Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 335–371

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-335-371 УДК 517.984.5

О СПЕКТРАЛЬНЫХ И ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПОЛУТОРАЛИНЕЙНОЙ ФОРМОЙ

© 2020 г. **А. Р. ЯКУБОВА**

Аннотация. На базе рассмотренных ранее краевых, спектральных и начально-краевых задач в случае одной области изучаются соответствующие задачи, порожденные полуторалинейной формой, для двух областей. Подробно изучены возникшие операторные пучки с соответствующими операторными коэффициентами, действующие в гильбертовом пространстве и зависящие от двух параметров. В возмущенном и в невозмущенном случаях рассматриваются оба возможных варианта, когда один из параметров спектральный, а другой фиксированный. В исследовании использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение исходной проблемы в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородность либо в уравнении, либо в одном из краевых условий. Получены необходимые и достаточные условия корректной разрешимости краевых задач на произвольном промежутке времени. Доказаны теоремы о свойствах спектра, а также о полноте и базисности системы корневых элементов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В данной работе продолжены исследования краевых, спектральных и начально-краевых задач на основе полуторалинейной формы (см. [20]). В предыдущей статье [20] эти проблемы были исследованы в случае одной области. На этой основе изучаются смешанные краевые, спектральные и начально-краевые задачи, порожденные полуторалинейной формой для двух областей.

В первом разделе изучаются краевые задачи, порожденные полуторалинейной несимметрической формой на основе оператора Лапласа. Получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих проблем.

Во втором разделе изучаются смешанные спектральные задачи сопряжения, порожденные полуторалинейной формой. Установлено, что исходные проблемы приводятся к исследованию операторного пучка, который зависит от двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным. Изучены свойства решений возмущенных и невозмущенных спектральных задач при первом и втором условиях сопряжения.

В третьем разделе изучены смешанные возмущенные начально-краевые задачи математической физики при первом и втором условиях сопряжения. Доказаны теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

Автор благодарит Н. Д. Копачевского за постановку задачи и обсуждение результатов работы. Работа основана на статьях [20, 34].

1. Краевые задачи, порожденные полуторалинейной несимметрической формой на основе оператора Лапласа

1.1. Формула Грина для невозмущенной задачи. Рассмотрим тройку гильбертовых пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и обычный оператор следа $\gamma u := u\,|_\Gamma$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$.

Тогда, как было установлено ранее, в этом случае имеет место следующая обобщенная формула Грина, порожденная оператором Лапласа:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta\bar{u} + \nabla\eta \cdot \nabla\bar{u})\, d\Omega = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.1}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.2}$$

Здесь слева в (1.1) стоит скалярное произведение в $H^1(\Omega)$, и оно является симметрической полуторалинейной формой в $H^1(\Omega):\ \Phi_0(\eta, u) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}$.

На основе этой формулы Грина можно исследовать слабые решения классических краевых задач для оператора Лапласа, т. е. задач Дирихле, Неймана и других, а также соответствующие спектральные и начально-краевые проблемы.

Целью дальнейших рассмотрений является исследование подобных задач в несимметрическом случае, когда вместо скалярного произведения $(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \Phi_0(\eta, u)$ имеется полуторалинейная несимметрическая форма $\Phi_\varepsilon(\eta, u)$, определенная на пространстве $H^1(\Omega)$, ограниченная на нем и являющаяся равномерно аккретивной. Параметр $\varepsilon \in \mathbb{R}$ будет введен для удобства дальнейших рассмотрений, причем все изучаемые задачи при $\varepsilon \to 0$ будут переходить в проблемы, отвечающие соответствующим невозмущенным задачам.

Отметим еще, что в (1.1) дифференциальное выражение имеет вид $L_0 u = u - \Delta u$, а производная по внешней нормали $\partial_0 u := (\partial u/\partial n)_\Gamma$.

1.2. О формуле Грина для возмущенной задачи. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$L_\varepsilon u := u - \Delta u + \varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \frac{\partial u}{\partial x_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

а также соответствующую обобщенную формулу Грина для полуторалинейной формы. Как было видно из предыдущих рассмотрений, и дифференциальное выражение, и вид полуторалинейной формы можно выбирать неоднозначно, а краевые, спектральные и начально-краевые задачи затем формулировать на основе этой выбранной формулы Грина.

При дальнейшем рассмотрении проблем, основываясь на тождествах

$$\int\limits_\Omega \eta \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_k} d\Omega = -\int\limits_\Omega \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \bar{u}\, d\Omega + \int\limits_\Gamma \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k})\eta\bar{u}\, d\Gamma, \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.4}$$

и учитывая вид $L_\varepsilon u$ из (1.3), приходим к выводу на основе формулы (1.1), что имеет место следующая обобщенная формула Грина для полуторалинейной формы:

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(\eta, u) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^m c_k \left[\left(\eta, \frac{\partial u}{\partial x_k} \right)_{L_2(\Omega)} - \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_k}, u \right)_{L_2(\Omega)} \right] = \\ &= \langle \eta, L_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial_\varepsilon u \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall\, \eta, u \in H^1(\Omega),\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\partial_\varepsilon u := \partial_0 u - \varepsilon\sigma\gamma u, \quad \sigma := \sum_{k=1}^m c_k \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_k}), \quad \partial_\varepsilon u \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.6}$$

где $L_\varepsilon u \in (H^1(\Omega))^*$ — дифференциальное выражение (1.3), а $\partial_0 u := (\partial u/\partial n)_\Gamma$. Все дальнейшие проблемы будем формулировать на базе этой формулы Грина.

Отметим еще, что $L_\varepsilon u = L_0 u + L_1 u$, где $L_1 u$ — дифференциальное выражение первого порядка, в то время как $L_0 u = u - \Delta u$ — дифференциальное выражение второго порядка.

Проверим, что полуторалинейная форма $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ из (1.5) ограничена в $H^1(\Omega)$ и равномерно аккретивна. Имеем

$$\begin{aligned} \Big|\Big(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)_{L_2(\Omega)}-\Big(\frac{\partial \eta}{\partial x_k},u\Big)_{L_2(\Omega)}\Big| \leqslant \|\eta\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\frac{\partial u}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)}+ \\ +\|\frac{\partial \eta}{\partial x_k}\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|u\|_{L_2(\Omega)}\leqslant 2\|\eta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Поэтому $|\Phi_\varepsilon(\eta,u)|\leqslant \tilde{c_1}\|\eta\|_{H^1(\Omega)}\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)}$, $\tilde{c_1}=\Big(1+4|\varepsilon|\sum\limits_{k=1}^m|c_k|\Big)$, т. е. $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ ограничена в $H^1(\Omega)$. Далее, сопряженная форма имеет вид

$$\Phi^*(\eta,u)=\overline{\Phi(u,\eta)}=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}-2\varepsilon\sum_{k=1}^m c_k\Big[\Big(\eta,\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big)_{L_2(\Omega)}-\Big(\frac{\partial \eta}{\partial x_k},u\Big)_{L_2(\Omega)}\Big]. \tag{1.8}$$

Отсюда и из (1.5) получаем, что $\mathrm{Re}\,\Phi_\varepsilon(u,u)=\dfrac{1}{2}[\Phi_\varepsilon(u,u)+\Phi_\varepsilon^*(u,u)]=(u,u)_{H^1(\Omega)}=\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$, т. е. $\Phi_\varepsilon(u,u)$ равномерно аккретивна в $H^1(\Omega)$ с константой $c_2=1$.

Тогда из общей теории таких полуторалинейных форм следует, во-первых, что форме $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$ однозначно отвечает оператор $A_\varepsilon : H^1(\Omega)\to(H^1(\Omega))^*$, связанный с формой соотношениями $\Phi_\varepsilon(\eta,u)=\langle\eta,A_\varepsilon u\rangle_{L_2(\Omega)}$, $\forall\ \eta,u\in H^1(\Omega)$, $A_\varepsilon u\in(H^1(\Omega))^*$, а во-вторых, этот оператор имеет ограниченный обратный $A_\varepsilon^{-1}:(H^1(\Omega))^*\to H^1(\Omega)$ (теорема Лакса—Мильграма).

Заметим еще, что пространство $L_2(\Omega)$ имеет оснащение $H^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow(H^1(\Omega))^*$ (с компактными вложениями левых пространств в правые).

Отметим, наконец, что связь оператора A_ε, отвечающего форме $\Phi_\varepsilon(\eta,u)$, и оператора A_0, отвечающего невозмущенной форме $\Phi_0(\eta,u)=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}$, будет выяснена ниже.

1.3. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач. В математической физике часто встречаются такие краевые задачи, когда на одной части границы $\Gamma=\partial\Omega$ области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — условие Ньютона. Подобные задачи называют смешанными. Для таких задач функционал, связанный с $\Gamma=\partial\Omega$ и фигурирующий в формуле Грина (см. [20]), естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Переходя к рассмотрению этой проблемы в абстрактной форме, приходим к выводу, что в формуле (1.1) необходимо выражение $\langle\gamma\eta,\partial u\rangle_G$ заменить на выражение $\Sigma_{k=1}^l\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta\in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Будем считать, что для тройки пространств E,F,G и оператора следа γ выполнены условия, обеспечивающие существование формулы Грина, а также следующие условия.

4°. *Имеет место ортогональное разложение и оснащения*: $G=\bigoplus\limits_{k=1}^l G_k$, $\exists\ (G_+)_k$, $(G_+)_k^*$: $(G_+)_k\hookrightarrow G_k\hookrightarrow(G_+)_k^*$, $k=\overline{1,l}$.

5°. *В пространстве G действует ограниченный оператор $\rho_k:\ G_+\to(G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы.*

Теорема 1.1. *Пусть для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$ ($\Gamma=\partial\Omega$, $\Omega\in\mathbb{R}^m$) и оператора следа γ липшицева граница Γ неодносвязна и разбита на несколько односвязных частей Γ_k, $k=\overline{1,l}$ (в частности, $l=2$), находящихся на положительном расстоянии друг от друга, т. е. $\Gamma=\bigcup\limits_{k=1}^l\Gamma_k$, $dist(\Gamma_k,\Gamma_j)\geqslant d>0$, $k\neq j$, $j,k=\overline{1,l}$. Тогда имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)}=\langle\eta,u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}+\sum_{k=1}^l\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\quad\forall\ \eta,u\in H^1(\Omega), \tag{1.9}$$

$$\gamma_k\eta:=\eta\,|_{\Gamma_k}\in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\quad k=\overline{1,l},\quad u-\Delta u\in(H^1(\Omega))^*. \tag{1.10}$$

1.4. К постановке задачи. Рассмотрим в области Ω, разбитой на две подобласти Ω_1, Ω_2 (см. рис. 1) следующую задачу сопряжения:

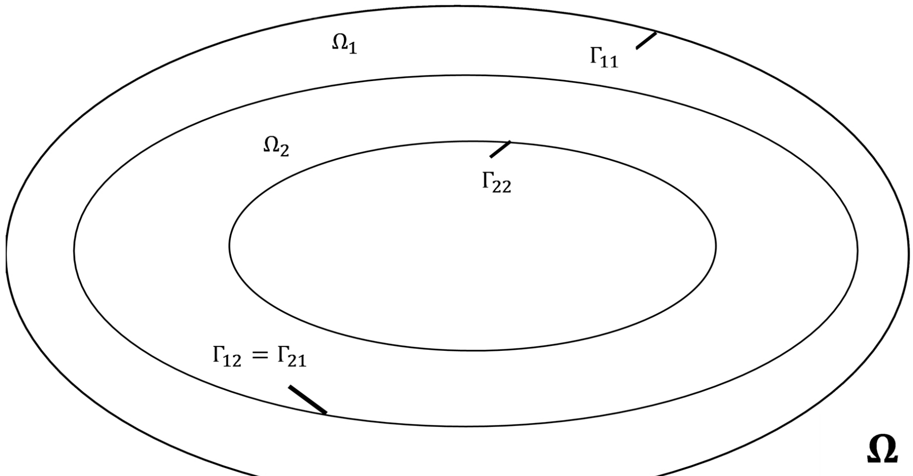

Рис. 1

$$\begin{aligned}
&u_1 - \Delta u_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \lambda u_1 := f_1 \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_2 - \Delta u_2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} = \lambda u_2 := f_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \qquad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon \sigma_{12} \gamma_{21} u_1\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial n_{21}} - \varepsilon \sigma_{21} \gamma_{12} u_2\right) = \psi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\qquad \sigma_{12} := \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \cos(\widehat{\vec{n}_{12}, \vec{e}_k}), \quad \sigma_{21} := \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \cos(\widehat{\vec{n}_{21}, \vec{e}_k}).
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Будем считать, что задача (1.11) имеет слабое решение $u = (u_1; u_2) \in H^1(\Omega) = H^1(\Omega_1 \oplus H^1(\Omega_2))$, и выведем уравнение, которому удовлетворяет это решение. С этой целью перепишем задачу в виде неоднородной невозмущенной:

$$\begin{aligned}
&u_1 - \Delta u_1 = f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \widetilde{f_1} \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_2 - \Delta u_2 = f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \widetilde{f_2} \quad (\text{в } \Omega_2); \qquad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\partial_{12} u_1 + \partial_{21} u_2 = \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} u_2) + \psi_{21} =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\qquad \sigma_{12} := \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \cos(\widehat{\vec{n}_{12}, \vec{e}_k}), \quad \sigma_{21} := \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \cos(\widehat{\vec{n}_{21}, \vec{e}_k}).
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь через Γ_{jj}, $j = \overline{1,2}$ обозначены внешние свободные границы, а через Γ_{ij}, $i \neq j$ — граница стыка областей. При этом очевидно, что $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$. Полагаем, что области $\Omega_i \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{ij}. Через φ_1, φ_2 обозначены следы функций u_j, а через $\partial_{ij} u_j$ — соответствующие производные по внешней нормали; f_j — заданные функции в Ω_j, $j = \overline{1,2}$, φ_j — заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, $j = \overline{1,2}$. Функция φ_{21} задает разрыв следов, а ψ_{21} — разрыв производных по внешней нормали на границе стыка областей.

Целью является нахождение функций $u_j \in H^1(\Omega)$, $j = \overline{1,2}$, для которых выполнены уравнения в (1.12), внешние граничные условия, а также условия сопряжения на стыках областей. Исследование будем проводить на основе формулы Грина для полуторалинейной формы следующего вида (напомним, что выбор полуторалинейной формы изначально может быть произвольным):

$$\begin{aligned}
&\Phi_\varepsilon(\eta, u) := (\eta, u)_{H^1(\Omega)} + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k}\left[\left(\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega_1)} - \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x_k}, u_1\right)_{L_2(\Omega_1)}\right] + \\
&+ 2\varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k}\left[\left(\eta_2, \frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega_2)} - \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x_k}, u_2\right)_{L_2(\Omega_2)}\right] = \\
&= \langle \eta_1, u_1 - \Delta u_1 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \eta_2, u_2 - \Delta u_2 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\rangle_{L_2(\Omega_2)} + \\
&+ \langle \gamma_{11}\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon\sigma_{12}\gamma_{11}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{11})} + \langle \gamma_{22}\eta_2, \frac{\partial u_2}{\partial n_{21}} - \varepsilon\sigma_{21}\gamma_{12}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{22})} + \\
&+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_{12}} - \varepsilon\sigma_{12}\gamma_{21}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{12}\eta_2, \frac{\partial u_1}{\partial n_{21}} - \varepsilon\sigma_{21}\gamma_{12}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Целью дальнейших рассмотрений является получение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (1.13), а также представление этого решения через операторы вспомогательных краевых задач. При этом будет использован принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи (1.13) в виде суммы решений четырех вспомогательных краевых задач (невозмущенных), содержащих неоднородность лишь в одном месте, т. е. либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Решение ищем в виде $u = (u_1; u_2) = \sum_{j=1}^{4}(u_{j1}, u_{j2}) =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)}$, где $u_{(j)}$ — решения вспомогательных задач.

1.4.1. Первая вспомогательная задача (*невозмущенная задача Зарембы*).

$$u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1);\ \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\ \partial_{12}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}); \tag{1.14}$$

$$u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2);\ \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\ \partial_{21}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \tag{1.15}$$

Здесь φ_1, φ_2 заданы, т. е. условия Дирихле на внешних границах неоднородны, а уравнения и условия Неймана на стыке однородные. Таким образом, для $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12})$ имеем задачу Зарембы, которая распадается на две независимые задачи (1.14), (1.15).

Рассматривая первую из них, т. е. задачу (1.14), будем считать, что ее решение $u_{11}(x) \in H_h^1(\Omega_1) := \{u_1 \in H^1(\Omega_1) : u_1 - \Delta u_1 = 0\}$. Тогда (по теореме Гальярдо, см. [40]) ее след $\gamma_1 u_{11}(x)$ на $\partial\Omega_1 = \Gamma_1$ есть функция из $H^{1/2}(\Gamma_1)$, а на Γ_{11} след является функцией из $H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (1.14) является условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}). \tag{1.16}$$

Так как между элементами из $H_h^1(\Omega_1)$ и $H^{1/2}(\Gamma_1)$ имеет место взаимно однозначное соответствие (и даже изометрия при соответствующем выборе эквивалентной нормы в $H^{1/2}(\Gamma_1)$), то существует единственный элемент

$$v_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\varphi_1 \in H_h^1(\Omega_1), \tag{1.17}$$

который является решением задачи

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11}v_{11} = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_1 = \partial\Omega_1). \tag{1.18}$$

Тогда для функции $w_{11} := u_{11} - v_{11}$ из (1.14), (1.18) возникает задача Неймана

$$w_{11} - \Delta w_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \qquad \gamma_{11}w_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}); \qquad \partial_{21}w_{11} = -\partial_{21}v_{11} \quad (\text{на } \Gamma_{21}). \tag{1.19}$$

Ее слабое решение естественно рассматривать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) := \{u_1 \in H^1(\Omega_1) : \gamma_{11}u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11})\}$.

Из условия на Γ_{11} в (1.19) следует, что $\gamma_{21}w_{11} \in H^{1/2}(\Gamma_{21})$ (см. [14, п. 3.3.2]), и тогда с помощью [14, лемма 3.3.4] имеем: $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1) = H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$. Отсюда получаем, что в задаче (1.19) должно быть выполнено необходимое условие

$$\partial_{21}v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{1.20}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (1.19), причем оно действительно имеет место.

Воспользуемся формулой

$$(\eta_1, w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, w_{11} - \Delta w_{11}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}w_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \tag{1.21}$$

$$\gamma_{21}\eta_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \partial_{21}w_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}), \quad \forall\, \eta_1, w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \tag{1.22}$$

которая следует из формулы

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \sum_{k=1}^{2}\langle \gamma_k\eta_1, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta, u \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1). \tag{1.23}$$

На ее основе легко определяется слабое решение $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ задачи (1.19)

$$(\eta_1, w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, (-\partial_{21}v_{11})\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{1.24}$$

Здесь в силу (1.19) и теоремы Гальярдо правая часть является линейным ограниченным функционалом в $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Действительно, из условия $v_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$ (см. (1.17)) имеем $\gamma_1 v_{11} \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, $\partial_1 v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$, а потому $\partial_{21}v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21})$. Кроме того, $\gamma_{21}\eta_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{21})$, и потому правая часть в (1.24) не превышает $\|\partial_{21}v_{11}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_{11})}\,\|\gamma_{21}\eta_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_{21})} \leqslant c_{11}\|\eta_1\|_{H^1(\Omega_1)}$. Значит, при любом $\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$ существует единственное $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega)$. В частности, если $\eta_1 \in H^1_0(\Omega_1)$, тогда в (1.24) получаем, что $(\eta_1, w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = 0$, следовательно, w_{11} ортогонально $H^1_0(\Omega_1)$ и $w_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$. При этом w_{11} является слабым решением задачи (1.19):

$$\begin{gathered} w_{11} := V_{21}(-\partial_{21}v_{11}) = -V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\varphi_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1), \\ V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)). \end{gathered} \tag{1.25}$$

Отсюда окончательно приходим к выводу, что условие (1.16) является необходимым и достаточным условием существования слабого решения u_{11} задачи Зарембы (1.14), и это решение выражается формулой $u_{11} = v_{11} + w_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\varphi_1 - V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\varphi_1 =: \widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1$, $\widetilde{\gamma}_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11}); H^1_h(\Omega_1))$.

Аналогично рассматривается задача (1.15). Ее решение выражается формулой $u_{12} = \widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2$.

Итогом рассмотрения является следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Каждая из задач Зарембы* (1.14), (1.15) *имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in H^1_h(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,2}, \tag{1.26}$$

и это решение выражается формулой $u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k$, $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}); H^1_h(\Omega_k))$, $k = \overline{1,2}$.

1.4.2. Вторая вспомогательная задача (*невозмущенная задача Стеклова*). Перейдем теперь ко второму этапу — рассмотрению задачи Стеклова применительно к проблеме (1.12). Необходимо исследовать проблему нахождения набора функций $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}) \in \oplus_{k=1}^2 H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ из следующих уравнений и краевых условий:

$$\begin{gathered} u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1);\ \gamma_{11}u_{21} = 0\ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{22} - \Delta u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2);\ \gamma_{22}u_{22} = 0\ (\text{на } \Gamma_{22}), \end{gathered} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12} := \widetilde{\varphi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ &\partial_{12}u_{21} = -\partial_{21}u_{22} (=: \chi_{21}) \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Здесь $(u_{11}; u_{12})^\tau = u_{(1)}$ — решение задачи Зарембы (1.14)-(1.15), а φ_{21} — заданная функция.

Если функция χ_{21} известна, то вместо (1.27), (1.28) возникают две распадающиеся задачи Неймана. В частности, для функции u_{21} имеем задачу

$$u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1);\ \gamma_{11}u_{21} = 0\ (\text{на } \Gamma_{11}); \quad \partial_{21}u_{21} = \chi_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \tag{1.29}$$

слабое решение которой будем разыскивать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1) =: H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)$, а также с помощью формулы Грина

$$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{21} - \Delta u_{21} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}. \tag{1.30}$$

Эта задача уже рассмотрена выше (см. (1.18), (1.21)). Для ее слабой разрешимости необходимо и достаточно (см. (1.20)), чтобы выполнялось условие $\chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21})$. Тогда слабое решение определяется в виде

$$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \tag{1.31}$$

и выражается формулой

$$u_{21} = V_{21}\chi_{21}, \quad V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)). \tag{1.32}$$

Аналогичное рассмотрение другой задачи Неймана, возникающей из проблемы (1.27), (1.28), основанное на обобщенной формуле Грина

$$(\eta_2, u_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \eta_2, u_{22} - \Delta u_{22} \rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_{12}\eta_2, \partial_{12}u_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}, \tag{1.33}$$

приводит к следующему выводу:

$$u_{22} = -V_{12}\chi_{21}, \quad V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)). \tag{1.34}$$

Имея представления (1.32), (1.34), из главных граничных условий в (1.28) получаем:

$$\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = (\gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12})\chi_{21} := C\chi_{21} = \widetilde{\varphi}_{21}. \tag{1.35}$$

Здесь C — оператор Стеклова $C \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^{1/2}(\Gamma_{21}))$, он отображает $H^{-1/2}(\Gamma_{21})$ на $H^{1/2}(\Gamma_{21})$ и является положительным оператором. Для доказательства используем следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Оператор Стеклова* $C := \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12}$, $C \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^{1/2}(\Gamma_{21}))$, *является положительным*:

$$\langle C\chi, \chi \rangle = \sum_{k=1}^{2} \| u_{2k} \|^2_{H^1(\Omega_k)}, \tag{1.36}$$

где u_{2k}, $k = \overline{1,2}$ — *слабые решения вспомогательных задач* (1.27)-(1.28).

Доказательство. Оно основано на тождествах (1.31), (1.33), представлениях (1.32), (1.34) и свойствах взаимной сопряженности операторов γ_{jk} и V_{jk}. Имеем

$$\langle C\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} = \langle \gamma_{21}V_{21}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{12}V_{12}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} =$$
$$= \|V_{21}\chi_{21}\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \|V_{12}\chi_{21}\|^2_{H^1(\Omega_2)} = \sum_{k=1}^{2} \| u_{2k} \|^2_{H^1(\Omega_k)}.$$

□

Из тождества (1.36) следует, что оператор C положителен и действует из $H^{-1/2}(\Gamma_{21})$ на все $H^{1/2}(\Gamma_{21})$, и потому существует обратный оператор, который согласно теореме Банаха ограничен. Поэтому задача (1.35) имеет единственное решение $\chi_{21} = C^{-1}\widetilde{\varphi}_{21}$, $C^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{21}); H^{-1/2}(\Gamma_{21}))$. Таким образом, решение задачи (1.35) существует и единственно при $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}_{21} \in H^{1/2}(\Gamma_{21})$.

Теорема 1.3. *Пусть в задаче Стеклова* (1.27), (1.28) *выполнено условие* (1.26). *Тогда существует единственное слабое решение* $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}) \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)$, *представимое в виде* $u_{(2)} = (V_{21}\chi_{21}; -V_{12}\chi_{21})$, $\chi_{21} = C^{-1}\widetilde{\varphi}_{21}$, *где операторы* V_{jk} *введены формулами*

$$\begin{aligned} &(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{H^1(\Omega_1)} := \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \forall\, \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1),\ \forall\, \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \\ &(\eta_2, V_{12}\chi_{21})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{12}\eta_2, \chi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \forall\, \eta_2 \in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_1),\ \forall\, \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Соответственно оператор Стеклова C введен посредством элементов (1.34), *а операторы* γ_{jk} — *операторы следа из* $H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ *на* $H^{1/2}(\Gamma_{jk})$ $(j \neq k)$.

1.4.3. Третья вспомогательная задача (*первая возмущенная задача С. Г. Крейна*). Следующим этапом является рассмотрение первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна, порожденной проблемой (1.12):

$$u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}) \in \oplus_{k=1}^{2} H^1(\Omega_k) =: H^1(\Omega), \tag{1.38}$$

$$\begin{aligned} u_{31} - \Delta u_{31} &= \widetilde{f}_1 = f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_1), \ \gamma_{11} u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ u_{32} - \Delta u_{32} &= \widetilde{f}_2 = f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_2), \ \gamma_{22} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} &= 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.40}$$

Исходя из граничных условий Дирихле на Γ_{21} (см. (1.40)), введем в $H^1(\Omega)$ подпространство $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ наборов элементов $(u_1; u_2)$, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) краевые условия задачи (1.39), (1.40), т. е.

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ (u_{31}; u_{32}) \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_2) : \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12}) \Big\}. \tag{1.41}$$

Это пространство плотно вложено в пространство $L_2(\Omega) := \oplus_{k=1}^{2} L_2(\Omega_k)$, так как $H^1_{0,\Gamma}$ содержит подпространство $H^1_0(\Omega)$:

$$H^1_0(\Omega) := \Big\{ (u_{31}; u_{32}) : \gamma_{21} u_{31} = 0, \ \gamma_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \ \gamma_{11} u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \gamma_{22} u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}) \Big\}.$$

Поэтому $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств, оператор которой обозначим через A_0. Опираясь на обобщенную формулу Грина для областей Ω_k, $k = \overline{1,2}$ (см. (1.23), (1.33)), для набора функций $\eta = (\eta_1; \eta_2)$ и $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32})$ из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ получим следующую формулу Грина:

$$\begin{aligned} (\eta, u_{(3)})_{H^1(\Omega)} &= \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, u_{3k} - \Delta u_{3k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\ &+ \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}, \quad \forall\, \eta, u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \quad \gamma_{21} \eta_1 = \gamma_{12} \eta_2 \in H^{1/2}(\Gamma_{12}). \end{aligned} \tag{1.42}$$

Отсюда и из (1.39), (1.40) естественно дается определение слабого решения этой задачи: это такой набор $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}) \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$(\eta, u_{(3)})_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, \widetilde{f}_k \rangle_{L_2(\Omega_k)}, \quad \forall\, \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega). \tag{1.43}$$

Теорема 1.4. *Первая вспомогательная задача С. Г. Крейна* (1.39), (1.40) *имеет единственное слабое решение* $u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда* $f := (f_1; f_2) \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*$. *Это решение выражается формулой*

$$u_{(3)} = A_0^{-1} \widetilde{f} = A_0^{-1} \Big\{ \widetilde{f}_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \widetilde{f}_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial u_2}{\partial x_k} \Big\}, \tag{1.44}$$

где A_0 — *оператор гильбертовой пары* $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$.

Если, в частности, $f := (f_1; f_2) \in L_2(\Omega) := \oplus_{k=1}^{2} L_2(\Omega_k)$, *то исходная задача имеет единственное обобщенное решение* $u_{(3)} \in \mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_0^{1/2}) = H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$, *выражаемое той же формулой* (1.44).

1.4.4. Четвертая вспомогательная задача (*вторая возмущенная задача С. Г. Крейна*). Рассмотрим, наконец, четвертый этап исследования задачи сопряжения (1.12). Здесь для набора функций $u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}) \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ получаем следующую проблему:

$$\begin{aligned} &u_{41} - \Delta u_{41} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \ \gamma_{11} u_{41} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{42} - \Delta u_{42} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \ \gamma_{22} u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ &\partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \widetilde{\psi}_{21} := \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} u_2) \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Согласно условиям (1.45), здесь снова для решений из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем свойства

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} u_{41} = \gamma_{12} u_{42} \in H^{1/2}(\Gamma_{21}), \qquad \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ &\partial_{12} u_{41} + \partial_{21} u_{42} = \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} u_2) + \psi_{21} =: \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{1.47}$$

Поэтому необходимое условие разрешимости задачи (1.45), (1.46) таково:

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{1.48}$$

При этом слабое решение определяется тождеством

$$(\eta, u_{(4)})_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \widetilde{\psi}_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad \forall\, \eta \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{1.49}$$

которое следует из формулировки задачи (1.45), (1.46), а также из формулы Грина (1.42) (с заменой $u_{(3)}$ на $u_{(4)}$).

Теорема 1.5. *Вторая вспомогательная задача С. Г. Крейна* (1.45), (1.46) *имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* (1.48)*. Это решение имеет вид* $u_{(4)} = W_{21}\psi_{21}$, $W_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega))$, $H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega) := H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega)$, $H^1_h(\Omega) := \oplus_{k=1}^2 H^1_h(\Omega_k)$*. При этом оператор* W_{21} *обладает свойством* $(W_{21})^* = \gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2$, *где* $\rho_k : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega_k)$, $k = \overline{1,2}$ *— операторы сужения,* $\rho_k u = \rho_k(u_1, u_2) := u_k$, $k = \overline{1,2}$.

Доказательство. Свойство $\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2$ следует из определения подпространства $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ (см. (1.41)), а свойство $\gamma_{21}\rho_1 = (W_{21})^*$ — из определения слабого решения (см. (1.49)) задачи (1.45), (1.46), $u_{(4)} = W_{21}\widetilde{\psi}_{21}$. □

1.4.5. Итоговый результат. Складывая решения четырех вспомогательных задач, рассмотренных выше, получаем следующую связь решений возмущенной и невозмущенной задач:

$$\begin{aligned} u + \varepsilon A^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m} c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k}; \sum_{k=1}^{m} c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right) - \varepsilon W_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2) = \\ = (I + \widehat{C})\widehat{\varphi} + V\varphi_{21} + A^{-1}f + W_{21}\psi_{21} =: u_0, \end{aligned} \tag{1.50}$$

или $(I + \varepsilon S)u_\varepsilon = u_0$, $u_0, u = u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(H^1(\Omega))$. Окончательно получаем следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Если* $I + \varepsilon S$ *обратим, в частности, если* $|\varepsilon| \|S\| < 1$, *то исходная возмущенная краевая задача* (1.12) *разрешима, т. е. существует единственное слабое решение, которое выражается формулой* $u_\varepsilon = (I + \varepsilon S)^{-1}u_0$, $u_0, u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(H^1(\Omega))$, *где* u_0 *— сумма слагаемых в* (1.50).

Замечание 1.1. То, что сумма решений четырех вспомогательных краевых задач (Зарембы, Стеклова и двух задач С. Г. Крейна) действительно дает решение исходной задачи (1.12), легко проверяется непосредственно. Можно убедиться, опираясь на формулы Грина (см. (1.23), (1.33)), что однородная задача имеет лишь нулевое решение. Следовательно, представление решения исходной задачи в виде суммы решений четырех вспомогательных задач выражается итоговыми формулами единственно.

2. Смешанные спектральные задачи сопряжения, порожденные полуторалинейной формой

2.1. Спектральные задачи для случая двух областей при первом условии сопряжения.

2.1.1. Невозмущенные смешанные спектральные задачи сопряжения при первом условии сопряжения. Снова в области Ω, разбитой на две подобласти Ω_1, Ω_2 (см. рис. 1), рассмотрим сначала невозмущенную ($\varepsilon = 0$) спектральную задачу сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях Ω_k, $k = 1, 2$, с соответствующими граничными условиями. Имеем: в областях Ω_1, Ω_2 и на внешних границах:

$$\begin{aligned} &u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 =: f_1 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_1 = \lambda \gamma_{11} u_1 =: \psi_1 \text{ (на } \Gamma_{11}),\\ &u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 =: f_2 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{12} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

на границах стыка задается два вариационных условия:

1°. либо

$$\gamma_{11} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0,\ \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \mu \gamma_{21} u_1 =: \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21}), \tag{2.2}$$

2°. либо

$$\partial_{21} u_1 = -\partial_{12} u_2 = \psi_{21} := \mu(\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2) \quad \text{(на } \Gamma_{12}). \tag{2.3}$$

В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным параметром является параметр $\mu \in \mathbb{C}$. Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В. И. Горбачук (см. [5]).

Задачу будем исследовать с помощью общего подхода, который был сформулирован в предыдущем разделе 1.

Из постановки задачи (2.1)-(2.2) видно, что ее слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H^1_\Gamma(\Omega) \subset H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2)$.

Представим решение задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых «неоднородности» (т. е. f_k и ψ_k) содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий. Имеем $u = \sum\limits_{k=1}^{5} u_{(k)} = \sum\limits_{k=1}^{5} (u_{k1}; u_{k2})$:

$$\begin{aligned} 1)\ &u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{11} = \psi_1 := \lambda \gamma_{11} u_1 \text{ (на } \Gamma_{11}),\\ &u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{12} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21} u_{11} - \gamma_{12} u_{12} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{11} + \partial_{12} u_{12} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} 2)\ &u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}),\\ &u_{22} - \Delta u_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{22} = \lambda^{-1} \gamma_{22} u_2 := \psi_2 \text{ (на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} 3)\ &u_{31} - \Delta u_{31} = f_1 := \lambda u_1 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{31} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}),\\ &u_{32} - \Delta u_{32} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} 4)\ &u_{41} - \Delta u_{41} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{41} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}),\\ &u_{42} - \Delta u_{42} = f_2 = \lambda u_2 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{42} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} 5)\ &u_{51} - \Delta u_{51} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} u_{51} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}),\\ &u_{52} - \Delta u_{52} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} u_{52} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21} u_{51} - \gamma_{12} u_{52} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \qquad \partial_{21} u_{51} + \partial_{12} u_{52} = \mu \gamma_{21} u_{51} =: \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Задачи исследуются с помощью следующей обобщенной формулы Грина:

$$\begin{aligned}(\eta,u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2}(\eta_k,u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2}\langle\eta_k,u_k-\Delta u_k\rangle_{L_2(\Omega_k)}+\\ +\sum_{k=1}^{2}\langle\gamma_{kk}\eta_k,\partial_{kk}u_k\rangle_{L_2(\Gamma_{kk})}+\langle\gamma_{21}\eta_1,\partial_{21}u_1+\partial_{12}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}+\\ +\langle\gamma_{21}\eta_1-\gamma_{12}\eta_2,\partial_{21}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{21})},\ \forall\,\eta,u\in H^1_\Gamma(\Omega),\end{aligned} \tag{2.9}$$

где следы таковы, что $\gamma_{kl}\eta_l \in H^{1/2}(\Gamma_{kl})$, а $\partial_{kl}u_l \in H^{-1/2}(\Gamma_{kl})$.

$$H^1_\Gamma(\Omega) := \{(u_1;u_2)\in H^1_{\Gamma_{11}(\Omega_1)}\oplus H^1_{\Gamma_{22}(\Omega_2)} : \gamma_{21}u_1-\gamma_{12}u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}=\Gamma_{21})\}.$$

Отметим, что $H^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1)\oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H^1_0(\Omega_1)\oplus H^1_0(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Для первой вспомогательной задачи (2.4) формула Грина имеет вид

$$\begin{aligned}(\eta,u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2}(\eta_k,u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2}\langle\eta_k,u_k-\Delta u_k\rangle_{L_2(\Omega_k)}+\\ +\sum_{k=1}^{2}\langle\gamma_{kk}\eta_k,\partial_{kk}u_k\rangle_{L_2(\Gamma_{kk})}+\langle\gamma_{11}\eta_1,\partial_{21}u_1+\partial_{12}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{12})},\ \forall\,\eta,u\in H^1_\Gamma(\Omega).\end{aligned} \tag{2.10}$$

Тогда слабое решение задачи (2.4) определяется тождеством

$$(\eta,u_{(1)})_{H^1(\Omega)} = \langle\gamma_{21}\eta_1,\psi_1\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} = \langle\gamma_{11}\eta_1,\lambda\gamma_{11}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{11})},\ \forall\,\eta\in H^1_\Gamma(\Omega). \tag{2.11}$$

Это решение задается формулой

$$u_{(1)} = (u_{11};u_{12}) = V_{11}\psi_1 = V_{11}(\lambda\gamma_{11}u_1) = \lambda V_{11}\gamma_{11}u_1 = \lambda V_{11}\gamma_{11}p_1u, \tag{2.12}$$

где $p_ku = p_k(u_1;u_2) := u_k$, $k=\overline{1,2}$. Отметим еще, что выполнено $V_{kk} = (\gamma_{kk}p_k)^*$, $k=\overline{1,2}$.

Затем аналогичным образом определяются слабые решения вспомогательных задач (2.5)–(2.8). Имеем $u_{(2)} = (u_{21};u_{22}) = V_{22}\psi_2 = V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}u_2) = \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2u$. Используя формулу Грина (2.9), получим решение третьей вспомогательной задачи $u_{(3)} = A^{-1}(f_1;0) = \lambda A^{-1}(u_1;0) = \lambda A^{-1}(\widetilde{p}_1u)$, $\widetilde{p}_1u = (u_1;0)$, где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega);L_2(\Omega))$.

Далее,

$$u_{(4)} = A^{-1}(0;f_2) = A^{-1}(\lambda(0;u_2)) = \lambda A^{-1}(\widetilde{p}_2u), \tag{2.13}$$

$$u_{(5)} = V_{21}\psi_{21} = V_{21}(\mu\gamma_{21}u_1) = \mu V_{21}\gamma_{21}p_1u. \tag{2.14}$$

Итогом проведенных построений является такой вывод: слабое решение $u=(u_1;u_2)$ задачи (2.1)–(2.8) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{k=1}^{5}u_{(k)} = \lambda V_{11}\gamma_{11}p_1u + \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2u + \lambda A^{-1}\widetilde{p}_1u + \lambda A^{-1}\widetilde{p}_2u + \mu V_{21}\gamma_{21}p_1u. \tag{2.15}$$

Используя теперь свойство $u=(u_1;u_2)=\widetilde{p}_1u+\widetilde{p}_2u=(\widetilde{p}_1u_1;0)+(0;\widetilde{p}_2u_2)$, получаем

$$u = \lambda(A^{-1}+V_{11}\gamma_{11}p_1)u + \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2u + \mu V_{21}\gamma_{21}p_1u, \tag{2.16}$$

где $u\in H^1_\Gamma(\Omega)$, A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega);L_2(\Omega))$.

Уравнение (2.16) можно привести к более симметрической форме, воспользовавшись тем, что имеет место свойство $A^{1/2}V_k = (\gamma_kA^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k);L_2(\Omega))$, $k=\overline{1,2}$. Действительно, представим элемент $u\in H^1_\Gamma(\Omega)=\mathcal{D}(A^{1/2})$, $\mathcal{R}(A^{1/2})=L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v,\quad v\in L_2(\Omega), \tag{2.17}$$

и подставим его в (2.16), затем подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу свойства $H^1_\Gamma(\Omega)=\mathcal{D}(A^{1/2})$). Тогда взамен (2.16) возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I-\lambda(A^{-1}+B_{11})-\lambda^{-1}B_{22}-\mu K_{22})v = 0,\quad v\in L_2(\Omega), \tag{2.18}$$

$$0 < A^{-1},$$

$$\begin{gathered}0 \leqslant B_{11} := A^{1/2}V_{11}(V_{11})^*A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\\ 0 \leqslant B_{22} := A^{1/2}V_{22}(V_{22})^*A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\\ 0 \leqslant K_{22} := A^{1/2}V_{21}(V_{21})^*A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))\end{gathered} \tag{2.19}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать фиксированным, другой — спектральным.

2.1.2. Возмущенные смешанные спектральные задачи сопряжения при первом условии сопряжения. Рассмотрим теперь спектральную задачу при $\varepsilon \neq 0$. Тогда имеем в областях Ω_1, Ω_2 для искомых функций $u_k(x)$:

$$\begin{gathered}u_1 - \Delta u_1 = \lambda u_1 =: f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} =: \widetilde{f_1} \quad (\text{в } \Omega_1),\\ u_2 - \Delta u_2 = \lambda u_2 =: f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} =: \widetilde{f_2} \quad (\text{в } \Omega_2);\end{gathered} \tag{2.20}$$

на внешних границах:

$$\begin{gathered}\partial_{11}u_1 = \lambda\gamma_{11}u_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1 =: \psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1 =: \widetilde{\psi_1} \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ \partial_{12}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{22}u_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}u_2 =: \psi_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}u_2 =: \widetilde{\psi_2} \ (\text{на } \Gamma_{22});\end{gathered} \tag{2.21}$$

на границах стыка два вариационных условия:

1°. либо

$$\begin{aligned}&\gamma_{11}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \varphi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12}u_2) =\\ &= \mu\gamma_{12}u_1 + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12}u_2) =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),\end{aligned} \tag{2.22}$$

2°. либо

$$\begin{aligned}&\partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12}u_2) = \mu(\gamma_{12}u_1 - \gamma_{12}u_2) +\\ &+ \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{12}\gamma_{12}u_2) =: \widetilde{\psi_{21}} \quad (\text{на } \Gamma_{21}).\end{aligned} \tag{2.23}$$

Решение задачи (2.20)–(2.22) ищем в виде суммы решений пяти вспомогательных задач:

$$\begin{aligned}1)\ &u_{11} - \Delta u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11}u_{11} = \widetilde{\psi}_1 := \psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1 = \lambda\gamma_{11}u_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{12} - \Delta u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21}u_{11} - \gamma_{12}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21}u_{11} + \partial_{12}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}2)\ &u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11}u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{22} - \Delta u_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22}u_{22} = \widetilde{\psi}_2 := \psi_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{22}u_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}u_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21}u_{21} + \partial_{12}u_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}3)\ &u_{31} - \Delta u_{31} = \widetilde{f}_1 := f_1 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} = \lambda u_1 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11}u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{32} - \Delta u_{32} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22}u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}4)\ &u_{41} - \Delta u_{41} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11}u_{41} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{42} - \Delta u_{42} = \widetilde{f}_2 := f_2 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} = \lambda u_2 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22}u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12});\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}5)\ &u_{51} - \Delta u_{51} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11}u_{51} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{52} - \Delta u_{52} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22}u_{52} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &\gamma_{21}u_{51} - \gamma_{12}u_{52} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}), \qquad \partial_{21}u_{51} + \partial_{12}u_{52} = \widetilde{\psi}_{21} :=\\ &\qquad := \psi_{21} + \varepsilon(\partial_{12}\gamma_{21}u_1 - \partial_{21}\gamma_{12}u_2) = \mu\gamma_{21}u_1 + \varepsilon(\partial_{12}\gamma_{21}u_1 - \partial_{21}\gamma_{12}u_2) \ (\text{на } \Gamma_{12}).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Аналогично (2.4)–(2.8), задачи исследуем с помощью формулы Грина (2.9). Тогда слабые решения задач (2.24)–(2.28) имеют соответственно вид:

$$u_{(1),\varepsilon} = V_{11}\widetilde{\psi}_1 = V_{11}(\psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1) = V_{11}(\lambda\gamma_{11}u_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}u_1) = \lambda V_{11}\gamma_{11}p_1u + \varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1u; \quad (2.29)$$

$$u_{(2),\varepsilon} = V_{22}\widetilde{\psi}_2 = V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}u_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}u_2); \quad (2.30)$$

$$u_{(3),\varepsilon} = A^{-1}(\widetilde{f}_1;0) = A^{-1}(f_1 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};0) = A^{-1}(\lambda u_1 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};0); \quad (2.31)$$

$$u_{(4),\varepsilon} = A^{-1}(0;\widetilde{f}_2) = A^{-1}(0;f_2 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}) = A^{-1}(0;\lambda u_2 - \varepsilon\sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}); \quad (2.32)$$

$$u_{(3),\varepsilon} + u_{(4),\varepsilon} = \lambda A^{-1}(u_1;u_2) - \varepsilon A^{-1}(\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};\sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}); \quad (2.33)$$

$$u_{(5),\varepsilon} = V_{21}\widetilde{\psi}_{21} = V_{21}(\mu\gamma_{21}u_1 + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2)). \quad (2.34)$$

Итогом является следующий результат: слабое решение задачи (2.24)–(2.28) удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} u_\varepsilon - \varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1u_\varepsilon - \varepsilon V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2u_\varepsilon + \varepsilon A^{-1}\left(\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};\sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right) - \\ - \varepsilon V_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}u_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}u_2) = \lambda(A^{-1} + V_{11}V_{11}^*)u_\varepsilon + \lambda^{-1}(V_{22}(V_{22})^*)u_\varepsilon + \mu V_{21}(V_{21})^*u_\varepsilon, \end{gathered} \quad (2.35)$$

где $V_{kk} = (\gamma_{kk}p_k)^*$. Аналогично (2.17) осуществим замену $u_\varepsilon = A^{-1/2}v_\varepsilon$, $v_\varepsilon \in L_2(\Omega)$, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1_\Gamma(\Omega)$. Далее, действуя на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$, получаем следующую спектральную задачу:

$$L(\lambda,\mu)v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \quad (2.36)$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega);L_2(\Omega))$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, операторы B_{11}, B_{22}, K_{22} описаны в (2.19),

$$\begin{gathered} S := A^{1/2}V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1A^{-1/2} + A^{1/2}V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2A^{-1/2} + A^{-1/2}\left(\sum_{k=1}^m c_{1k}\frac{\partial u_1}{\partial x_k};\sum_{k=1}^m c_{2k}\frac{\partial u_2}{\partial x_k}\right)A^{-1/2} - \\ - A^{1/2}V_{21}(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1 - \sigma_{21}\gamma_{12}p_2). \end{gathered}$$

2.2. О свойствах решений невозмущенных спектральных проблем при первом условии сопряжения.

2.2.1. Свойства решений при спектральном параметре μ. Изучим свойства решений спектральной задачи (2.1) при первых граничных условиях на стыке (2.2). Итак, операторный пучок (2.18) содержит два параметра λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим сначала случай, когда в пучке $L(\lambda,\mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

2.2.1.1. Отрицательные значения параметра λ. Пусть в задаче (2.18) параметр $\lambda < 0$. Обозначим

$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_{11}) + \lambda^{-1}B_{22}. \quad (2.37)$$

Так как $T(\lambda) < 0$, то $I - T(\lambda) \geqslant I$ равномерно по λ. Значит, существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1} : \| (I - T(\lambda)^{-1} \| \leqslant 1$.

Оператор $K_{22} := (A^{1/2}V_{21})((V_{21})^*A^{-1/2})$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в пространство $L_{2,h}(\Omega) := \{v \in L_2(\Omega) : v = A^{1/2}u, u \in H^1_\Gamma(\Omega) \subset H^1(\Omega)\}$, поэтому $\ker K_{22} = L_{2,0} = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$. Более того, оператор K_{22} неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$; $T(\lambda)$ также неотрицателен и компактен. Это дает возможность перейти от задачи (2.18) к спектральной проблеме на собственные значения компактного положительного оператора и воспользоваться теоремой Гильберта—Шмидта.

С этой целью введем взаимно дополнительные ортопроекторы P_0, P_1, отвечающие разложению: $H = H_0 \oplus H_1$, $H_0 = \ker K_{22} = L_{2,0}(\Omega)$, $H_1 = \overline{\mathcal{R}(K_{22})} = L_{2,h}(\Omega)$, и I_0, I_1 — единичные операторы в H_0, H_1 соответственно.

Представим элемент v в виде $v = v_0 + v_1$, тогда

$$(I - T(\lambda))(v_0 + v_1) = \mu K_{22}(v_0 + v_1) = \mu K_{22} v_0 + \mu \widetilde{K}_{22} v_1 = \mu \widetilde{K}_{22} v_1, \tag{2.38}$$

где $\widetilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$, $K_{22} v_0 = 0$, $v_0 = P_0 v_0$, $v_1 = P_1 v_1$.

Применим к обеим частям уравнения (2.38) ортопроекторы P_0, P_1, получим

$$P_0(I - T(\lambda))P_0 v_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1 v_1 = \mu P_0 \widetilde{K}_{22} v_1 = 0, \tag{2.39}$$

$$P_1(I - T(\lambda))P_0 v_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1 v_1 = \mu P_1 \widetilde{K}_{22} v_1 = \mu \widetilde{K}_{22} v_1. \tag{2.40}$$

Оператор $P_0(I - T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0 T(\lambda)) P_0 \geqslant I_0$ в H_0, и потому существует его обратный, причем $\|(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}\| \leqslant 1$ равномерно по $\lambda < 0$. Тогда из (2.39) имеем

$$v_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1 v_1). \tag{2.41}$$

Подставим (2.41) в (2.40), получим уравнение для v_1:

$$(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = \mu \widetilde{K}_{22} v_1, \quad v_1 \in H_1, \tag{2.42}$$

$$T_1(\lambda) = P_1 T(\lambda) P_1 + P_1 T(\lambda) P_0 (I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1} P_0 T(\lambda) P_1. \tag{2.43}$$

Лемма 2.1. *Имеет место свойство* $\ker(I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = 0, \tag{2.44}$$

где $T_1(\lambda)$ определен в (2.43). По формуле (2.41) введем v_0 и подставим в (2.44). Тогда получим формулу (2.40) с $\mu = 0$:

$$P_1(I - T(\lambda))P_0 v_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1 v_1 = 0, \tag{2.45}$$

а из (2.44) получаем (2.39).

Уравнение (2.45) с $\mu = 0$ равносильно следующему: $(I - T(\lambda))v = 0$, $v = v_0 + v_1$, которое имеет тривиальное решение $v = 0$, так как $I - T(\lambda) \geqslant I \geqslant 0$. Следовательно, $v_0 = v_1 = 0$. $\square$

Отметим, что при $\lambda < 0$ оператор $I - T(\lambda)$ из (2.43) самосопряжен и положительно определен. В самом деле, если имеется связь (2.41), то

$$((I - T(\lambda))(v_0 + v_1), v_0 + v_1)_{L_2(\Omega)} = ((I_1 - T_1(\lambda))v_0, v_1)_{L_2(\Omega)} \geqslant (\|v_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L_2(\Omega)}) \geqslant \|v_1\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{2.46}$$

Основываясь на оценке (2.46), сделаем в (2.42) замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2} v_1 = \psi_1. \tag{2.47}$$

Далее, действуя слева ограниченным оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$, получаем следующую задачу:

$$\psi_1 = \mu \widehat{K}_{22} \psi_1, \quad \psi_1 \in L_{2,h}(\Omega), \tag{2.48}$$

$$\widehat{K}_{22} := (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} P_1 K_{22} P_1 (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = \widehat{K}^*_{22} > 0, \quad \widehat{K}_{22} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)). \tag{2.49}$$

Определение 2.1. Базис $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$, получаемый из ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ по закону $\psi_j = A\varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots$, где A — некоторый линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор $(A, A^{-1} \in \mathcal{L}(H))$, называется базисом, *эквивалентным ортонормированному*, или *базисом Рисса*.

Определение 2.2. Базис Рисса $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset H$ будем называть *p-базисом*, $0 < p \leqslant \infty$, если $\psi_j = (I + T)\varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $T \in \mathfrak{S}_p(H)$, где $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в H.

Теорема 2.1. *При* $\lambda < 0$ *задача* (2.18) *имеет дискретный спектр, состоящий из положительных конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $+\infty$. *Собственные элементы* $\{v_k\}_{k=1}^\infty = \{(v_{1k}, v_{2k})\}_{k=1}^\infty$, *т. е. элементы* $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $v_{1k} = P_1 v_k$, *образуют базис Рисса* *в* H_1, *причем* $v_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k}$, *где* $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ — *ортонормированный базис, отвечающий оператору* $\widehat{K}_{22}$ *из* (2.48). *Более того, элементы* v_{1k} *для* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *образуют* p-*базис в* H_1 *при*

$$p > p_0 = m - 1. \tag{2.50}$$

Доказательство. Утверждение о дискретности и положительности спектра и базисности Рисса следует из теоремы Гильберта—Шмидта, примененной к проблеме (2.48), а также свойства $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\infty)$.

Перейдем к доказательству свойства (2.50). Из формулы (2.37) вытекает принадлежность $T(\lambda)$ классу компактных операторов $\mathfrak{S}_p(L_2(\Omega))$, где

$$p > p_0 = \max(p_{A^{-1}}; p_{B_{11}}; p_{B_{22}}). \tag{2.51}$$

Можно убедиться, что собственные значения $\lambda_k(A^{-1})$ положительного самосопряженного компактного оператора A^{-1} суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|A^{-1/2}v\|^2_{L_2(\Omega)} / \|v\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2}(\Omega) / \|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)}, \quad u = A^{-1/2}v \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{2.52}$$

Поэтому их асимптотика при $k \to \infty$ дается классической формулой Вейля (см. [31])

$$\lambda_k(A^{-1}) = (a_m(\Omega))^{2/m} k^{-2/m}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty),\ a_m(\Omega) > 0,\ a_3(\Omega) = \frac{|\Omega|}{6\pi^2}, \tag{2.53}$$

и потому $p_{A^{-1}} > m/2$.

Аналогично для оператора B_{11} получаем, что его положительные собственные значения суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|\gamma_{11}A^{-1/2}v\|_{L_2(\Gamma)} / \|v\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Gamma_{11}} |u|^2 d\Gamma_{11} / \int\limits_{\Omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) d\Omega, \quad u \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega). \tag{2.54}$$

Отсюда и из [4] получаем, что асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(B_{11})$ таково:

$$\begin{aligned} &\lambda_k(B_{11}) = (d_{m,11}(\Gamma_{11}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty), \\ &d_{m,11}(\Gamma_{11}) > 0,\ d_{3,1}(\Gamma_{11}) = \frac{|\Gamma_{11}|}{4\pi}. \end{aligned} \tag{2.55}$$

Следовательно, $p_{B_{11}} > m - 1$.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем следующую формулу для оператора B_{22}:

$$\begin{aligned} &\lambda_k(B_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty), \\ &d_{m,22}(\Gamma_{22}) > 0,\ d_{3,22}(\Gamma_{22}) = \frac{|\Gamma_{22}|}{4\pi}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

и потому $p_{B_{22}} > m - 1$. Из формул (2.51), (2.53), (2.55), (2.56) приходим к выводу, что $T(\lambda)$ из (2.37) принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > p_0 = m - 1$.

Отметим, наконец, что $(I - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \widetilde{T}_1(\lambda)$; $\widetilde{T}_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_p$, $p > p_0 = m - 1$.

Отсюда и из (2.47) вытекает свойство p-базисности элементов $\{v_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $p > m - 1$. □

2.2.1.2. Положительные значения параметра λ. Будем теперь считать, что в задаче (2.18) параметр $\lambda > 0$, но

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.57}$$

Тогда аналогично предыдущему случаю можно перейти от проблемы (2.18) к уравнению (2.42) с $T_1(\lambda)$ из (2.43) путем проектирования на подпространство $H_0 = L_{2,0}(\Omega)$ и $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ и исключения v_0 (см. (2.39), (2.41)).

Здесь снова справедливы утверждения леммы 2.1, причем $T_1(\lambda)$ — компактный самосопряженный оператор, действующий в H_1. Отсюда следует, что оператор $(I_1 - T_1(\lambda))$ может иметь не более конечного числа (с учетом их кратностей) отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку $+1$. Обозначая количество отрицательных собственных значений через $\varkappa_1$, приходим к заключению, что квадратичная форма $(I_1 - T_1(\lambda))$ индефинитна, а пространство H_1 разбивается на ортогональную сумму $\varkappa_1$-мерного отрицательного подпространства H_- и бесконечномерного положительного подпространства H_+. Тогда возникает индефинитная метрика Понтрягина

$$H_1 = \Pi_{\varkappa_1} = \Pi_- \oplus \Pi_+, \quad \Pi_- = H_-, \quad \Pi_+ = H_+, \quad \dim \Pi_- = \varkappa_1, \ \dim \Pi_+ = \infty. \tag{2.58}$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\lambda > 0$ *и выполнено условие* (2.57), *а также имеет место разложение* (2.58). *Тогда спектр задачи* (2.18) *вещественный, дискретный и состоит из* $\varkappa_1$ *штук отрицательных собственных значений, остальные положительны и имеют предельную точку* $\mu = +\infty$:

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_{\varkappa_1} < 0 < \mu_{\varkappa_1+1} \leqslant \dots < \mu_\kappa \dots, \quad \lim_{k\to\infty} \mu_\kappa = +\infty. \tag{2.59}$$

Собственные значения (*присоединенных нет*) *задачи* (2.42) *образуют ортонормированный по форме* $I_1 - T_1(\lambda)$ *базис и базис Рисса в* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. *Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими соотношениям*:

$$(I_1 - T_1(\lambda) v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = \begin{cases} -\delta_{kj}, & 1 \leqslant k, \ j \leqslant \varkappa_1, \\ \delta_{kj}, & k, j \geqslant \varkappa_1 + 1, \\ 0, & k \leqslant \varkappa_1, \ j \geqslant \varkappa_1 + 1, \end{cases} \tag{2.60}$$

$$(\widetilde{K}_{22} v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}| \delta_{kj}.$$

Доказательство. С учетом (2.57), (2.58) представим оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде

$$(I_1 - T_1(\lambda)) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_{\varkappa_1} |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \tag{2.61}$$

где $J_{\varkappa_1}$ — каноническая симметрия: $J_{\varkappa_1} = J_{\varkappa_1}^* = J_{\varkappa_1}^{-1}$. Тогда с учетом (2.61) задача (2.42) преобразуется к виду

$$\varphi_1 = \mu J_{\varkappa_1} \widetilde{K}_{22}(\lambda) \varphi_1, \tag{2.62}$$

где

$$\varphi_1 = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} v_1, \quad \widetilde{K}_{22}(\lambda) := |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \widetilde{K}_{22} |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}. \tag{2.63}$$

Из компактности и положительности оператора $\widetilde{K}_{22}(\lambda)$ следует компактность $J_{\varkappa_1}\widetilde{K}_{22}(\lambda)$ и его положительность, т. е. $[J_\kappa \widetilde{K}_{22}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1] := (J_\kappa(J_\kappa \widetilde{K}_{22}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1)) = (\widetilde{K}_{22}(\lambda)\varphi_1, \varphi_1) > 0$, $\varphi_1 \neq 0$.

Тогда по теореме Л. С. Понтрягина (см. [33]) получаем, что задача (2.62), (2.63) имеет дискретный вещественный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ со свойствами (2.59), а собственные элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, образуют базис Рисса в H_1. Отсюда и из замены (2.63) приходим к заключению, что собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $v_{1k} = |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}\varphi_{1k}$ образуют базис Рисса в H_1. Далее, из условий ортонормировки $[\varphi_{1k}, \varphi_{1j}] = (J_{\varkappa_1} v_{1k}, v_{1,j})_{H_1} = \pm\delta_{kj}$, $(\widetilde{K}_{22} v_{1k}, v_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}|\delta_{kj}$ приходим к выводу, что имеют место формулы (2.60). □

2.2.1.3. Случай общего положения. Перейдем теперь к рассмотрению более общего случая:

$$\operatorname{Im} \lambda \neq 0, \ \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.64}$$

Как известно (см. [10]), операторный пучок типа С. Г. Крейна

$$I - T(\lambda) := I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1} B_{22}, \quad A^{-1}, B_{11}, B_{22} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)) \tag{2.65}$$

(с самосопряженными операторными коэффициентами) может иметь вне вещественной оси не более конечного числа невещественных собственных значений, расположенных симметрично относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

Если, в частности, $\operatorname{Re} \lambda \leqslant 0$, то из неравенства

$$\|(I - T(\lambda))v\|_H \cdot \|v\|_H \geqslant |(I - T(\lambda)v, v)|_H \geqslant \operatorname{Re}(I - T(\lambda)v, v)|_H \geqslant \|v\|_H^2 \tag{2.66}$$

при $\operatorname{Re} \lambda \leqslant 0$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ получаем оценку $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1$ равномерно по λ. Также получаем $\|(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}\| \leqslant 1$, так как в силу (2.66)

$$((I_0 - P_0 T(\lambda) P_0) v_0, v_0)_H = ((I - T(\lambda)) v_0, v_0)_H \geqslant \|v_0\|_H^2, \quad v_0 \in H_0.$$

Снова, как и ранее, от исходной проблемы (2.18) можно перейти к уравнению (2.42) с $T_1(\lambda)$ из (2.43), при этом для связи (2.41) оператор $(I_1 - T_1(\lambda))$ снова ограниченно обратим. Следовательно, задачу (2.42) можно переписать в виде

$$v_1 = \mu(I_1 - T_1(\lambda))^{-1}\widetilde{K}_{22}v_1, \quad v_1 \in H_1 = L_{2,h}, \quad \widetilde{K}_{22} = P_1K_{22}P_1. \tag{2.67}$$

Прежде чем сформулировать итоговый результат для данного случая, вспомним определение *базисности по Абелю—Лидскому*. Это понятие относится к системе корневых элементов оператора L с дискретным спектром или обратного к нему компактного (несамосопряженного) оператора $A = L^{-1}$ (см. [10]).

Допустим, что все собственные значения μ_j оператора L (характеристические числа оператора $A = L^{-1}$), кроме, быть может, конечного их числа, содержатся в угле

$$\Lambda_\theta := \{\mu : |\arg \mu| < \theta\}, \tag{2.68}$$

и пусть α — положительное число, $\alpha\theta < \pi/2$. Положим $\mu^\alpha := |\mu|^\alpha e^{i\alpha \arg \mu}$ в этом угле, так что $|\exp(-\mu^\alpha t)| \to 0$ при $t = const > 0$, $\mu \in \Lambda_\theta$, $\mu \to \infty$. Пусть в системе $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ корневых элементов оператора L имеются и собственные, и присоединенные элементы, отвечающие собственным значениям $\mu_j \in \Lambda_\theta$.

Пусть $\varphi_p, \cdots, \varphi_q$ — базис в корневом подпространстве $\mathcal{L}_{\mu_0}$ оператора L, отвечающий собственному значению $\mu_0 \in \Lambda_\theta$. Тогда будем говорить, что $\{\varphi_{j=1}^{\infty}\}$ — *базис Абеля—Лидского* порядка α, если существует такая последовательность номеров $0 = m_0 < m_1 < \cdots < m_l < \cdots$, что для любого $\varphi \in \mathcal{H}$ при $t > 0$ сходится интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu-\mu_0|=\varepsilon} \exp(-\mu^\alpha t)(L - \mu I)^{-1}\varphi d\mu, \tag{2.69}$$

где контур интегрирования лежит в Λ_θ и окружает только одно собственное значение μ_0 с обходом против часовой стрелки. Этот интеграл при $t = 0$ становится равным проекции элемента φ на корневое подпространство $\mathcal{L}_{\mu_0}$ оператора L, т. е. величине $c_p\varphi_p + \cdots + c_q\varphi_q$. Если вместо L рассматривается обратный ему оператор $A = L^{-1}$, то в (2.68) резольвенту $(L - \mu I)^{-1}$ следует заменить на модифицированную резольвенту $A(I - \mu A)^{-1}$.

Опираясь на определение базисности по Абелю—Лидскому, сформулируем следующие результаты, относящиеся к операторам L с дискретным спектром либо к операторам $A = L^{-1}$.

Рассмотрим оператор $A = L^{-1}$, который допускает представление $A = A_0(I + T_1)$, где $T_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, а оператор A_0 самосопряжен и компактен, причем все его собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, отрицательны или положительны. Тогда:

1. Если выполнено условие $s_j(A_0) = |\lambda_j(A_0)| \leqslant cj^{-p}$, $j = 1, 2, \ldots$, то система корневых элементов оператора A образует базис Абеля—Лидского порядка $\alpha = p^{-1} + \varepsilon$ $\forall$, $\varepsilon > 0$.
2. Если характеристические числа $\nu_j(A_0)$ оператора A_0 (т. е. собственные значение оператора $L_0 = A_0^{-1}$) имеют асимптотическое поведение $\nu_j(A_0) = cj^p + o(j^p)$, $j \to \infty$, $c \neq 0$, то та же формула имеет место для характеристических чисел оператора $A = L^{-1} : \nu_j(A) = cj^p + o(j^p)$, $j \to \infty$, $c \neq 0$.

Теорема 2.3. *Пусть в задаче* (2.18) *выполнены условия* (2.64). *Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле* $\Lambda_\varepsilon := \{\mu \in \mathbb{C} : |arg\ \mu| < \varepsilon,\ \operatorname{sign} \operatorname{Im} \mu = -\operatorname{sign} \operatorname{Im} \lambda\}$.

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$, $v_{1k} = P_1v_k$, *т. е. система собственных и присоединенных элементов задачи* (2.18), *после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ *является полной в* H_1, *более того, она образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m - 1$ *в* $L_{2,h}$. *Далее, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(K_{22})[1 + o(1)],\ k \to \infty, \tag{2.70}$$

$$\lambda_k(K_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \quad d_{m,22}(\Gamma_{22}) > 0. \tag{2.71}$$

Доказательство. Отметим, что асимптотическая формула (2.71), так же как и асимптотические формулы (2.53), (2.55), вытекает из работы [4]. Далее, из условий (2.57) получаем, что от задачи (2.18) можно перейти к задаче (2.42) и затем к (2.67).

Отсюда следует, что к проблеме (2.67) можно применить теоремы М. В. Келдыша (см. [6]), так как в силу (2.71) оператор $\widetilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$ имеет те же ненулевые собственные значения, что и оператор K_{22}. Поэтому $\widetilde{K}_{22}$ — полный положительный компактный оператор класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > m-1$. Кроме того, оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} = I_1 + T_2(\lambda)$, $T_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ и, очевидно, обратим. Отсюда вытекают первые утверждения исходной теоремы.

Например, свойство, определяющее связь знаков $\operatorname{Im}\mu$ и $\operatorname{Im}\lambda$, вытекает из соотношения $(I - T(\lambda)v, v)_H = \mu(K_{22}v, v)_H$ с учетом формулы (2.65) для $T(\lambda)$ и свойства операторов A^{-1}, B_{11}, B_{22}, K_{22}.

Свойство базисности по Абелю—Лидскому порядка $\alpha > m-1$ вытекает также из (2.71) и утверждения из [38, с. 292]. Далее, асимптотическая формула (2.70) следует из результатов А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [29]), примененных к уравнению $(I_1 - T_1(\lambda))v_1 = \mu\widetilde{K}_{22}v_1$, в силу компактности и вида оператора $T_1(\lambda)$, а числа $\lambda_k(\widetilde{K}_{22}) = \lambda_k(K_{22})$ и имеют асимптотику (2.71). □

2.2.2. Свойства решений при спектральном параметре λ. Рассмотрим теперь случай, когда в задаче

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v = 0, \quad v \in L_2(\Omega) \tag{2.72}$$

параметр $\mu \in \mathbb{C}$ фиксирован, а λ — спектральный (см. (2.18)).

2.2.2.1. Неположительные значения фиксированного параметра. Если $\mu \leqslant 0$, то $(I - \mu K_{22}) \geqslant I \gg 0$ и $\| (I - \mu K_{22})^{-1} \| \leqslant 1$. Осуществим в (2.72) замену $(I - \mu K_{22})^{1/2} v = \psi$. Тогда получим следующую задачу:

$$\psi = \lambda(I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}(I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}\psi, \tag{2.73}$$

т. е. задачу на собственные значения для операторного пучка С. Г. Крейна. Именно, здесь оператор $(I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2}$ — компактный и положительный, а $(I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}$ — компактный и неотрицательный.

Далее будем полагать, что выполнено условие

$$4 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \| < 1. \tag{2.74}$$

Тогда будем иметь следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &4 \| (I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2} \| \cdot \| (I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2} \| \leqslant \\ &\leqslant 4 \| (I - \mu K_{22})^{-1} \|^2 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \| \leqslant 4 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \| < 1, \end{aligned} \tag{2.75}$$

достаточное для факторизации операторного пучка

$$(I - \lambda(I - \mu K_{22})^{-1/2}(A^{-1} + B_{11})(I - \mu K_{22})^{-1/2} - \lambda^{-1}(I - \mu K_{22})^{-1/2}B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}, \tag{2.76}$$

отвечающего задаче (2.73) (см., например, [10, с. 82–86]).

Теорема 2.4. *Пусть в задаче* (2.72) *выполнено условие* (2.74). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.72) *при $\mu \leqslant 0$ имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками $0, +\infty$.*

2°. *Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ изолированных конечнократных собственных значений, расположенных на отрезке*

$$(0, r_-), \quad r_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \| A^{-1} + B_{11} \| \| B_{22} \|}}{2 \| A^{-1} + B_{11} \|}.$$

Отвечающая ей система собственных элементов (*присоединенных нет*) *после проектирования на подпространство $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \ker(I - \mu K_{22})^{-1/2} \cdot B_{22}(I - \mu K_{22})^{-1/2}$, образует базис Рисса в H_1. Далее, эта система элементов образует в H_1 также p-базис при $p > p_0 = (m-2)/2$.*

3°. *Предельной точке* $\lambda = +\infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$, *расположенных на промежутке* $(r_+, +\infty)$, *а отвечающая этой ветви система собственных элементов задачи* (2.72) *образует базис Рисса в* $H = L_2(\Omega)$ *и даже* p-*базис при тех же* $p > p_0 = (m-2)/2$.

4°. *Собственные значения имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^0 = \lambda_k(B_{22})[1+o(1)] = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{-1/(m-1)} k^{1/(m-1)}[1+o(1)],\ k \to \infty, \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}\lambda_k^\infty &= \lambda_k^{-1}(A^{-1}+B_{11})[1+o(1)] = \lambda_k^{-1}(B_{11})[1+o(1)] = \\ &= (d_{m,11}(\Gamma_{11}))^{-1/(m-1)} k^{1/(m-1)}[1+o(1)],\ k \to \infty.\end{aligned} \tag{2.78}$$

Доказательство. Оно почти дословно повторяет доказательство теорем 3.1.2 и 3.2.1 из [10, с. 83–92], но с учетом того, что при условии (2.74) пучок (2.76) допускает каноническую факторизацию, является самосопряженным, а для собственных значений $\lambda_k(A^{-1}+B_{11})$ и $\lambda_k(B_{22})$ имеют место асимптотические формулы (2.53), (2.56) $\lambda_k(A^{-1}+B_{11}) = \lambda_k(B_{11})[1+o(1)]$, $k \to \infty$. Отметим также, что асимптотические формулы (2.77), (2.78) следуют из теорем А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [26]). □

2.2.2.2. Вещественная часть μ *неположительна.* Пусть

$$\operatorname{Re}\mu \leqslant 0, \quad \operatorname{Im}\mu \neq 0. \tag{2.79}$$

Тогда в силу неравенств $\|(I-\mu K_{22})v\| \cdot \|v\| \geqslant |(I-\mu K_{22})v, v| \geqslant \operatorname{Re}\,((I-\mu K_{22})v, v) \geqslant \|v\|^2$ при условиях (2.79) имеет место оценка $\|(I-\mu K_{22})^{-1}\| \leqslant 1$. Далее, применяя слева в (2.72) оператор $(I-\mu K_{22})^{-1}$, получаем следующую задачу:

$$v = \lambda(I-\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})v + \lambda^{-1}(I-\mu K_{22})^{-1}B_{22}v. \tag{2.80}$$

Таким образом, снова возникает спектральная задача для пучка С. Г. Крейна, но пучок уже не является самосопряженным.

Теорема 2.5. *Пусть в задаче* (2.80) *выполнены условия* (2.79), (2.74). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.80) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками* $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$, *соответственно.*

2°. *Предельной точке* $\lambda = 0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ *конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda| \leqslant r_-, \quad r_\pm := \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\parallel A^{-1}+B_{11}\parallel\parallel B_{22}\parallel}}{2\parallel A^{-1}+B_{11}\parallel}, \tag{2.81}$$

при этом для $\forall\varepsilon > 0$ *все собственные значения* λ_k^0, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе*

$$|\arg\lambda| < \varepsilon. \tag{2.82}$$

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_k^0\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, *после ее проектирования на подпространство* $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \ker B_{22}$, *является полной в* H_1 *и образует в* H_1 *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$.

3°. *Предельной точке* $\lambda = \infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *расположенных в области* $|\lambda| \geqslant r_+$, *при этом для* $\forall\varepsilon > 0$ *все собственные значения* λ_k^∞, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* (2.82). *Система собственных и присоединенных элементов* $\{v_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *является полной в* $H = L_2(\Omega)$ *и образует в* H *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$.

Доказательство. Оно проводится аналогично схеме, изложенной в [10, с. 82–86]. Поэтому здесь приведем лишь некоторые построения, связанные с утверждением 2°. Если выполнено условие (2.74), то пучок $L(\lambda)$, отвечающий уравнению (2.80), допускает факторизацию

$$\begin{aligned}\lambda L(\lambda) &:= \lambda I - (I-\mu K_{22})^{-1}B_{22} - \lambda^2(I-\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11}) = \\ &= Y^{-1}(I - \lambda Y(I-\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11}))(\lambda I - Y(I-\mu K_{22})^{-1}B_{22}),\end{aligned} \tag{2.83}$$

причем при $|\lambda| \leqslant t \in (r_-, r_+)$ оператор—функция $I - \lambda Y(I-\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y = I + (I-\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})Y(I-\mu K_{22})^{-1}B_{22}Y. \tag{2.84}$$

Более того, спектр $\sigma(Z) := \sigma(Y(I-\mu K_{22})^{-1}B_{22}) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r_-\}$. Основываясь на этих фактах, рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} &Zv = Y(I-\mu K_{22})^{-1}B_{22}v = \\ &= (I + (I-\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})Y(I-\mu K_{22})^{-1}Y)(I-\mu K_{22})^{-1}B_{22}v =: \\ &=: (I+\Phi)B_{22}v = \lambda v, \quad v \in L_2(\Omega) = H, \quad |\lambda| \leqslant r_-. \end{aligned} \tag{2.85}$$

Здесь $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$, и оператор $I+\Phi$ обратим, а $B_{22} = B_{22}^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0 = \ker B_{22}$.

Спроектируем теперь обе части (2.85) на H_0 и H_1, соответственно. С этой целью представим элемент v в виде $v = v_0 + v_1,\ v_0 \in H_0,\ v_1 \in H_1 = H \ominus H_0$, и введем ортопроекторы P_0 и P_1. Учитывая соотношения $P_0B_{22} = 0,\ P_1B_{22}P_1 =: \widetilde{B}_{22} > 0$ (в H_1), имеем

$$P_0(I+\Phi)P_1\widetilde{B}_{22}v_1 = \lambda v_0,\ (I_1 + P_1\Phi P_1)\widetilde{B}_{22}v_1 = \lambda v_1. \tag{2.86}$$

По постановке задачи $\lambda \neq 0$, значит, из первого соотношения (2.86) можно выразить v_0 через v_1, а второе уравнение не содержит v_0. Более того, можно доказать (см., например, [10, с. 85]), что оператор $I_1 + P_1\Phi P_1$ обратим в H_1. Далее, из асимптотической формулы (2.56) следует, что $\widetilde{B}_{22} \in \mathfrak{S}_p(H_1)$ при $p > m-1$.

Из этих свойств следует, что ко второму уравнению (2.86) применима теорема М. В. Келдыша о свойствах спектра слабо возмущенного самосопряженного оператора класса $\mathfrak{S}_p(H)$ (см. [6, с. 313–320]). Отсюда вытекают утверждения из 2° о локализации спектра в исходной задаче (2.80) при $|\lambda| \leqslant r_-$, а также о полноте проекций корневых элементов в пространстве H_1. Утверждение о базисности по Абелю—Лидскому этих корневых элементов следует из [38, с. 292], а также из асимптотической формулы (2.56).

Аналогично доказывается утверждение 3°, но без проектирования на H_1, так как $A^{-1}+B_{11}$ полный, т. е. имеет тривиальное ядро $\ker(A^{-1}+B_{11}) = \{0\}$. Также при этом используется тот факт, что $\lambda_k(A^{-1}+B_{11}) = \lambda_k(B_{11})[1+o(1)],\ k \to \infty$, и асимптотическая формула (2.56). Далее, в пучке $L(\lambda)$ нужно сделать замену $\lambda \mapsto \widetilde{\lambda}^{-1}$ и вместо (2.83) использовать аналогичную факторизацию для пучка $\widetilde{\lambda}L(\widetilde{\lambda}^{-1})$ (см. [10, с. 86]). $\square$

Следствие 2.1. *В задаче* (2.72) *при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ имеются две ветви конечнократных собственных значений $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ с предельными точками $\lambda = 0,\ \lambda = \infty$. Эти ветви имеют асимптотическое поведение* (2.77), (2.78)*, соответственно. Данный результат следует из теоремы А. С. Маркуса и В. И. Мацаева* (*см.* [29]).

2.3. О свойствах решений возмущенных спектральных проблем при первом условии сопряжения.

2.3.1. Свойства решений при спектральном параметре μ. Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda,\mu)v_\varepsilon := ((I-\varepsilon S) - \lambda(A^{-1}+B_{11}) - \lambda^{-1}B_{22} - \mu K_{22})v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{2.87}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H_\Gamma^1(\Omega); L_2(\Omega))$, $S \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, а операторы B_{11}, B_{22}, K_{22} описаны в (2.19). Изучим свойства решений спектральной проблемы (2.1) при первых граничных условиях на стыке (2.2). Снова задача (2.87) содержит два параметра λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим сначала случай, когда в пучке $L(\lambda,\mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный. Полагаем, что в задаче (2.87)

$$\lambda \neq 0,\ \lambda \notin \sigma(I - \varepsilon S - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - \varepsilon P_0SP_0 - P_0T(\lambda)P_0), \tag{2.88}$$

где через $T(\lambda)$ обозначен оператор $T(\lambda) := \lambda(A^{-1}+B_{11}) + \lambda^{-1}B_{22}$.

Заметим, что оператор $K_{22} := (A^{1/2}V_{21})(V_{21}^{*})A^{-1/2}$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в $L_{2,h}(\Omega)$, значит, $\ker K_{22} = L_{2,0} = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$. Кроме того, этот оператор неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$. Далее, $T(\lambda)$ также является компактным. Это позволяет преобразовать проблему (2.87) к спектральной задаче на собственные значения для слабо возмущенного оператора и воспользоваться теоремой Келдыша.

Так же, как и в предыдущем разделе, спроектируем обе части полученного уравнения на H_0 и H_1, соответственно, с помощью ортопроекторов P_0, P_1. С этой целью представим элемент v_ε в виде $v_\varepsilon = v_{\varepsilon,0} + v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,0} \in H_0$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1 = H \ominus H_0$. При этом $v_{\varepsilon,0} = P_0 v_{\varepsilon,0}$, $v_{\varepsilon,1} = P_1 v_{\varepsilon,1}$, $K_{22} = P_1 K_{22} P_1$, $K_{22} v_{\varepsilon,0} = 0$. Подставим сначала $v_{\varepsilon,0}$, $v_{\varepsilon,1}$ в уравнение. Имеем

$$(I - \varepsilon S - T(\lambda))(P_0 v_{\varepsilon,0} + P_1 v_{\varepsilon,1}) = \mu K_{22}(P_0 v_{\varepsilon,0} + P_1 v_{\varepsilon,1}) = \mu K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1} v_{\varepsilon,1},\ P_0^2 = P_0. \tag{2.89}$$

Применим теперь к обеим частям последнего уравнения ортопроектор P_0 и получим

$$(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0) v_{\varepsilon,0} = (P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1) v_{\varepsilon,1}. \tag{2.90}$$

Если $\lambda \notin \sigma(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)$, то существует обратный оператор $(I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}$.

Далее, применив ортопроектор P_1 к (2.89), имеем

$$(I_1 P_1 v_{\varepsilon,1} - \varepsilon P_1 S P_0 v_{\varepsilon,0} - \varepsilon P_1 S P_1 v_{\varepsilon,1} - P_1 T(\lambda) P_0 v_{\varepsilon,0} - P_1 T(\lambda) P_1 v_{\varepsilon,1} = \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}. \tag{2.91}$$

Тогда из (2.90) вытекает $v_{\varepsilon,0} = (I_0 - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}(P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1) v_{\varepsilon,1}$. Запишем (2.91) в виде $(I_1 - \varepsilon P_1 S P_1 - P_1 T(\lambda) P_1) v_{\varepsilon,1} = (\varepsilon P_1 S P_0 + P_1 T(\lambda) P_0) v_{\varepsilon,0} + \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}$ и подставим в последнее выражение $v_{\varepsilon,0}$:

$$\begin{gathered}[(I_1 - \varepsilon P_1 S P_1 - P_1 T(\lambda) P_1) - (\varepsilon P_1 S P_0 + P_1 T(\lambda) P_0)(I_0 - \\ - \varepsilon P_0 S P_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}(P_0 T(\lambda) P_1 + \varepsilon P_0 S P_1)] v_{\varepsilon,1} = \mu P_1 K_{22} P_1 v_{\varepsilon,1}.\end{gathered} \tag{2.92}$$

Получилось уравнение для $v_{\varepsilon,1}$: $(I_1 + S_1(\varepsilon,\lambda)) v_{\varepsilon,1} = \mu \widetilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1}$, $\widetilde{K}_{22} = P_1 K_{22} P_1$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1$, $S_1(\varepsilon,\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$. В силу условия (2.88) оператор, стоящий слева в выражении (2.92), обратим. Поэтому $v_{\varepsilon,1} = \mu(I_1 + S_1(\varepsilon,\lambda))^{-1} \widetilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,1} = \mu(I_1 + S_2(\varepsilon,\lambda) \widetilde{K}_{22} v_{\varepsilon,1}$, $S_2(\varepsilon,\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$, $v_{\varepsilon,1} \in H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. Таким образом, получено уравнение для слабого возмущения оператора $\widetilde{K}_{22}$, который является положительным и компактным в $L_{2,h}(\Omega)$ класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > m-1$.

Теорема 2.6. *Пусть в задаче* (2.87) *выполнены условия* (2.88). *Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле* $\Lambda_\varepsilon := \{\mu \in \mathbb{C} : |arg\ \mu| < \varepsilon\}$.

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,1k}\}_{k=1}^\infty$, $v_{\varepsilon,1k} = P_1 v_{\varepsilon,k}$, *т. е. система собственных и присоединенных элементов задачи* (2.87), *после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ *является полной в* H_1, *более того, она образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в* $L_{2,h}$. *Далее, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(K_{22})[1 + o(1)],\ k \to \infty, \tag{2.93}$$

$$\lambda_k(K_{22}) = (d_{m,22}(\Gamma_{22}))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \to \infty,\ d_{m,22}(\Gamma_{22}) > 0. \tag{2.94}$$

Доказательство. Оно проводится аналогично доказательству теоремы 2.3. Разница заключается лишь в том, что это уже возмущенный случай ($\varepsilon \neq 0$), и здесь возникает несамосопряженный компактный оператор $S_2(\varepsilon,\lambda)$. □

2.3.2. Свойства решений при спектральном параметре λ. В возмущенном случае ($\varepsilon \neq 0$) был получен операторный пучок (см. (2.87))

$$L(\lambda,\mu) v_\varepsilon := ((I - \varepsilon S + \mu K_{22}) - \lambda(A^{-1} + B_{11}) - \lambda^{-1} B_{22}) v_\varepsilon = 0, \quad v_\varepsilon \in H = L_2(\Omega). \tag{2.95}$$

Если выполнено условие

$$\mu \notin \sigma(I - \varepsilon S + \mu K_{22}), \tag{2.96}$$

то существует единственный обратный $(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}$. Тогда возникает спектральная задача для пучка С. Г. Крейна, но этот пучок не является самосопряженным. Применяя слева в (2.95) оператор $(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}$, получаем следующую задачу:

$$v_\varepsilon = \lambda(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1}(A^{-1} + B_{11}) v_\varepsilon + \lambda^{-1}(I - \varepsilon S + \mu K_{22})^{-1} B_{22} v_\varepsilon. \tag{2.97}$$

Теорема 2.7. *Пусть в задаче* (2.97) *выполнено условие* (2.96), *а также условие*

$$4\|(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}\|^2\|A^{-1}+B_{11}\|\|B_{22}\|<1. \tag{2.98}$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. *Задача* (2.97) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками* $\lambda=0,\ \lambda=\infty$, *соответственно.*

2°. *Предельной точке* $\lambda=0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ *конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda|\leqslant r_-,\quad r_\pm:=\frac{1\pm\sqrt{1-4\|(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}\|^2\parallel A^{-1}+B_{11}\parallel\parallel B_{22}\parallel}}{2\|(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}\|^2\parallel B_{22}\parallel}, \tag{2.99}$$

при этом для $\forall\varepsilon>0$ *все собственные значения* λ_k^0, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе*

$$|\arg\lambda|<\varepsilon. \tag{2.100}$$

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,k}^0\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$, *после ее проектирования на подпространство* $H_1=L_2(\Omega)\ominus H_0$, $H_0:=\ker B_{22}$, *является полной в* H_1 *и образует в* H_1 *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha>m-1$.

3°. *Предельной точке* $\lambda=\infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *расположенных в области* $|\lambda|\geqslant r_+$, *при этом для* $\forall\varepsilon>0$ *все собственные значения* λ_k^∞, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* (2.100).

Система собственных и присоединенных элементов $\{v_{\varepsilon,k}^\infty\}_{k=1}^\infty$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *является полной в* $H=L_2(\Omega)$ *и образует в* H *базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha>m-1$.

Доказательство. Оно проводится аналогично схеме, изложенной в [10, с. 82–86]. Утверждение 1° будет доказано в процессе доказательства утверждений 2° и 3°.

Докажем утверждение 2°. Введем пучок

$$M(\lambda):=Y^{-1}(I-\lambda Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11}))(\lambda I-Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}), \tag{2.101}$$

причем оператор-функция $(I-\lambda Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11}))$ при $|\lambda|\leqslant t\in(r_-,r_+)$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y=I+(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}Y. \tag{2.102}$$

Более того, спектр $\sigma(Z):=\sigma(Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22})\subset\{\lambda:|\lambda|\leqslant r_-\}$. Основываясь на этих фактах, рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}&Zv_\varepsilon=Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon=\\&=(I+(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})Y(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}Y)(I-\varepsilon S+\mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon=:\\&=:(I+\Phi)B_{22}v_\varepsilon=\lambda v_\varepsilon,\quad v_\varepsilon\in L_2(\Omega)=H,\quad|\lambda|\leqslant r_-,\end{aligned} \tag{2.103}$$

где $\Phi\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ и $I+\Phi$ обратим, а $B_{22}=B_{22}^*\in\mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0=\ker B_{22}$.

Спроектируем теперь обе части (2.103) на H_0 и H_1, соответственно. С этой целью представим элемент v_ε в виде $v_\varepsilon=v_{\varepsilon,0}+v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,0}\in H_0$, $v_{\varepsilon,1}\in H_1=H\ominus H_0$ и введем ортопроекторы P_0 и P_1. Учитывая соотношения $P_0B_{22}=0$, $P_1B_{22}P_1=:\widetilde{B}_{22}>0$ (в H_1), имеем

$$P_0(I+\Phi)P_1\widetilde{B}_{22}v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,0},\ (I_1+P_1\Phi P_1)\widetilde{B}_{22}v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,1}. \tag{2.104}$$

Так как по условию задачи $\lambda\neq0$, то из первого соотношения (2.104) можно выразить $v_{\varepsilon,0}$ через $v_{\varepsilon,1}$, а второе уравнение не содержит $v_{\varepsilon,0}$. Здесь уже $B_{22}P_1=P_1B_{22}P_1=:\widetilde{B}_{22}=\widetilde{B}_{22}^*$ — полный оператор в H_1 ($\ker\widetilde{B}_{22}=\{0\}$), являющийся также самосопряженным и положительным. Перепишем второе соотношение из (2.104) в виде $P_1(I+\Phi)B_{22}P_1v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,1}$, а затем в виде $Z_1v_{\varepsilon,1}:=P_1(I+\Phi)P_1\widetilde{B}_{22}v_{\varepsilon,1}=\lambda v_{\varepsilon,1}$, $v_{\varepsilon,1}\in H_1$.

Далее, рассуждая так же как и в [10, теорема 3.1.2, с. 85], мы доказываем утверждение о полноте системы корневых элементов в пространстве $L_{2,h}$. Учитывая еще, что собственные значения оператора K_{22} имеют степенную асимптотику, приходим также к выводу, что эта совокупность корневых элементов образует базис Абеля—Лидского порядка $\alpha > m-1$. Аналогичным образом, только проще, без проектирования на подпространство H_1, так как $H_0 = \ker \widetilde{B}_{22} = \{0\}$, доказывается утверждение 3°.

□

2.4. Спектральные задачи для случая двух областей при втором условии сопряжения.

2.4.1. Невозмущенные смешанные спектральные задачи при втором условии сопряжения. Исследуем теперь невозмущенную спектральную проблему (2.1) с граничным условием на стыке (2.3), т. е.

$$\begin{aligned} &v_1 - \Delta v_1 = \lambda v_1 := f_1 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_1 = \lambda \gamma_{11} v_1 =: \psi_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \\ &v_2 - \Delta v_2 = \lambda v_2 := f_2 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22} v_2 =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_{22}), \end{aligned} \tag{2.105}$$

$$\partial_{21} v_1 = -\partial_{12} v_2 = \mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) =: \psi_{21} \quad \text{(на } \Gamma_{12}). \tag{2.106}$$

Представим решение задачи (2.105), (2.106) в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых неоднородности содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий.

1°.

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{11} = \psi_1 := \lambda \gamma_{11} v_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{11} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}), \tag{2.107}$$

$$v_{22} - \Delta v_{22} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{22} = \psi_{12} := \lambda^{-1} \gamma_{22} v_2 \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{12} v_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}). \tag{2.108}$$

Таким образом, возникают две разные задачи Неймана. Здесь $v_{kk} \in H^1_h(\Omega_k)$, $k = 1, 2$. Для задачи (2.107) формула Грина имеет вид

$$(\eta_1, v_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, v_{11} - \Delta v_{11} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{11} \eta_1, \partial_{11} v_{11} \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} + \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} v_{11} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}. \tag{2.109}$$

Тогда слабое решение задачи (2.107) определяется тождеством $(\eta_1, v_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{11} \eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}$ $\forall \eta_1 \in H^1(\Omega_1)$, и решение дается формулой $v_{11} = V_{11} \psi_1 = \lambda V_{11} \gamma_{11} v_1$, $v_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$, где $V_{11} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11}); H^1_h(\Omega_1))$.

Аналогично для задачи (2.108) формула Грина принимает вид

$$(\eta_2, v_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \eta_2, v_{22} - \Delta v_{22} \rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_{22} \eta_2, \partial_{22} v_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{22})} + \langle \gamma_{12} \eta_2, \partial_{12} v_{22} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}. \tag{2.110}$$

Тогда слабое решение определяется тождеством $(\eta_2, v_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \gamma_{22} \eta_2, \psi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{22})}$, $\forall\, \eta_2 \in H^1(\Omega_2)$. Это решение задается формулой $v_{22} = V_{22} \psi_2 = \lambda^{-1} V_{22} \gamma_{22} v_2$, $v_{22} \in H^1_h(\Omega_2)$, где $V_{22} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{22}); H^1_h(\Omega_2))$.

2°.

$$v_{21} - \Delta v_{21} = \lambda v_1 =: f_1 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{21} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}), \tag{2.111}$$

$$v_{22} - \Delta v_{22} = \lambda v_2 = f_2 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{12} v_{22} = 0 \text{ (на } \Gamma_{12}). \tag{2.112}$$

Здесь снова имеем две задачи (2.111), (2.112). Используя формулу Грина (2.9), получим решение вспомогательной задачи (2.111) $(\eta_1, v_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, f_1 \rangle_{L_2(\Omega_1)}$, $\forall\, \eta_1 \in H^1(\Omega_1)$. Это слабое решение дается формулой $v_{21} = A_1^{-1} f_1 = \lambda A_1^{-1} v_1$, $v_{21} \in H^1(\Omega_1)$, где A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1); L_2(\Omega_1)$.

Аналогично для задачи (2.112), используя соответствующую формулу Грина, получаем слабое решение вида $v_{22} = A_2^{-1} f_2 = \lambda A_2^{-1} v_2$, $v_{22} \in H^1(\Omega_2)$, где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2); L_2(\Omega_2)$.

3°.

$$v_{31} - \Delta v_{31} = 0 \text{ (в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{11} = 0 \text{ (на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{11} = \psi_{21} = \mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) \text{ (на } \Gamma_{12}), \tag{2.113}$$

$$v_{32} - \Delta v_{32} = 0 \text{ (в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{12} v_{32} = -\psi_{21} = -\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) \text{ (на } \Gamma_{12}). \tag{2.114}$$

Как и в предыдущих случаях, опираясь на формулу Грина (2.9), получаем решение задачи (2.113). Имеем $(\eta_3, v_{31})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21} \eta_3, \psi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})}$, $v_{31} \in H^1_h(\Omega_1)$. В частности, если $\eta_3 \in H^1_0(\Omega)$, тогда $(\eta_3, v_{31})_{H^1(\Omega_1)} = 0$ и $v_{31} \in H^1_h(\Omega_1)$. Далее, слабое решение дается формулой $v_{31} = V_{21} \psi_{21} = \mu V_{21}(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2)$.

Аналогично для задачи (2.114) получаем $v_{32} = -V_{12} \psi_{21} = -\mu V_{12}(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2)$, где $V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H^1_h(\Omega_1))$, $V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H^1_h(\Omega_2))$.

Складывая решения вспомогательных задач 1°, 2°, 3°, получим систему уравнений относительно $v_1,\ v_2$:

$$\begin{cases} v_1 = \lambda V_{11}\gamma_{11}v_1 + \lambda A_1^{-1}v_1 + \mu V_{21}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2), \\ v_2 = \lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}v_2 + \lambda A_2^{-1}v_2 - \mu V_{12}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2). \end{cases} \tag{2.115}$$

Здесь возникает матрица, которая обладает свойством неотрицательности. Применяя формулы взаимной сопряженности $V_{21} = \gamma_{21}^*$, $V_{12} = \gamma_{12}^*$, получим

$$(V_{21}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2), v_1)_{H^1(\Omega_1)} + (-V_{12}(\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2), v_2)_{H^1(\Omega_2)} =$$

$$= (\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2, \gamma_{21}v_1)_{L_2(\Gamma_{21})} + (\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2, -\gamma_{12}v_2)_{L_2(\Gamma_{21})} = \|\gamma_{21}v_1 - \gamma_{12}v_2\|^2_{L_2(\Gamma_{21})} \geqslant 0.$$

Сделаем замену в (2.115): $v_k = A_k^{-1/2}w_k,\ w_k \in L_2(\Omega_k)$, где A_k — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_k); L_2(\Omega_k))$. Действуя на обе части полученных уравнений операторами $A_1^{1/2}$, $A_2^{1/2}$, соответственно, получим следующую задачу:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} (A_1^{1/2}V_{11})(\gamma_{11}A_1^{-1/2}) + A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \tag{2.116}$$

$$+ \lambda^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A_2^{1/2}V_{22})(\gamma_{22}A_2^{-1/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} (A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) & -(A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \\ -(A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) & (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

где

$$(A_1^{1/2}V_{11}) = (\gamma_{11}A_1^{-1/2})^*,\ (A_2^{1/2}V_{22}) = (\gamma_{22}A_2^{-1/2})^*,$$
$$(A_1^{1/2}V_{21}) = (\gamma_{21}A_1^{-1/2})^*,\ (A_1^{1/2}V_{21}) = (\gamma_{12}A_2^{-1/2})^*,$$
$$(A_2^{1/2}V_{12}) = (\gamma_{21}A_1^{-1/2})^*,\ (A_2^{1/2}V_{12}) = (\gamma_{12}A_2^{-1/2})^*.$$

Далее, вводим операторы

$$\begin{aligned}
&0 \leqslant B_{11} := (A_1^{1/2}V_{11})(\gamma_{11}A_1^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1)), \quad 0 \leqslant B_{22} := (A_2^{1/2}V_{22})(\gamma_{22}A_2^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2)),\\
&0 \leqslant F_{11} := (A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1)), \quad 0 \leqslant F_{22} := (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2)),\\
&F_{12} := (A_1^{1/2}V_{21})(\gamma_{12}A_2^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2); L_2(\Omega_1)),\\
&F_{21} := (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{21}A_1^{-1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1); L_2(\Omega_2)).\\
&F_{12}^* := (A_2^{1/2}V_{12})(\gamma_{21}A_1^{1/2}) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1); L_2(\Omega_2)).
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Окончательно получаем спектральную задачу

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} B_{11} + A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \lambda^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{2.118}$$

в пространстве $L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$.

2.4.2. Возмущенные смешанные спектральные задачи при втором условии сопряжения. Рассмотрим теперь спектральную проблему (2.20), (2.21) с граничным условием на стыке (2.23). Решение этой задачи ищем в виде суммы решений вспомогательных задач:

1°.

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1);\ \partial_{11}v_{11} = \widetilde{\psi}_1 := \psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1 = \lambda\gamma_{11}v_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \tag{2.119}$$
$$v_{22} - \Delta v_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2);\ \partial_{22}v_{22} = \widetilde{\psi}_2 := \psi_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}v_2 = \lambda^{-1}\gamma_{22}v_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}v_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}). \tag{2.120}$$

Снова, как и в невозмущенном случае, основываясь на формуле Грина (2.9), получаем соответственно решения задач (2.119), (2.120):

$$v_{\varepsilon,11} = V_{11}\widetilde{\psi}_1 = V_{11}(\psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1) = V_{11}(\lambda\gamma_{11}v_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}v_1), \tag{2.121}$$
$$v_{\varepsilon,12} = V_{22}\widetilde{\psi}_2 = V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}v_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}v_2). \tag{2.122}$$

Далее возникает полная задача Неймана для уравнения Пуассона:
2°.

$$\begin{aligned}&v_{21} - \Delta v_{21} = \widetilde{f}_1 := f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} = \lambda v_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_1);\\ &\partial_{11} v_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \quad \partial_{21} v_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}),\end{aligned} \tag{2.123}$$

$$\begin{aligned}&v_{22} - \Delta v_{22} = \widetilde{f}_2 := f_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} = \lambda v_2 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k} \ (\text{в } \Omega_2);\\ &\partial_{22} v_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22}), \quad \partial_{22} v_{22} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12}).\end{aligned} \tag{2.124}$$

Здесь снова имеем две разные задачи (2.123), (2.124), решения которых принимают вид

$$v_{\varepsilon,21} = A_1^{-1} \widetilde{f}_1 = A_1^{-1}(f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k}) = A_1^{-1}(\lambda v_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial v_1}{\partial x_k}), \tag{2.125}$$

где A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1); L_2(\Omega_1))$,

$$v_{\varepsilon,22} = A_2^{-1} \widetilde{f}_2 = A_2^{-1}(f_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k}) = A_2^{-1}(\lambda v_1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial v_2}{\partial x_k}), \tag{2.126}$$

где A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2); L_2(\Omega_2))$.

Наконец, имеем также следующие две вспомогательные задачи
3°.

$$\begin{aligned}&v_{31} - \Delta v_{31} = 0 \ (\text{в } \Omega_1); \quad \partial_{11} v_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{21} v_{31} = \widetilde{\psi}_{21} := \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2) =\\ &\quad = \mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2) \ (\text{на } \Gamma_{12}),\end{aligned} \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned}&v_{32} - \Delta v_{32} = 0 \ (\text{в } \Omega_2); \quad \partial_{22} v_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{12} v_{32} = -\widetilde{\psi}_{21} := -(\psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2)) =\\ &\quad = -\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2) \ (\text{на } \Gamma_{12}).\end{aligned} \tag{2.128}$$

Проводя аналогичные преобразования, как и в предыдущих случаях, получаем решения задач (2.127), (2.128)

$$v_{\varepsilon,31} = V_{21}(\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2)), \tag{2.129}$$

$$v_{\varepsilon,32} = -V_{12}(\mu(\gamma_{21} v_1 - \gamma_{12} v_2) + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21} v_1 - \sigma_{21}\gamma_{12} v_2)), \tag{2.130}$$

где $V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H^1_h(\Omega_2))$, $V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{12}); H^1_h(\Omega_1))$.

Складывая решения вспомогательных задач (2.119), (2.120), (2.123), (2.124), (2.127), (2.128), осуществляя замену $v_{\varepsilon,k} = A_k^{-1/2} w_{\varepsilon,k}$, $w_{\varepsilon,k} \in L_2(\Omega_k)$, где A_k — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_k); L_2(\Omega_k))$, и действуя на обе части полученных уравнений операторами $A_1^{1/2}$, $A_2^{1/2}$ соответственно, окончательно получаем следующую спектральную задачу:

$$\begin{aligned}&\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} B_{11} + A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} +\\ &\quad + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{\varepsilon,1} \\ w_{\varepsilon,2} \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{2.131}$$

Операторные коэффициенты B_{11}, B_{22}, F_{11}, F_{22}, F_{12}, F_{21}, F_{12}^* описаны в (2.117), а остальные таковы:

$$\begin{aligned}&S_1 := A_1^{1/2} V_{11} \sigma_1 \gamma_{11} A_1^{-1/2} - A_1^{1/2} \sum_{k=1}^{m} c_{1k} \frac{\partial}{\partial x_k}(A_1^{-1/2} \ldots) + A_1^{1/2} \partial_{12} \gamma_{21} A_1^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1)),\\ &S_2 := A_1^{1/2} \partial_{21} \gamma_{12} A_2^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2); L_2(\Omega_1)),\\ &S_3 := A_2^{1/2} \partial_{12} \gamma_{21} A_1^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_1); L_2(\Omega_2)),\\ &S_4 := A_2^{1/2} V_{22} \sigma_2 \gamma_{22} A_2^{-1/2} - A_2^{1/2} \sum_{k=1}^{m} c_{2k} \frac{\partial}{\partial x_k}(A_2^{-1/2} \ldots) - A_2^{1/2} \partial_{21} \gamma_{12} A_2^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega_2)).\end{aligned} \tag{2.132}$$

2.4.3. О свойствах решений невозмущенных спектральных проблем при втором условии сопряжения. В пункте 2.4.1 было получено уравнение (2.118). Для удобства обозначим в нем матрицы следующим образом:

$$\begin{pmatrix} B_{11}+A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix} =: N, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} =: M, \quad \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} =: F. \tag{2.133}$$

Тогда (2.118) можно переписать в виде $w = \lambda N w + \lambda^{-1} M w + \mu F w$. Отсюда получаем следующую спектральную задачу:

$$L(\lambda,\mu)w := (I - \lambda N - \lambda^{-1}M - \mu F)w = 0, \quad w \in L_2(\Omega). \tag{2.134}$$

Проверим, какими свойствами обладают операторные коэффициенты в (2.118). Операторы $B_{11}+A_1^{-1}$ и A_2 являются положительными и компактными. Следовательно, оператор N также является положительным и компактным, $\ker N = \{0\}$. Далее, оператор B_{22} — неотрицателен и компактен, $\ker B_{22} \neq \{0\}$. Более того, $\{0\} \neq \ker B_{22} = L_{2,0}(\Omega_2) \ominus L_{2,h}(\Omega_2)$, так как B_{22} ограниченно действует из пространства $L_2(\Omega)$ в $L_{2,h}(\Omega)$. Нетрудно доказать,что оператор F является самосопряженным и неотрицательным. Действительно, $F = F^*$, если $(Fz_1, z_2) = (z_1, Fz_2)$. Проверим это:

$$(Fz_1, z_2) = \left(\begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} F_{11}u_1 - F_{12}v_1 \\ -F_{12}^*u_1 + F_{22}v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) =$$
$$= (F_1u_1 - F_{12}v_1, u_2) + (-F_{12}^*u_1 + F_{22}v_1, v_2) = (F_{11}u_1, u_2) + (-F_{12}v_1, u_2) +$$
$$+ (-F_{12}^*u_1, v_2) + (F_{22}v_1, v_2) = (u_1, F_{11}u_2) + (v_1, -F_{12}^*u_2) + (u_1, -F_{12}v_2) + (v_1, F_{22}v_2) =$$
$$= (u_1, F_{11}u_2 - F_{12}v_2) + (v_1, -F_{12}^*u_2 + F_{22}v_2) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11}u_2 - F_{12}v_2 \\ -F_{12}^*u_2 + F_{22}v_2 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = (z_1, Fz_2).$$

Докажем неотрицательность оператора F. Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$Fw = \begin{pmatrix} F_{11} & -F_{12} \\ -F_{12}^* & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}w_1 - F_{12}w_2 \\ -F_{12}^*w_1 + F_{22}w_2 \end{pmatrix},$$

$$\|Fw\|^2 = \|F_{11}w_1 - F_{12}w_2\|^2 + \| - F_{12}^*w_1 + F_{22}w_2\|^2 \geqslant 0.$$

Найдем теперь ядро оператора F. Для этого рассмотрим уравнение $Fw = 0$. В исходном уравнении оператор F стоит перед параметром μ, поэтому

$$\mu(V_{21}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{12}A_2^{-1/2}w_2); -V_{12}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{22}A_2^{-1/2}w_2)) = 0.$$

В силу того, что операторы V_{21} и V_{12} обратимы, из системы уравнений

$$\begin{cases} V_{21}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{12}A_2^{-1/2}w_2) = 0, \\ -V_{12}(\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{22}A_2^{-1/2}w_2) = 0 \end{cases}$$

следует, что $\gamma_{21}A_1^{-1/2}w_1 - \gamma_{12}A_2^{-1/2}w_2 = 0$. А это и есть главные граничные условия, такие что $H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2) = H^1_\Gamma(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega)$, следовательно, $\ker F = H^1_\Gamma(\Omega)$.

Лемма 2.2. *Если выполнено условие $\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0$, то формула Грина принимает вид*

$$\sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} (\nabla u_k \nabla v_k + u_k v_k) d\Omega_k = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} u_k (v_k - \Delta u_k) d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_{kk}} u_k \frac{\partial v_k}{\partial n_k} d\Gamma_{kk} + \int\limits_{\Gamma_{12}} u_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial n_1} + \frac{\partial v_2}{\partial n_2} \right) d\Gamma_{12}. \tag{2.135}$$

Из нее следует, что ортогональным дополнением в $H^1(\Omega)$ к H^1_Γ, где $H^1_\Gamma(\Omega) = \{(u_1; u_2)^\tau : \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0$ (на Γ_{12})$\}$, является подпространство

$$\begin{aligned} &H^1_h(\Omega) = \{(v_1; v_2)^\tau : v_1 - \Delta v_1 = 0 \ (\textit{в}\ \Omega_1),\ \frac{\partial v_1}{\partial n_1} = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma_{11}), \\ &v_2 - \Delta v_2 = 0 \ (\textit{в}\ \Omega_2),\ \frac{\partial v_2}{\partial n_2} = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma_{22}),\ \frac{\partial v_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial v_2}{\partial n_2} := \psi \in H^{-1/2}(\Gamma_{12})\}. \end{aligned} \tag{2.136}$$

Тогда приходим к ортогональному разложению следующего вида: $H^1(\Omega) = H^1_\Gamma(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega)$.

Таким образом, общие свойства операторов в (2.134) такие же, как в задаче (2.18), (2.19). Очевидно, что решение проблемы (2.134) обладает теми же общими свойствами, что и (2.18), с учетом замены операторных коэффициентов из (2.18) на операторные матрицы из (2.134). Здесь снова пучок (2.134) содержит два параметра λ и μ, что дает возможность исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$, λ — спектральный, и наоборот.

2.4.4. О свойствах решений возмущенных спектральных проблем при втором условии сопряжения. В возмущенном случае было получено уравнение (2.131) с операторными коэффициентами (2.117), (2.132). Для простоты перепишем задачу (2.131) в виде

$$L(\lambda,\mu)w_\varepsilon := ((I-\varepsilon\widetilde{S}) - \lambda N - \lambda^{-1}M - \mu F)w_\varepsilon = 0, \quad w_\varepsilon \in L_2(\Omega), \tag{2.137}$$

где операторы N, M, F обозначены в (2.133) и имеют такие же свойства, как и в предыдущем разделе. Оператор $\widetilde{S}$ имеет вид $\widetilde{S} := \begin{pmatrix} S_{11} & -S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$. Таким образом, снова имеем операторный пучок, аналогичный (2.87), но в матричной форме.

Здесь также можно исследовать свойства решений спектральных проблем при втором условии сопряжения. В случае, когда μ является спектральным параметром, а λ — фиксированным, учитывая условие $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma(I-\varepsilon\widetilde{S} - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - \varepsilon P_0\widetilde{S}P_0 - P_0T(\lambda)P_0)$ и обозначая через $T(\lambda)$ оператор вида $T(\lambda) := \lambda N + \lambda^{-1}M$, проводя выкладки, аналогичные пункту (2.3.1), приходим к заключению, что и в этом случае имеет место аналог теоремы 2.6.

Далее, при спектральном параметре λ полагаем, что выполнено условие $\mu \notin \sigma(I-\varepsilon\widetilde{S}+\mu F)$. Тогда задача (2.137) сводится к проблеме

$$v_\varepsilon = \lambda(I-\varepsilon\widetilde{S}+\mu K_{22})^{-1}(A^{-1}+B_{11})v_\varepsilon + \lambda^{-1}(I-\varepsilon\widetilde{S}+\mu K_{22})^{-1}B_{22}v_\varepsilon. \tag{2.138}$$

Для нее имеют место результаты типа теоремы 2.7.

3. Начально-краевые задачи сопряжения

3.1. Возмущенные начально-краевые задачи при первом условии сопряжения.

3.1.1. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре λ. Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, разбитой на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами Γ_{11}, Γ_{22} и границами стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$, начально-краевую задачу, которая порождает соответствующую спектральную, где один из параметров (λ либо μ) является искомым спектральным, а другой — фиксированным. Здесь удобно, как в задаче гидродинамики (проблема С. Г. Крейна), вместо поля скоростей $u(t,x)$ ввести поле перемещений сплошной среды $w_\varepsilon(t,x)$, $u_\varepsilon(t,x) = \partial w_\varepsilon/\partial t$. Тогда начально-краевая задача, отвечающая спектральной проблеме (2.35), имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,1}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\varepsilon,1} - \Delta w_{\varepsilon,1} + \varepsilon\sum_{k=1}^m \frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\right) = \widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \\ &\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,2}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(w_{\varepsilon,2} - \Delta w_{\varepsilon,2} + \varepsilon\sum_{k=1}^m \frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\right) = \widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2); \end{aligned} \tag{3.1}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned} &\partial_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} + \gamma_{11}\frac{\partial^2 w_{\varepsilon,1}}{\partial t^2} + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} =: \psi_1 + \varepsilon\sigma_1\gamma_{11}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} := \widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &\partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} + \gamma_{22}w_{\varepsilon,2} + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} =: \psi_2 + \varepsilon\sigma_2\gamma_{22}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} := \widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}); \end{aligned} \tag{3.2}$$

на границах стыка:

1°. либо

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} - \gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} = 0; \\ &\partial_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} + \partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t} = \psi_{21} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} - \sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}) = \\ &= \mu\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} + \varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t} - \sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}) := \widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}); \end{aligned} \tag{3.3}$$

2°. либо

$$\begin{aligned} &\partial_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}+\partial_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}=\psi_{21}+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t})= \\ &=\mu(\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t})+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial t}-\sigma_{21}\gamma_{12}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial t}):=\widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12}), \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$w_{\varepsilon,k}(0)=w^\circ_{\varepsilon,k}, \quad \frac{\partial w_{\varepsilon,k}}{\partial t}(0)=w^1_{\varepsilon,k}=u^\circ_{\varepsilon,k}. \tag{3.5}$$

Опираясь на построения и методы разделов 1-2, можно исследовать задачу (3.1)–(3.3), (3.5) и доказать теорему о ее сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени.

Представим, как и ранее, решение $w_\varepsilon(t,x)$ задачи (3.1)–(3.3), (3.5) в виде суммы решений пяти вспомогательных задач, в каждой из которых неоднородности входят в уравнение либо в одно из краевых условий лишь в одном месте.

Не выписывая формулировки этих задач, можно представить решение в виде, аналогичном (2.35). Имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{dw_\varepsilon}{dt}=A^{-1}(\widetilde{f}-\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2})+V_{21}(\widetilde{\psi}_{21}-\mu\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt}))+ \\ &+V_{11}(\widetilde{\psi}_1-\gamma_{11}p_1\frac{d^2w_\varepsilon}{dt}-\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt})+V_{22}(\widetilde{\psi}_2-\gamma_{22}p_2w_\varepsilon-\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt})+(I+\varepsilon S)\frac{dw_\varepsilon}{dt}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь $p_1(u_1;0):=u_1$, $p_2(0;u_2):=u_2$ – ортопроекторы, где $w_\varepsilon=(w_{\varepsilon,1};w_{\varepsilon,2})$, $\widetilde{f}=(\widetilde{f}_1;\widetilde{f}_2)$, A — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2);L_2(\Omega))$, $A=\operatorname{diag}(A_1;A_2)$, A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1);L_2(\Omega_1))$, A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2);L_2(\Omega_2))$, $H^1(\Omega)=H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2)$.

Тогда возникает задача Коши

$$\begin{aligned} &(A^{-1}+V_{11}\gamma_{11}p_1)\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2}+\Big[(I+\varepsilon S)-\mu V_{21}(\gamma_{21}p_1+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2))- \\ &-\varepsilon V_{11}\sigma_1\gamma_{11}p_1+\varepsilon V_{22}\sigma_2\gamma_{22}p_2\Big]\frac{dw_\varepsilon}{dt}+V_{22}\gamma_{22}p_2w_\varepsilon=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2, \\ &w_\varepsilon(0)=w^\circ_\varepsilon, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0)=w^1_\varepsilon=u^\circ_\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Кратко (3.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &(A^{-1}+V_{11}\gamma_{11}p_1)\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2}+\Big[(I+\varepsilon\widehat{S})-\mu V_{21}\gamma_{21}p_1\Big]\frac{dw_\varepsilon}{dt}+V_{22}\gamma_{22}p_2w_\varepsilon=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2, \\ &w_\varepsilon(0)=w^\circ_\varepsilon, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t}(0)=w^1_\varepsilon=u^\circ_\varepsilon. \end{aligned}$$

В последнем уравнении осуществим замену $w_\varepsilon=A^{-1/2}\eta_\varepsilon$. Это можно сделать в силу того, что $A^{1/2}H^1(\Omega)=L_2(\Omega)$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} &(A^{-1}+B_1p_1)\frac{d^2\eta_\varepsilon}{dt^2}+\Big[(I+\varepsilon\widetilde{S})-\mu B_{21}p_1\Big]\frac{d\eta_\varepsilon}{dt}+B_2p_2\eta_\varepsilon= \\ &=A^{-1/2}f+A^{1/2}V_{21}\psi_{21}+A^{1/2}V_{11}\psi_1+A^{1/2}V_{22}\psi_2:=f_1(t), \\ &\eta_\varepsilon(0)=A^{1/2}w^\circ_\varepsilon, \quad \frac{\partial\eta_\varepsilon}{\partial t}(0)=A^{1/2}w^1_\varepsilon=A^{1/2}u^\circ_\varepsilon, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $B_1:=V_{11}\gamma_{11}$, $B_{21}:=V_{21}\gamma_{21}$, $B_2:=V_{22}\gamma_{22}$.

Оператор $A^{-1}+B_1p_1$ обратим, так как он является полным, т. е. $\ker(A^{-1}+B_1p_1)=\{0\}$. Тогда можно сделать еще одну замену

$$\frac{d\eta_\varepsilon}{dt}=(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon, \tag{3.9}$$

и отсюда получаем задачу Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{aligned}
&\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + ((I+\varepsilon\widetilde{S}_1) - \mu B_{21}p_1)(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon + \int_0^t B_2p_2(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon(s)ds = \\
&= -B_2p_2A^{1/2}w_\varepsilon^0 + A^{-1/2}f + A^{1/2}V_{21}\psi_{21} + A^{1/2}V_{22}\psi_2 + A^{1/2}V_{11}\psi_1, \\
&\varphi_\varepsilon(0) = (A^{-1}+B_1p_1)A^{1/2}w_\varepsilon^1.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Для исследования проблемы разрешимости задачи (3.10) воспользуемся утверждением, доказательство которого можно найти в [12, теоремы 1.3.2, 1.3.4, с. 21–25]. В упрощенной форме оно имеет следующий вид.

Лемма 3.1. *Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка, рассматриваемого в гильбертовом пространстве H, т. е. в задаче*

$$\frac{du}{dt} = A_0u + \int_0^t G(t,s)A_1u(s)ds + f(t), \quad u(0) = u^\circ, \tag{3.11}$$

выполнены следующие условия:

1°. A_0 *является генератором аналитической полугруппы*;
2°. $\mathcal{D}(A_1) \supset \mathcal{D}(A_0)$;
3°. $G(t,s)$, $\partial G(t,s)/dt \in C(\triangle_t; H)$, $\triangle_t := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \in T\}$;
4°. $f(t) \in C^\beta([0,T]; H)$, $0 < \beta \leqslant 1$;
5°. $u^0 \in \mathcal{D}(A_0)$.

Тогда задача (3.10) *имеет единственное сильное решение* $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)) \cap C^1([0,T]; H)$, *для которого все слагаемые в* (3.10) *являются элементами из* $C([0,T]; H)$, *и выполнены начальные условия.*

Воспользуемся леммой 3.1. В задаче (3.10) оператор $-((I+\varepsilon\widehat{S}) - \mu B_{21}p_1)(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}$является генератором аналитической полугруппы, при этом области определения этого генератора и оператора, стоящего под знаком интеграла, совпадают. Далее, можно считать, что в (3.10) $G(t,s) \equiv I$, поэтому выполнено условие 3° леммы 3.1.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Если в задаче* (3.10) *выполнены условия*

$$w_\varepsilon^0,\ w_\varepsilon^1 \in H_\Gamma^1(\Omega), \tag{3.12}$$

$$f(t) \in C^\beta([0,T]; (H_\Gamma^1(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^\beta([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma_{jk})),\ j,k = \overline{1,2},\ 0 < \beta \leqslant 1, \tag{3.13}$$

то существует единственное сильное решение $\varphi_\varepsilon(t)$ *задачи* (3.10) *на отрезке* $[0,T]$, *и для этого решения все слагаемые в уравнении* (3.10) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_2(\Omega)$.

Из этой леммы следует такой факт.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче* (3.1)–(3.3), (3.5) *выполнены условия* (3.12), (3.13) *и условие*

$$\mu \notin \sigma((I+\varepsilon\widetilde{S}_1) - \mu B_{21}p_1). \tag{3.14}$$

Тогда эта задача имеет сильное решение

$$w \in C^2([0,T]; (H_\Gamma^1(\Omega))^*) \cap C^1([0,T]; H_\Gamma^1(\Omega)), \tag{3.15}$$

для которого выполнены уравнения (3.1), *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T]; (H_\Gamma^1(\Omega))^*)$, *граничные условия* (3.2)-(3.3), *где все слагаемые на* Γ_{jk} *являются элементами из* $C([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k = \overline{1,2}$, *а также начальные условия* (3.5).

Доказательство. Если выполнены условия (3.12), (3.13), тогда задача (3.10), а значит, и задача (3.9), имеют решения, для которых все слагаемые в этих уравнениях являются элементами из $C([0,T];L_2(\Omega))$. Тогда в силу (3.13) имеем $d\eta_\varepsilon/dt \in C([0,T];L_2(\Omega))$. Далее, в задаче (3.7), а потому и в (3.6), $dw_\varepsilon/dt \in C([0,T];H^1_\Gamma(\Omega))$. Отсюда получаем, что $L_\varepsilon(dw_\varepsilon/dt) \in C([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, $\partial_{\varepsilon,k}(dw_\varepsilon/dt) \in C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$.

Основываясь на (3.6), аналогично рассуждениям, проведенным выше, устанавливаем, что для $w_\varepsilon(t,x)$ выполнены уравнения и краевые условия задачи (3.1)–(3.3), (3.5); поэтому, в силу доказанных свойств для уравнения (3.6), в уравнении (3.1) все слагаемые — элементы из $C([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементы из $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k=\overline{1,2}$.

Отсюда получаем, что имеют место свойства (3.15), $\gamma_{11}p_1w_\varepsilon \in C^2([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{11}))$, а также выполнены начальные условия (3.12) □

3.1.2. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре μ. Считаем теперь, что μ — спектральный, а λ — фиксированный параметр в задаче (2.20)–(2.22). Приведем формулировку начально-краевой проблемы, отвечающей этому случаю. Имеем следующие уравнения и краевые условия:

$$\begin{aligned}&\Big(w_{\varepsilon,1}-\Delta w_{\varepsilon,1}+\varepsilon\sum_{k=1}^m\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\Big)w_{\varepsilon,1}=\lambda w_{\varepsilon,1}+\widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1),\\ &\Big(w_{\varepsilon,2}-\Delta w_{\varepsilon,2}+\varepsilon\sum_{k=1}^m\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\Big)w_{\varepsilon,2}=\lambda w_{\varepsilon,2}+\widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2);\end{aligned}\tag{3.16}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned}&\partial_{11}w_{\varepsilon,1}=\lambda\gamma_{11}w_{\varepsilon,1}+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}w_{\varepsilon,1}=:\widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{12}w_{\varepsilon,2}=\lambda^{-1}\gamma_{22}w_{\varepsilon,2}+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}w_{\varepsilon,2}=:\widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22});\end{aligned}\tag{3.17}$$

на границах стыка:

$$\begin{aligned}&\gamma_{21}w_{\varepsilon,1}-\gamma_{12}w_{\varepsilon,2}=0,\\ &\partial_{21}w_{\varepsilon,1}+\partial_{12}w_{\varepsilon,2}=-\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21}p_1w_\varepsilon)+\varepsilon(\sigma_{21}\gamma_{21}p_1w_\varepsilon-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2w_\varepsilon):=\widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{21}),\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$w_\varepsilon(0,x)=w^\circ_{\varepsilon,i}(x), \quad x\in\Omega_i,\ i=\overline{1,2}.\tag{3.19}$$

Снова считаем, что $w_\varepsilon \in H^1_\Gamma(\Omega)$ есть сумма решений пяти вспомогательных задач. Тогда для искомой функции $w_\varepsilon = w_\varepsilon(t,x)$ приходим к уравнению

$$\begin{aligned}w_\varepsilon&=A^{-1}(\lambda w_\varepsilon+f)+V_{21}(\psi_{21}+\frac{d}{dt}(\gamma_{21}p_1w_\varepsilon)-\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1w_\varepsilon-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2w_\varepsilon))+\\ &+V_{11}(\psi_1+\lambda\gamma_{11}p_1w_\varepsilon+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1w_\varepsilon)+V_{22}(\psi_2+\lambda^{-1}\gamma_{22}p_2w_\varepsilon+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2w_\varepsilon)+(I+\varepsilon S)w_\varepsilon\end{aligned}\tag{3.20}$$

и соответствующей задаче Коши

$$\begin{aligned}&V_{21}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}+\Big[(I+\varepsilon S)-\lambda A^{-1}+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2)-\\ &-\lambda V_{11}\gamma_{11}p_1+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}p_1+V_{22}(\lambda^{-1}\gamma_{22}p_2+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}p_2)\Big]w_\varepsilon=\\ &=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2, \quad w_\varepsilon(0)=w_\varepsilon^\circ.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Кратко (3.21) можно записать в виде

$$\begin{aligned}&V_{21}\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}+\Big[(I+\varepsilon\widehat{S})-\lambda(A^{-1}+V_{11}\gamma_{11}p_1)-\lambda^{-1}V_{22}\gamma_{22}p_2\Big]w_\varepsilon=\\ &=A^{-1}f+V_{21}\psi_{21}+V_{11}\psi_1+V_{22}\psi_2, \quad w_\varepsilon(0)=w_\varepsilon^\circ.\end{aligned}\tag{3.22}$$

В силу того, что $A^{1/2}H^1(\Omega) = L_2(\Omega)$, в (3.22) можно сделать замену $w_\varepsilon = A^{-1/2}\eta_\varepsilon$, $\eta_\varepsilon \in L_2(\Omega)$. Тогда получаем следующую задачу Коши:

$$B_{21}p_1\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + \Big[(I+\varepsilon\widetilde{S}) - \lambda(A^{-1}+B_1p_1) - \lambda^{-1}B_2p_2\Big]\eta_\varepsilon = \\ = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_{21}\psi_{21} + A^{1/2}V_{11}\psi_1 + A^{1/2}V_{22}\psi_2 =: f_1(t), \tag{3.23}$$

$$\eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon^\circ = A^{1/2}w_\varepsilon^0,$$

$$B_{21} := (A^{1/2}V_{21})(\gamma_{21}p_1A^{-1/2}) = (\gamma_{21}p_1A^{-1/2})^*(\gamma_{21}p_1A^{-1/2}). \tag{3.24}$$

Особенностью этой задачи является тот факт, что оператор B_{21} лишь неотрицательный и имеет бесконечномерное ядро. С учетом этого рассмотрим проблему (3.23) в абстрактной форме. Полагаем, что исследуется задача Коши в произвольном гильбертовом пространстве H

$$B\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + ((I+\varepsilon\widetilde{S}) - \Phi)\eta_\varepsilon = f_1(t), \quad \eta_\varepsilon(0) = \eta_\varepsilon^0, \tag{3.25}$$

где B является неотрицательным компактным оператором,

$$\ker B \neq \{0\},\ \ker B =: H_0,\ \Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H). \tag{3.26}$$

Используем разложение $H = H_0 \oplus H_1$, $H_1 = \overline{R(B)}$. Преобразуем задачу (3.25) к задаче Коши для дифференциального уравнения в подпространстве H_1. Для этого представим элемент $\eta_\varepsilon = \eta_{\varepsilon,0} + \eta_{\varepsilon,1}$, $\eta_{\varepsilon,0} = P_0\eta_\varepsilon = P_0\eta_{\varepsilon,0} \in H_0$, $\eta_{\varepsilon,1} = P_1\eta_\varepsilon = P_1\eta_{\varepsilon,1} \in H_1$, где P_0, P_1 — ортопроекторы на H_0 и H_1, соответственно.

Будем предполагать, что выполнены условия

$$\ker((I+\varepsilon\widetilde{S}) - \Phi) = \{0\}, \quad \ker((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0) = \{0\}. \tag{3.27}$$

Тогда в силу второго условия оператор $((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)$ обратим. Отсюда получаем задачу Коши

$$\widehat{B}_1\frac{d\eta_\varepsilon}{dt} + ((I_1+\varepsilon P_1\widetilde{S}P_1) - \Phi_1)\eta_{\varepsilon,1} = f_2(t), \quad \eta_{\varepsilon,1}(0) = \eta_{\varepsilon,1}^0 = P_1\eta_\varepsilon^0, \tag{3.28}$$

$$\widehat{B}_1 := P_1BP_1, \quad \Phi_1 = P_1\Phi P_1 + (P_1\Phi P_0)((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}(P_0\Phi P_1),$$

$$f_2 := P_1f + (P_1\Phi P_0)((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}P_0f,$$

$$\eta_{\varepsilon,0} = ((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}P_0) - P_0\Phi P_0)^{-1}((P_0\Phi P_1)\eta_{\varepsilon,1} + P_0f).$$

Здесь оператор $\widehat{B}_1 : H_1 \to H_1$ — положительный и компактный, $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$.

Снова осуществляя замену в (3.28)

$$\widehat{B}_1\eta_{\varepsilon,1} = \xi_{\varepsilon,1}, \tag{3.29}$$

получаем задачу Коши

$$\frac{d\xi_{\varepsilon,1}}{dt} + ((I_1+\varepsilon\widetilde{S}_1) - \Phi_1)\widehat{B}_1^{-1}\xi_{\varepsilon,1} = f_2(t), \quad \xi_{\varepsilon,1}(0) = \widehat{B}_1\eta_{\varepsilon,1}(0) = B_1P_1\eta_\varepsilon^0. \tag{3.30}$$

Лемма 3.3. *Пусть в задаче* (3.25), (3.26) *выполнены условия* (3.27), *а также условия*

$$f_1(t) \in C^\beta([0,T];H), \quad \eta_\varepsilon^0 \in H,\ 0 < \beta \leqslant 1. \tag{3.31}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $\eta_\varepsilon(t) \in C^1([0,T];H)$, *для которого все слагаемые в уравнении* (3.25) *являются непрерывными функциями* t *со значениями в* H, *и выполнены начальные условия* (3.25).

Доказательство. Если выполнены условия (3.31), то в задаче (3.30) $\widetilde{f}_2(t) \in C^\beta([0,T];H_1)$, $\xi_{\varepsilon,1}(0) \in \mathcal{D}((\widehat{B}_1)^{-1})$. Далее, уравнение (3.30) является абстрактным параболическим, так как $\widehat{B}_1^{-1}$ — положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$. Следовательно, задача (3.29) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0,T]$, т. е. $\xi_{\varepsilon,1}(t) \in C^1([0,T];H_1) \cap C([0,T];\mathcal{D}((\widehat{B}_1)^{-1}))$. Отсюда следует, что существует единственное решение $\eta_\varepsilon(t)$ задачи (3.28), для которого все слагаемые в уравнении — элементы из $C([0,T];H_1)$. Так как $(I_1+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\Phi_1$ обратим в силу условий (3.27), получаем, что $\eta_{\varepsilon,1}(t) \in C([0,T];H_1)$. Возвращаясь от (3.28) к исходной задаче (3.25), получаем утверждение леммы. □

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (3.16)–(3.18) *выполнены условия*

$$\begin{gathered} f_1(t) \in C^{\beta}([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^{\beta}([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk})), \quad 0<\beta\leqslant 1,\ j,k=1,2, \\ w_\varepsilon(0)=w^0_\varepsilon \in H^1_\Gamma(\Omega), \end{gathered} \tag{3.32}$$

$$\begin{gathered} \lambda \notin \sigma((I+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\lambda(A^{-1}+B_1p_1)-\lambda^{-1}B_2p_2)\cap\sigma((I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}_1P_0)- \\ -\lambda P_0(A^{-1}+B_1p_1)P_0-\lambda^{-1}P_0B_2p_2P_0), \quad P_0H:=\ker B_2. \end{gathered} \tag{3.33}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $w_\varepsilon \in C([0,T];H^1_\Gamma(\Omega))$, *для которого каждое слагаемое является элементом из* $C([0,T];(H^1_\Gamma(\Omega))^*)$, *а в граничных условиях — элементами из* $C([0,T];H^{-1/2}(\Gamma_{jk}))$, $j,k=\overline{1,2}$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3.1 с учетом утверждения леммы 3.1.

При выполнении условий (3.32), (3.33) из леммы 3.1 следует, что задача (3.28) имеет единственное решение $\eta_{\varepsilon,1}(t) \in C([0,T];H_1)$, $H_1:=L_2(\Omega)\ominus\ker B_{21}$. Возвращаясь от (3.28) к (3.20), (3.21) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, получаем утверждения исходной теоремы. □

Следствие 3.1. *Выясним теперь, как выглядят в явной форме условия* (3.33). *Очевидно, это те собственные значения, для которых два приведенных в* (3.33) *пучка Крейна имеют нетривиальные решения. Значит, нужно рассматривать две спектральные задачи*

$$\begin{gathered} ((I+\varepsilon\widetilde{S}_1)-\lambda(A^{-1}+B_1p_1)-\lambda^{-1}B_2p_2)\xi_\varepsilon=0; \\ (I_0+\varepsilon P_0\widetilde{S}_1P_0)-\lambda P_0(A^{-1}+B_1p_1)P_0-\lambda^{-1}P_0B_2p_2P_0)\xi_{\varepsilon,0}=0. \end{gathered} \tag{3.34}$$

Тогда обычным образом можно показать (*см.* [10]), *что первый из этих пучков имеет дискретный спектр с двумя предельными точками* $\lambda=0$, $\lambda=\infty$, *причем ветви имеют асимптотическое поведение*

$$\begin{gathered} \lambda_k^{(\infty)}=\lambda_k^{-1}(A^{-1}+B_1p_1)[1+o(1)]=\lambda_k^{-1}(B_1p_1)[1+o(1)] \quad (k\to\infty), \\ \lambda_k^{(0)}=\lambda_k(B_2p_2)[1+o(1)] \quad (k\to\infty). \end{gathered} \tag{3.35}$$

Аналогичным образом рассматривая второе из уравнений (3.34) *в пространстве* H_0, *приходим к выводу, что это уравнение также имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей собственных значений с предельными точками* $\lambda^{(\infty)}_{k,0}=\infty$, $\lambda^{(0)}_{k,0}=0$.

3.2. Возмущенные начально-краевые задачи при втором условии сопряжения.

3.2.1. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре λ. Рассмотрим теперь задачу (3.1)-(3.2) при втором условии сопряжения (3.3) с начальными данными (3.5). Имеем:

$$\begin{gathered} \frac{dw_\varepsilon}{dt}=A^{-1}(f-\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2})+V_{21}(\psi_{21}-\mu(\gamma_{21}p_1\frac{dw_\varepsilon}{dt}-\gamma_{12}p_2\frac{dw_\varepsilon}{dt}))+ \\ +V_{11}(\psi_1-\gamma_{11}p_1\frac{d^2w_\varepsilon}{dt^2})+V_{22}(\psi_2-\gamma_{22}p_2w_\varepsilon)+(I+\varepsilon S)\frac{dw_\varepsilon}{dt}, \end{gathered} \tag{3.36}$$

где $w_\varepsilon=(w_{\varepsilon,1};w_{\varepsilon,2})$, $f=(f_1;f_2)$, A — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2);L_2(\Omega))$, $A=\mathrm{diag}\,(A_1;A_2)$, A_1 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_1);L_2(\Omega_1))$, A_2 — оператор гильбертовой пары $(H^1(\Omega_2);L_2(\Omega_2))$, $H^1(\Omega)=H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2)$.

Далее, проводя те же преобразования, что и в пункте 3.1.2, получаем задачу Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{gathered} \frac{d\eta_\varepsilon}{dt}+((I+\varepsilon\widetilde{S})-\mu(B_{21}p_1-B_{12}p_2))(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon+\int_0^t B_2p_2(A^{-1}+B_1p_1)^{-1}\varphi_\varepsilon(s)ds= \\ =-B_2p_2A^{1/2}w^0_\varepsilon+A^{-1/2}f+A^{1/2}V_{21}\psi_{21}+A^{1/2}V_{22}\psi_2+A^{1/2}V_{11}\psi_1, \\ \varphi_\varepsilon(0)=(A^{-1}+B_1p_1)A^{1/2}w^1_\varepsilon. \end{gathered} \tag{3.37}$$

Для нее также можно доказать теорему о единственности слабого решения, аналогичную теореме 3.1, с учетом замены условия (3.14) на $\mu\notin\sigma((I+\varepsilon\widetilde{S})-\mu(B_{21}p_1-B_{12}p_2)$.

3.2.2. Возмущенная начально-краевая задача при спектральном параметре μ. Рассмотрим, наконец, начально-краевую задачу при втором условии сопряжения, где μ — спектральный, а λ — фиксированный параметр:

$$\begin{aligned}&\Bigl(w_{\varepsilon,1}-\Delta w_{\varepsilon,1}+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_{\varepsilon,1}}{\partial x_k}\Bigr)w_{\varepsilon,1}=\lambda w_{\varepsilon,1}+\widetilde{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1),\\ &\Bigl(w_{\varepsilon,2}-\Delta w_{\varepsilon,2}+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial w_{\varepsilon,2}}{\partial x_k}\Bigr)w_{\varepsilon,2}=\lambda w_{\varepsilon,2}+\widetilde{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2);\end{aligned}\tag{3.38}$$

на внешних границах:

$$\begin{aligned}&\partial_{11}w_{\varepsilon,1}=\lambda\gamma_{11}w_{\varepsilon,1}+\varepsilon\sigma_1\gamma_{11}w_{\varepsilon,1}+\widetilde{\psi}_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &\partial_{12}w_{\varepsilon,2}=\lambda^{-1}\gamma_{22}w_{\varepsilon,2}+\varepsilon\sigma_2\gamma_{22}w_{\varepsilon,2}+\widetilde{\psi}_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22});\end{aligned}\tag{3.39}$$

на границах стыка:

$$\partial_{21}w_{\varepsilon,1}+\partial_{12}w_{\varepsilon,2}=-\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21}p_1w_\varepsilon-\gamma_{12}p_2w_\varepsilon)+\varepsilon(\sigma_{12}\gamma_{21}p_1w_\varepsilon-\sigma_{21}\gamma_{12}p_2w_\varepsilon):=\widetilde{\psi}_{21} \quad (\text{на } \Gamma_{12});\tag{3.40}$$

$$w_\varepsilon(0,x)=w^\circ_{\varepsilon,i}(x), \quad x\in\Omega_i,\ i=\overline{1,2}.\tag{3.41}$$

Здесь снова получаем аналогичное уравнение, как и в случае с первым условием сопряжения (см. пункт 3.1.2):

$$\begin{aligned}w_\varepsilon&=A^{-1}(\lambda w_\varepsilon+f)+V_{21}(\psi_{21}+\frac{d}{dt}(\gamma_{21}p_1-\gamma_{12}p_2)w_\varepsilon)+\\ &+V_{11}(\psi_1+\lambda\gamma_{11}p_1w_\varepsilon)+V_{22}(\psi_2+\lambda^{-1}\gamma_{22}p_2w_\varepsilon)+(I+\varepsilon S)w_\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.42}$$

Далее, проводя те же преобразования, замены и проектируя на подпространства H_0, H_1, в итоге приходим к тем же выводам, что и в пункте 3.1.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦМНО, 2013.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и ее приложения: специальный курс. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2011.
3. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентнные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
4. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
5. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб.: «Функциональные и численные методы математической физики». — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
7. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и задача Стокса// Изв. вузов. Сев.-Кавказ рег. Естеств. науки. Мат. и мех. сплош. среды. — 2004. — С. 137–141.
8. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2004. — *2*. — С. 52–80.
9. *Копачевский Н. Д.* Операторные методы математической физики: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2008.
10. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: специальный курс лекций. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2009.
11. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
12. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
13. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–107.
14. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016.

15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
16. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
17. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 67–102.
18. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О краевых, спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Тр. XXIV Межд. конф. «Математика. Экономика. Образование»; IX Межд. симп. «Ряды Фурье и их прилож.»; Межд. конф. по стох. мет. — Ростов-на-Дону: Фонд науки и образования, 2016. — С. 57–63.
19. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О некоторых спектральных и начально-краевых задачах, порожденных полуторалинейными формами// Сб. тезисов межд. конф. «XXVII Крымская осенняя матем. школа-симпоз. по спектральным и эволюционным задачам», Батилиман (Ласпи), Россия, 17–29 сент. 2016. — Симферополь: ООО «ФОРМА», 2016. — С. 84–85.
20. *Копачевский Н. Д., Якубова А. Р.* О некоторых задачах, порожденных полуторалинейной формой// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 2. — С. 278–315.
21. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
22. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
23. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *1*, № 2. — С. 40–50.
24. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
25. *Лионс Ж.-Л., Манженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
26. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
27. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1982. — *45*. — С. 133–1381.
28. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы о сравнении спектров линейных операторов и спектральные асимптотики для пучков Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
29. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка// Мат. сб. — 1987. — *133*, № 3. — С. 293–313.
30. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. — М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
31. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
32. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
33. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
34. *Радомирская К. А.* Спектральные и начально-краевые задачи сопряжения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2017. — *63*, № 2. — С. 316–339.
35. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 1. — С. 58–62.
36. *Старков П. А.* Случай общего положения для операторного пучка, возникающего при исследовании задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 2. — С. 82–88.
37. *Agranovich M. S.* Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
38. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. — Berlin–Toronto: Wiley-VCH, 1999.
39. *Chueshov I., Eller M., Lasieska I.* Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation// Commun. Part. Differ. Equ. — 2004. — *29*, № 11-12. — С. 1847–1876.
40. *Gagliardo E.* Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni n variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
41. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

А. Р. Якубова

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: `alika.yakubova.1993@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-335-371 UDC 517.984.5

On Spectral and Evolutional Problems Generated by a Sesquilinear Form

© 2020 **A. R. Yakubova**

Abstract. On the base of boundary-value, spectral and initial-boundary value problems studied earlier for the case of single domain, we consider corresponding problems generated by sesquilinear form for two domains. Arising operator pencils with corresponding operator coefficients acting in a Hilbert space and depending on two parameters are studied in detail. In the perturbed and unperturbed cases, we consider two situations when one of the parameters is spectral and the other is fixed. In this paper, we use the superposition principle that allow us to present the solution of the original problem as a sum of solutions of auxiliary boundary-value problems containing inhomogeneity either in the equation or in one of the boundary conditions. The necessary and sufficient conditions for the correct solvability of boundary-value problems on given time interval are obtained. The theorems on properties of the spectrum and on the completeness and basicity of the system of root elements are proved.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems is Domains with Smooth and Lipschitz Boundary], MTsMNO, Moscow, 2013 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i ee prilozheniya: spetsial'nyy kurs* [Abstract Green Formula and Its Applications: Special Course], FLP O. A. Bondarenko, Simferopol', 2011 (in Russian).
3. V. I. Voytitsky, N. D. Kopachevsky, and P. A. Starkov, "Mnogokomponentnnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel'nye abstraktnye kraevye zadachi" [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
4. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova" [Spectral asymptotic of degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. LGU], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
5. V. I. Gorbachuk, "Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy" [Dissipative boundary-value problems for elliptic differential equation], In: *Funktsional'nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki* [Functional and Numerical Methods of Mathematical Physics], Naukova dumka, Kiev, 1998, pp. 60–63 (in Russian).
6. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-self-adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
7. N. D. Kopachevsky, "Abstraktnaya formula Grina i zadacha Stoksa" [Abstract Green formula and the Stocks Problem], *Izv. vuzov. Sev.-Kavkaz reg. Estestv. nauki. Mat. i mekh. splosh. sredy* [Bull. Higher Edu. Inst. North-Caucasian reg. Nat. Sci. Math. Mech. Contin. Media], 2004, 137–141 (in Russian).
8. N. D. Kopachevsky, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa" [On abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).
9. N. D. Kopachevsky, *Operatornye metody matematicheskoy fiziki: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Operator Methods of Mathematical Physics: Special Course of Lectures], OOO «FORMA», Simferopol', 2008 (in Russian).
10. N. D. Kopachevsky, *Spektral'naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: Special Course of Lectures], OOO «FORMA», Simferopol', 2009 (in Russian).

11. N. D. Kopachevsky, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach i ee prilozheniyakh” [On abstract Green formula for mixed boundary-value problems and its applications], *Spektr. i evolyuts. zadachi* [Spectral Evolution Probl.], 2011, **21**, No. 1, 2–39 (in Russian).
12. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial’nye uravneniya Vol’terra v gil’bertovom prostranstve* [Integrodifferential Equations in Hilbert Space], FLP O. A. Bondarenko, Simferopol’, 2012 (in Russian).
13. N. D. Kopachevsky, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [On abstract Green formula for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–107 (in Russian).
14. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], OOO «FORMA», Simferopol’, 2016 (in Russian).
15. N. D. Kopachevsky and S. G. Kreyn, “Abstraktnaya formula Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral’nye zadachi” [Abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and abstract boundary-value and spectral problems], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2004, **1**, No. 1, 69–97 (in Russian).
16. N. D. Kopachevsky, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolutional and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
17. N. D. Kopachevsky and K. A. Radomirskaya, “Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral’nye zadachi sopryazheniya i ikh prilozheniya” [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 67–102 (in Russian).
18. N. D. Kopachevsky and A. R. Yakubova, “O kraevykh, spektral’nykh i nachal’no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami” [On boundary-value, spectral, and initial-boundary problems generated by sesquilinear forms], Tr. XXIV Mezhd. konf. *Matematika. Ekonomika. Obrazovanie*; IX Mezhd. simp. *Ryady Fur’e i ikh prilozh.*; Mezhd. konf. po stokh. met. [Proc. XXIV Int. Conf. Math. Economics. Education; IX Int. Symp. Fourier Ser. Appl.; Int. Conf. Stoch. Methods], Fond nauki i obrazovaniya, Rostov-na-Donu, 2016, pp. 57–63 (in Russian).
19. N. D. Kopachevsky and A. R. Yakubova, “O nekotorykh spektral’nykh i nachal’no-kraevykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynymi formami” [On some spectral and initial-boundary problems generated by sesquilinear forms], Sb. tezisov mezhd. konf. *XXVII Krymskaya osennyaya matem. shkola-simpoz. po spektral’nym i evolyutsionnym zadacham*, Batiliman (Laspi), Rossiya, 17–29 sent. 2016 [Abstr. Int. Conf. XXVII Crimean Autumnal Math. School-Symp. Spectral Evol. Probl., Batiliman (Laspi), Russia, 17–29 Sent. 2016], OOO «FORMA», Simferopol’, 2016, pp. 84–85 (in Russian).
20. N. D. Kopachevsky and A. R. Yakubova, “O nekotorykh zadachakh, porozhdennykh polutoralineynoy formoy” [On some problems generated by a sesquilinear form], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 2, 278–315 (in Russian).
21. S. G. Kreyn, “O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude” [On oscillations of a viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
22. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial’nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
23. S. G. Kreyn and G. I. Laptev, “K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude” [To the problem on motion of a viscous fluid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **1**, No. 2, 40–50 (in Russian).
24. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Problems in Dynamics of a Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
25. J. L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
26. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral’nuyu teoriyu polinomial’nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
27. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral’nye asimptotiki” [Comparability theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1982, **45**, 133–1381 (in Russian).
28. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Teoremy o sravnenii spektrov lineynykh operatorov i spektral’nye asimptotiki dlya puchkov Keldysha” [Comparability theorems for spectra of linear operators and spectral asymptotics for Keldysh pencils], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
29. A. S. Markus and V. I. Matsaev, “O bazisnosti nekotoroy chasti sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov samosopryazhennogo operatornogo puchka” [On basis property of some part of eigenvectors and adjoined vectors of a self-adjoint operator pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **133**, No. 3, 293–313 (in Russian).

30. S. G. Mikhlin, *Problema minimuma kvadratichnogo funktsionala* [The Problem of Minimum of a Quadratic Functional], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1952 (in Russian).
31. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
32. J.-P. Aubin, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
33. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Hermitian operators in a space with indefinite metric], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
34. K. A. Radomirskaya, "Spektral'nye i nachal'no-kraevye zadachi sopryazheniya" [Spectral and initial-boundary conjugation problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 2, 316–339 (in Russian).
35. P. A. Starkov, "Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya" [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 1, 58–62 (in Russian).
36. P. A. Starkov, "Sluchay obshchego polozheniya dlya operatornogo puchka, voznikayushchego pri issledovanii zadach sopryazheniya" [Case of general position for operator pencil arising in research of conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 2, 82–88 (in Russian).
37. M. S. Agranovich, "Remarks on potential and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary," *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
38. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCH, Berlin–Toronto, 1999.
39. I. Chueshov, M. Eller, and I. Lasieska, "Finite dimensionally of the attractor for a semilinear wave equation with nonlinear boundary dissipation," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2004, **29**, No. 11-12, 1847–1876.
40. E. Gagliardo, "Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni n variabili," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1957, **27**, 284–305.
41. W. McLean, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

A. R. Yakubova
V. I. Vernadskii Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: alika.yakubova.1993@mail.ru