Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 314–334

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-314-334 УДК 517.97

L^2-АППРОКСИМАЦИИ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА В ПЕРФОРИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2020 г. **С. Е. ПАСТУХОВА**

Аннотация. Изучается усреднение эллиптического дифференциального оператора A_ε второго порядка, действующего в пространстве с ε-периодической перфорацией, ε — малый параметр. Коэффициенты оператора A_ε — измеримые ε-периодические функции. Интерес представляет и самый простой случай, когда коэффициенты оператора постоянны. Найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ с остаточным членом порядка ε^2 при $\varepsilon \to 0$ в операторной L^2-норме по перфорированному пространству. Аппроксимация имеет вид суммы резольвенты усредненного оператора $(A_0 + 1)^{-1}$ и некоторого корректирующего оператора $\varepsilon\mathcal{C}_\varepsilon$. Доказательство этого результата проведено модифицированным методом первого приближения с использованием сглаживания по Стеклову.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Усреднение дифференциальных уравнений в перфорированных областях было предметом интенсивного исследования в теории усреднения с самого начала. Например, в широко известных монографиях по усреднению [1, 2, 8, 12, 18] этой задаче в различных постановках уделено много внимания.

Данная статья продолжает линию работ [5, 7, 9–11, 13–15, 19–21, 24–27, 31, 34–36] (см. также указанную в обзоре [11] библиографию), в которых с позиций, очень близких к классическому методу двухмасштабных разложений, изложенному во всех монографиях [1, 2, 8, 12, 18] в том или ином виде, изучается усреднение периодического эллиптического дифференциального оператора

$$A_\varepsilon = -\operatorname{div} a(x/\varepsilon)\nabla,$$

действующего в $\mathbb{R}^d$ с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами, зависящими от x/ε, ε — малый параметр, при минимальных условиях регулярности. А именно, исходная 1-периодическая матрица коэффициентов $a(\cdot)$ измерима, ограничена и равномерно положительно определена, т. е. $a(\cdot)$ удовлетворяет условию эллиптичности. В указанных статьях основной предмет рассмотрения — это операторные оценки усреднения для эллиптических и параболических уравнений. Более точно, это оценки в операторных нормах, например, для разности резольвенты исходного эллиптического оператора $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ и ее соответствующих аппроксимаций. В операторной L^2-норме подходящей аппроксимацией порядка ε будет резольвента $(A_0+1)^{-1}$ усредненного оператора с постоянными коэффициентами

$$A_0 = -\operatorname{div} a^0 \nabla,$$

хорошо известного в усреднении. При этом выполнена оценка

$$\|(A_\varepsilon+1)^{-1}-(A_0+1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon,$$

где константа в правой части зависит лишь от размерности d и константы эллиптичности для матрицы коэффициентов a. Интерес к подобного сорта оценкам возник с появлением статьи [3], где приведенная выше операторная L^2-оценка впервые была доказана в рамках более общего результата. При этом в [3] применялся спектральный подход, основанный на преобразовании Флоке—Блоха и некоторых полученных авторами результатах из теории возмущения самосопряженных операторов. В последние годы усилиями многих математиков установлены различные результаты по операторным оценкам усреднения, причем с использованием различных подходов. Что касается работ [5,7,9–11,13–15,19–21,24–27,31,34–36], операторные оценки усреднения доказываются в них с помощью иного, по сравнению с [3], метода.

Для этой цели В. В. Жиковым был предложен *модифицированный метод первого приближения*, впервые изложенный в [5]. Метод получил дальнейшее развитие в [34, 35]. Уже в работе [34] изучались эллиптические уравнения в ε-периодическом перфорированном пространстве, в том числе система уравнений теории упругости, и для резольвенты исходного оператора A_ε были получены аппроксимации порядка ε в операторных нормах $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)}$ и $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}$. В данной работе нас интересуют аналогичные аппроксимации резольвенты в операторной норме $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)}$, но порядка ε^2.

Назовем кратко основные особенности модифицированного метода первого приближения, согласно которому решение исходного уравнения аппроксимируется специально построенной функцией, по структуре напоминающей первое приближение из классической теории (отсюда и название метода). Во-первых, это — специальный анализ невязки первого приближения в эллиптическом уравнении. Во-вторых, это — введение дополнительного параметра интегрирования за счет непосредственного сдвига в коэффициентах или за счет сглаживания, например, по Стеклову, в нулевом приближении и корректоре, из-за чего метод часто именуется как *метод сдвига*. (Отметим, что сглаживание по Стеклову называют нередко *обобщенным сдвигом*.) Именно дополнительный параметр интегрирования позволяет обойти технические трудности, связанные с минимальными предположениями о регулярности данных задачи.

Основные результаты этой работы сформулированы в теоремах 2.1 и 2.2, касающихся самосопряженного случая, а также в теореме 6.1, относящейся к несамосопряженному случаю. Доказательство теорем приведено в разделах 4 и 6. Отдельный интерес представляют (по-видимому, замеченные лишь в последнее время) свойства сглаживания из лемм 3.3, 3.4, 3.5, которые играют важную роль в получении L^2-оценок порядка ε^2. Для полноты изложения приведено их доказательство в разделе 7.

2. Усреднение в перфорированном пространстве

2.1. Основная задача и ее усреднение. Пусть Q есть периодическая область в $\mathbb{R}^d$, $d\geqslant 2$, ячейка периодичности — единичный куб $\square = [-1/2,1/2)^d$. Считаем, что Q — липшицева область, связная в $\mathbb{R}^d$. Множество $\mathbb{R}^d\backslash Q$ есть объединение «дыр» в перфорированном пространстве; в общем случае оно не обязательно дисперсно.

Введем нормированную характеристическую функцию $\rho_Q(y)=\rho(y)$, такую что $\rho(y)=1/|\square\cap Q|$, если $y\in Q$, и $\rho(y)=0$ вне Q; и пусть $\rho_\varepsilon(x)=\rho(\varepsilon^{-1}x)$. Очевидно,

$$\langle\rho\rangle := \int_\square \rho\,dy = 1 \quad \text{и} \quad \int_{\varepsilon\square} \rho_\varepsilon\,dx = \varepsilon^d, \tag{2.1}$$

где $\varepsilon\square = [-\varepsilon/2,\varepsilon/2)^d$. Как следствие $(2.1)_2$, имеет место слабая сходимость мер

$$\rho_\varepsilon\,dx \rightharpoonup dx \quad \text{при} \quad \varepsilon\to 0. \tag{2.2}$$

Обозначим через $H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)$ замыкание $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ по норме $\|\cdot\|_{1,\varepsilon}$, определенной равенством $\|\varphi\|^2_{1,\varepsilon}=\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\rho_\varepsilon dx$. Это — гильбертово пространство, аналогичное во многом классическому пространству Соболева $H^1(\mathbb{R}^d,dx)=H^1(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $a_\varepsilon(x)=a(\varepsilon^{-1}x)$ и $a(y)$ — измеримая симметрическая периодическая матрица, ячейка периодичности — куб $\square=[-1/2,1/2)^d$. Предполагаем условия эллиптичности и ограниченности:

$$\lambda|\xi|^2\leqslant a\xi\cdot\xi\leqslant\lambda^{-1}|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^d \tag{2.3}$$

для некоторой константы $\lambda\in(0,1)$.

Рассмотрим эллиптическое уравнение в ε-периодическом перфорированном пространстве с характеристической функцией ρ_ε:

$$u^\varepsilon\in H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx),\quad A_\varepsilon u^\varepsilon+\rho_\varepsilon u^\varepsilon=\rho_\varepsilon f,\quad f\in L^2(\mathbb{R}^d),\quad A_\varepsilon=-\operatorname{div}(\rho_\varepsilon a_\varepsilon\nabla). \tag{2.4}$$

Решение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(a_\varepsilon\nabla u^\varepsilon\cdot\nabla\varphi+u^\varepsilon\varphi)\,\rho_\varepsilon dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}f\varphi\,\rho_\varepsilon dx,\quad\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

т. е. в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$. По замыканию в качестве пробной можно брать любую функцию из $H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)$. Разрешимость уравнения (2.4) устанавливается по лемме Лакса—Мильграма. Из интегрального тождества легко выводится энергетическая оценка для решения задачи (2.4)

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}\leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)},\quad c=const(\lambda).$$

Усредненным будем называть следующее уравнение с постоянными коэффициентами во всем пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$u\in H^1(\mathbb{R}^d,dx),\quad(A_0+1)u=\rho_\varepsilon f,\quad A_0=-\operatorname{div}a^0\nabla, \tag{2.5}$$

решение которого понимается в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$, т. е. в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}(a^0\nabla u\cdot\nabla\varphi+u\varphi)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho_\varepsilon f\varphi\,dx,\quad\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{2.6}$$

Решение уравнения (2.5) зависит от ε через правую часть, но для простоты этот момент в обозначениях не отражается. Ниже (см. (2.10)) сформулирован один из результатов [34], показывающих, в каком смысле можно понимать близость решения u^ε исходного уравнения к решению u усредненного уравнения (2.6).

Согласно классическим канонам, матрица коэффициентов a^0 в усредненном уравнении (2.5) находится через решения задачи на ячейке

$$N^j\in H^1_{\mathrm{per}}(\square,\rho\,dy),\quad\operatorname{div}_y[\rho(y)a(y)(e^j+\nabla_yN^j)]=0,\quad\langle\rho N^j\rangle=0,\quad j=1,\dots,d, \tag{2.7}$$

по формуле

$$a^0e^j=\langle\rho a(e^j+\nabla_yN^j)\rangle,\quad j=1,\dots,d, \tag{2.8}$$

где $e^1,\dots,e^d$ — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^d$, а через $\langle\cdot\rangle$ обозначено среднее по ячейке периодичности $\square=[-1/2,1/2)^d$ (см. (2.1)).

В (2.7) использовано пространство $H^1_{\mathrm{per}}(\square,\rho\,dy)$: замыкание $C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$ по норме $\langle\rho(|\varphi|^2+|\nabla\varphi|^2)\rangle^{1/2}$. На множестве функций $\varphi\in H^1_{\mathrm{per}}(\square,\rho\,dy)$, таких что $\langle\rho\varphi\rangle=0$, эквивалентной нормой будет $\langle\rho|\nabla\varphi|^2)\rangle^{1/2}$, что является следствием неравенства Пуанкаре $\langle\rho|\varphi|^2\rangle\leqslant c_P\langle\rho|\nabla\varphi|^2\rangle$, если $\langle\rho\varphi\rangle=0$, $\varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)$. Это неравенство имеет место, поскольку в наших предположениях есть так называемая связность Q на торе (т. е. связность области Q на ячейке периодичности — кубе $\square$, у которого отождествлены противоположные грани).

Решение задачи на ячейке понимается в смысле интегрального тождества

$$\langle\rho a(e^j+\nabla N^j)\cdot\nabla\varphi\rangle=0,\quad\varphi\in C^\infty_{\mathrm{per}}(\square), \tag{2.9}$$

где по замыканию в качестве пробной можно брать любую функцию из $H^1_{\mathrm{per}}(\square,\rho\,dy)$. Существование решения устанавливается по лемме Лакса—Мильграма. Решение единственно в силу условия $\langle\rho N^j\rangle=0$.

С другой стороны, уравнение (2.7) можно рассматривать в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$, что является известным фактом в усреднении. Таким образом, решение этого уравнения удовлетворяет интегральному тождеству на пробных функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho a(e^j + \nabla N^j)\cdot\nabla\varphi dx, \quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

где фактически интегрирование идет по области Q.

Из связности периодической области Q в $\mathbb{R}^d$ вытекает свойство $a^0>0$. Последнее свойство заведомо имеет место для перфорированной среды с дисперсным распределением «дыр» в пространстве $\mathbb{R}^d$ (по определению дисперсности). Простейший пример такой среды наблюдается, если в качестве множества «дыр» $\mathbb{R}^d\setminus Q$ взять объединение всех шаров радиуса $r\in(0,1/4)$ с центрами в целочисленных точках.

В силу эллиптичности матрицы a^0 усредненная задача имеет единственное решение. Усредненное уравнение намного проще исходного уравнения (2.4), несмотря на то, что мы не избавляемся окончательно в (2.5) от ε-периодической осцилляции, которая остается в правой части уравнения. Уравнение (2.6) имеет постоянные коэффициенты, ставится во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ без перфорации, и лишь правая часть $\rho_\varepsilon f$ сохраняет память об исходной ε-периодической перфорации пространства.

В [34] (см. также [11]) доказан следующий факт: если u^ε, u — решения задач (2.4) и (2.5), то для их разности справедлива оценка

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \tag{2.10}$$

где константа C зависит от размерности d, постоянной эллиптичности λ и перфорированной области Q. Здесь задействовано L^2-пространство с меняющейся мерой $\rho_\varepsilon dx$. Нетрудно понять, что оценка (2.10) допускает формулировку в терминах фиксированного (не зависящего от ε) пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ с мерой Лебега dx, а именно,

$$\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon, \quad c = const(d,\lambda,Q). \tag{2.11}$$

Наша цель — найти такой корректирующий оператор $\mathcal{C}_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)$, чтобы выполнялась оценка

$$\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon - \varepsilon\mathcal{C}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon^2, \quad c = const(d,\lambda,Q). \tag{2.12}$$

Точный результат о корректирующем операторе $\mathcal{C}_\varepsilon$ предъявлен ниже в теореме 2.1.

2.2. Техника продолжения. Усреднение в перфорированных областях можно изучать без техники продолжения. Однако для наших целей полезно вспомнить известные факты об операторах продолжения функций, заданных в перфорированном пространстве (см., например, [12, гл. I], [8, гл. III], а также [17]).

Как элемент пространства $H^1_{\rm per}(\square,\rho\, dy)$, решение N^j задачи на ячейке (2.7) определено на множестве $\square\cap Q$. Часто удобно считать, что N^j продолжено с $\square\cap Q$ на $\square$ до функции $\tilde N^j$, при этом

$$\|\nabla\tilde N^j\|_{L^2(\square)} \leqslant c_0\|\nabla N^j\|_{L^2(\square\cap Q)}, \qquad \|\tilde N^j\|_{L^2(\square)} \leqslant c_0\|N^j\|_{L^2(\square\cap Q)}, \tag{2.13}$$

где константа зависит лишь от Q.

Аналогично будем считать, если это необходимо, функции $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)$ продолженными до функций $\tilde\varphi\in H^1(\mathbb{R}^d,dx)$ так, что выполнены равномерные по ε оценки

$$\|\tilde\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d,dx)} \leqslant c_0\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \qquad \|\nabla\tilde\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,dx)} \leqslant c_0\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \tag{2.14}$$

где константа зависит лишь от Q.

Далее для заданной 1-периодической перфорированной области Q берутся линейные операторы продолжения на ячейке периодичности и в ε-периодическом пространстве $P : H^1_{\rm per}(\square,\rho\, dy)\to H^1_{\rm per}(\square,dy)$ и $P^\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)\to H^1(\mathbb{R}^d,dx)$ с контролем норм в виде оценок типа (2.13) и (2.14). Например, если $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)$ и $P^\varepsilon\varphi=\tilde\varphi$, то выполнены оценки (2.14).

Области, для которых существуют подобные операторы продолжения, описаны в [12, гл. I, § 4] и [8, гл. III, § 1]. Например, это области с так называемой дисперсной перфорацией. Наиболее общие результаты о существовании операторов продолжения с оценками (2.13) и (2.14) получены в [17]. От перфорированной области Q достаточно требовать связность и липшицевость.

2.3. L^2-оценка с корректором. Зададим оператор $\mathcal{K}_\varepsilon : L^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\mathcal{K}_\varepsilon f = N_\varepsilon \cdot \nabla S^\varepsilon (A_0+1)^{-1} f, \qquad N_\varepsilon(x) = N(\varepsilon^{-1}x), \tag{2.15}$$

где $N = (N^1, \dots, N^d)$ — вектор, составленный из решений задачи на ячейках, продолженных на всю ячейку $\square$; S^ε — оператор сглаживания по Стеклову, определенный в (3.1). Тогда

$$\|\varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant c, \quad c = const(d, \lambda, Q) \tag{2.16}$$

в силу свойств сглаживания (см. лемму 3.1) и эллиптической оценки (4.12). С другой стороны, заданный в (2.15) оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ ограниченно действует в $L^2(\mathbb{R}^d)$, при этом $\|\mathcal{K}_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c$ (константа того же типа, что в (2.16)) и имеет сопряженный $(\mathcal{K}_\varepsilon)^* : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$, такой что $(\mathcal{K}_\varepsilon)^* f := (A_0+1)^{-1} S^\varepsilon \operatorname{div}(N_\varepsilon f)$.

Оператор $\varepsilon \mathcal{C}_\varepsilon = \varepsilon \rho_\varepsilon (\mathcal{K}_\varepsilon + (\mathcal{K}_\varepsilon)^*) \rho_\varepsilon$ ограниченно действует в $L^2(\mathbb{R}^d)$, имеет норму порядка ε и является правильным корректирующим оператором к $\rho_\varepsilon (A_0+1)^{-1} \rho_\varepsilon$ в аппроксимации с остатком порядка ε^2 для резольвенты $\rho_\varepsilon (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1} \rho_\varepsilon$, так что выполнена искомая оценка (2.12). Это показывает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Справедлива оценка*

$$\begin{gathered} \|\rho_\varepsilon (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1} \rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon (A_0+1)^{-1} \rho_\varepsilon - \varepsilon \rho_\varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon \rho_\varepsilon - \varepsilon \rho_\varepsilon (\mathcal{K}_\varepsilon)^* \rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2, \\ \mathcal{K}_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0+1)^{-1} \end{gathered} \tag{2.17}$$

с константой C, зависящей лишь от размерности d, постоянной эллиптичности λ из условия (2.3) *и* 1*-периодической перфорированной области Q.*

Поскольку в скалярном случае в предположении (2.3) решение N^j задачи на ячейке (2.7) принадлежит $L^\infty(\square)$ в силу обобщенного принципа максимума, то в оценке (2.17) оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ можно заменить на более простой оператор $K_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot \nabla (A_0+1)^{-1}$, не содержащий сглаживания.

Теорема 2.2. *Справедлива оценка с константой C того же типа, что в* (2.17):

$$\begin{gathered} \|\rho_\varepsilon (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1} \rho_\varepsilon - \rho_\varepsilon (A_0+1)^{-1} \rho_\varepsilon - \varepsilon \rho_\varepsilon K_\varepsilon \rho_\varepsilon - \varepsilon \rho_\varepsilon (K_\varepsilon)^* \rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2, \\ K_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot \nabla (A_0+1)^{-1}. \end{gathered} \tag{2.18}$$

Теоремы 2.1 и 2.2 доказаны в разделе 4.

3. ОПЕРАТОР СГЛАЖИВАНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Используем обозначение

$$S^\varepsilon \varphi(x) = \int_\square \varphi(x - \varepsilon\omega)\, d\omega \tag{3.1}$$

для среднего по Стеклову, называемого также сглаживанием по Стеклову.

Сначала перечислим наиболее простые и известные свойства среднего по Стеклову:

$$\|S^\varepsilon \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.2}$$

$$\|S^\varepsilon \varphi - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon \|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.3}$$

$$\|S^\varepsilon \varphi - \varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.4}$$

Отметим также очевидное свойство $S^\varepsilon(\nabla\varphi) = \nabla(S^\varepsilon \varphi)$, которое далее систематически используется. Это свойство позволяет коммутировать оператор сглаживания с дифференциальными операторами, имеющими постоянные коэффициенты.

Во взаимодействии с ε-периодическими множителями проявляются следующие свойства сглаживания по Стеклову.

Лемма 3.1. *Если $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $b \in L^2_{\text{per}}(\square)$ и $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, то $b_\varepsilon S^\varepsilon \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ и*

$$\|b_\varepsilon S^\varepsilon \varphi\|^2 \leqslant \langle b^2 \rangle \|\varphi\|^2. \tag{3.5}$$

Лемма 3.2. *Если* $b \in L^2_{\mathrm{per}}(\square)$, $\langle b\rangle = 0$, $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *и* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$(b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \psi) \leqslant C\varepsilon\langle b^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.6}$$

Выше и в дальнейшем изложении используем упрощенное обозначение для нормы и скалярного произведения в $L^2(\mathbb{R}^d)$

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.7}$$

Доказательство свойств (3.2)–(3.6) можно найти, например, в [11, 34, 35]; в этой работе оно не приводится.

Оценки (3.3) и (3.6) можно уточнить в условиях большей регулярности. Например, для функции $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ выполнена оценка

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\| \leqslant C\varepsilon^2\|\nabla^2\varphi\|, \quad C = const(d). \tag{3.8}$$

В самом деле, из равенства $\varphi(x+h) - \varphi(x) - \nabla\varphi(x)\cdot h = \int\limits_0^1 (1-t)\nabla(\nabla\varphi(x+th)\cdot h)\cdot h\,dt$, полагая $h = -\varepsilon\omega$, интегрированием по $\omega \in \square = [-1/2, 1/2)^d$ получаем интегральное представление разности $S^\varepsilon\varphi - \varphi$ через матрицу вторых производных $\nabla^2\varphi$. Следовательно, по неравенству Коши—Буняковского имеем

$$|S^\varepsilon\varphi(x) - \varphi(x)|^2 \leqslant \varepsilon^4 \int\limits_\square \int\limits_0^1 |\nabla(\nabla\varphi(x - t\varepsilon\omega)\cdot\omega)\cdot\omega|^2\,dt\,d\omega,$$

откуда легко вывести (3.8).

Что касается леммы 3.2, следующие утверждения обобщают или уточняют ее.

Лемма 3.3. *Пусть* $b \in L^2_{\mathrm{per}}(\square)$, $\langle b\rangle = 0$, $b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon)$ *и* $\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. *Тогда*

$$(b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, S^\varepsilon\psi) \leqslant C\varepsilon^2\langle b^2\rangle^{1/2}\|\nabla\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.9}$$

Лемма 3.4. *Пусть* $\alpha, \beta \in L^2_{\mathrm{per}}(\square)$, $\langle\alpha\beta\rangle = 0$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$ *и* $\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. *Тогда*

$$(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) \leqslant C\varepsilon^2\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\nabla\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.10}$$

Лемма 3.5. *Пусть* $\alpha, \beta \in L^2_{\mathrm{per}}(\square)$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. *Тогда*

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle(\varphi,\psi)| \leqslant C\varepsilon\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = const(d). \tag{3.11}$$

Заметим, что рассматриваемая в (3.10) и (3.11) форма $(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi)$ корректно определена, так как функции $\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi$ и $\beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi$ лежат в $L^2(\mathbb{R}^d)$ по лемме 3.1.

Доказательство трех последних лемм вынесено в раздел 7.

4. Доказательство L^2-оценок с корректором

В этом разделе дан вывод основных результатов для самосопряженного случая.

4.1. H^1-оценка порядка ε.

Чтобы избежать громоздких формул, используем обозначения

$$u^{,\varepsilon}(x) := S^\varepsilon u(x), \quad U^\varepsilon(x) := N_\varepsilon(x)\cdot\nabla u^{,\varepsilon}(x), \quad N_\varepsilon(x) = N(\varepsilon^{-1}x). \tag{4.1}$$

Здесь u — решение усредненного уравнения (2.5), S^ε — оператор сглаживания по Стеклову (см. (3.1)), $N(y) = \{N^j(y)\}_{j=1}^d$ — периодический вектор, составленный из решений задачи на ячейке (2.7).

Справедливы оценки

$$\|u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d,\lambda,Q), \tag{4.2}$$

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d,\lambda,Q). \tag{4.3}$$

Эти оценки доказаны в [34], но мы воспроизведем сейчас доказательство оценки (4.2), поскольку далее систематически будут использованы элементы этого доказательства, а также и сама оценка (4.2). Оценка (4.3) следует из (4.2) по свойствам сглаживания. В свою очередь, из (4.3) по свойствам сглаживания вытекает L^2-оценка (2.10).

Согласно простым вычислениям:

$$\begin{gathered}\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^\varepsilon)=\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon N_\varepsilon\cdot\nabla u^{,\varepsilon})=\left(\nabla N^j_\varepsilon+e^j\right)\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}+\varepsilon N^j_\varepsilon\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j},\\ \rho_\varepsilon a_\varepsilon\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^\varepsilon)-a^0\nabla u^{,\varepsilon}=g^j_\varepsilon\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}+\varepsilon\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}\end{gathered}\tag{4.4}$$

(как обычно, по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование от 1 до d), где $\nabla N^j_\varepsilon(x)=(\nabla_yN^j)(\frac{x}{\varepsilon})$, $g^j_\varepsilon(x)=g^j(\frac{x}{\varepsilon})$, а 1-периодический вектор

$$g^j(y):=\rho(y)a(y)\left(\nabla N^j(y)+e^j\right)-a^0e^j,\quad j=1,\dots,d,\tag{4.5}$$

соленоидален и имеет нулевое среднее, т. е.

$$\operatorname{div}g^j(y)=0,\quad\langle g^j\rangle=0,\tag{4.6}$$

согласно (2.7) и (2.8), соответственно. Отсюда

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon\nabla(u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^\varepsilon)-a^0\nabla u^{,\varepsilon}\right)=r^\varepsilon+\operatorname{div}R^\varepsilon,\\ r^\varepsilon=g^j_\varepsilon\cdot\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j},\quad R^\varepsilon=\varepsilon\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon\nabla\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j},\end{gathered}\tag{4.7}$$

и можно оценить невязку приближения $\tilde v^\varepsilon:=u^{,\varepsilon}+\varepsilon U^\varepsilon$ в уравнении (2.4). А именно,

$$\begin{gathered}-\operatorname{div}[(\rho_\varepsilon a_\varepsilon\nabla(\tilde v^\varepsilon-u^\varepsilon)]+\rho_\varepsilon(\tilde v^\varepsilon-u^\varepsilon)=-\operatorname{div}\rho_\varepsilon a_\varepsilon\nabla\tilde v^\varepsilon+\rho_\varepsilon\tilde v^\varepsilon-\rho_\varepsilon f=\\ =-\operatorname{div}\rho_\varepsilon a_\varepsilon\nabla\tilde v^\varepsilon+\rho_\varepsilon\tilde v^\varepsilon+\operatorname{div}a^0\nabla u^{,\varepsilon}-u^{,\varepsilon}+(\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}-\rho_\varepsilon f\overset{(4.7)}{=}\\ =(\rho_\varepsilon-1)u^{,\varepsilon}+\varepsilon\rho_\varepsilon N^j_\varepsilon\frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}-r_\varepsilon-\operatorname{div}R_\varepsilon+((\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}-\rho_\varepsilon f)=:\sum_{i=1}^5T_i.\end{gathered}\tag{4.8}$$

Здесь использовано соотношение $-\operatorname{div}a^0\nabla u^{,\varepsilon}+u^{,\varepsilon}=(\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}$, в котором $(\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}$ обозначает сглаживание по Стеклову функции $\rho_\varepsilon f$. Равенство (4.8) означает, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\rho_\varepsilon[a_\varepsilon\nabla(\tilde v^\varepsilon-u^\varepsilon)\nabla\varphi+(\tilde v^\varepsilon-u^\varepsilon)\varphi]\,dx=\sum_{i=1}^5\int\limits_{\mathbb{R}^d}T_i\varphi\,dx\tag{4.9}$$

для любой $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Далее используем оператор продолжения P^ε, введенный в разделе 2.2. Оператор P^ε продолжает функции, заданные в связной ε-периодической области $Q_\varepsilon=\varepsilon Q$ (что получена из Q гомотетическим сжатием, характеристической функцией для Q_ε является ρ_ε) до функций, заданных во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, с указанным в (2.14) контролем H^1-нормы.

По замыканию в (4.9) в качестве пробной функции можно взять

$$\varphi=z_\varepsilon:=P^\varepsilon[(\tilde v^\varepsilon-u^\varepsilon)|_{Q_\varepsilon}].\tag{4.10}$$

Далее левую часть (4.9) оценим снизу по эллиптичности. Правую часть (4.9) оценим сверху следующим образом: интегралы с T_1 и T_3 — по лемме 3.2, интегралы с T_2 и T_4 — по лемме 3.1, а интеграл с T_5 — по свойству (3.4). В итоге получаем

$$\|z_\varepsilon\|^2_{1,\varepsilon}=\int\limits_{\mathbb{R}^d}(|z_\varepsilon|^2+|\nabla z_\varepsilon|^2)\rho_\varepsilon\,dx\leqslant C\varepsilon\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|z_\varepsilon\|_{1,\varepsilon},$$

или

$$\|z_\varepsilon\|_{1,\varepsilon}\leqslant C\varepsilon\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\tag{4.11}$$

где положили $|\Phi|^2=|\nabla u^{,\varepsilon}|^2+|\nabla^2u^{,\varepsilon}|^2$ и использовали оценку $\|z_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant c\|z_\varepsilon\|_{1,\varepsilon}$ для функции (4.10).

Для решения задачи (2.5) верна эллиптическая оценка

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant c\|\rho_\varepsilon f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},\quad c=const(\lambda).\tag{4.12}$$

Следовательно, $\|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}$, что вместе с (4.11) приводит к неравенству (4.2).

4.2. L^2-оценки порядка ε^2. Из (4.3) следует L^2-оценка

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d,\lambda).$$

Далее, изучая L^2-форму

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, \rho_\varepsilon h), \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{4.13}$$

найдем дополнительные корректоры к $\varepsilon U^\varepsilon$ для того, чтобы получить аппроксимацию решения u^ε с остаточным членом порядка ε^2. Форма (4.13) участвует в интегральном тождестве для решения уравнения

$$v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx), \quad -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon a_\varepsilon \nabla v^\varepsilon) + \rho_\varepsilon v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h, \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{4.14}$$

если тождество взять на пробной функции $u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon$. Воспользуемся этим в дальнейшем.

Предварительно заметим, что соответствующее (4.14) усредненное уравнение имеет вид

$$v \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad (A_0 + 1)v = \rho_\varepsilon h; \tag{4.15}$$

H^1-приближением к v^ε будет функция

$$v^{,\varepsilon}(x) + \varepsilon V^\varepsilon(x), \qquad \text{где } V^\varepsilon(x) = N_\varepsilon(x)\cdot\nabla v^{,\varepsilon}(x), \quad v^{,\varepsilon}(x) = S^\varepsilon v(x), \tag{4.16}$$

с оценкой

$$\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d,\lambda,Q), \tag{4.17}$$

которая есть аналог оценки (4.2).

Отметим также энергетическую оценку для решения задачи (4.14)

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(\lambda), \tag{4.18}$$

и эллиптическую оценку для решения усредненной задачи (4.15)

$$\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d,\rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(\lambda). \tag{4.19}$$

Поскольку $A_\varepsilon = -\operatorname{div}\rho_\varepsilon a_\varepsilon\nabla$ и уравнения в (2.4) и (4.14) записываются коротко как

$$(A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)u^\varepsilon = \rho_\varepsilon f, \quad (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h,$$

форма (4.13) преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered}(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, \rho_\varepsilon h) \overset{(4.14)}{=} (u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon) = \\ = ((A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)u^\varepsilon - (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)(u + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) = ((A_0 + 1)u - (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)(u + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) = \\ = (A_0 u^{,\varepsilon} - A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) + (A_0(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) - (A_\varepsilon(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) + (u(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) - \varepsilon(\rho_\varepsilon U^\varepsilon, v^\varepsilon) =: \\ := T_1 + T_2 - T_3 + T_4 - T_5,\end{gathered} \tag{4.20}$$

где на третьем шаге преобразований учтено равенство $(A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)u^\varepsilon = \rho_\varepsilon f = (A_0 + 1)u$ в смысле распределений на $\mathbb{R}^d$.

Заметим, что в (4.20) формально не все слагаемые T_i представляют собой L^2-формы: T_1 есть значение функционала $A_0 u^{,\varepsilon} - A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon)$ из $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ на функции $v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)$, а T_3 есть значение функционала $A_\varepsilon(u - u^{,\varepsilon}) \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ на функции $v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Правильнее было бы использовать здесь специальное обозначение, например, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^{-1},H^1}$, для подобных значений функционала из $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ на элементе из $H^1(\mathbb{R}^d)$. Но мы этого не делаем, чтобы не усложнять обозначения, тем более что такие формы возникают мимолетно и преобразуются тут же в L^2-формы (см., например, ниже в (4.22) преобразование T_3 к L^2-форме).

Исходная форма (4.13) фактически есть интеграл по перфорированной области Q_ε, но в процессе преобразований в (4.20) в ее представлении возникли формы по всему пространству, в которых участвует v^ε. Поэтому изначально считаем, что решение $v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)$ продолжено с помощью оператора P^ε, введенного в разделе 2.2, до функции из $H^1(\mathbb{R}^d, dx)$ с указанным в (2.14) контролем H^1-нормы. Договоримся не делать различия в обозначениях между функцией v^ε и ее продолжением, чтобы не загромождать формулы.

Оценим слагаемые T_i в (4.20). Начнем с последнего слагаемого:

$$T_5 := \varepsilon(\rho_\varepsilon U^\varepsilon, v^\varepsilon) \overset{(4.1)}{=} \varepsilon(\rho_\varepsilon N_\varepsilon \cdot \nabla u^{,\varepsilon}, v^\varepsilon) \leqslant \varepsilon^2 C\langle|\rho N|^2\rangle^{1/2}\|\nabla u\|\,\|\nabla v^\varepsilon\|,$$

где неравенство записано по лемме 3.2 (напомним, что $\langle \rho N\rangle = 0$, см. задачу (2.7)). Отсюда с учетом (4.12) и (4.18) получаем

$$T_5 \cong 0. \tag{4.21}$$

В (4.21) и далее через $\cong$ обозначаем равенство по модулю слагаемых T, имеющих оценку $|T| \leqslant c\varepsilon^2\|f\|\,\|h\|$, $c = const(d, \lambda)$, и такие слагаемые T будем называть *несущественными*.

Следующим рассмотрим слагаемое

$$T_3 := (A_\varepsilon(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) = (u - u^{,\varepsilon}, A_\varepsilon v^\varepsilon) \overset{(4.14)}{=} (u - u^{,\varepsilon}, \rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon v^\varepsilon) \cong 0, \tag{4.22}$$

где последнее «равенство» записано в силу неравенства Гельдера

$$(u - u^{,\varepsilon}, \rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon v^\varepsilon) \leqslant \|u - u^{,\varepsilon}\|\,\|\rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon v^\varepsilon\|,$$

свойства сглаживания (3.8) и оценок (4.12) и (4.18).

Аналогичные соображения, как при выводе (4.22), дают

$$T_2 := (A_0(u - u^{,\varepsilon}), v^\varepsilon) \overset{(2.5)}{=} (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^\varepsilon) - (u - u^{,\varepsilon}, v^\varepsilon) \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^\varepsilon).$$

Далее преобразуем T_2, привлекая H^1-приближение (4.16). Это приближение определено на всем $\mathbb{R}^d$, если считать 1-периодический множитель $N(\cdot)$ продолженным с самого начала на всю ячейку $\square$ с помощью оператора P с контролем H^1-нормы (см. раздел 2.2). В результате получаем

$$T_2 \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon) + (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon) \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon),$$

где на последнем шаге отброшено одно слагаемое как несущественное, потому что

$$\|f - f^{,\varepsilon}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \overset{(3.4)}{\leqslant} C\varepsilon\|f\|, \quad \|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \overset{(4.17)}{\leqslant} c\varepsilon\|h\|,$$

а кроме того, неявно задействованный здесь оператор продолжения P удовлетворяет оценкам (2.13).

Полученное представление для T_2 упрощаем за счет того, что

$$(\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon}) \overset{(2.5)}{=} ((A_0 + 1)(u - u^{,\varepsilon}), v^{,\varepsilon}) = (u - u^{,\varepsilon}, (A_0 + 1)v^{,\varepsilon}) \overset{(4.15)}{=} (u - u^{,\varepsilon}, (\rho_\varepsilon h)^{,\varepsilon}) \overset{(3.8)}{\cong} 0.$$

В итоге

$$T_2 \cong (\rho_\varepsilon f - (\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, \varepsilon V^\varepsilon) = (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) - ((\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, \varepsilon V^\varepsilon),$$

где

$$((\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, \varepsilon V^\varepsilon) \overset{(4.16)}{=} \varepsilon((\rho_\varepsilon f)^{,\varepsilon}, N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) \cong \varepsilon\langle N\rangle \cdot (\rho_\varepsilon f, \nabla v)$$

по лемме 3.5. Здесь $\langle N\rangle$ — среднее по ячейке $\square$ от продолжения на $\square$ решения задачи (2.7) (см. раздел 2.2). В итоге

$$T_2 \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) - \varepsilon\langle N\rangle \cdot (\rho_\varepsilon f, \nabla v). \tag{4.23}$$

Слагаемое T_4 в (4.20) преобразуем, используя похожие соображения, как выше:

$$T_4 := (u(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) = (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) + ((u - u^{,\varepsilon})(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon) \overset{(3.8)}{\cong} (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon).$$

Далее, привлекая H^1-приближение (4.16), получаем

$$T_4 \cong (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon) + (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon) \cong (u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon),$$

где несущественность отброшенного слагаемого показываем, используя лемму 3.2 (имеем $\langle 1 - \rho\rangle = 0$), оценки (4.12) и (4.17), а также свойства подразумеваемого здесь продолжения. Учтем также, что $(u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), v^{,\varepsilon}) \cong 0$ по лемме 3.3; кроме того, $\varepsilon(u^{,\varepsilon}(1 - \rho_\varepsilon), V^\varepsilon) \cong \varepsilon(u^{,\varepsilon}, V^\varepsilon)$, так как

$$(u^{,\varepsilon}\rho_\varepsilon, V^\varepsilon) \overset{(4.16)}{=} (u^{,\varepsilon}\rho_\varepsilon, N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) = (u^{,\varepsilon}, \rho_\varepsilon N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) \cong 0$$

по лемме 3.3 (имеем здесь $\langle \rho N\rangle = 0$, см. задачу (2.7)). В итоге заключаем, что

$$T_4 \cong \varepsilon(u^{,\varepsilon}, V^\varepsilon) = \varepsilon(u^{,\varepsilon}, N_\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon}) \cong \varepsilon(u, \langle N\rangle \cdot \nabla v), \tag{4.24}$$

где последнее «равенство» записано по лемме 3.5 и $\langle N\rangle$ обозначает среднее по ячейке периодичности от продолженного на ячейку решения задачи (2.7) (ранее договорились не различать в обозначениях определенные на перфорированном пространстве функции и их продолжения на все $\mathbb{R}^d$).

Наконец, изучим слагаемое T_1 в (4.20):

$$T_1 := (A_0 u^{,\varepsilon} - A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon) \overset{(4.7)}{=} (g^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, v^\varepsilon) - \varepsilon(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla v^\varepsilon) =: I + II. \tag{4.25}$$

Привлекая приближение (4.16), имеем

$$I = (g^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon) + (g^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon),$$

где первое слагаемое несущественно по лемме 3.2 в силу соотношений $(4.6)_2$,(4.12) и (4.17). Поэтому, учитывая соленоидальность вектора g^j_ε, запишем

$$I \cong -(g^j_\varepsilon \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)) = -\left(g^j_\varepsilon \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N^k_\varepsilon + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k} + \varepsilon N^k_\varepsilon \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= -\left(\left(\nabla N^k_\varepsilon + e^k\right) \cdot g^j_\varepsilon \, \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) - \varepsilon \left(N^k_\varepsilon g^j_\varepsilon \, \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right),$$

где градиент $\nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)$ вычислен аналогичным образом, как в (4.4).

Периодический вектор $(\nabla N^k + e^k) \cdot g^j$ имеет нулевое среднее:

$$\langle g^j \cdot (\nabla N^k + e^k) \rangle = \langle g^j \cdot \nabla N^k \rangle + \langle g^j \rangle \cdot e^k = 0$$

в силу соотношений (4.6). Тогда по лемме 3.4 и в силу эллиптических оценок для решений u и v получаем $\left(\left(\nabla N^k_\varepsilon + e^k\right) \cdot g^j_\varepsilon \, \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) \cong 0$ и, значит,

$$I \cong -\varepsilon \left(N^k_\varepsilon g^j_\varepsilon \, \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) \cong -\varepsilon(\langle N^k g^j \rangle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v}{\partial x_k}), \tag{4.26}$$

где последнее «равенство» записано в силу леммы 3.5 и эллиптических оценок для u и v.

Для слагаемого II из (4.25) запишем представление, привлекая приближение (4.16):

$$II = -\varepsilon(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla(v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon)) - \varepsilon(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)).$$

Нетрудно показать, что здесь первое слагаемое несущественное. В самом деле, надо применить неравенство Гельдера, лемму 3.1 и оценки (4.12), (4.17). Далее, производя вычисления типа (4.4) для градиента $\nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)$, запишем

$$II \cong -\varepsilon \left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N^k_\varepsilon + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k} + \varepsilon N^k_\varepsilon \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= -\varepsilon \left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N^k_\varepsilon + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) - \varepsilon^2 \left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, N^k_\varepsilon \nabla \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right),$$

где последнее слагаемое несущественное. Это легко показать, снова используя неравенство Гельдера, лемму 3.1 и эллиптические оценки для u и v. Тогда

$$II \cong -\varepsilon \left(\rho_\varepsilon a_\varepsilon N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \left(\nabla N^k_\varepsilon + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) = -\varepsilon \left(N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, \rho_\varepsilon a_\varepsilon \left(\nabla N^k_\varepsilon + e^k\right) \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\right) =$$

$$= -\varepsilon \left(N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, g^k_\varepsilon \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k} + a^0 \nabla v^{,\varepsilon}\right),$$

где ввели определенный в (4.5) вектор g^k через равенство $\rho a(\nabla N^k + e^k) = g^k + a^0 e^k$. Заметим, что по лемме 3.5 $\varepsilon\Big(N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, g^k_\varepsilon \frac{\partial v^{,\varepsilon}}{\partial x_k}\Big) \cong \varepsilon\langle g^k N^j \rangle \cdot \Big(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\Big)$ и $\varepsilon\Big(N^j_\varepsilon \nabla \frac{\partial u^{,\varepsilon}}{\partial x_j}, a^0 \nabla v^{,\varepsilon}\Big) \cong \varepsilon\langle N^j \rangle \Big(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, a^0 \nabla v\Big)$. Следовательно, подводя итоги, имеем

$$II \cong -\varepsilon\langle g^k N^j \rangle \cdot \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\langle N^j \rangle \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, a^0 \nabla v\right). \tag{4.27}$$

Из (4.25)–(4.27) выводим

$$T_1 \cong -\varepsilon\langle N^k g^j\rangle \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\langle g^k N^j\rangle \cdot \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon\langle N^j\rangle \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, a^0 \nabla v\right).$$

Покажем, что в этой сумме первые два члена взаимно уничтожаются. В самом деле, преобразуя слагаемые

$$J_1 := \left(\langle N^k g^j\rangle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = \left(\langle N^j g^k\rangle \frac{\partial u}{\partial x_k}, \nabla \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = \langle N^j g_i^k\rangle \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$
$$J_2 := \left(\langle g^k N^j\rangle \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) = \langle g_i^k N^j\rangle \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right),$$

видим, что $J_1 = -J_2$ за счет равенства $\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}\Big) = -\Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\Big)$ $\forall \varphi, \psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$.

Таким образом, $T_1 \cong -\varepsilon\langle N^j\rangle\Big(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, a^0 \nabla v\Big)$, а в силу уравнения (4.15)

$$T_1 \cong -\varepsilon\langle N^j\rangle(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho_\varepsilon h - v) = -\varepsilon\langle N\rangle \cdot (\nabla u, \rho_\varepsilon h - v). \tag{4.28}$$

Итак, изучены все слагаемые T_i в (4.20). Опуская несущественные слагаемые T_3, T_5 и учитывая «равенства» (4.23), (4.24), (4.28) для остальных, запишем представление

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h) \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) - \varepsilon\langle N\rangle \cdot (\rho_\varepsilon f, \nabla v) + \varepsilon(u, \langle N\rangle \cdot \nabla v) - \varepsilon\langle N\rangle \cdot (\nabla u, \rho_\varepsilon h) + \varepsilon\langle N\rangle \cdot (\nabla u, v). \tag{4.29}$$

Здесь попарно взаимно уничтожаются слагаемые третье и пятое, а также второе и четвертое за счет того, что $(u, \langle N\rangle \cdot \nabla v) + \langle N\rangle \cdot (\nabla u, v) = 0$ и $\langle N\rangle \cdot (\rho_\varepsilon f, \nabla v) + \langle N\rangle \cdot (\nabla u, \rho_\varepsilon h) = 0$. Последнее равенство нулю становится очевидным, если учесть равенства

$$\left(\rho_\varepsilon f, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right) = \left((A_0 + 1)u, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right), \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \rho_\varepsilon h\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, (A_0 + 1)v\right) = -\left((A_0 + 1)u, \frac{\partial v}{\partial x_j}\right).$$

Таким образом, (4.29) существенно упрощается:

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h) \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon), \tag{4.30}$$

где, согласно (4.1) и (4.16), $U^\varepsilon(x) = N_\varepsilon(x) \cdot S^\varepsilon \nabla u(x)$.

Перейдем к записи равенства (4.30) в операторной форме. Поскольку

$$u^\varepsilon = (A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1} \rho_\varepsilon f, \qquad u = (A_0 + 1)^{-1} \rho_\varepsilon f,$$
$$\varepsilon U^\varepsilon = \varepsilon N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0 + 1)^{-1} \rho_\varepsilon f =: \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon(\rho_\varepsilon f), \qquad \varepsilon V^\varepsilon = \varepsilon N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0 + 1)^{-1} \rho_\varepsilon h =: \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon(\rho_\varepsilon h),$$

то (4.30) переписываем в виде $\big((A_\varepsilon + \rho_\varepsilon)^{-1} \rho_\varepsilon f - (A_0 + 1)^{-1} \rho_\varepsilon f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon \rho_\varepsilon f - \varepsilon (\mathcal{K}_\varepsilon)^* \rho_\varepsilon f, \rho_\varepsilon h\big) \cong 0$. Вспоминая соглашение о равенстве $\cong$ (см. абзац после (4.21)), выводим отсюда оценку

$$\begin{gathered}\|\rho_\varepsilon (A_\varepsilon + 1)^{-1} \rho_\varepsilon f - \rho_\varepsilon (A_0 + 1)^{-1} \rho_\varepsilon f - \varepsilon \rho_\varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon \rho_\varepsilon f - \varepsilon \rho_\varepsilon (\mathcal{K}_\varepsilon)^* \rho_\varepsilon f\| \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|, \\ \mathcal{K}_\varepsilon = N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0 + 1)^{-1}\end{gathered} \tag{4.31}$$

с константой $C = const(d, \lambda, Q)$. Из (4.31) следует (2.17). Теорема 2.1 доказана.

Теперь вспомним, что решение N^j задачи на ячейке (2.7) принадлежит $L^\infty(\square)$. В таком случае корректно определены как элементы пространства $L^2(\mathbb{R}^d)$ функции $N_\varepsilon \cdot \nabla u$ и $N_\varepsilon \cdot \nabla v$, которые получаются из определенных в (4.1) и (4.16) функций U^ε и V^ε, если опускаем сглаживание. В «приближенном» равенстве (4.30) заменяем U^ε и V^ε на $N_\varepsilon \cdot \nabla u$ и $N_\varepsilon \cdot \nabla v$ соответственно, что приводит к допустимой погрешности в силу свойства (3.3) для сглаживания S^ε, а также в силу эллиптических оценок для u и v. Отсюда выводятся последующие оценки с оператором K_ε вместо $\mathcal{K}_\varepsilon$, в том числе (2.18). Теорема 2.2 доказана.

5. Некоторые обсуждения

Сделаем ряд замечаний о постановке исходной и усредненной задач; о нашем методе доказательства и возможности обобщений; о родственных результатах, а также публикациях, которые подвигли написать данную статью.

Замечание 5.1. В классических результатах (см. [1, 8, 12]) усреднения исходной задачи (2.4) характерно выписывать предельное (усредненное) уравнение без какой-либо осцилляции в правой части, т. е. в виде

$$u^0 \in H^1(\mathbb{R}^d, dx), \quad -\operatorname{div}(a^0 \nabla u^0) + u^0 = f. \tag{5.1}$$

Такой принцип усреднения является отражением слабой сходимости мер (2.2): мера $\rho_\varepsilon \, dx$, сосредоточенная на ε-периодическом перфорированном пространстве, имеет пределом меру Лебега dx при $\varepsilon \to 0$.

До работы [34] обычно, если предполагалась минимальная регулярность матрицы коэффициентов $a(\cdot)$ и правой части f в исходном уравнении, близость решений уравнений (2.4) и (5.1) доказывалась в виде сходимости

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} = 0 \tag{5.2}$$

без оценки скорости сходимости, которая имеется в (2.10). Доказательство сходимости (5.2) можно провести различными методами, например, используя компенсированную компактность, или двухмасштабную сходимость, или вариационный метод, близкий к методу Γ-сходимости. С другой стороны, среди классических результатов можно найти оценку погрешности усреднения вида

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} \leqslant C\varepsilon,$$

доказанную при повышенных предположениях о регулярности матрицы $a(\cdot)$, где константа C зависит от высоких соболевских норм $\|u^0\|_{H^k}$, $k \geqslant 3$. Эту оценку нельзя переписать в операторном виде.

Замечание 5.2. Решения уравнений (2.5) и (5.1) близки друг другу при малых ε, например, они связаны слабой сходимостью в $H^1(\mathbb{R}^d)$. В самом деле, вспомним, что решение уравнения (2.5) зависит (через правую часть уравнения) от ε, т. е. $u = u_\varepsilon$; при этом семейство u_ε равномерно ограниченно в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Действительно, по замыканию в интегральное тождество (2.6), где имеем в виду $u = u_\varepsilon$, можно подставить в качестве пробной функции само решение u_ε и получить энергетическое равенство. Тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} (a^0 \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon + |u_\varepsilon|^2) \, dx = (\rho_\varepsilon f, u_\varepsilon) \leqslant \|\rho_\varepsilon f\| \|u_\varepsilon\|$$

(см. обозначения (3.7)), откуда $\|u_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|f\|$, $c = const(\lambda, Q)$. Более того, $u_\varepsilon \rightharpoonup u^0$ в $H^1(\mathbb{R}^d)$, что легко установить предельным переходом в интегральном тождестве (2.6), где $u = u_\varepsilon$. При этом для правой части (2.6) будет наблюдаться сходимость $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon f \varphi \, dx \to \int\limits_{\mathbb{R}^d} f \varphi \, dx$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, поскольку $\rho_\varepsilon \rightharpoonup \langle \rho \rangle = 1$ в $L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ по свойству среднего значения периодической функции (см., например, [8, гл. I, § 1]) и условию нормировки в (2.1).

Замечание 5.3. В том случае, когда коэффициенты и правая часть в уравнении достаточно гладки, классический вариант задачи (2.4) формулируется как краевая задача в перфорированной области $Q_\varepsilon = \{x : \rho_\varepsilon(x) = 1\}$ с условием Неймана на границе «дыр», т. е. на границе ∂Q_ε, причем эта граница имеет ε-периодическую структуру, а задаваемое на ней условие Неймана содержит вектор конормали, естественно, тоже ε-периодический. А именно, классическая формулировка задачи (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon) + u^\varepsilon = f \quad &\text{в} \quad Q_\varepsilon, \\ a_\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nu_\varepsilon = 0 \quad &\text{на} \quad \partial Q_\varepsilon, \end{aligned} \tag{5.3}$$

где ν_ε — внешняя единичная нормаль к границе ∂Q_ε. Принятая в (2.4) обобщенная постановка краевой задачи в перфорированной области (в смысле соответствующего интегрального тождества) позволяет избежать рассмотрения сложного по структуре краевого условия из (5.3) и не упоминать вообще множество Q_ε.

Замечание 5.4. Наша цель в данной работе — показать, что результаты работы [28] и их доказательство, соответствующим образом адаптированные, переносятся на случай уравнения в периодически перфорированной области.

В [28] модифицированным методом первого приближения в версии из [34] доказана операторная L^2-оценка погрешности усреднения с учетом корректора, имеющая порядок ε^2, для эллиптического уравнения во всем пространстве. Такого сорта оценки получены еще в 2005 году в рамках более общих результатов независимо В. В. Жиковым [6], а также М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной [4]. Авторы обеих работ использовали спектральный подход применительно к самосопряженным операторам, основанный на преобразовании Флоке—Блоха, которое ограничивает предложенные методы сугубо для периодических постановок. В последующие годы появились аналогичные оценки для несамосопряженных операторов (см. [22, 23, 32], где также в основе исследования лежит преобразование Флоке—Блоха, позволяющее сводить задачу во всем пространстве к задаче на ячейке).

Долгое время оставался открытым вопрос, можно ли L^2-оценки порядка ε^2 получить методом из работ [5,34]. Написание работы [28] мотивировано публикациями [16,33], в которых изучается операторная L^2-оценка с учетом корректора для эллиптических операторов с локально периодическими коэффициентами, при этом явно или неявно используется модифицированный метод первого приближения.

Наша задача — в серии работ продемонстрировать возможности модифицированного метода первого приближения в версиях [5,34] для доказательства операторных L^2-оценок порядка ε^2 в самых разных ситуациях. Помимо [28], см. к настоящему моменту публикации [29, 30], где охвачены несамосопряженные операторы, соответственно, с локально периодическими или периодическими неограниченными коэффициентами. При этом модифицированный метод первого приближения применялся в [29] в версии [5], а в [30] — в версии [34].

Замечание 5.5. Чтобы доказательство получилось нагляднее и проще для восприятия, мы ограничились в подробном изложении скалярным случаем. При этом рассмотрели уравнение диффузии в классической постановке с симметрической ε-периодической матрицей диффузии в перфорированном пространстве произвольной размерности $d \geqslant 2$ с условием непроницаемости на границе «дыр».

Возможны обобщения в разных направлениях, например, на операторы несамосопряженные или матричные. Особенно интересна для приложений задача теории упругости в перфорированном трехмерном пространстве со свободной от напряжений границей полостей. Эта задача изучена в [34] с точки зрения операторных оценок усреднения, имеющих порядок ε.

Для указанных выше обобщений надо подключать к изложенным здесь идеям конструкции и соображения из опубликованных ранее работ, например, [11,27,34] и других. Кроме того, в [12, гл. I, § 4] показано существование необходимых для задачи теории упругости операторов продолжения, которые удовлетворяют оценкам типа (2.13)-(2.14), где в роли обычного градиента вектор-функции выступает симметрический градиент.

Особенности скалярной несамосопряженной задачи разбираются в разделе 6.

Замечание 5.6. Изучая классическое уравнение диффузии, в основном доказательстве мы не опирались на справедливый в скалярном случае принцип максимума и его следствия. Лишь в самом конце (при выводе теоремы 2.2) указаны упрощения, которые можно сделать в аппроксимациях на основе этого принципа.

Таким образом, упомянутая в замечании 5.5 задача трехмерной теории упругости может быть исследована аналогично, как задача диффузии, и для нее справедлив аналог теоремы 2.1 с более сложным по структуре корректором. Хотя эта задача теории упругости самосопряженная, при анализе слагаемых, аналогичных T_i (см. доказательство в разделе 4), отбрасываемых по модулю равенства $\cong$ членов будет меньше. Как следствие, вклад в корректор от слагаемого, аналогичного T_1, будет более существенным, чем в скалярном случае, изученном подробно в разделе 4. Здесь наблюдается тот же эффект, что и в несамосопряженном случае (см. раздел 6), а именно, «появление третьего члена в корректоре». В этой связи интересен приведенный в [3] конкретный пример плоской задачи теории упругости в слоистой среде, где просчитываются усредненный тензор и все корректоры.

Для системы теории упругости принцип максимума не имеет места; как следствие, решение соответствующей задачи на ячейке (типа задачи (2.7)) не является, вообще говоря, ограниченной функцией. Однако для аналогичной задачи теории упругости в размерности $d = 2$ ограниченность решения все-таки будет наблюдаться, но не по принципу максимума, а по свойству повышенной суммируемости градиента с показателем $p > 2$. Отметим, что это свойство — особенность задачи на ячейке, как в скалярном случае, так и в векторном, в любой размерности. Но только при $d = 2$ свойство повышенной суммируемости градиента дает ограниченность решения задачи на ячейке через теорему вложения Соболева ($W^{1,p}(\square) \subset C^{0,\alpha}(\square)$ для некоторого $\alpha > 0$, если $p > d = 2$). Таким образом, для двумерной системы теории упругости верны аналоги обеих теорем 2.1 и 2.2 со сглаживанием в корректоре и без него.

6. СЛУЧАЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

6.1. Атрибуты усреднения в несамосопряженном случае. Рассмотрим задачу (2.4), когда 1-периодическая измеримая вещественнозначная матрица $a(\cdot)$ не симметрична и удовлетворяет условию

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a\xi\cdot\xi, \quad a\xi\cdot\eta \leqslant \lambda^{-1}|\xi|\,|\eta| \quad \forall \xi,\eta \in \mathbb{R}^d \tag{6.1}$$

для некоторой константы $\lambda > 0$. Тогда оператор A_ε в уравнении (2.4) несамосопряженный. Но по прежнему принципу определяются усредненная задача (2.6), задача на ячейке (2.7), усредненная матрица (2.9), и верны без какого-либо изменения L^2-оценки (2.10) или (2.11). Отличия несамосопряженного случая от самосопряженного начинают проявляться на этапе L^2-оценок с корректором: в (2.17) и (2.18) корректор строится с учетом несамосопряженности, вовлекает при своем построении большее число объектов, становясь более сложным по структуре. В данном разделе мы укажем, какие изменения возникают в формулировке основного результата и его доказательстве в несамосопряженном случае по сравнению с тем, что изложено для самосопряженного случая. Для этого необходимо ввести некоторые новые объекты, связанные с усреднением несамосопряженного уравнения.

Пусть оператор A_ε^* — сопряженный к A_ε. Сопряженным к (2.4) будет уравнение

$$\begin{gathered} v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_\varepsilon^* v^\varepsilon + \rho_\varepsilon v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h, \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ A_\varepsilon^* = -\operatorname{div}(\rho_\varepsilon\, a_\varepsilon^*(x)\nabla), \quad a_\varepsilon^*(x) = a^*(\varepsilon^{-1}x), \end{gathered} \tag{6.2}$$

где a^* — транспонированная к a матрица. В качестве усредненного для (6.2) берется уравнение

$$v \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad A_0^* v + v = -\operatorname{div}(a^0)^*\nabla v + v = \rho_\varepsilon h, \tag{6.3}$$

где участвует сопряженный к A_0 оператор A_0^*, имеющий матрицу $(a^0)^*$, транспонированную к a^0. Таким образом,

$$(a^*)^0 = (a^0)^*, \tag{6.4}$$

т. е. коммутируют операции усреднения и перехода к сопряженной задаче. Подробное объяснение этого правила коммутирования в случае классической задачи усреднения (когда нет перфорации и $\rho \equiv 1$) можно найти в [8].

Тем не менее, введем прямой аналог задачи на ячейке (2.7) для сопряженного уравнения (6.2):

$$\begin{gathered} \tilde N^j \in H^1_{\mathrm{per}}(\square), \quad \operatorname{div}_y \rho(y)a^*(y)(e^j + \nabla_y \tilde N^j) = 0, \\ \langle \rho \tilde N^j\rangle = 0, \quad j = 1,\dots,d. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Через решения задачи (6.5) формально находится усредненная матрица $(a^*)^0$ для сопряженного уравнения (6.2), и для нее можно выписать формулы, аналогичные (2.9). Таким образом, в силу (6.4) имеем равенство

$$(a^0)^* e^j = \langle \rho a^*(e^j + \nabla \tilde N^j)\rangle, \quad j = 1,\dots,d. \tag{6.6}$$

Положим

$$\tilde g^j(y) := \rho(y)a^*(y)\left(\nabla \tilde N^j(y) + e^j\right) - (a^0)^* e^j, \quad j = 1,\dots,d. \tag{6.7}$$

Благодаря (6.5) и (6.6) выполнены соотношения $\operatorname{div} \tilde g^j(y) = 0$, $\langle \tilde g^j\rangle = 0$.

В дальнейшем используются энергетическая и эллиптическая оценки для решений уравнений (6.2) и (6.3):

$$\|v^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|\rho_\varepsilon f\|, \quad c = const(\lambda), \tag{6.8}$$

$$\|v\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\|\rho_\varepsilon f\|, \quad c = const(\lambda). \tag{6.9}$$

6.2. Коррективы в L^2-оценке порядка ε^2. Повторим рассуждения раздела 4.2 с учетом того, что форма (4.13) участвует в интегральном тождестве для решения сопряженного уравнения (6.2), а именно,

$$v^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx), \quad (A_\varepsilon^* + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon = \rho_\varepsilon h, \quad h \in L^2(\mathbb{R}^d), \tag{6.10}$$

если это интегральное тождество, взять на пробной функции $u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon$. Соответствующее усредненное уравнение имеет вид

$$v \in H^1(\mathbb{R}^d), \quad (A_0^* + 1)v = \rho_\varepsilon h, \tag{6.11}$$

и через его решение определяется H^1-приближение к v^ε. Это будет функция

$$v^{,\varepsilon}(x) + \varepsilon V^\varepsilon(x), \quad \text{где } V^\varepsilon(x) = \tilde N_\varepsilon(x) \cdot \nabla v^{,\varepsilon}(x), \quad v^{,\varepsilon}(x) = S^\varepsilon v(x), \tag{6.12}$$

а вектор $\tilde N$ составлен из решений сопряженной задачи на ячейке (6.5). Выполнена оценка

$$\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)} \leqslant c\varepsilon \|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d, \rho_\varepsilon dx)}, \quad c = const(d, \lambda, Q), \tag{6.13}$$

которая есть аналог оценки (4.2).

Цепочка равенств (4.20) начинается с равенства

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, \rho_\varepsilon h) \overset{(6.10)}{=} ((A_\varepsilon^* + \rho_\varepsilon)v^\varepsilon, u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon)$$

и далее продолжается без изменения. В итоге получаем ту же сумму из T_i, что стоит в конце цепочки (4.20). Слагаемые T_i изучаются аналогично, как раньше, но с использованием сопряженных операторов A_ε^*, A_0^*, а также введенных выше функций $\tilde N^j$, $\tilde g^j$, v, V^ε (см. (6.5), (6.7)), (6.11), (6.12) и оценок (6.8), (6.9). Отдельного рассмотрения заслуживает лишь слагаемое T_1, для которого представление (4.28) должно быть пересмотрено.

С учетом несамосопряженного случая в качестве промежуточного представления получим (см. абзац после (4.27)): $T_1 \cong -\varepsilon\langle \tilde N^k g^j\rangle \cdot \Big(\dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \dfrac{\partial v}{\partial x_k}\Big) - \varepsilon \langle \tilde g^k N^j\rangle \cdot \Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, \dfrac{\partial v}{\partial x_k}\Big) - \varepsilon\langle N^j\rangle \Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^*\nabla v\Big)$. В этой сумме первые два слагаемые не компенсируют друг друга, как раньше. Здесь участвуют пары функций $\tilde g^k$ и g^k, а также $\tilde N^k$ и N^k, $k = 1, \ldots, d$, в которых элементы, вообще говоря, не совпадают.

Введем постоянные векторы

$$c^{kj} = \langle N^j \tilde g^k\rangle, \quad \tilde c^{jk} = \langle \tilde N^k g^j\rangle \tag{6.14}$$

и запишем

$$\begin{aligned} T_1 &\cong -\varepsilon \left(\tilde c^{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \nabla \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon \left(c^{kj} \cdot \nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) - \varepsilon \langle N^j\rangle \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^* \nabla v\right) = \\ &= \varepsilon \left(u, \tilde c_i^{jk} \frac{\partial^3 v}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}\right) + \varepsilon \left(c_i^{kj} \frac{\partial^3 u}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}, v\right) - \varepsilon \langle N^j\rangle \left(\nabla \frac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^* \nabla v\right), \end{aligned}$$

т. е. $T_1 \cong \varepsilon(u, \tilde L v) + \varepsilon(Lu, v) - \varepsilon\langle N^j\rangle \Big(\nabla \dfrac{\partial u}{\partial x_j}, (a^0)^*\nabla v\Big)$, где введены дифференциальные операторы третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$L := c_i^{kj} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}, \quad \tilde L := \tilde c_i^{jk} \frac{\partial^3}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}. \tag{6.15}$$

Собрав все существенные составляющие из представления (4.20), получим вместо (4.30), «равенство»

$$(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h) \cong (\rho_\varepsilon f, \varepsilon V^\varepsilon) + \varepsilon\,(Lu, v) + \varepsilon \left(u, \tilde L v\right), \tag{6.16}$$

которое перепишем в операторной форме. Вспомним, что

$$u^\varepsilon = (A_\varepsilon + 1)^{-1}\rho_\varepsilon f, \quad u = (A_0 + 1)^{-1}\rho_\varepsilon f, \quad v = (A_0^* + 1)^{-1}\rho_\varepsilon h,$$

$$U^\varepsilon = N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0 + 1)^{-1}\rho_\varepsilon f =: \mathcal{K}_\varepsilon \rho_\varepsilon f, \quad V^\varepsilon = \tilde N_\varepsilon \cdot S^\varepsilon \nabla (A_0^* + 1)^{-1} \rho_\varepsilon h =: \tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon \rho_\varepsilon h,$$

и введем оператор

$$\mathcal{L} := (A_0 + 1)^{-1}\left(L + \tilde L^*\right)(A_0 + 1)^{-1}, \tag{6.17}$$

где

$$L+\tilde{L}^* \overset{(6.15)}{=} \left(c_i^{kj}-\tilde{c}_i^{jk}\right)\frac{\partial^3}{\partial x_j\partial x_i\partial x_k} \tag{6.18}$$

— дифференциальный оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами. Тогда (6.16) дает

$$\Big((A_\varepsilon+1)^{-1}\rho_\varepsilon f-(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f-\varepsilon\mathcal{K}_\varepsilon\rho_\varepsilon f-\varepsilon(\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^*\rho_\varepsilon f-\varepsilon\mathcal{L}\rho_\varepsilon f,\rho_\varepsilon h\Big)\cong 0. \tag{6.19}$$

Вспоминая соглашение о равенстве $\cong$ (см. абзац после (4.21)), выводим из (6.19) оценку

$$\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+1)^{-1}\rho_\varepsilon f-\rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon f-\varepsilon\rho_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon+(\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^*+\mathcal{L})\rho_\varepsilon f\|\leqslant C\varepsilon^2\|f\|,$$
$$\mathcal{K}_\varepsilon=N_\varepsilon\cdot S^\varepsilon\nabla(A_0+1)^{-1},\quad \tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon=\tilde{N}_\varepsilon\cdot S^\varepsilon\nabla(A_0^*+1)^{-1}$$

с константой $C=const(d,\lambda,Q)$.

Итогом наших рассмотрений в несамосопряженном случае является следующая теорема.

Теорема 6.1. *Справедлива оценка*

$$\|\rho_\varepsilon(A_\varepsilon+\rho_\varepsilon)^{-1}\rho_\varepsilon-\rho_\varepsilon(A_0+1)^{-1}\rho_\varepsilon-\varepsilon\rho_\varepsilon(\mathcal{K}_\varepsilon+(\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^*+\mathcal{L})\rho_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\varepsilon^2, \tag{6.20}$$

где $\mathcal{K}_\varepsilon=N_\varepsilon\cdot S^\varepsilon\nabla(A_0+1)^{-1}$, $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon=\tilde{N}_\varepsilon\cdot S^\varepsilon\nabla(A_0^*+1)^{-1}$, *оператор* $\mathcal{L}$ *определен в* (6.17), (6.18), (6.15); *константа* C *зависит только от размерности* d, *постоянной эллиптичности* λ *из условия* (6.1) *и* 1*-периодической перфорированной области* Q.

Заметим, что коэффициенты операторов (6.15) вычисляются по формулам (6.14), а значит, определяются лишь решениями задач на ячейке (2.7) и (6.5).

В скалярном случае решения N^j и $\tilde{N}^j$ задач на ячейке (2.7) и (6.5) принадлежат $L^\infty(\square)$ в силу обобщенного принципа максимума. Как следствие, в операторах $\mathcal{K}_\varepsilon$ и $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon$ можно опустить сглаживание, так что оценка (6.20) верна, если оператор $\mathcal{K}_\varepsilon$ заменить на $K_\varepsilon=N_\varepsilon\cdot\nabla(A_0+1)^{-1}$, а оператор $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon$ заменить на $\tilde{K}_\varepsilon=\tilde{N}_\varepsilon\cdot\nabla(A_0^*+1)^{-1}$.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ О СГЛАЖИВАНИИ

Доказательство леммы 3.3. Пусть для простоты обозначений

$$\tilde{\varphi}(x):=S^\varepsilon\varphi(x)=\int\limits_{\square}\varphi(x-\varepsilon\omega)\,d\omega,\quad \tilde{\psi}(x):=S^\varepsilon\psi(x)=\int\limits_{\square}\psi(x-\varepsilon\sigma)\,d\sigma. \tag{7.1}$$

Тогда надо оценить сверху форму $I:=(b_\varepsilon\tilde{\varphi},\tilde{\psi})$. Стандартные преобразования дают

$$I=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}b(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x-\varepsilon\omega)\tilde{\psi}(x)\,d\omega\,dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\tilde{\psi}(x+\varepsilon\omega)\,d\omega\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\left(\tilde{\psi}(x+\varepsilon\omega)-\tilde{\psi}(x)\right)\,d\omega\,dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\int\limits_0^1\nabla\tilde{\psi}(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,dt\,d\omega\,dx=$$
$$=\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\nabla\tilde{\psi}(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,dx\,dt.$$

Здесь использовали, во-первых, условие $\langle b\rangle=0$ и свойство стационарности периодической функции: $\int\limits_{\square}b\Big(\frac{x}{\varepsilon}+\omega\Big)\,d\omega=\langle b\rangle$ для любого x и ε, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\tilde{\psi}(x)\,d\omega\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\left(\int\limits_{\square}b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\,d\omega\right)\varphi(x)\tilde{\psi}(x)\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^d}\langle b\rangle\varphi(x)\tilde{\psi}(x)\,dx=0;$$

а во-вторых, представление

$$\tilde{\psi}(x+h)-\tilde{\psi}(x)=\int\limits_0^1 \nabla\tilde{\psi}(x+th)\cdot h\,dt. \tag{7.2}$$

Теперь вспомним определение $\tilde{\psi}(x)$ в (7.1) и продолжим стандартные преобразования:

$$\begin{aligned}
I&=\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega)\varphi(x)\nabla\psi(x-\varepsilon\sigma+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt=\\
&=\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt=\\
&=\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\left(\varphi(x+\varepsilon\sigma)-\varphi(x)\right)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt=\\
&=\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\left(\int\limits_0^1\nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\varepsilon\sigma\,ds\right)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt=\\
&=\varepsilon^2\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\left(\nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\sigma\right)\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\omega\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds,
\end{aligned}$$

где снова использовали свойство $\langle b\rangle=0$ и интегральное представление для $\varphi(x+\varepsilon\sigma)-\varphi(x)$, аналогичное (7.2). Применяя к последнему многомерному интегралу неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned}
I^2\leqslant\varepsilon^4&\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square}|b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)|^2|\nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\sigma|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds\times\\
&\times\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square}|\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\omega|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds,
\end{aligned}\tag{7.3}$$

где оба интегральных множителя легко оцениваются, так что

$$I^2\leqslant\varepsilon^4C\langle|b|^2\rangle\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},\quad C=const(d). \tag{7.4}$$

Отсюда следует оценка (3.9). Лемма доказана. □

Доказательство леммы 3.4. При выводе оценки (3.10) можно считать, что $\varphi,\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, и, рассматривая осциллирующий множитель $b=\alpha\beta$, повторим стандартные преобразования формы I из предыдущего доказательства до этапа (7.3). Прежде чем применить неравенство Гельдера, вспомним, что $b=\alpha\beta$ и распределим функции α и β в разные интегральные множители. Таким образом, получим вместо (7.3) неравенство

$$\begin{aligned}
I^2\leqslant\varepsilon^4&\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square}|\alpha(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)|^2|\nabla\varphi(x+s\varepsilon\sigma)\cdot\sigma|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds\times\\
&\times\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square}|\beta(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)|^2|\nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\omega|^2\,d\omega\,d\sigma\,dx\,dt\,ds,
\end{aligned}$$

где оба интегральных множителя легко оценивается. В итоге вместо (7.4) доказываем неравенство $I^2\leqslant\varepsilon^4C\langle|\alpha|^2\rangle\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\langle|\beta|^2\rangle\|\nabla\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, $C=const(d)$, эквивалентное (3.10). □

Доказательство леммы 3.5. Поступая аналогично, как при доказательстве леммы 3.3, записываем следующее представление, полагая $b = \alpha\beta$:

$$I := (\alpha_\varepsilon S^\varepsilon \varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon \psi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon})\varphi(x-\varepsilon\omega)\psi(x-\varepsilon\sigma)\,d\omega\,d\sigma\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\psi(x+\varepsilon\omega)\,d\omega\,d\sigma\,dx.$$

Поскольку $\psi(x+\varepsilon\omega) = \psi(x) + (\psi(x+\varepsilon\omega) - \psi(x))$, имеем $I = I_1 + I_2$, где

$$I_1 := \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\psi(x)\,d\omega\,d\sigma\,dx = \langle b\rangle \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square} \varphi(x+\varepsilon\sigma)\psi(x)\,d\sigma\,dx =$$

$$= \langle b\rangle \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square} \varphi(x)\psi(x-\varepsilon\sigma)\,d\sigma\,dx = \langle b\rangle(\varphi, S^\varepsilon\psi)$$

в силу стационарности периодической функции и по определению оператора сглаживания S^ε (см. (3.1)),

$$I_2 := \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)(\psi(x+\varepsilon\omega)-\psi(x))\,d\omega\,d\sigma\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\square}\int\limits_{\square} b(\frac{x}{\varepsilon}+\omega+\sigma)\varphi(x+\varepsilon\sigma)\int\limits_0^1 \nabla\psi(x+t\varepsilon\omega)\cdot\varepsilon\omega\,dt\,d\omega\,d\sigma\,dx$$

в силу интегральной формулы (7.2). Используя те же соображения, что и при доказательстве леммы 3.4, можно утверждать, что $I_2 \leqslant C\varepsilon\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Что касается I_1, очевидна его запись в виде суммы $I_1 = \langle b\rangle(\varphi,\psi) + \langle b\rangle(\varphi, S^\varepsilon\psi - \psi)$, где второе слагаемое имеет оценку $\langle b\rangle(\varphi, S^\varepsilon\psi - \psi) \leqslant C\varepsilon\langle\alpha^2\rangle^{1/2}\langle\beta^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|$, $C = const(d)$, по свойству сглаживания. Из полученных оценок следует (3.11). Лемма доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. *Беляев А. Ю.* Усреднение в задачах фильтрации. — М.: Наука, 2004.
3. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 5. — С. 1–108.
4. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 6. — С. 1–104.
5. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 3. — С. 305–308.
6. *Жиков В. В.* О спектральном методе в теории усреднения// Тр. МИАН. — 2005. — *250*. — С. 95–104.
7. *Жиков В. В.* О некоторых оценках из теории усреднения// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 5. — С. 597–601.
8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
9. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Усреднение вырождающихся эллиптических уравнений// Сиб. мат. ж. — 2008. — *49*, № 1. — С. 101–124.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е., Тихомирова С. В.* Об усреднении вырождающихся эллиптических уравнений// Докл. РАН. — 2006. — *410*, № 5. — С. 587–591.
11. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 3–98.
12. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические основы сильно неоднородных упругих сред. — М.: МГУ, 1990.
13. *Пастухова С. Е.* О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости// Докл. РАН. — 2006. — *406*, № 5. — С. 604–608.
14. *Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н.* Операторные оценки повторного и локально периодического усреднения// Докл. РАН. — 2007. — *415*, № 3. — С. 304–305.

15. *Пастухова С. Е., Тихомирова С. В.* Эллиптическое уравнение с несимметрической матрицей. Усреднение «вариационных решений»// Мат. заметки. — 2007. — *81*, № 4. — С. 631–635.
16. *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов// Функц. анализ и его прилож. — 2017. — *51*, № 2. — С. 92–96.
17. *Acerbi E., Chiado Piat V., Dal Maso G., Percivale D.* An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains// Nonlinear Anal. — 1992. — *18*, № 5. — С. 481–496.
18. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structures. — Amsterdam: North Holland, 1978.
19. *Cardone G., Pastukhova S. E., Zhikov V. V.* Some estimates for nonlinear homogenization// Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. — 2005. — *29*. — С. 101–110.
20. *Pastukhova S. E.* Operator estimates in nonlinear problems of reiterated homogenization// Proc. Steklov Inst. Math. — 2008. — *261*. — С. 214–228.
21. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients// Asymptot. Anal. — 2010. — *66*. — С. 207–228.
22. *Pastukhova S. E.* Approximations of the operator exponential in a periodic diffusion problem with drift// Sb. Math. — 2013. — *204*, № 2. — С. 280–306.
23. *Pastukhova S. E.* Approximations of the resolvent for a non-self-adjoint diffusion operator with rapidly oscillating coefficients// Math. Notes. — 2013. — *94*. — С. 127–145.
24. *Pastukhova S. E.* Approximation of the exponential of a diffusion operator with multiscale coefficients// Funct. Anal. Appl. — 2014. — *48*, № 3. — С. 183–198.
25. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators// Appl. Anal. — 2016. — *95*. — С. 1449–1466.
26. *Pastukhova S. E.* Operator error estimates for homogenization of fourth order elliptic equations// St. Petersburg Math. J. — 2017. — *28*. — С. 273—289.
27. *Pastukhova S. E.* Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2017. — *226*, № 4. — С. 445–461.
28. *Pastukhova S. E.* L^2-estimates for homogenization of elliptic operators// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2020. — *244*, № 4. — С. 671–685.
29. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — С. 814–834.
30. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients// ArXiv. — 2020. — 2001.01701 [math.AP].
31. *Pastukhova S. E., Tikhomirov R. N.* Operator-type estimates in homogenization of elliptic equations with lower order terms// St. Petersburg. Math. J. — 2018. — *29*. — С. 841–861.
32. *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder// SIAM J. Math. Anal. — 2017. — *49*. — С. 874–898.
33. *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators// ArXiv. — 2017. — 1703.02023v2 [math.AP].
34. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 515–524.
35. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *13*, № 4. — С. 224–237.
36. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Homogenization estimates of operator type for an elliptic equation with quasiperiodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — *22*, № 4. — С. 264–278.

С. Е. Пастухова
Российский технологический университет (МИРЭА), Москва, Россия
E-mail: `pas-se@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-314-334 UDC 517.97

Resolvent Approximations in L^2-Norm for Elliptic Operators Acting in a Perforated Space

© 2020 **S. E. Pastukhova**

Abstract. We study homogenization of a second-order elliptic differential operator $A_\varepsilon = -\operatorname{div} a(x/\varepsilon)\nabla$ acting in an ε-periodically perforated space, where ε is a small parameter. Coefficients of the operator A_ε are measurable ε-periodic functions. The simplest case where coefficients of the operator are constant is also interesting for us. We find an approximation for the resolvent $(A_\varepsilon + 1)^{-1}$ with remainder term of order ε^2 as $\varepsilon \to 0$ in operator L^2-norm on the perforated space. This approximation turns to be the sum of the resolvent $(A_0 + 1)^{-1}$ of the homogenized operator $A_0 = -\operatorname{div} a^0\nabla$, $a^0 > 0$ being a constant matrix, and some correcting operator $\varepsilon\mathcal{C}_\varepsilon$. The proof of this result is given by the modified method of the first approximation with the usage of the Steklov smoothing operator.

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Homogenization of Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
2. A. Yu. Belyaev, *Usrednenie v zadachakh fil'tratsii* [Homogenization in Filtration Problems], Nauka, Moscow, 2004 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Periodicheskie differentsial'nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva usredneniya" [Periodic second-order differential operators: threshold homogenization properties], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 5, 1–108 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Usrednenie periodicheskikh ellipticheskikh differentsial'nykh operatorov s uchetom korrektora" [Homogenization of periodic elliptic differential operators with a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 6, 1–104 (in Russian).
5. V. V. Zhikov, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in the homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305–308 (in Russian).
6. V. V. Zhikov, "O spektral'nom metode v teorii usredneniya" [On the spectral method in homogenization theory], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 95–104 (in Russian).
7. V. V. Zhikov, "O nekotorykh otsenkakh iz teorii usredneniya" [On some estimates in the homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **406**, No. 5, 597–601 (in Russian).
8. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
9. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Usrednenie vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy" [Homogenization of degenerating elliptic equations], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2008, **49**, No. 1, 101–124 (in Russian).
10. V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, and S. V. Tikhomirova, "Ob usrednenii vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy" [On homogenization of degenerating elliptic equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **410**, No. 5, 587–591 (in Russian).
11. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 3–98 (in Russian).
12. O. A. Oleynik, G. A. Iosif'yan, and A. S. Shamaev, *Matematicheskie osnovy sil'no neodnorodnykh uprugikh sred* [Mathematical Fundamentals of Strongly Nonhomogeneous Elastic Media], MGU, Moscow, 1990 (in Russian).

---

13. S. E. Pastukhova, "O nekotorykh otsenkakh iz usredneniya zadach teorii uprugosti" [On some estimates from homogenization of problems of elasticity theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **406**, No. 5, 604–608 (in Russian).
14. S. E. Pastukhova and R. N. Tikhomirov, "Operatornye otsenki povtornogo i lokal'no periodicheskogo usredneniya" [Operator estimates in reiterated and locally periodic homogenization], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **415**, No. 3, 304–305 (in Russian).
15. S. E. Pastukhova and S. V. Tikhomirova, "Ellipticheskoe uravnenie s nesimmetricheskoy matritsey. Usrednenie «variatsionnykh resheniy»" [Elliptic equation with nonsymmetric matrix: homogenization of «variational solutions»], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **81**, No. 4, 631–635 (in Russian).
16. N. N. Senik, "Ob usrednenii nesamosopryazhennykh lokal'no periodicheskikh ellipticheskikh operatorov" [On homogenization of non-self-adjoint locally periodic elliptic operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2017, **51**, No. 2, 92–96 (in Russian).
17. E. Acerbi, V. Chiado Piat, G. Dal Maso, and D. Percivale, "An extension theorem from connected sets, and homogenization in general periodic domains," *Nonlinear Anal.*, 1992, **18**, No. 5, 481–496.
18. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, North Holland, Amsterdam, 1978.
19. G. Cardone, S. E. Pastukhova, and V. V. Zhikov, "Some estimates for nonlinear homogenization," *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl.*, 2005, **29**, 101–110.
20. S. E. Pastukhova, "Operator estimates in nonlinear problems of reiterated homogenization," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, **261**, 214–228.
21. S. E. Pastukhova, "Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients," *Asymptot. Anal.*, 2010, **66**, 207–228.
22. S. E. Pastukhova, "Approximations of the operator exponential in a periodic diffusion problem with drift," *Sb. Math.*, 2013, **204**, No. 2, 280–306.
23. S. E. Pastukhova, "Approximations of the resolvent for a non-self-adjoint diffusion operator with rapidly oscillating coefficients," *Math. Notes*, 2013, **94**, 127–145.
24. S. E. Pastukhova, "Approximation of the exponential of a diffusion operator with multiscale coefficients," *Funct. Anal. Appl.*, 2014, **48**, No. 3, 183–198.
25. S. E. Pastukhova, "Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators," *Appl. Anal.*, 2016, **95**, 1449–1466.
26. S. E. Pastukhova, "Operator error estimates for homogenization of fourth order elliptic equations," *St. Petersburg Math. J.*, 2017, **28**, 273—289.
27. S. E. Pastukhova, "Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2017, **226**, No. 4, 445–461.
28. S. E. Pastukhova, "L^2-estimates for homogenization of elliptic operators," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2020, **244**, No. 4, 671–685.
29. S. E. Pastukhova, "On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients," *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 814–834.
30. S. E. Pastukhova, "On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients," *ArXiv*, 2020, 2001.01701 [math.AP].
31. S. E. Pastukhova and R. N. Tikhomirov, "Operator-type estimates in homogenization of elliptic equations with lower order terms," *St. Petersburg. Math. J.*, 2018, **29**, 841–861.
32. N. N. Senik, "Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder," *SIAM J. Math. Anal.*, 2017, **49**, 874–898.
33. N. N. Senik, "Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators," *ArXiv*, 2017, 1703.02023v2 [math.AP].
34. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "On operator estimates for some problems in homogenization theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.
35. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients," *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **13**, No. 4, 224–237.
36. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Homogenization estimates of operator type for an elliptic equation with quasiperiodic coefficients," *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 264–278.

S. E. Pastukhova
Russian Technological University (MIREA), Moscow, Russia
E-mail: `pas-se@yandex.ru`