakly regular operators. In both cases, asymptotic formulas for eigenvalues are found. In these formulas, we obtain main asymptotic terms and estimates for the second term. We specify these estimates depending on the functional class of the potential: $L_p[0,\pi]$ with $p\in[1,2]$ and the Besov space $B^{\theta}_{p,p'}[0,\pi]$ with $p\in[1,2]$ and $\theta\in(0,1/p)$. Additionally, we prove that our estimates are uniform on balls $\|P\|_{p,\theta}\leqslant R$. Then we get asymptotic formulas for normalized eigenfunctions in the strongly regular case with the same residue estimates in uniform metric on $x\in[0,\pi]$. In the weakly regular case, the eigenvalues λ_{2n} and λ_{2n+1} are asymptotically close and we obtain similar estimates for two-dimensional Riesz projectors. Next, we prove the Riesz basis property in the space $(L_2[0,\pi])^2$ for a system of eigenfunctions and associated functions of an arbitrary strongly regular operator $\mathcal{L}_{P,U}$. In case of weak regularity, the Riesz basicity of two-dimensional subspaces is proved.

In parallel with the $\mathcal{L}_{P,U}$ operator, we consider the Sturm–Liouville operator $\mathcal{L}_{q,U}$ generated by the differential expression $-y''+q(x)y$ with distribution potential q of first-order singularity (i.e., we assume that the primitive $u=q^{(-1)}$ belongs to $L_2[0,\pi]$) and Birkhoff-regular boundary conditions. We reduce to this case operators of more general form $-(\tau_1y')'+i(\sigma y)'+i\sigma y'+\tau_0y$, where τ_1', σ, $\tau_0^{(-1)}\in L_2$ and $\tau_1>0$. For operator $\mathcal{L}_{q,U}$, we get the same results on the asymptotics of eigenvalues, eigenfunctions, and basicity as for operator $\mathcal{L}_{P,U}$.

Then, for the Dirac operator $\mathcal{L}_{P,U}$, we prove that the Riesz basis constant is uniform over the balls $\|P\|_{p,\theta}\leqslant R$ for $p>1$ or $\theta>0$. The problem of conditional basicity is naturally generalized to the problem of equiconvergence of spectral decompositions in various metrics. We prove the result on equiconvergence by varying three indices: $f\in L_\mu[0,\pi]$ (decomposable function), $P\in L_\varkappa[0,\pi]$ (potential), and $\|S_m-S_m^0\|\to 0$, $m\to\infty$, in $L_\nu[0,\pi]$ (equiconvergence of spectral decompositions in the corresponding norm). In conclusion, we prove theorems on conditional and unconditional basicity of the system of eigenfunctions and associated functions of operator $\mathcal{L}_{P,U}$ in the spaces $L_\mu[0,\pi]$, $\mu\neq 2$, and in various Besov spaces $B^{\theta}_{p,q}[0,\pi]$.

REFERENCES

1. F. Atkinson, *Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi* [Discrete and Continuous Boundary-Value Problems], Mir, M., 1968 (Russian translation).
2. A. G. Baskakov and T. K. Katsaryan, "Spektral'nyy analiz integro-differentsial'nykh operatorov s nelokal'nymi kraevymi usloviyami" [Spectral analysis of integrodifferential operators with nonlocal boundary conditions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1988, **24**, No. 8, 1424–1433 (in Russian).
3. A. A. Belyaev and A. A. Shkalikov, "Mul'tiplikatory v prostranstvakh besselevykh potentsialov: sluchay indeksov neotritsatel'noy gladkosti" [Multipliers in spaces of Bessel potentials: the case of indices of nonnegative smoothness], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2017, **102**, No. 5, 684–699 (in Russian).

4. J. Bergh and J. Lefstrem, *Interpolyatsionnye prostranstva* [Interpolation Spaces], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
5. V. I. Bogachev and O. G. Smolyanov, *Deystvitel'nyy i funktsional'nyy analiz* [Real and Functional Analysis], NITs Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Moscow—Izhevsk, 2009 (in Russian).
6. M. Sh. Burlutskaya, V. V. Kornev, and A. P. Khromov, "Sistema Diraka s nedifferentsiruemym potentsialom i periodicheskimi kraevymi usloviyami" [Dirac system with nondifferentiable potential and periodic boundary conditions], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2012, **52**, No. 9, 1621–1632 (in Russian).
7. M. Sh. Burlutskaya, V. P. Kurdyumov, and A. P. Khromov, "Utochnennye asimptoticheskie formuly dlya sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy sistemy Diraka" [Refined asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of the Dirac system], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2012, **443**, No. 4, 414–417 (in Russian).
8. A. I. Vagabov, "Ob utochnenii asimptoticheskoy teoremy Tamarkina" [On refinement of the Tamarkin asymptotic theorem], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1993, **29**, No. 1, 41–49 (in Russian).
9. A. I. Vagabov, "Ob asimptotike po parametru resheniy differentsial'nykh sistem s koeffitsientami iz klassa L_q" [Ob asimptotike po parametru resheniy differentsial'nykh sistem s koeffitsientami iz klassa L_q], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2010, **46**, No. 1, 16–22 (in Russian).
10. O. A. Veliev and A. A. Shkalikov, "O bazisnosti Rissa sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy periodicheskoy i antiperiodicheskoy zadach Shturma—Liuvillya" [On the Riesz basis property of eigen and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm–Liouville problems], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **85**, No. 5, 671–686 (in Russian).
11. V. A. Vinokurov and V. A. Sadovnichiy, "Asimptotika sobstvennykh znacheniy i sobstvennykh funktsiy i formula sleda dlya potentsiala, soderzhashchego δ-funktsii" [Asymptotics of eigenvalues and eigenfunctions and the trace formula for a potential containing δ-functions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 6, 735–751 (in Russian).
12. A. A. Vladimirov, "O skhodimosti posledovatel'nostey obyknovennykh differentsial'nykh operatorov" [On convergence of sequences of ordinary differential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2004, **75**, No. 6, 941–943 (in Russian).
13. A. A. Vladimirov and I. A. Sheypak, "Indefinitnaya zadacha Shturma—Liuvillya dlya nekotorykh klassov samopodobnykh singulyarnykh vesov" [Indefinite Sturm–Liouville problem for some classes of self-similar singular weights], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **255**, 88–98 (in Russian).
14. A. A. Vladimirov and I. A. Sheypak, "Samopodobnye funktsii v prostranstve $L_2[0,1]$ i zadacha Shturma—Liuvillya s singulyarnym indefinitnym vesom" [Self-similar functions in the space $L_2[0,1]$ and the Sturm–Liouville problem with a singular indefinite weight], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2006, **197**, No. 11, 13–30 (in Russian).
15. A. A. Vladimirov and I. A. Sheypak, "O zadache Neymana dlya uravneniya Shturma—Liuvillya s samopodobnym vesom kantorovskogo tipa" [On the Neumann problem for the Sturm–Liouville equation with self-similar weight of Cantor type], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2013, **47**, No. 4, 18–29 (in Russian).
16. V. E. Vladykina, "Spektral'nye kharakteristiki operatora Shturma—Liuvillya pri minimal'nykh usloviyakh na gladkost' koeffitsientov" [Spectral characteristics of the Sturm–Liouville operator under minimal conditions on the smoothness of the coefficients], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2019, No. 6, 23–28 (in Russian).
17. J. Garnett, *Ogranichennye analiticheskie funktsii* [Bounded Analytic Functions], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
18. A. M. Gomilko and G. V. Radzievskiy, "Ravnoskhodimost' ryadov po sobstvennym funktsiyam obyknovennykh funktsional'no-differentsial'nykh operatorov" [Equiconvergence of series in eigenfunctions of ordinary functional differential operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1991, **316**, No. 2, 265–270 (in Russian).
19. I. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-self-adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
20. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. I, II, III* [Linear Operators. Vol. I, II, III], Mir, Moscow, 1962, 1966, 1974 (Russian translation).
21. V. A. Il'in, "Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti i ravnoskhodimosti s trigonometricheskim ryadom spektral'nykh razlozheniy. I" [Necessary and sufficient conditions for spectral expansions to have the basis property and equiconvergence with trigonometric series. I], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 5, 771–794 (in Russian).

22. V. A. Il'in, "Neobkhodimye i dostatochnye usloviya bazisnosti i ravnoskhodimosti s trigonometricheskim ryadom spektral'nykh razlozheniy. II" [Necessary and sufficient conditions for spectral expansions to have the basis property and equiconvergence with trigonometric series. II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 6, 980–1009 (in Russian).
23. V. A. Il'in, "Ravnoskhodimost' s trigonometricheskim ryadom razlozheniy po kornevym funktsiyam odnomernogo operatora Shredingera s kompleksnym potentsialom klassa L_1" [Equiconvergence with trigonometric series of expansions in root functions of the one-dimensional Schrödinger operator with complex potential of class L_1], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 4, 577–597 (in Russian).
24. V. A. Il'in, "Ravnomernaya na vsey pryamoy $\mathbb{R}$ ravnoskhodimost' s integralom Fur'e spektral'nogo razlozheniya, otvechayushchego samosopryazhennomu rasshireniya operatora Shredingera s ravnomerno lokal'no summiruemym potentsialom" [Uniform on the whole axis $\mathbb{R}$ equiconvergence with the Fourier integral of the spectral expansion corresponding to self-adjoint extension of the Schrödinger operator with uniformly locally summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 12, 1957–1967 (in Russian).
25. V. A. Il'in and I. Antoniu, "O ravnomernoy na vsey pryamoy $\mathbb{R}$ ravnoskhodimosti s integralom Fur'e spektral'nogo razlozheniya proizvol'noy funktsii iz klassa $L_p(\mathbb{R})$, otvechayushchego samosopryazhennomu rasshireniyu operatora Khilla" [On the uniform on the whole axis $\mathbb{R}$ equiconvergence with the Fourier integral of the spectral expansion of an arbitrary function from $L_p(\mathbb{R})$ corresponding to self-adjoint extension of the Hill operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 8, 1310–1322 (in Russian).
26. V. A. Il'in and I. Antoniu, "O spektral'nykh razlozheniyakh, sootvetstvuyushchikh operatoru Liuvillya, porozhdennomu operatorom Shredingera s ravnomerno lokal'no summiruemym potentsialom" [On spectral expansions corresponding to the Liouville operator generated by the Schrödinger operator with uniformly locally summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1996, **32**, No. 4, 435–440 (in Russian).
27. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
28. I. S. Kats, "O sushchestvovanii spektral'nykh funktsiy nekotorykh singulyarnykh differentsial'nykh sistem vtorogo poryadka" [On the existence of spectral functions of some second-order singular differential systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1956, **106**, No. 1, 15–18 (in Russian).
29. I. S. Kats and M. G. Kreyn, *Dopolnenie II "O spektral'nykh funktsiyakh struny" k knige F. Atkinsona "Diskretnye i nepreryvnye granichnye zadachi"* [Addition II "On spectral functions of a string" to the book by F. Atkinson "Discrete and Continuous Boundary-Value Problems"], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
30. V. E. Katsnel'son, "Ob usloviyakh bazisnosti sistemy kornevykh vektorov nekotorykh klassov operatorov" [On basicity conditions of a system of root vectors of some classes of operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1967, **1**, No. 2, 39–51 (in Russian).
31. M. V. Keldysh, "O polnote sobstvennykh funktsiy nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh lineynykh operatorov" [On completeness of eigenfunctions of some classes of non-self-adjoint linear operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 15–41 (in Russian).
32. G. M. Kesel'man, "O bezuslovnoy skhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam konkretnykh differentsial'nykh operatorov" [On unconditional convergence of expansions in eigenfunctions of specific differential operators], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1964, **39**, No. 2, 82–93 (in Russian).
33. E. Coddington and N. Levinson, *Teoriya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Ordinary Differential Equations], Izd-vo inostrannoy literatury, Moscow, 1958 (Russian translation).
34. V. V. Kornev and A. P. Khromov, "Sistema Diraka s nedifferentsiruemym potentsialom i antiperiodicheskimi kraevymi usloviyami" [Dirac system with nondifferentiable potential and antiperiodic boundary conditions], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2013, **13**, No. 3, 28–35 (in Russian).
35. A. G. Kostyuchenko and A. A. Shkalikov, "O summiruemosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam differentsial'nykh operatorov i operatorov svertki" [On the summability of the eigenfunction expansions of differential operators and convolution operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1978, **12**, No. 4, 24–40 (in Russian).
36. M. A. Krasnosel'skii and P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, P. E. Sobolevskii, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
37. M. G. Kreyn, "O neopredelennom sluchae kraevoy zadachi Shturma—Liuvillya v intervale $(0,\infty)$" [On the indefinite case of the Sturm–Liouville boundary-value problem in the interval $(0,\infty)$], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 1952, **16**, No. 4, 293–324 (in Russian).

38. B. M. Levitan, “Ob asimptoticheskom povedenii spektral’noy funktsii samosopryazhennogo differentsial’nogo uravneniya vtorogo poryadka i o razlozhenii po sobstvennym funktsiyam” [On the asymptotic behavior of the spectral function of a second-order self-adjoint differential equation and on the expansion in eigenfunctions], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR Ser. Math.], 1953, **17**, 331–367 (in Russian).
39. B. M. Levitan, “Ob asimptoticheskom povedenii spektral’noy funktsii samosopryazhennogo differentsial’nogo uravneniya vtorogo poryadka i o razlozhenii po sobstvennym funktsiyam. II” [On the asymptotic behavior of the spectral function of a second-order self-adjoint differential equation and on the expansion in eigenfunctions. II], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR Ser. Math.], 1955, **19**, No. 1, 33–58 (in Russian).
40. B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Operatory Shturma—Liuvillya i Diraka* [Sturm–Liouville and Dirac Operators], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
41. B. V. Lidskiy, “O summiruemosti ryadov po glavnym vektoram nesamosopryazhennykh operatorov” [On summability of series in principal vectors of non-self-adjoint operators], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1962, **11**, 3–35 (in Russian).
42. I. S. Lomov, “O lokal’noy skhodimosti biortogonal’nykh ryadov, svyazannykh s differentsial’nymi operatorami s negladkimi koeffitsientami. I, II” [On local convergence of biorthogonal series associated with differential operators with nonsmooth coefficients. I, II], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 3, 328–342 (in Russian).
43. A. A. Lunev and M. M. Malamud, “O bazisnosti Rissa sistemy kornevykh vektorov dlya 2×2-sistemy tipa Diraka” [On the Riesz basis property of a system of root vectors for a 2×2-system of Dirac type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 3, 1–6 (in Russian).
44. A. S. Makin, “O skhodimosti razlozheniy po kornevym funktsiyam periodicheskoy kraevoy zadachi” [On convergence of expansions in root functions of a periodic boundary-value problem], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **406**, No. 4, 452–457 (in Russian).
45. A. S. Markus, “O razlozhenii po kornevym vektoram slabo vozmushchennogo samosopryazhennogo operatora” [On the expansion in root vectors of a weakly perturbed self-adjoint operator], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **142**, No. 3, 538–541 (in Russian).
46. V. A. Marchenko, “Nekotorye voprosy teorii odnomernykh lineynykh differentsial’nykh operatorov vtorogo poryadka. I” [Some questions of the theory of one-dimensional second-order linear differential operators. I], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1952, **1**, 327–420 (in Russian).
47. V. A. Marchenko, “Nekotorye voprosy teorii odnomernykh lineynykh differentsial’nykh operatorov vtorogo poryadka. II” [Some questions of the theory of one-dimensional second-order linear differential operators. II], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1953, **1**, 3–83 (in Russian).
48. K. A. Mirzoev, “Operatory Shturma—Liuvillya” [Sturm–Liouville operators], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2014, **75**, No. 2, 335–359 (in Russian).
49. K. A. Mirzoev and A. A. Shkalikov, “Differentsial’nye operatory chetnogo poryadka s koeffitsientami-raspredeleniyami” [Differential operators of even order with distribution coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 5, 788–793 (in Russian).
50. V. P. Mikhaylov, “O bazisnosti Rissa v $L_2(0,1)$” [On the Riesz basis property in $L_2(0,1)$], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **144**, 981–984 (in Russian).
51. M. A. Naymark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
52. M. I. Neiman-Zade and A. A. Shkalikov, “Operatory Shredingera s singulyarnymi potentsialami iz prostranstv mul’tiplikatorov” [Schrödinger operators with singular potentials from spaces of multipliers], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 5, 723–733 (in Russian).
53. I. M. Rapoport, *O nekotorykh asimptoticheskikh metodakh v teorii differentsial’nykh uravneniy* [On Some Asymptotic Methods in the Theory of Differential Equations], Izd-vo Akad. Nauk Ukr. SSR, Kiev, 1954 (in Russian).
54. F. Riesz and B. Szökefalvi-Nagy, *Lektsii po funktsional’nomu analizu* [Functional Analyzis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
55. V. S. Rykhlov, “Asimptotika sistemy resheniy dlya kvazidifferentsial’nogo operatora” [Asymptotics of a system of solutions for a quasi-differential operator], In: *Dif. uravneniya i teoriya funktsiy. Razlozheniya i skhodimost’* [Differ. Equations and Theory of Functions], vol. **5**, Saratov Univ., Saratov, 1983, pp. 51–59 (in Russian).
56. V. S. Rykhlov, “O skorosti ravnoskhodimosti dlya differentsial’nykh operatorov s nenulevym koeffitsientom pri $(n-1)$-y proizvodnoy” [On the rate of equiconvergence for differential operators with nonzero

coefficient at the $(n-1)$th derivative], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **279**, No. 5, 1053–1056 (in Russian).
57. A. M. Savchuk, "Sistema Diraka s potentsialom iz prostranstv Besova" [The Dirac system with potential from Besov spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 4, 454–469 (in Russian).
58. A. M. Savchuk, "Operator tipa Kal'derona—Zigmunda i ego svyaz' s asimptoticheskimi otsenkami dlya obyknovennykh differentsial'nykh operatorov" [Calderon–Zygmund type operator and its connection with asymptotic estimates for ordinary differential operators], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 4, 689–702 (in Russian).
59. A. M. Savchuk, "O bazisnosti sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy odnomernogo operatora Diraka" [On the basis property of the system of eigenfunctions and associated functions of the one-dimensional Dirac operator], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2018, **82**, No. 2, 113–139 (in Russian).
60. A. M. Savchuk, "Ravnomernye otsenki ostatkov, voznikayushchie pri spektral'nom analize lineynykh differentsial'nykh sistem" [Uniform residual estimates arising in spectral analysis of linear differential systems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 5, 625–635 (in Russian).
61. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, "Asimptoticheskie formuly dlya fundamental'nykh resheniy sistemy Diraka s kompleksnoznachnym summiruemym potentsialom" [Asymptotic formulas for fundamental solutions of the Dirac system with a complex-valued summable potential], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 5, 573–584 (in Russian).
62. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, "Bazisnost' Rissa iz podprostranstv dlya sistemy Diraka s summiruemym potentsialom" [Riesz basis property from subspaces for the Dirac system with summable potential], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **462**, No. 3, 274–277 (in Russian).
63. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, "Bazisnost' Rissa so skobkami dlya sistemy Diraka s summiruemym potentsialom" [Riesz basis property with brackets for the Dirac system with summable potential], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 128–152 (in Russian).
64. A. M. Savchuk and I. V. Sadovnichaya, "Ravnomernaya bazisnost' sistemy kornevykh vektorov operatora Diraka" [Uniform basis property of the system of root vectors of the Dirac operator], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 1, 180–193 (in Russian).
65. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Operatory Shturma—Liuvillya s singulyarnymi potentsialami" [Sturm–Liouville operators with singular potentials], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 6, 897–912 (in Russian).
66. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Formula sleda dlya operatora Shturma—Liuvillya s singulyarnymi potentsialami" [The trace formula for Sturm–Liouville operators with singular potentials], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2000, **68**, No. 3, 427–442 (in Russian).
67. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Operatory Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami" [Sturm–Liouville operators with distribution potentials], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2003, **64**, 159–219 (in Russian).
68. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "O sobstvennykh znacheniyakh operatora Shturma—Liuvillya s potentsialami iz prostranstv Soboleva" [On the eigenvalues of the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2006, **80**, No. 6, 864—-884 (in Russian).
69. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Obratnye zadachi dlya operatora Shturma—Liuvillya s potentsialami iz prostranstv Soboleva. Ravnomernaya ustoychivost"' [Inverse problems for the Sturm–Liouville operator with potentials from Sobolev spaces. Uniform stability], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2010, **44**, No. 4, 34–53 (in Russian).
70. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Ravnomernaya ustoychivost' obratnoy zadachi Shturma—Liuvillya po spektral'noy funktsii v shkale sobolevskikh prostranstv" [Uniform stability of the inverse Sturm–Liouville problem with respect to the spectral function in the scale of Sobolev spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 188–203 (in Russian).
71. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Asimptoticheskiy analiz resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s koeffitsientami-raspredeleniyami" [Asymptotic analysis of solutions of ordinary differential equations with distribution coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2020, to be published (in Russian).
72. I. V. Sadovnichaya, "O ravnoskhodimosti razlozheniy v ryady po sobstvennym funktsiyam operatorov Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami" [On equiconvergence of expansions in series of eigenfunctions of Sturm–Liouville operators with distributions potentials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2010, **201**, No. 9, 61–76 (in Russian).

73. I. V. Sadovnichaya, "Ravnoskhodimost' spektral'nykh razlozheniy dlya sistemy Diraka s potentsialom iz prostranstv Lebega" [Equiconvergence of spectral expansions for the Dirac system with potential from Lebesgue spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2016, **293**, 296–324 (in Russian).
74. I. V. Sadovnichaya, "Skhodimost' spektral'nykh razlozheniy dlya operatora Shturma—Liuvillya" [Convergence of spectral expansions for the Sturm–Liouville operator], *Abstracts of Int. Conf. on Differ. Equ. and Dynam. Systems, Suzdal', Russia, 6–11 July 2018*, Izd-vo VlGU, Vladimir, 2018, pp. 185–186 (in Russian).
75. I. V. Sadovnichaya, "Ravnoskhodimost' spektral'nykh razlozheniy dlya obyknovennykh differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka s koeffitsientami-raspredeleniyami" [Equiconvergence of spectral expansions for second-order ordinary differential operators with distribution coefficients], *Abstracts of Int. Conf. on Differ. Equ. and Dynam. Systems, Suzdal', Russia, 3–8 July 2020*, Izd-vo VlGU, Vladimir, 2020, pp. 107-108 (in Russian).
76. A. M. Sedletskiy, "O ravnomernoy skhodimosti negarmonicheskikh ryadov Fur'e" [O ravnomernoy skhodimosti negarmonicheskikh ryadov Fur'e], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1991, **200**, 299–309 (in Russian).
77. V. A. Steklov, "Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions," *Soobshch. Khar'kov. mat. ob-va. Vtoraya ser.* [Soobshch. Khar'kov. mat. ob-va. Vtoraya ser.], 1907, **10**, 97–199 (in Russian).
78. Ya. D. Tamarkin, *O nekotorykh obshchikh problemakh teorii obyknovennykh lineynykh differentsial'nykh uravneniy i razlozheniya v ryad proizvol'nykh funktsiy* [On Some General Problems in the Theory of Ordinary Differential Equations and on the Expansion of an Arbitrary Function in Series], Tipografiya Frolovoy, Petrograd, 1917 (in Russian).
79. H. Tribel, *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory* [Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
80. H. Tribel, *Teoriya funktsional'nykh prostranstv* [Theory of Function Spaces], Mir, Moscow, 1986 (in Russian).
81. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Neravenstva* [Inequalities], Gos. izd-vo inostrannoy literatury, Moscow, 1948 (Russian translation).
82. A. P. Khromov, "Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam obyknovennykh differentsial'nykh operatorov na konechnom intervale" [Expansion in eigenfunctions of ordinary differential operators on a finite interval], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **146**, No. 6, 1294–1297 (in Russian).
83. A. P. Khromov, "Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam obyknovennykh lineynykh differentsial'nykh operatorov s neregulyarnymi raspadayushchimisya kraevymi usloviyami" [Expansion in eigenfunctions of ordinary linear differential operators with irregular separating boundary conditions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1966, **70**, 310–329 (in Russian).
84. A. P. Khromov, "O summirovanii razlozheniy po sobstvennym funktsiyam kraevoy zadachi dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s raspadayushchimisya kraevymi usloviyami i ob odnom analoge teoremy Veyershtrassa" [On summation of expansions in eigenfunctions of a boundary-value problem for an ordinary differential equation with separating boundary conditions and an analogue of the Weierstrass theorem], In: *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya i razlozheniya v ryady Fur'e* [Ordinary Differential Equations and Fourier Series Expansions], Saratovskiy un-t, Saratov, 1968, pp. 29–41 (in Russian).
85. A. P. Khromov, "O ravnoskhodimosti razlozheniy po sobstvennym funktsiyam differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka. II" [On equiconvergence of expansions in eigenfunctions of second-order differential operators. II], In: *Differentsial'nye uravneniya i vychislitel'naya matematika* [Differential Equations and Computational Mathematics], vol. **5**, Izd-vo Saratovskogo un-ta, Saratov, 1975, pp. 3–20 (in Russian).
86. D. Shin, "Teorema sushchestvovaniya kvazidifferentsial'nogo uravneniya n-go poryadka" [Existence theorem for an nth-order quasi-differential equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1938, **18**, No. 8, 515–518 (in Russian).
87. D. Shin, "O resheniyakh lineynogo kvazidiferentsial'nogo uravneniya n-go poryadka" [On solutions of linear nth-order quasi-differential equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1940, **7**, No. 3, 479–532 (in Russian).
88. D. Shin, "O kvazidifferentsial'nykh operatorakh v gil'bertovom prostranstve" [On quasi-differential operators in a Hilbert space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1943, **13**, No. 1, 39–70 (in Russian).
89. A. A. Shkalikov, "O bazisnosti sobstvennykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo operatora" [On the basis property of eigenfunctions of an ordinary differential operator], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1979, **34**, No. 5, 235–236 (in Russian).

90. A. A. Shkalikov, “O bazisnosti sobstvennykh vektorov kvadratichnykh operatornykh puchkov” [On the basis property of eigenvectors of quadratic operator pencils], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1981, **30**, No. 3, 371–385 (in Russian).
91. A. A. Shkalikov, “Vozmushcheniya samosopryazhennykh i normal’nykh operatorov s diskretnym spektrom” [Perturbations of self-adjoint and normal operators with discrete spectrum], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 113–174 (in Russian).
92. V. A. Yurko, *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral’nykh zadach* [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems], Fizmatlit, Moscow, 2007 (in Russian).
93. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Höegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, AMS Chelsea Publishing, Providence, 2005.
94. S. Albeverio and P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
95. F. Atkinson, W. Everitt, and A. Zettl, “Regularization of a Sturm–Liouville problem with an interior singularity using quasi-derivatives,” *Differ. Integral Equ.*, 1988, **1**, No. 2, 213–221.
96. J.-G. Bak and A. A. Shkalikov, “Multipliers in dual Sobolev spaces and Schrödinger operators with distribution potentials,” *Math. Notes.*, 2002, **71**, 587–594.
97. A. G. Baskakov and D. M. Polyakov, “Spectral properties of the Hill operator,” *Math. Notes*, 2016, **99**, No. 3-4, 598–602.
98. A. G. Baskakov and D. M. Polyakov, “The method of similar operators in the spectral analysis of the Hill operator with nonsmooth potential,” *Sb. Math.*, 2017, **208**, No. 1, 1–43.
99. Ben J. Amara and A. A. Shkalikov, “Oscillation theorems for Sturm–Liouville problems with distribution potentials,” *Moscow Univ. Math. Bull.*, 2009, **64**, No. 3, 132–137.
100. C. Bennett and R. C. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic press, Boston etc., 1988.
101. C. Bennewitz, “Spectral asymptotics for Sturm–Liouville equations,” *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 1989, **59**, No. 2, 294–338.
102. C. Bennewitz and W. N. Everitt, “On second-order left-definite boundary value problems,” In: *Ordinary differential equations and operators. A tribute to F. V. Atkinson*, Proc. Symp., Dundee, Scotland, March–July 1982, Springer-Verlag, Berlin etc., 1983, pp. 31–67.
103. H. E. Benzinger, “Green’s function for ordinary differential operators,” *J. Differ. Equ.*, 1970, **7**, No. 3, 478–496.
104. G. D. Birkhoff, “On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1908, **9**, No. 2, 219–231.
105. G. D. Birkhoff, “Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1908, **9**, No. 4, 373–395.
106. R. Camassa and D. Holm, “An integrable shallow water equation with peaked solitons,” *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **71**, 1661–1664.
107. P. Djakov and B. Mityagin, “Instability zones of periodic 1-dimensional Schrödinger and Dirac operators,” *Russ. Math. Surv.*, 2006, **61**, No. 4, 663–766.
108. P. Djakov and B. Mityagin, “Bari–Markus property for Riesz projections of Hill operators with singular potentials,” *Contemp. Math.*, 2009, **481**, 59–80.
109. P. Djakov and B. Mityagin, “Spectral gap asymptotics of one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2009, **20**, No. 3-4, 265–273.
110. P. Djakov and B. Mityagin, “Fourier method for one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials,” In: *Topics in operator theory. Vol. 2: Systems and mathematical physics*, Proc. 19th Int. Workshop Operator Theory Appl. (IWOTA), Williamsburg, USA, July 22–26, 2008, Birkhäuser, Basel, 2010, pp. 195–236.
111. P. Djakov and B. Mityagin, “Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators,” *J. Funct. Anal.*, 2012, **263**, No. 8, 2300–2332.
112. P. Djakov and B. Mityagin, “Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *J. Approx. Theory*, 2012, **164**, No. 7, 879–927.
113. P. Djakov and B. Mityagin, “Equiconvergence of spectral decompositions of Hill operators,” *Dokl. Math.*, 2012, **86**, No. 1, 542–544.
114. P. Djakov and B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *Indiana Univ. Math. J.*, 2012, **61**, No. 1, 359–398.
115. P. Djakov and B. Mityagin, “Equiconvergence of spectral decompositions of Hill–Schrödinger operators,” *J. Differ. Equ.*, 2013, **255**, No. 10, 3233–3283.
116. P. Djakov and B. Mityagin, “Riesz basis property of Hill operators with potentials in weighted spaces,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2014, **75**, 151–172.

117. N. Dunford, “A survey of the thoery of spectral operators,” *Bull. Am. Math. Soc. (N.S.)*, 1958, **64**, 217–274.
118. J. Eckhardt and A. Kostenko, “The inverse spectral problem for indefinite strings,” *Invent. Math.*, 2016, **204**, No. 3, 939–977.
119. J. Eckhardt, A. S. Kostenko, M. M. Malamud, and G. Teschl, “One-dimensional Schrödinger operators with δ'-interactions on Cantor-type sets,” *J. Differ. Equ.*, 2014, **257**, 415–449.
120. J. Eckhardt, F. Gesztesy, R. Nichols, and G. Teschl, “Weyl–Titchmarsh theory for Sturm–Liouville operators with distributional potentials,” *Opuscula Math.*, 2013, **33**, No. 3, 467–563.
121. J. Eckhardt and G. Teschl, “Sturm–Liouville operators with measure-valued coefficients,” *J. d’Anal. Math.*, 2013, **120**, No. 1, 151–224.
122. W. N. Everitt and L. Markus, *Boundary value problems and symplectic algebra for ordinary differential and quasi-differential operators*, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
123. W. Feller, “Generalized second order differential operators and their lateral conditions,” *Illinois J. Math.*, 1957, **1**, No. 4, 459–504.
124. C. Frayer, R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk, and P. A. Perry, “Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials. I. Unique Riccati representatives and ZS-AKNS system,” *Inverse Problems*, 2009, **25**, No. 11, 115007.
125. L. Grafakos, *Modern Fourier analysis*, Springer, New York, 2009.
126. S. Grudsky and A. Rybkin, “On positive type initial profiles for the KdV equation,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2014, **142**, No. 6, 2079–2086.
127. J. Gunson, “Perturbation theory for a Sturm–Liouville problem with an interior singularity,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1987, **414**, 255–269.
128. A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Erste Mitteilung.),” *Math. Ann.*, 1910, **69**, No. 3, 331–371.
129. A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Zweite Mitteilung.),” *Math. Ann.*, 1912, **71**, No. 1, 38–53.
130. E. W. Hobson, “On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions,” *Proc. Lond. Math. Soc. (2)*, 1908, **6**, 349–395.
131. R. Hryniv and Ya. Mykytyuk, “1D Schrödinger operators with singular periodic potentials,” *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2001, **7**, No. 4, 31–42.
132. R. Hryniv and Ya. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials,” *Inverse Problems*, 2003, **19**, No. 3, 665–684.
133. R. Hryniv and Ya. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. III. Reconstruction by three spectra,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **284**, No. 2, 626–646.
134. R. Hryniv and Ya. Mykytyuk, “Transformation operators for Sturm–Liouville operators with singular potentials,” *Math. Phys. Anal. Geom.*, 2004, **7**, No. 2, 119–149.
135. R. Hryniv and Ya. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials. IV. Potentials in the Sobolev space scale,” *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 2006, **49**, No. 2, 309–329.
136. R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, and P. A. Perry , “Inverse scattering for Schrödinger operators with Miura potentials. II. Different Riccati representatives,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2011, **36**, 1587–1623.
137. R. Hryniv, Ya. Mykytyuk, and P. A. Perry , “Sobolev mapping properties of the scattering transform for the Schrödinger equation,” In: *Spectral theory and geometric analysis*, Int. Conf. in honor of Mikhail Shubin’s 65th birthday, Boston, USA, July 29 — August 2, 2009, Am. Math. Soc., Providence, 2011, pp. 79–93.
138. T. Kappeler and C. Möhr, “Estimates for periodic and Dirichlet eigenvalues of the Schrödinger operator with singular potentials,” *J. Funct. Anal.*, 2001, **186**, 62–91.
139. T. Kappeler and P. Topalov, “Global well-posedness of mKdV in $L_2(\mathbb{T},\mathbb{R})$,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2005, **30**, 435–449.
140. T. Kappeler and P. Topalov, “Global wellposedness of KdV in $H^{-1}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,” *Duke Math. J.*, 2006, **135**, 327–360.
141. B. S. Kashin and A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Am. Math. Soc., Providence, 1989.
142. E. Korotyaev, “Characterization of the spectrum of Schrödinger operators with periodic distributions,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2003, **37**, 2019–2031.
143. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, “1-D Schrödinger operators with local point interactions on a discrete set,” *J. Differ. Equ.*, 2010, **249**, 253–304.
144. A. S. Kostenko and M. M. Malamud, “One-dimensional Schrödinger operator with δ-interactions,” *Funct. Anal. Appl.*, 2010, **44**, No. 2, 151–155.

145. P. Kurasov, “On the Coulomb potentials in one dimension,” *J. Phys. A*, 1996, **29**, No. 8, 1767–1771.
146. H. Langer, *Zur Spektraltheorie verallgemeinerter gewönlicher Differentialoperatoren zweiter Ordnung mit einer nichtmonotonen Gewichtsfunktion*, Univ. Jyväskylä Math. Inst., Jyväskylä, 1972.
147. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the completeness of the root vectors for first order systems,” *Dokl. Math.*, 2013, **88**, No. 3, 678–683.
148. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **441**, 57–103.
149. M. M. Malamud and L. L. Oridoroga, “On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations,” *J. Funct. Anal.*, 2012, **263**, 1939–1980.
150. V. G. Maz’ya and I. E. Verbitsky, “Boundedness and compactness criteria for the one-dimensional Schrödinger operator,” In: *Function spaces, interpolation theory and related topics*, Proc. Int. Conf. in honour of J. Peetre on his 65th birthday, Lund, Sweden, August 17–22, 2000, de Gruyter, Berlin, 2002, pp. 369–382.
151. V. G. Maz’ya and I. E. Verbitsky, “The form boundedness criterion for the relativistic Schrödinger operator,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 2004, **54**, No. 2, 317–339.
152. V. G. Maz’ya and I. E. Verbitsky, “Infinitesimal form boundedness and Trudinger’s subordination for the Schrödinger operator,” *Invent. Math.*, 2005, **162**, 81–136.
153. V. A. Mikhailets and V. M. Molyboga, “Singular eigenvalue problems on the circle,” *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2004, **10**, No. 3, 44–53.
154. V. A. Mikhailets and V. M. Molyboga, “One-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials,” *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2008, **14**, No. 2, 184–200.
155. V. A. Mikhailets and V. M. Molyboga, “Spectral gaps of the one-dimensional Schrödinger operators with singular periodic potentials,” *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2009, **15**, No. 1, 31–40.
156. A. B. Mingarelli, *Volterra–Stieltjes integral equations and generalized ordinary differential expressions*, Springer, Berlin, 1983.
157. A. Minkin, “Equiconvergence theorems for differential operators,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 1999, **96**, 3631–3715.
158. G. V. Radzievskii, “Boundary value problems and related moduli of continuity,” *Funct. Anal. Appl.*, 1995, **29**, No. 3, 217–219.
159. A. Rybkin, “Regularized perturbation determinants and KdV conservation laws for irregular initial profiles,” In: *Topics in operator theory. Vol. 2: Systems and mathematical physics*, Proc. 19th Int. Workshop Operator Theory Appl. (IWOTA), Williamsburg, USA, July 22–26, 2008, Birkhäuser, Basel, 2010, pp. 427–444.
160. V. S. Rykhlov, “Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order,” *Results Math.*, 1999, **36**, 342–353.
161. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “The Dirac operator with complex-valued summable potential,” *Math. Notes*, 2014, **96**, No. 5, 3–36.
162. V. A. Stekloff, “Solution générale du problème de développement d’une fonction arbitraire en séries suivant les fonctions fondamentales de Sturm–Liouville,” *Rom. Acc. L. Rend. (5)*, 1910, **19**, 490–496.
163. M. H. Stone, “A comparison of the series of Fourier and Birkhoff,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1926, **28**, No. 4, 695–761.
164. J. D. Tamarkine, “Application de la méthode des fonctions fondamentales à l’étude de l’équation différentielle des verges vibrantes élastiques,” *Soobshch. Khar’kov. mat. ob-va. Vtoraya ser.* [Rep. Kharkov Math. Soc. 2nd Ser.], 1911, **12**, 19–46.
165. J. D. Tamarkine, “Addition à l’article intitulé «Application de la méthode des fonctions fondamentales à l’étude de l’équation différentielle des verges vibrantes élastiques»,” *Soobshch. Khar’kov. mat. ob-va. Vtoraya ser.* [Rep. Kharkov Math. Soc. 2nd Ser.], 1911, **12**, 65–69.
166. Y. D. Tamarkine, “Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions,” *Math. Z.*, 1928, **27**, No. 1, 1–54.
167. H. Volkmer, “Eigenvalue problems of Atkinson, Feller and Krein, and their mutual relationship,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2005, **48**.
168. J. Weidmann, *Spectral theory of ordinary differential operators*, Springer, Berlin, 1987.
169. A. Zettl, “Formally self-adjoint quasi-differential operators,” *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, **5**, 453–474.

A. M. Savchuk
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: artem_savchuk@mail.ru

I. V. Sadovnichaya
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: ivsad@yandex.ru