Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 292–313

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-292-313 УДК 517.957

К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. **Е. Ю. ПАНОВ**

Аннотация. Рассматривается нелинейное вырождающееся параболического уравнение второго порядка в случае, когда вектор потока и нестрого возрастающая функция диффузии лишь непрерывны. При нулевой диффузии это уравнение вырождается в квазилинейное уравнение первого порядка (закон сохранения). Известно, что в рассматриваемом общем случае энтропийное решение (в смысле Кружкова—Карильо) задачи Коши может быть неединственно. Поэтому актуально исследование специальных энтропийных решений задачи Коши и нахождение дополнительных условий на входные данные задачи, достаточных для единственности. В работе получен ряд новых результатов в этом направлении. Именно, доказано существование наибольшего и наименьшего энтропийного решения задачи Коши. С помощью этого результата установлена единственность энтропийного решения с периодическими начальными данными. Более обще, доказан принцип сравнения для энтропийных суб- и суперрешений в случае, когда хотя бы одна из начальных функций является периодической. Полученные результаты обобщают на параболический случай результаты, известные для законов сохранения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В полупространстве $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) = 0, \tag{1.1}$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ и функция диффузии $g(u)$ предполагаются лишь непрерывными: $\varphi_i(u) \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, $g(u) \in C(\mathbb{R})$, причем функция $g(u)$ нестрого возрастает. Поскольку $g(u)$ может быть постоянной на нетривиальных интервалах, уравнение (1.1) вырождающееся (гиперболически-параболическое). В частном случае $g \equiv \mathrm{const}$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0. \tag{1.2}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.3}$$

Работа выполнена при поддержке Программы РУДН «5-100», Министерства науки и образования РФ (проект 1.445.2016/1.4) и РФФИ (грант 18-01-00258-а).

Напомним понятие энтропийного решения (а заодно введем понятия энтропийных суб- и суперрешений) задачи (1.1), (1.3) в смысле Карильо [10]. Пусть $v^+ = \max(v, 0)$,

$$H(v) = \operatorname{sign}^+ v = \begin{cases} 1, & v > 0, \\ 0, & v \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{— функция Хевисайда.}$$

Определение 1.1. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным субрешением* (коротко — *э.субр.*) задачи (1.1), (1.3), если обобщенный градиент $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, для всех $k \in \mathbb{R}$

$$((u-k)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \Delta_x((g(u) - g(k))^+) \leqslant 0 \tag{1.4}$$

в смысле распределений на Π (в $\mathcal{D}'(\Pi)$) и

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(u(t,x) - u_0(x))^+ = 0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.5}$$

Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным суперрешением* (*э.суперр.*) задачи (1.1), (1.3), если $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, для всех $k \in \mathbb{R}$

$$((k-u)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(k-u)(\varphi(k) - \varphi(u))] - \Delta_x((g(k) - g(u))^+) \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{1.6}$$

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}(u_0(x) - u(t,x))^+ = 0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.7}$$

Наконец, функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным решением* (*э.р.*) задачи (1.1), (1.3), если эта функция э.субр. и э.суперр. этой задачи.

Энтропийное условие (1.4) означает, что для любой пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $f \geqslant 0$,

$$\int_\Pi H(u-k)\{(u-k)f_t + [\varphi(u) - \varphi(k) - \nabla_x g(u)] \cdot \nabla_x f\}dtdx =$$

$$= \int_\Pi \{(u-k)^+ f_t + H(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))^+ \Delta_x f\}dtdx \geqslant 0 \tag{1.8}$$

(здесь и ниже мы обозначаем через «$\cdot$» скалярное умножение конечномерных векторов). Аналогично понимается энтропийное условие (1.6).

На самом деле в статье [10] понятие э.р. было введено независимо от понятий э.субр. и э.суперр. в смысле следующего определения.

Определение 1.2. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *э.р.* задачи (1.1), (1.3), если $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, для всех $k \in \mathbb{R}$

$$|u-k|_t + \operatorname{div}_x[\operatorname{sign}(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \Delta_x|g(u) - g(k)| \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{1.9}$$

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+}|u(t,x) - u_0(x)| = 0 \ \text{ в } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

Для доказательства эквивалентности определений 1.1 и 1.2 заметим сначала, что соотношение (1.9) получается при сложении (1.4) и (1.6). Аналогично, (1.10) следует из начальных условий (1.5) и (1.7) путем их суммирования. Обратно, если функция u удовлетворяет условию (1.9), то подставив в это условие $k = \pm M$, где $M \geqslant \|u\|_\infty$, получим, что

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) = 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{1.11}$$

т. е. u — слабое решение уравнения (1.1). С помощью тождеств $2v^+ = |v| + v$, $2H(v) = \operatorname{sign} v + 1$, где $v = \pm(u-k)$, условия (1.4), (1.6) вытекают из (1.9) и (1.11). Наконец, ввиду очевидного соотношения $|u - u_0| = (u-u_0)^+ + (u_0 - u)^+$, начальные условия (1.5), (1.7) следуют из (1.10).

В случае законов сохранения (1.2) понятие э.р. задачи (1.2), (1.3) совпадает с известным понятием обобщенного энтропийного решения в смысле Кружкова [1]. Известно, что э.р. задачи (1.1), (1.3) всегда существует, но в многомерном случае $n > 1$ может быть не единственным. Для законов сохранения (1.2) соответствующие примеры содержатся в [2,11]. Заметим, что в случае $\varphi(u) \in C^1(\mathbb{R})$ единственность хорошо известна. Некоторые достаточные условия единственности, обобщающие результаты [11], были найдены в [8].

Замечание 1.1.

(i) Как непосредственно следует из определений, функция $u = u(t,x)$ является э.суперр. задачи (1.1), (1.3) тогда и только тогда, когда функция $-u$ является э.субр. задачи

$$u_t - \operatorname{div}_x \varphi(-u) - \Delta(-g(-u)) = 0, \quad u(0,x) = -u_0(x). \tag{1.12}$$

(ii) Подставив в (1.4) значение $k = -\|u\|_\infty$, получим что э.субр. $u = u(t,x)$ удовлетворяет соотношению

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi). \tag{1.13}$$

Аналогично, подставив в (1.6) $k = \|u\|_\infty$, приходим к соотношению

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u) \geqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi). \tag{1.14}$$

Из (1.13) и (1.14) следует уже отмеченное свойство, что э.р. уравнения (1.1) удовлетворяет этому уравнению в $\mathcal{D}'(\Pi)$, т. е. является слабым решением.

Естественно называть функцию $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$, такую что $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, *слабым субр.* (соответственно — *слабым суперр.*) задачи (1.1), (1.3), если u удовлетворяет условиям (1.13), (1.5) (соответственно — (1.14), (1.7)).

Основные результаты работы содержатся в следующих трех теоремах.

Теорема 1.1. *Существуют единственные наибольшее э.р. $u_+(t,x)$ и наименьшее э.р. $u_-(t,x)$ задачи* (1.1), (1.3), *причем $u_-(t,x) \leqslant u_+(t,x)$. Эти решения являются, соответственно, наибольшим э.субр. и наименьшим э.суперр. задачи* (1.1), (1.3).

Заметим, что существование наибольшего э.субр. и наименьшего э.суперр. доказано другими методами в недавней работе [14], в которой, впрочем, не было установлено, что эти функции являются также и э.р.

Наибольшее и наименьшее э.р. удовлетворяют свойству монотонной и непрерывной (в L^1-норме) зависимости от начальных данных. Точнее, справедлив следующий результат:

Теорема 1.2. *Пусть u_{1+}, u_{2+} — наибольшие э.р. задачи* (1.1), (1.3) *с начальными функциями u_{10}, u_{20}. Тогда для п.в. $t > 0$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_{1+}(t,x) - u_{2+}(t,x))^+ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

Аналогичное свойство верно и для наименьших э.р. u_{1-} и u_{2-}: для п.в. $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_{1-}(t,x) - u_{2-}(t,x))^+ dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

С помощью теоремы 1.1 устанавливается следующий *принцип сравнения*.

Теорема 1.3. *Предположим, что функции $u = u(t,x)$, $v = v(t,x)$ являются, соответственно, э.субр. и э.суперр. задачи* (1.1), (1.3) *с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$, причем $u_0(x) \leqslant v_0(x)$. Если по крайней мере одна из начальных функций периодическая, то $u(t,x) \leqslant v(t,x)$ п.в. в Π.*

Ясно, что из принципа сравнения вытекает единственность э.р. задачи (1.1), (1.3) с периодическими начальными данными.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Полезно переформулировать понятие э.субр. задачи (1.1), (1.3) в виде единого интегрального неравенства.

Предложение 2.1. *Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$, такая что $\nabla_x g(u) \in L^2_{loc}(\Pi, \mathbb{R}^n)$, является э.субр. задачи* (1.1), (1.3) *тогда и только тогда, когда для всех $k \in \mathbb{R}$ и любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, где $\bar{\Pi} = [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n$, справедливо неравенство*

$$\int_\Pi H(u-k)[(u-k)f_t + (\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x f + (g(u)-g(k))\Delta_x f]dtdx + \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x)-k)^+ f(0,x)dx \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть E состоит из таких значений $t > 0$, что (t, x) является точкой Лебега функции $u(t, x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Известно (см., например, [13, Lemma 1.2]), что E — множество полной меры и что $t \in E$ — общая точка Лебега функций $t \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t, x)b(x)dx$, где $b(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Так как точка Лебега функции u является также точкой Лебега и композиции $p(u)$ для любой непрерывной функции $p \in C(\mathbb{R})$ (здесь нужно принять во внимание ограниченность $u = u(t, x)$), мы можем заменить u в указанном выше свойстве на $p(u)$ и, в частности, на $(u - k)^+$, $k \in \mathbb{R}$. Выберем функцию $\omega(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами $\omega(s) \geqslant 0$, $\operatorname{supp}\omega \subset [0, 1]$, $\int \omega(s)ds = 1$ и определим последовательности $\omega_r(s) = r\omega(rs)$, $\theta_r(s) = \int\limits_{-\infty}^{s} \omega_r(\sigma)d\sigma = \int\limits_{-\infty}^{rs} \omega(\sigma)d\sigma$, $r \in \mathbb{N}$. Очевидно, последовательность $\omega_r(s)$ сходится при $r \to \infty$ к δ-мере Дирака слабо в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, а последовательность $\theta_r(s)$ сходится к функции Хевисайда $H(s)$ поточечно, а также и в $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Заметим, что $0 \leqslant \theta_r(s) \leqslant 1$. Пусть $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, $f \geqslant 0$, и $t_0 \in E$. Применяя (1.4) к неотрицательной пробной функции $\theta_r(t - t_0)f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, приходим к соотношению

$$\int\limits_{\Pi} (u - k)^+ \omega_r(t - t_0) f dtdx + \\ + \int\limits_{\Pi} H(u - k)[(u - k)f_t + (\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))\Delta_x f]\theta_r(t - t_0)dtdx \geqslant 0. \quad (2.2)$$

Так как

$$\int\limits_{\Pi} (u - k)^+ \omega_r(t - t_0) f dtdx = \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - k)^+ f(t, x)dx \right) \omega_r(t - t_0)dt,$$

в то время как t_0 — точка Лебега функции $t \to \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - k)^+ f(t, x)dx$, из (2.2) в пределе при $r \to \infty$ следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - k)^+ f(t_0, x)dx + \\ + \int\limits_{(t_0, +\infty)\times\mathbb{R}^n} H(u - k)[(u - k)f_t + (\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))\Delta_x f]dtdx \geqslant 0. \quad (2.3)$$

Перейдем в (2.3) к пределу при $E \ni t_0 \to 0$. Так как $(u(t, x) - k)^+ \leqslant (u_0(x) - k)^+ + (u(t, x) - u_0(x))^+$, получим, что

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - k)^+ f(t_0, x)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^+ f(0, x)dx + \\ + \lim_{E\ni t_0\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - u_0(x))^+ f(t_0, x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^+ f(0, x)dx,$$

где мы учитываем начальное условие (1.5). С помощью этого соотношения требуемое неравенство (2.1) следует из (2.3) в пределе при $E \ni t_0 \to 0$.

Обратно, допустим, что соотношение (2.1) выполнено. Из этого соотношения в случае неотрицательной финитной пробной функции $f \in C_0^\infty(\Pi)$ следует, что

$$\int\limits_{\Pi} H(u - k)[(u - k)f_t + (\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + (g(u) - g(k))\Delta_x f]dtdx \geqslant 0.$$

Это означает, что $((u - k)^+)_t + \operatorname{div}_x[H(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \Delta_x((g(u) - g(k))^+) \leqslant 0$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$, и энтропийное условие (1.4) выполнено. Остается проверить начальное условие (1.5) определения 1.1. Фиксируем неотрицательную функцию $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и рассмотрим пробную функцию

$f = h(x)(1-\theta_r(t-t_0))$, где $t_0 \in E$. Применив (2.1) к пробной функции f, получим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+h(x)dx - \int_\Pi (u(t,x)-k)^+\omega_r(t-t_0)hdtdx +$$
$$+ \int_{(0,t_0+1/r)\times\mathbb{R}^n} H(u-k)[(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla h + (g(u)-g(k))\Delta h](1-\theta_r(t-t_0))dtdx \geqslant 0.$$

В пределе при $r\to\infty$ из этого соотношения следует неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+h(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-k)^+h(x)dx +$$
$$+ \int_{(0,t_0)\times\mathbb{R}^n} H(u-k)[(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla h + (g(u)-g(k))\Delta h]dtdx \geqslant 0,$$

из которого в пределе при $E\ni t_0\to 0$ следует, что

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-k)^+h(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+h(x)dx. \tag{2.4}$$

Ясно, что (2.4) верно и для неотрицательных суммируемых функций $h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Фиксируем $\varepsilon>0$. Так как $u_0(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, найдется ступенчатая функция $v(x)=\sum\limits_{i=1}^m v_i\chi_{A_i}(x)$, где $v_i\in\mathbb{R}$, а $\chi_{A_i}(x)$ — характеристические функции измеримых множеств $A_i\subset\mathbb{R}^n$, такая что $\|u_0-v\|_\infty<\varepsilon$. Можно считать множества A_i, $i=1,\dots,m$, дизъюнктными. Ввиду (2.4)

$$\limsup_{E\ni t_0\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-v(x))^+h(x)dx = \limsup_{E\ni t_0\to 0}\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-v_i)^+\chi_{A_i}(x)h(x)dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-v_i)^+\chi_{A_i}(x)h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-v(x))^+h(x)dx \leqslant \varepsilon\|h\|_1. \tag{2.5}$$

Поскольку $(u(t_0,x)-u_0(x))^+ \leqslant (u(t_0,x)-v(x))^+ + (v(x)-u_0(x))^+ < (u(t_0,x)-v(x))^+ + \varepsilon$, из (2.5) следует, что $\limsup_{E\ni t_0\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-u_0(x))^+h(x)dx \leqslant 2\varepsilon\|h\|_1$, и ввиду произвольности $\varepsilon>0$ получаем, что $\lim\limits_{E\ni t_0\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t_0,x)-u_0(x))^+h(x)dx = 0$ для всех $h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, откуда вытекает желаемое соотношение $\operatorname{ess}\lim_{t\to 0+}(u(t,x)-u_0(x))^+=0$ в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Для э.суперр. u интегральное неравенство (2.1) следует заменить на следующий его аналог:

$$\int_\Pi H(k-u)[(k-u)f_t+(\varphi(k)-\varphi(u))\cdot\nabla_x f+(g(k)-g(u))\Delta_x f]dtdx+\int_{\mathbb{R}^n}(k-u_0(x))^+f(0,x)dx\geqslant 0 \tag{2.6}$$

$\forall k\in\mathbb{R}$, $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\bar\Pi)$, $f\geqslant 0$. Это соотношение эквивалентно (2.1) для задачи (1.12), и с учетом замечания 1.1 (i) из предложения 2.1 следует, что условие (2.6) эквивалентно (1.6), (1.7). Складывая (2.1), (2.6) в случае э.р. $u=u(t,x)$, получим, что для любой $f\in C_0^\infty(\bar\Pi)$, $f\geqslant 0$

$$\int_\Pi \operatorname{sign}(u-k)[(u-k)f_t+(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x f+(g(u)-g(k))\Delta_x f]dtdx+\int_{\mathbb{R}^n}|u_0(x)-k|f(0,x)dx\geqslant 0. \tag{2.7}$$

Так же, как в предложении 2.1, доказывается, что (2.1) эквивалентно соотношениям (1.9), (1.10).

Нам потребуются некоторые полезные априорные оценки э.субр.

Предложение 2.2. *Если $u=u(t,x)$ является э.субр. задачи* (1.1), (1.3), *то* $\forall k\in\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(u(t,x)-k)^+dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}(u_0(x)-k)^+dx \tag{2.8}$$

для п.в. $t>0$.

Доказательство. Пусть $M = \|u\|_\infty$. Заметим, что неравенство (2.8) нетривиально только в случае, когда $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^+ dx < +\infty$, что и будем далее предполагать. Рассмотрим сначала случай $k = 0$. Обозначим при $m \geqslant n$, $\delta > 0$

$$\alpha(s) = \min((s^+)^m, 1),\ \beta(k) = \alpha(k/\delta),\ \eta(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \beta(k)dk = \begin{cases} 0, & u \leqslant 0, \\ \dfrac{u^{m+1}}{(m+1)\delta^m}, & 0 < u \leqslant \delta, \\ u - \dfrac{m\delta}{m+1}, & u > \delta, \end{cases}$$

и проинтегрируем (2.1) по неотрицательной конечной мере $\beta'(k)dk$. Учитывая тождество

$$\int (u-k)^+ \beta'(k)dk = \int\limits_0^u \beta(k)dk = \eta(u),$$

получим, что для любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$

$$\int\limits_{\Pi} [\eta(u) f_t + \psi(u) \cdot \nabla_x f + h(u) \Delta_x f] dt dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0,x) dx \geqslant 0, \tag{2.9}$$

где $\psi(u) = \int\limits_0^u (\varphi(u) - \varphi(k))\beta'(k)dk \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, $h(u) = \int\limits_0^u (g(u) - g(k))\beta'(k)dk \in C(\mathbb{R})$. Заметим, что при $|u| \leqslant M$ выполнено $|\psi(u)| \leqslant 2 \max\limits_{|u| \leqslant M} |\varphi(u)| \int\limits_0^u \beta'(k)dk = 2 \max\limits_{|u| \leqslant M} |\varphi(u)| \beta(u)$ и, аналогично, имеет место $0 \leqslant h(u) \leqslant 2 \max\limits_{|u| \leqslant M} |g(u)| \beta(u)$ (здесь и ниже $|v|$ обозначает евклидову норму конечномерного вектора v). Из этих оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$ верны неравенства $\dfrac{|\psi(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant \dfrac{C_1 \beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}$, $\dfrac{h(u)}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant \dfrac{C_2 \beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}$, где $C_1 = 2 \max\limits_{|u| \leqslant M} |\varphi(u)|$, $C_2 = 2 \max\limits_{|u| \leqslant M} |g(u)|$.

Так как $\beta(u) = 1$ при $u > \delta$, функция $H(u) \doteq \dfrac{\beta(u)}{\eta(u)+\varepsilon}$ убывает на $[\delta, +\infty)$. Поэтому

$$\max H(u) = \max_{[0,\delta]} H(u) \leqslant \max_{u>0} \frac{(u/\delta)^m}{\delta(u/\delta)^{m+1}/(m+1) + \varepsilon} = \max_{v=u/\delta>0} \frac{m+1}{\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}}.$$

Путем прямых вычислений находим $\min\limits_{v>0}(\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}) = \dfrac{\delta(m+1)}{m} \Big(\dfrac{m(m+1)\varepsilon}{\delta}\Big)^{\frac{1}{m+1}}$. Поэтому $H(u) \leqslant \dfrac{m}{\delta} \Big(\dfrac{\delta}{m(m+1)}\Big)^{\frac{1}{m+1}} \varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}$. Итак,

$$\frac{|\psi(u)|}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{h(u)}{\eta(u)+\varepsilon} \leqslant C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \tag{2.10}$$

где $C = \max(C_1, C_2) \dfrac{m}{\delta} \Big(\dfrac{\delta}{m(m+1)}\Big)^{\frac{1}{m+1}} = \mathrm{const}$. Заметим, что $\int\limits_{\Pi} f_t dt dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(0,x)dx$ и из (2.9) следует, что

$$\int\limits_{\Pi} [(\eta(u)+\varepsilon) f_t + \psi(u) \cdot \nabla_x f + h(u) \Delta_x f] dt dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon) f(0,x) dx \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Выберем нестрого убывающую функцию $\rho(r) \in C^\infty(\mathbb{R})$ со свойствами: $\rho(r) = 1$ при $r \leqslant 0$, $\rho(r) = e^{-r}$ при $r \geqslant 1$, $\rho(r)$ вогнута на $(-\infty, 1/2]$ и выпукла на $[1/2, +\infty)$ (так что $1/2$ — точка перегиба функции $\rho(r)$). Такая функция удовлетворяет неравенству

$$\rho''(r) \leqslant c|\rho'(r)| = -c\rho'(r) \tag{2.12}$$

с некоторой положительной константой c. Действительно, $\rho''(r) \leqslant 0 \leqslant |\rho'(r)|$ при $r < 1/2$, $\rho''(r) = -\rho'(r) = e^{-r}$ при $r > 1$, а на оставшемся отрезке $[1/2, 1]$ верно неравенство $-\rho'(r) \geqslant -\rho'(1) = e^{-1}$ ввиду выпуклости $\rho(r)$, откуда следует оценка $\rho''(r) \leqslant -c\rho'(r)$, где $c = e \max\limits_{1/2 \leqslant r \leqslant 1} \rho''(r) \geqslant e\rho''(1) = 1$.

Итак, (2.12) выполнено с указанной константой c. Возьмем пробную функцию вида $f(t,x) = \rho(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t)$, где $0 < t_0 < T$, $R > 1$, константа $N = N(\varepsilon)$ будет указана позднее, а последовательность $\theta_r(s)$, $r \in \mathbb{N}$, определена в доказательстве предложения 2.1 выше. Заметим, что функция f не зависит от x (именно, $f = \theta_r(t_0 - t)$) в окрестности $|x| < R$ луча $x = 0$, так что нулевая особенность функции $|x|$ не портит гладкости f: $f(t,x) \in C^\infty(\bar{\Pi})$. Поскольку функция f вместе со всеми своими производными экспоненциально убывает при $|x| \to \infty$, мы можем использовать ее в качестве пробной функции в (2.11). Заметим, что

$$f_t(t,x) = N\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t) - \rho(N(t-t_0) + |x| - R)\omega_r(t_0 - t), \tag{2.13}$$

$$\nabla_x f = \rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t)\frac{x}{|x|}, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x f = \left(\rho''(N(t-t_0) + |x| - R) + \rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\frac{n-1}{|x|}\right)\theta_r(t_0 - t) \leqslant \\ \leqslant -c\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t) \end{aligned} \tag{2.15}$$

ввиду (2.12) и условия $\rho' \leqslant 0$. С помощью соотношений (2.13), (2.14) и (2.15) из (2.11) следует, что для достаточно больших $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} -\int\limits_\Pi [(\eta(u) + \varepsilon)\omega_r(t_0 - t)\rho(N(t-t_0) + |x| - R)dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon)\rho(|x| - Nt_0 - R)dx + \\ + \int\limits_\Pi [N(\eta(u) + \varepsilon) - |\psi(u)| - ch(u)]\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\theta_r(t_0 - t)dtdx \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Подставив в (2.16) $N = C(1+c)\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}$, получим что $N(\eta(u) + \varepsilon) - |\psi(u)| - ch(u) \geqslant 0$ ввиду (2.10). Так как $\rho' \leqslant 0$, последний интеграл в (2.16) неположителен и из (2.16) вытекает неравенство

$$\int\limits_\Pi [(\eta(u) + \varepsilon)\omega_r(t_0 - t)\rho(N(t-t_0) + |x| - R)dtdx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon)\rho(|x| - Nt_0 - R)dx.$$

Предположим, что $t_0 \in E$, где $E \subset \mathbb{R}_+$ — множество полной меры, введенное в доказательстве предложения 2.1. Тогда в пределе при $r \to \infty$ из полученного выше неравенства следует соотношение

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0,x))\rho(|x| - R)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon)\rho(|x| - Nt_0 - R)dx \leqslant \\ \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))dx + \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - Nt_0 - R)dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - Nt_0 - R)dx \leqslant \int\limits_{|x| \leqslant Nt_0 + R + 1} dx + e^{Nt_0 + R} \int\limits_{|x| > Nt_0 + R + 1} e^{-|x|}dx \leqslant \\ \leqslant c_n(Nt_0 + R + 1)^n + nc_n e^{Nt_0 + R} \int\limits_{Nt_0 + R + 1}^{+\infty} e^{-r}r^{n-1}dr, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где c_n — это мера единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Так как

$$\int\limits_{Nt_0 + R + 1}^{+\infty} e^{-r}r^{n-1}dr = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s - Nt_0 - R - 1}(s + Nt_0 + R + 1)^{n-1}ds \leqslant$$

$$\leqslant (Nt_0+R+1)^{n-1}e^{-Nt_0-R-1}\int\limits_0^{+\infty} e^{-s}(1+s)^{n-1}ds = a(Nt_0+R+1)^{n-1}e^{-Nt_0-R-1},$$

$a=\mathrm{const}$, из (2.18) следует, что для некоторых констант a_1, a_2

$$\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n}\rho(|x|-N(\varepsilon)t_0-R)dx \leqslant a_1\varepsilon(N(\varepsilon)t_0+R+1)^n \leqslant a_2\varepsilon(1+\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}})^n \underset{\varepsilon\to 0+}{\to} 0$$

(напомним, что $m+1>n$). Поэтому, переходя в (2.17) к пределу при $\varepsilon\to 0+$, получим, что для всех $t_0\in E$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u(t_0,x))\rho(|x|-R)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta(u_0(x))dx. \tag{2.19}$$

Заметим, что $0\leqslant \eta(u)\leqslant u^+$ и $\eta(u)\to u^+$ при $\delta\to 0$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (2.19) в пределе при $\delta\to 0$ следует, что для п.в. $t=t_0>0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t,x))^+\rho(|x|-R)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^+dx < +\infty.$$

Переходя в левом интеграле к пределу при $R\to\infty$, получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u(t,x))^+dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_0(x))^+dx, \tag{2.20}$$

совпадающее с (2.8) при $k=0$. В общем случае $k\in\mathbb{R}$ заметим, что $u-k$ является э.субр. задачи

$$u_t+\operatorname{div}_x\varphi(u+k)-\Delta_x g(u+k), \quad u(0,x)=u_0(x)-k.$$

Применяя к этому э.субр. неравенство (2.20), получим требуемую оценку (2.8). □

Следствие 2.1. *Если $u=u(t,x)$ — э.суперр. задачи* (1.1), (1.3), *то* $\forall k\in\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(k-u(t,x))^+dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(k-u_0(x))^+dx \tag{2.21}$$

для п.в. $t>0$.

Доказательство. По замечанию 1.1 (i) функция $-u$ является э.субр. задачи (1.12). Применяя к этому э.субр. (2.8) с константой $-k$ вместо k, получим (2.21). □

Следствие 2.2. *Любое э.субр.* $u=u(t,x)$ *задачи* (1.1), (1.3) *удовлетворяет следующему принципу максимума* $u(t,x)\leqslant b=\operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ *для п.в.* $(t,x)\in\Pi$.

Аналогично, любое э.суперр. $u=u(t,x)$ *задачи* (1.1), (1.3) *удовлетворяет принципу минимума* $u(t,x)\geqslant a=\operatorname{ess\,inf} u_0(x)$ *для п.в.* $(t,x)\in\Pi$.

Доказательство. Принципы максимума/мнимума непосредственно следуют из (2.8), (2.21) при $k=b$ и $k=a$, соответственно. □

Лемма 2.1. *Пусть* $u=u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ — *слабое субр. задачи* (1.1), (1.3). *Допустим также, что* $\eta(u)\in C^1(\mathbb{R})$, $\eta'(u)=p(g(u))$, *где* $p(v)$ — *непрерывная по Липшицу неотрицательная и нестрого возрастающая функция. Тогда для любой пробной функции* $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f\geqslant 0$,

$$\langle\eta(u)_t,f\rangle = -\int\limits_\Pi \eta(u)f_t dtdx \leqslant \int\limits_\Pi(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(p(g(u))f)dtdx.$$

Доказательство. Поскольку $\eta'(u)=p(g(u))$ возрастает, то функция $\eta(u)$ выпукла, откуда следует, что для любых $(t,x)\in\Pi$ и $h>0$

$$\eta(u(t+h,x))-\eta(u(t,x)) \leqslant \eta'(u(t+h,x))(u(t+h,x)-u(t,x)) = p(g(u(t+h,x)))(u(t+h,x)-u(t,x)).$$

Умножим это неравенство на $f(t+h,x)$ и проинтегрируем по $(t,x)\in\Pi$. В результате получим, что при $0<h<\min\{t\mid (t,x)\in\operatorname{supp} f\}$

$$\int\limits_{\Pi} \eta(u(t,x))(f(t,x) - f(t+h,x))dtdx = \int\limits_{\Pi} \eta((u(t+h,x)) - \eta(u(t,x)))f(t+h,x)dtdx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Pi} p(g(u(t+h,x)))(u(t+h,x) - u(t,x))f(t+h,x)dtdx. \quad (2.22)$$

Применяя (1.13) к пробной функции $f = a(t)b(x)$ с $a(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $b(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a(t), b(x) \geqslant 0$, получим неравенство

$$-\int\limits_0^\infty I(t)a'(t)dt \leqslant \int\limits_{\Pi} [\varphi(u) - \nabla_x g(u)] \cdot \nabla_x b(x)a(t)dtdx,$$

где обозначено $I(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t,x)b(x)dx$. Это неравенство означает, что в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

$$I'(t) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} [\varphi(u(t,x)) - \nabla_x g(u(t,x))] \cdot \nabla_x b(x)dx. \quad (2.23)$$

Пусть E — множество полной меры, определенное выше в доказательстве предложения 2.1. Предположим, что $t_1, t_2 \in E$, $t_2 > t_1$. Тогда t_1, t_2 — точки Лебега функции $I(t)$ и из (2.23) следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t_2,x) - u(t_1,x))b(x)dx = I(t_2) - I(t_1) \leqslant \int\limits_{(t_1,t_2)\times\mathbb{R}^n} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x b(x)d\tau dx. \quad (2.24)$$

Ясно, что это свойство верно и для функций $b(x)$ из пространства Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^n)$. В частности, можно взять $b = p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x)$ при почти всех фиксированных t. Тогда для всех таких t, удовлетворяющих также условию $t, t+h \in E$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(t+h,x) - u(t,x))p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x)dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{(t,t+h)\times\mathbb{R}^n} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x (p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x))d\tau dx. \quad (2.25)$$

Подставив (2.25) в (2.22), получим, что

$$\int\limits_{\Pi} \eta(u(t,x))(f(t,x) - f(t+h,x))dtdx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Pi} \int\limits_t^{t+h} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x (p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x))d\tau dtdx =$$
$$= \int\limits_{\Pi} \int\limits_{\tau-h}^{\tau} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x (p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x))dtd\tau dx =$$
$$= \int\limits_{\Pi} [\varphi(u(\tau,x)) - \nabla_x g(u(\tau,x))] \cdot \nabla_x q_h(\tau,x)d\tau dx, \quad (2.26)$$

где мы применили теорему Фубини и обозначили

$$q_h(\tau,x) = \int\limits_{\tau-h}^{\tau} p(g(u(t+h,x)))f(t+h,x)dt = \int\limits_{\tau}^{\tau+h} p(g(u(t,x)))f(t,x)dt.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{h}\nabla_x q_h(\tau,x)=\frac{1}{h}\int\limits_{\tau}^{\tau+h}\nabla_x(p(g(u(t,x)))f(t,x))dt\underset{h\to 0}{\to}\nabla_x(p(g(u(\tau,x)))f(\tau,x))=$$
$$=p'(g(u(\tau,x)))\nabla_x g(u(\tau,x))f(\tau,x)+p(g(u(\tau,x)))\nabla_x f(\tau,x) \quad (2.27)$$

в $L^2_{loc}(\Pi)$. Здесь мы берем борелевский представитель обобщенной производной $p'(v)$ (напомним, что эта функция определена с точностью до равенства почти всюду). Разделим (2.26) на h и перейдем к пределу при $h\to 0$ с учетом соотношения (2.27). В итоге придем к требуемому неравенству

$$-\int\limits_{\Pi}\eta(u(t,x))f_t(t,x)dtdx\leqslant\int\limits_{\Pi}[\varphi(u(\tau,x))-\nabla_x g(u(\tau,x))]\cdot\nabla_x(p(g(u(\tau,x)))f(\tau,x))d\tau dx=$$
$$=\int\limits_{\Pi}[\varphi(u(t,x))-\nabla_x g(u(t,x))]\cdot\nabla_x(p(g(u(t,x)))f(t,x))dtdx.$$

□

Следствие 2.3. *Пусть $u=u(t,x)$ — слабое субр. задачи* (1.1), (1.3), $\|u\|_\infty\leqslant M$. *Тогда для любой неотрицательной функции $\alpha(t)\in C_0^1(\mathbb{R}_+)$*

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2e^{-|x|}\alpha(t)dtdx\leqslant C(\alpha,M), \quad (2.28)$$

где константа $C(\alpha,M)$ зависит только от α и M.

Доказательство. Обозначим $a=-M$ и применим лемму 2.1 к функции $p(v)=(v-g(a))^+$. Получим соотношение

$$\int\limits_{\Pi}\{\eta(u)f_t+(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(p(g(u))f)\}dtdx\geqslant 0, \quad (2.29)$$

где $\eta(u)=\int\limits_a^u(g(s)-g(a))^+ds$. Подставляя в (2.29) $f=\alpha(t)e^{-|x|}$ и используя тождество $\nabla_x p(g(u))=\nabla_x(g(u)-g(a))=\nabla_x g(u)$, получим, что

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2fdtdx\leqslant\int\limits_{\Pi}[\eta(u)f_t+f\varphi(u)\cdot\nabla_x g(u)+p(g(u))(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f]dtdx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{\Pi}[\eta(u)|f_t|+|\varphi(u)||\nabla_x g(u)|f+p(g(u))(|\varphi(u)|+|\nabla_x g(u)|)f]dtdx=$$
$$=\int\limits_{\Pi}[\eta(u)|f_t|+p(g(u))|\varphi(u)|f+(p(g(u))+|\varphi(u)|)|\nabla_x g(u)|f]dtdx, \quad (2.30)$$

где мы учли, что $\nabla_x f=-\dfrac{x}{|x|}f$, а значит,

$$|(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f|=|(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot x/|x||f\leqslant|\varphi(u)-\nabla_x g(u)|f\leqslant(|\varphi(u)|+|\nabla_x g(u)|)f.$$

Из (2.30) с помощью неравенства Юнга следует оценка

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2fdtdx\leqslant\int\limits_{\Pi}[\eta(u)|\alpha'(t)|+p(g(u))|\varphi(u)|\alpha(t)]e^{-|x|}dtdx+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2fdtdx+\int\limits_{\Pi}\frac{1}{2}(p(g(u))+|\varphi(u)|)^2fdtdx,$$

из которой получаем

$$\int\limits_{\Pi}|\nabla_x g(u)|^2fdtdx\leqslant C(\alpha,M)$$

$$\doteq \max_{|u|\leqslant M}[2(\eta(u)+p(g(u))|\varphi(u)|)+(p(g(u))+|\varphi(u)|)^2]\int_\Pi \max(\alpha(t),|\alpha'(t)|)e^{-|x|}dtdx,$$

что и требовалось доказать. □

Пусть $H_r(u)=\max(0,\min(1,ru))$, $r\in\mathbb{N}$ — последовательность аппроксимаций функции Хевисайда $H(u)=\operatorname{sign}^+(u)$. Обозначим через $S=S_g$ множество значений $v\in\mathbb{R}$, таких что прообраз $g^{-1}(v)$ состоит из одной точки. Следующая лемма аналогична [10, Lemma 5].

Лемма 2.2. *Пусть $u=u(t,x)\in L^\infty(\Pi)$ — слабое субр. задачи* (1.1), (1.3). *Тогда для всех $k\in\mathbb{R}$, таких что $g(k)\in S$, для любой пробной функции $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $f\geqslant 0$,*

$$\int_\Pi H(u-k)[(u-k)f_t+(\varphi(u)-\varphi(k)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f]dtdx\geqslant$$
$$\geqslant\limsup_{r\to\infty}\int_\Pi H_r'(g(u)-g(k))|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx\geqslant 0. \quad (2.31)$$

Доказательство. Так как $g(k)\in S$, то $H(u-k)=H(g(u)-g(k))=\lim\limits_{r\to\infty}H_r(g(u)-g(k))$. Пусть $\eta_r(u)=\int\limits_k^u H_r(g(s)-g(k))ds$. Очевидно, $\eta_r(u)\to(u-k)^+$ при $r\to\infty$ равномерно по u. По лемме 2.1 с $p(v)=H_r(v-g(k))$, для всех $f=f(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $f\geqslant 0$

$$\int_\Pi\{\eta_r(u)f_t+((\varphi(u)-\varphi(k))-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)\}dtdx=$$
$$=\int_\Pi\{\eta_r(u)f_t+(\varphi(u)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)\}dtdx\geqslant 0, \quad (2.32)$$

где мы также учли, что вектор $\int_\Pi\nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)dtdx=0$. Поскольку

$$\nabla_x(H_r(g(u)-g(k))f)=fH_r'(g(u)-g(k))\nabla_x g(u)+H_r(g(u)-g(k))\nabla_x f,$$

из (2.32) следует, что

$$\int_\Pi\{\eta_r(u)f_t+H_r(g(u)-g(k))((\varphi(u)-\varphi(k))-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f\}dtdx+$$
$$+\int_\Pi fH_r'(g(u)-g(k))(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x g(u)dtdx-\int_\Pi fH_r'(g(u)-g(k))|\nabla_x g(u)|^2dtdx\geqslant 0. \quad (2.33)$$

Перейдем в (2.33) к пределу при $r\to\infty$. Учитывая, что $\nabla_x g(u)=0$ п.в. на множестве, где $g(u)=g(k)$, мы видим, что первый интеграл

$$\int_\Pi\{\eta_r(u)f_t+H_r(g(u)-g(k))((\varphi(u)-\varphi(k))-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f\}dtdx\underset{r\to\infty}{\to}$$
$$\underset{r\to\infty}{\to}\int_\Pi H(u-k)[(u-k)f_t+(\varphi(u)-\varphi(k)-\nabla_x g(u))\cdot\nabla_x f]dtdx. \quad (2.34)$$

Предельный переход во втором интеграле осуществляется по той же схеме, что и в доказательстве леммы [10, Lemma 1]. Пусть $M\geqslant\max(\|u\|_\infty,|k|)$, $g_0^{-1}(v)$, где $v\in[g(-M),g(M)]$ — точка в $g^{-1}(v)$ с минимальным модулем. В случае $v\notin[g(-M),g(M)]$ будет удобно положить $g_0^{-1}(v)=k$. Очевидно, $u=g_0^{-1}(g(u))$ как только $|u|\leqslant M$, $g(u)\in S$, в то время как $\nabla_x g(u(t,x))=0$ почти всюду на множестве таких (t,x), что $g(u)\notin S$. Поэтому

$$I_r=\int_\Pi fH_r'(g(u)-g(k))(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot\nabla_x g(u)dtdx=$$

$$= \int_\Pi f H_r'(g(u)-g(k))(\varphi(g_0^{-1}(g(u))) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x g(u) dtdx = \int_\Pi \operatorname{div}_x F_r(g(u)) f dtdx, \quad (2.35)$$

где обозначено

$$F_r(v) = \int_{g(k)}^{v} H_r'(s-g(k))(\varphi(g_0^{-1}(s)) - \varphi(k))ds. \quad (2.36)$$

Ясно, что

$$|F_r(v)| \leqslant r \int_{g(k)}^{g(k)+1/r} |\varphi(g_0^{-1}(s)) - \varphi(k)| ds \underset{r\to\infty}{\to} 0,$$

поскольку функция $g_0^{-1}(s)$ непрерывна в точке $g(k) \in S$ и $g_0^{-1}(g(k)) = k$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (2.35) вытекает, что

$$I_r = -\int_\Pi F_r(g(u)) \cdot \nabla_x f dtdx \to 0 \ \text{ при } r \to \infty. \quad (2.37)$$

С учетом (2.34), (2.37) из соотношения (2.33) в пределе при $r \to \infty$ следует требуемое неравенство (2.31). □

Замечание 2.1. Как видно из доказательства леммы 2.2, при $M \geqslant \max(\|u\|_\infty, |k|)$ для всех $r \in \mathbb{N}$

$$\int_\Pi f H_r'(g(u)-g(k)) |\nabla_x g(u)|^2 dtdx \leqslant C(M) \int_\Pi (|f_t| + |\nabla_x f| + |\Delta_x f|) dtdx, \quad (2.38)$$

где $C(M)$ — константа, зависящая только от M.

Действительно, обозначим $p_r(v) = \int\limits_{g(k)}^{v} H_r(s-g(k))ds$, так что $0 \leqslant p_r(v) \leqslant (v-g(k))^+$ и $\nabla_x p_r(g(u)) = H_r(g(u)-g(k))\nabla_x g(u)$. Тогда ввиду (2.33), (2.35) и (2.37)

$$\int_\Pi f H_r'(g(u)-g(k))|\nabla_x g(u)|^2 dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Pi \{\eta_r(u) f_t + H_r(g(u)-g(k))((\varphi(u)-\varphi(k)) - \nabla_x g(u)) \cdot \nabla_x f\} dtdx + I_r =$$

$$= \int_\Pi \{\eta_r(u) f_t + H_r(g(u)-g(k))(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot \nabla_x f + p_r(g(u))\Delta_x f - F_r(g(u)) \cdot \nabla_x f\} dtdx \leqslant$$

$$\leqslant \int_\Pi \{\eta_r(u)|f_t| + (|\varphi(u)-\varphi(k)| + |F_r(g(u))|)|\nabla_x f| + |g(u)-g(k)||\Delta_x f|\} dtdx. \quad (2.39)$$

По (2.36) при $u, k \in [-M, M]$ получим, что $|F_r(g(u))| \leqslant \max\limits_{|u|\leqslant M} |\varphi(u)-\varphi(k)| \leqslant 2 \max\limits_{|u|\leqslant M} |\varphi(u)|$, и оценка (2.38) непосредственно вытекает из (2.39).

Следствие 2.4. *Если функция диффузии $g(u)$ строго возрастает и $u = u(t,x)$ — слабое субр.* (*суперр.*) *задачи* (1.1), (1.3)*, то и является и э.субр.* (*э.суперр.*) *этой задачи.*

Доказательство. Так как функция $g(u)$ строго возрастает, $g(k) \in S$ для всех $k \in \mathbb{R}$. По лемме 2.2 соотношение (2.31) выполнено для всех $k \in \mathbb{R}$. Поэтому u удовлетворяет энтропийному условию (1.4), а значит, является э.субр. задачи (1.1), (1.3).

Если же u слабое суперр. задачи (1.1), (1.3), то, как следует из (1.14),

$$(-u)_t + \operatorname{div}_x(-\varphi(u)) - \Delta_x(-g(u)) = -[u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - \Delta_x g(u)] \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. функция $-u$ удовлетворяет условию (1.13) для уравнения (1.12). Поэтому, функция $-u$ является слабым субр. задачи (1.12). Как уже установлено, $-u$ является и э.субр. этой задачи. Но тогда функция u есть э.суперр. исходной задачи (1.1), (1.3) в силу замечания 1.1 (i). □

Следствие 2.5. *Если $u = u(t,x)$ — слабое суперр. задачи* (1.1), (1.3), *то для всех $k \in \mathbb{R}$ таких, что $g(k) \in S$ и любой пробной функции $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f \geqslant 0$*

$$\int\limits_\Pi H(k-u)[(k-u)f_t + (\varphi(k) - \varphi(u) + \nabla_x g(u)) \cdot \nabla_x f]dtdx \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_\Pi H_r'(g(k) - g(u))|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx \geqslant 0. \quad (2.40)$$

Доказательство. Как было показано в доказательстве предыдущего следствия 2.4, $-u$ есть слабое субр. задачи (1.12). Очевидно, $-g(k) \in S_{-g(-u)}$. По лемме 2.2, примененной к слабому э.субр. $-u$ задачи (1.12) с константой $-k$ вместо k, имеем

$$\int\limits_\Pi H(k-u)[(k-u)f_t + (\varphi(k) - \varphi(u) + \nabla_x g(u)) \cdot \nabla_x f]dtdx \geqslant \limsup_{r\to\infty}\int\limits_\Pi H_r'(g(k) - g(u))|\nabla_x g(u)|^2 f dtdx,$$

что и требовалось доказать. □

3. Основные результаты

Теорема 3.1. *Пусть $u_1 = u_1(t,x)$, $u_2 = u_2(t,x)$ — э.субр. и э.суперр. задачи* (1.1), (1.3), *соответственно* (*со своими начальными функциями*). *Тогда*

$$((u_1 - u_2)^+)_t + \mathrm{div}_x[H(u_1-u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))] - \Delta_x[H(u_1-u_2)(g(u_1) - g(u_2))] \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (3.1)$$

Доказательство. В случае э.р. u_1, u_2, соотношение (3.1) было доказано в [10, Theorem 13]. Общий случай требует лишь небольшой коррекции. Для полноты изложения приведем детали. Как и в [10], будем использовать технику удвоения переменных. Именно, будем рассматривать u_2 как функцию новых переменных $(s,y) \in \Pi$. Подставив в (1.4) $k = u_2(s,y)$, получим, что

$$((u_1 - u_2)^+)_t + \mathrm{div}_x[H(u_1-u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))] - \Delta_x(g(u_1) - g(u_2))^+ \leqslant 0 \ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Поэтому для любой неотрицательной пробной функции $f = f(t,x;s,y) \in C_0^\infty(\Pi \times \Pi)$ и всех $(s,y) \in \Pi$

$$\int\limits_\Pi \{(u_1-u_2)^+ f_t + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) - \nabla_x g(u_1)] \cdot \nabla_x f\}dtdx \geqslant 0. \quad (3.2)$$

Кроме того, если $(s,y) \in D_2 \doteq \{\ (s,y) \in \Pi \mid g(u_2(s,y)) \in S_g\ \}$, то по лемме 2.2

$$\int\limits_\Pi \{(u_1-u_2)^+ f_t + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) - \nabla_x g(u_1)] \cdot \nabla_x f\}dtdx \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_\Pi H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdx. \quad (3.3)$$

После интегрирования по переменным (s,y) из (3.2), (3.3) следует, что

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+ f_t + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) - \nabla_x g(u_1)] \cdot \nabla_x f\}dtdxdsdy \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times D_2} H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdxdsdy =$$
$$= \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdxdsdy, \quad (3.4)$$

где обозначено $D_1 = \{ (t,x) \in \Pi \mid g(u_1(t,x)) \in S_g \}$. В (3.4) мы учли, что $\nabla_x g(u_1) = 0$ п.в. на дополнении множества D_1. Мы также используем свойство, что при $J_r(s,y) = \int\limits_\Pi H_r'(g(u_1) - g(u_2))|\nabla_x g(u_1)|^2 f dtdx$ справедливо соотношение

$$\int\limits_{D_2} \limsup_{r\to\infty} J_r(s,y)dsdy \geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_2} J_r(s,y)dsdy. \tag{3.5}$$

Действительно, по замечанию 2.1 последовательность $J_r(s,y)$ равномерно ограничена и имеет общий компактный носитель (в качестве которого можно взять проекцию носителя f на пространство переменных (s,y)). Поэтому $0 \leqslant J_r(s,y) \leqslant q(s,y)$ для некоторой суммируемой функции $q \in L^1(\Pi)$. Применяя лемму Фату к последовательности $q - J_r$, получаем (3.5).

Аналогично, так как $u_2 = u_2(s,y)$ — э.суперр. уравнения $u_s + \operatorname{div}_y \varphi(u) - \Delta_y g(u) = 0$, то подставив в соотношение (1.6), выписанное для $u = u_2(s,y)$, значение $k = u_1(t,x)$, получим после применения к пробной функции $f(t,x;\cdot)$ и последующего интегрирования по $(t,x) \in \Pi$, что

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+ f_s + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) + \nabla_y g(u_2)]\cdot\nabla_y f\}dtdxdsdy \geqslant$$

$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))|\nabla_y g(u_2)|^2 f dtdxdsdy, \tag{3.6}$$

где учтено соотношение (2.40). Так как, очевидно, для всех $r \in \mathbb{N}$

$$0 = \int\limits_{\Pi\times\Pi} \nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y(H_r(g(u_1)-g(u_2))f)dtdxdsdy =$$

$$= -\int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy +$$

$$+ \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y f dtdxdsdy,$$

$$0 = \int\limits_{\Pi\times\Pi} \nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x(H_r(g(u_1)-g(u_2))f)dtdxdsdy =$$

$$= \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy +$$

$$+ \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r(g(u_1)-g(u_2))\nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x f dtdxdsdy,$$

приходим к следующим предельным соотношениям:

$$-\int\limits_{\Pi\times\Pi} H(u_1-u_2)\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y f dtdxdsdy = -\int\limits_{\Pi\times\Pi} H(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y f dtdxdsdy =$$

$$= -\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\Pi\times\Pi} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy =$$

$$= -\lim_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy; \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} H(u_1-u_2)\nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x f dtdxdsdy = \int\limits_{\Pi\times\Pi} H(g(u_1)-g(u_2))\nabla_y g(u_2)\cdot\nabla_x f dtdxdsdy =$$

$$= -\lim_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))\nabla_x g(u_1)\cdot\nabla_y g(u_2) f dtdxdsdy, \quad (3.8)$$

где учитывается, что $H_r(s) \underset{r\to\infty}{\to} H(s)$.

Складывая соотношения (3.4), (3.6), (3.7) и (3.8), получим неравенство

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+(f_t+f_s) + H(u_1-u_2)[(\varphi(u_1)-\varphi(u_2)) -$$
$$- (\nabla_x g(u_1) - \nabla_y g(u_2))]\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f\} dtdxdsdy \geqslant$$
$$\geqslant \limsup_{r\to\infty} \int\limits_{D_1\times D_2} H_r'(g(u_1)-g(u_2))|\nabla_x g(u_1)-\nabla_y g(y_2)|^2 f dtdxdsdy \geqslant 0. \quad (3.9)$$

Поскольку $H(u_1-u_2)(\nabla_x g(u_1)-\nabla_y g(u_2)) = (\nabla_x+\nabla_y)(g(u_1)-g(u_2))^+$, соотношение (3.9) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+(f_t+f_s) + H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f +$$
$$+ (g(u_1)-g(u_2))^+(\nabla_x+\nabla_y)\cdot(\nabla_x+\nabla_y)f\} dtdxdsdy \geqslant 0. \quad (3.10)$$

Пусть $\delta_r(t,x) = \omega_r(t)\prod\limits_{i=1}^n \omega_r(x_i)$, где $t\in\mathbb{R}$, $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, а последовательность $\omega_r(s)$, $r\in\mathbb{N}$, была определена в доказательстве предложения 2.1. Возьмем в (3.10) пробную функцию $f = h(t,x)\delta_r(t-s,x-y)$, где $h=h(t,x)\in C_0^\infty(\Pi)$, $h\geqslant 0$. Ясно, что $f\in C_0^\infty(\Pi\times\Pi)$ при достаточно больших r, $f\geqslant 0$. Поскольку $(\partial_t+\partial_s)\delta_r(t-s,x-y)=0$ и $(\nabla_x+\nabla_y)\delta_r(t-s,x-y)=0$, из (3.10) следует, что

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+h_t + H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h + (g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}\delta_r(t-s,x-y) dtdxdsdy \geqslant 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что

$$|(u_1(t,x)-u_2(s,y))^+ - (u_1(t,x)-u_2(t,x))^+| \leqslant |u_2(s,y)-u_2(t,x)|,$$
$$|H(u_1(t,x)-u_2(s,y))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(s,y))) - H(u_1(t,x)-u_2(t,x))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(t,x)))| \leqslant$$
$$\leqslant \mu_\varphi(|u_2(s,y)-u_2(t,x)|),$$
$$|(g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+ - (g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+| \leqslant \mu_g(|u_2(s,y)-u_2(t,x)|),$$

где $\mu_\varphi(\sigma)=\max\{|\varphi(u)-\varphi(v)| \mid u,v\in[-M,M], |u-v|\leqslant\sigma\}$, $\mu_g(\sigma)=\max\{\ |g(u)-g(v)| \mid u,v\in[-M,M], |u-v|\leqslant\sigma\}$ — модули непрерывности вектор-функции $\varphi(u)$ и функции $g(u)$, соответственно, на отрезке $[-M,M]$, $M=\|u_2\|_\infty$. Из этих оценок следует, что

$$\int\limits_{\Pi} \{(u_1(t,x)-u_2(s,y))^+h_t + H(u_1(t,x)-u_2(s,y))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(s,y)))\cdot\nabla_x h +$$
$$+ (g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+\Delta_x h\}\delta_r(t-s,x-y) dsdy \underset{r\to\infty}{\to}$$
$$(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+h_t(t,x) + H(u_1(t,x)-u_2(t,x))(\varphi(u_1(t,x))-\varphi(u_2(t,x)))\cdot\nabla_x h(t,x) +$$
$$+ (g(u_1(t,x))-g(u_2(s,y)))^+\Delta_x h(t,x) \quad (3.12)$$

для всех (t,x) из множества полной меры точек Лебега функции u_2. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (3.12) следует предельное соотношение

$$\int\limits_{\Pi\times\Pi} \{(u_1-u_2)^+h_t + H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h +$$
$$+ (g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}\delta_r(t-s,x-y) dtdxdsdy \underset{r\to\infty}{\to}$$

$$\underset{r\to\infty}{\to}\int\limits_{\Pi}\{(u_1-u_2)^+h_t+H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h+(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}dtdx$$

(в левом интеграле $u_2=u_2(s,y)$, в то время как в правом $u_2=u_2(t,x)$). Ввиду (3.11), из этого соотношения вытекает, что

$$\int\limits_{\Pi}\{(u_1-u_2)^+h_t+H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_x h+(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_x h\}dtdx\geqslant 0$$

для всех неотрицательных пробных функций $h\in C_0^\infty(\Pi)$, т. е.

$$((u_1-u_2)^+)_t+\operatorname{div}_x[H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))]-\Delta_x(g(u_1)-g(u_2))^+\leqslant 0 \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi), \tag{3.13}$$

что и требовалось доказать. □

Соотношение (3.1) лежит в основе доказательства принципа сравнения и единственности э.р. Однако, в рассматриваемом случае лишь непрерывных нелинейностей эти свойства могут нарушаться, и необходимы дополнительные условия. Некоторые такие условия можно найти в [7,8,12]. Следующий результат является непосредственным обобщением [6, Lemma 1] на параболический случай.

Лемма 3.1. *Пусть* $u_1=u_1(t,x)$ — *э.субр., а* $u_2=u_2(t,x)$ — *э.суперр. задачи* (1.1), (1.3) *с начальными функциями* u_{01}, u_{02}, *соответственно. Предположим, что для любого* $T>0$ *множество* $A_T\doteq\{\ (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^n\mid u_1(t,x)>u_2(t,x)\ \}$ *имеет конечную меру Лебега. Тогда для п.в.* $t>0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+dx.$$

В частности, если $u_{01}\leqslant u_{02}$, *то* $u_1\leqslant u_2$ *п.в. на* Π (*принцип сравнения*).

Доказательство. Выберем $0<t_0<t_1$ и положим $f=f(t,x)=(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))p(x/l)$, где $r,l\in\mathbb{N}$, неотрицательная функция $p(y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $0\leqslant p(y)\leqslant p(0)=1$, а последовательность $\theta_r(s)=\int\limits_{-\infty}^{s}\omega_r(\sigma)d\sigma$ аппроксимаций функции Хевисайда определена в предложении 2.1 выше. Применяя (3.1) к пробной функции f, получим после простых преобразований неравенство

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Pi}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+\omega_r(t-t_1)p(x/l)dtdx\leqslant\int\limits_{\Pi}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+\omega_r(t-t_0)p(x/l)dtdx+\\+\frac{1}{l}\int\limits_{\Pi}H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_y p(x/l)(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))dtdx+\\+\frac{1}{l^2}\int\limits_{\Pi}(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_y p(x/l)(\theta_r(t-t_0)-\theta_r(t-t_1))dtdx.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Пусть $t_0,t_1\in E$, где E — множество полной меры значений t, для которых (t,x) является точкой Лебега функции $(u_1(t,x)-u(t,x))^+$ для п.в. $x\in\mathbb{R}^n$. Тогда t_0,t_1 — точки Лебега функций $t\to\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+p(x/l)dx$, $l\in\mathbb{N}$, и из (3.14) в пределе при $r\to\infty$ следует, что

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_1,x)-u_2(t_1,x))^+p(x/l)dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+p(x/l)dx+\\+\frac{1}{l}\int\limits_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n}H(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot\nabla_y p(x/l)dtdx+\\+\frac{1}{l^2}\int\limits_{(t_0,t_1)\times\mathbb{R}^n}(g(u_1)-g(u_2))^+\Delta_y p(x/l)dtdx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+dx+\\+\left(\frac{1}{l}\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\|_\infty\|\nabla_y p\|_\infty+\frac{1}{l^2}\|g(u_1)-g(u_2)\|_\infty\|\Delta_y p\|_\infty\right)\int\limits_{(0,t_1)\times\mathbb{R}^n}H(u_1-u_2)dtdx.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Заметим, что по условию леммы выполнено $\int\limits_{(0,t_1)\times\mathbb{R}^n} H(u_1-u_2)dtdx < +\infty$. Переходя к пределу при $E \ni t_0 \to 0+$, получим, что для всех $t = t_1 \in E$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+p(x/l)dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+p(x/l)dx + \\ + \left(\frac{1}{l}\|\varphi(u_1)-\varphi(u_2)\|_\infty\|\nabla_y p\|_\infty + \frac{1}{l^2}\|g(u_1)-g(u_2)\|_\infty\|\Delta_y p\|_\infty\right)\int\limits_{(0,t)\times\mathbb{R}^n} H(u_1-u_2)dtdx, \quad (3.16)$$

где мы пользуемся неравенством

$$(u_1(t_0,x)-u_2(t_0,x))^+ \leqslant (u_1(t_0,x)-u_{01}(x))^+ + (u_{01}(x)-u_{02}(x))^+ + (u_{02}(x)-u_2(t_0,x))^+$$

вместе с начальными условиями (1.5), (1.7). По лемме Фату из (3.16) в пределе при $l \to \infty$ вытекает соотношение $\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_1(t,x)-u_2(t,x))^+dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{01}(x)-u_{02}(x))^+dx$. Лемма доказана. $\square$

Мы готовы доказать существование наибольшего и наименьшего э.р. нашей задачи.

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Выберем строго убывающую последовательность b_r, $r \in \mathbb{N}$, такую что $b_r > b = \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ при всех $r \in \mathbb{N}$, и определим последовательность начальных функций

$$u_{0r}(x) = \begin{cases} u_0(x), & |x| \leqslant r, \\ b_r, & |x| > r. \end{cases}$$

Пусть $u_r = u_r(t,x)$ — э.р. задачи (1.1), (1.3) с начальными данными u_{0r}. Заметим, что $\forall r \in \mathbb{N}$ $u_0(x) \leqslant u_{0r+1}(x) \leqslant u_{0r}(x) \leqslant b_r$ п.в. $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{r\to\infty} u_{0r}(x) = u_0(x)$. Обозначим $d_r = b_r - b_{r+1} > 0$. По принципу максимума $u_r \leqslant b_r$ для всех $r \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\{(t,x)|u_{r+1}(t,x) > u_r(t,x)\} \subset \{(t,x)|b_{r+1} > u_r(t,x)\} = \{(t,x)|b_r - u_r(t,x) > d_r\}.$$

По неравенству Чебышева и следствию 2.1

$$\operatorname{meas}\{(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^n \mid u_{r+1}(t,x) > u_r(t,x)\} \leqslant \operatorname{meas}\{(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^n \mid b_r - u_r(t,x) > d_r\} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{d_r}\int\limits_{(0,T)\times\mathbb{R}^n}(b_r-u_r)^+dtdx \leqslant \frac{T}{d_r}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(b_r-u_{0r})^+dx = \frac{T}{d_r}\int\limits_{|x|<r}(b_r-u_0)dx < +\infty.$$

Итак, выполнены условия леммы 3.1 для э.субр. u_{r+1} и э.суперр. u_r, и по этой лемме $u_{r+1} \leqslant u_r$ п.в. на Π. Так как $u_{0r} \geqslant u_0 \geqslant a \doteq \operatorname{ess\,inf} u_0(x)$, то $u_r \geqslant a$ по принципу минимума. Поэтому $u_r(t,x) \to_{r\to\infty} u_+(t,x) \doteq \inf\limits_{r>0} u_r(t,x)$ п.в. на Π, а также и в $L^1_{loc}(\Pi)$. Далее, $\|u_r\|_\infty \leqslant M = \mathrm{const}$, и по следствию 2.3 последовательность градиентов $\nabla_x g(u_r)$ ограничена в $L^2_{loc}(\Pi,\mathbb{R}^n)$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, мы можем считать, что $\nabla_x g(u_r) \rightharpoonup p$ при $r \to \infty$ слабо в $L^2_{loc}(\Pi,\mathbb{R}^n)$. Из тождества

$$\int\limits_\Pi g(u_r)\nabla_x f dtdx = -\int\limits_\Pi f\nabla_x g(u_r)dtdx, \quad f = f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi),$$

в пределе при $r \to \infty$ следует, что

$$\int\limits_\Pi g(u_+)\nabla_x f dtdx = -\int\limits_\Pi fpdtdx, \quad \forall f = f(t,x) \in C_0^\infty(\Pi),$$

т. е. $\nabla_x g(u_+) = p \in L^2_{loc}(\Pi,\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\Pi)$. Мы видим, что функция u_+ удовлетворяет требованию частичной соболевской регулярности из определения 1.1.

По предложению 2.1 э.р. u_r удовлетворяет интегральному соотношению (2.7):

$$\int\limits_\Pi[|u_r-k|f_t + \operatorname{sign}(u_r-k)(\varphi(u_r)-\varphi(k))\cdot\nabla_x f + |g(u_r)-g(k)|\Delta_x f]dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n}|u_{0r}(x)-k)|f(0,x)dx \geqslant 0$$

для любого $k \in \mathbb{R}$ и всех неотрицательных пробных функций $f = f(t,x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$. В пределе при $r \to \infty$ из этого соотношения следует, что функция u_+ также удовлетворяет (2.7):

$$\int\limits_{\Pi} [|u_+ - k|f_t + \operatorname{sign}(u_+ - k)(\varphi(u_+) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + |g(u_+) - g(k)|\Delta_x f] dtdx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - k| f(0,x) dx \geqslant 0.$$

Итак, u_+ — э.р. задачи (1.1), (1.3).

Покажем, что u_+ — наибольшее э.субр. этой задачи. Для этого возьмем произвольное э.субр. $u = u(t,x)$ задачи (1.1), (1.3). По принципу максимума $u \leqslant b$. Поэтому в множестве $\Pi_T = (0,T) \times \mathbb{R}^n$ имеет место цепочка включений $\{u > u_r\} \subset \{b > u_r\} = \{b_r - u_r > b_r - b\}$, из которой следует, что

$$\operatorname{meas}\{u > u_r\} \leqslant \frac{1}{b_r - b} \int\limits_{\Pi_T} (b_r - u_r)^+ dx \leqslant \frac{T}{b_r - b} \int\limits_{|x|<r} (b_r - u_0) dx < +\infty,$$

где мы снова использовали неравенство Чебышева и следствие 2.1. Итак, выполнены условия леммы 3.1, примененной к э.субр. u и э.суперр. u_r. По этой лемме справедлив принцип сравнения, а значит, из неравенства $u_0 \leqslant u_{0r}$ вытекает, что $u \leqslant u_r$ п.в. на Π. В пределе при $r \to \infty$ получаем, что $u \leqslant u_+$ п.в. на Π. Итак, u_+ является наибольшим э.субр. задачи (1.1), (1.3).

Далее, пусть $v_+ = v_+(t,x)$ — наибольшее э.субр. задачи (1.12). Тогда по замечанию 1.1 (i) функция $u_-(t,x) = -v_+(t,x)$ будет наименьшим э.суперр. (и э.р.) исходной задачи (1.1), (1.3). Очевидно, $u_- \leqslant u_+$. Теорема полностью доказана.

3.2. Доказательство теоремы 1.2. Пусть u_{1+}, u_{2+} — наибольшие э.р. задачи (1.1), (1.3) с начальными данными u_{10}, u_{20}. Выберем строго возрастающую последовательность b_r, $r \in \mathbb{N}$, такую что $b_r > \max(\|u_{10}\|_\infty, \|u_{20}\|_\infty)$, и определим последовательности

$$u_{1r}^0(x) = \begin{cases} u_{10}(x), & |x| \leqslant r, \\ b_r, & |x| > r, \end{cases} \qquad u_{2r}^0(x) = \begin{cases} u_{20}(x), & |x| \leqslant r, \\ b_r + 1, & |x| > r. \end{cases}$$

Как показано в доказательстве теоремы 1.1, соответствующие последовательности э.р. u_{1r}, u_{2r} при $r \to \infty$ сильно (поточечно и в $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$) сходятся к наибольшим э.р. u_{1+}, u_{2+}, соответственно. По принципу максимума $u_{1r} \leqslant b_r$. Поэтому для любого $T > 0$

$$\{(t,x) \in \Pi_T | u_{1r}(t,x) > u_{2r}(t,x)\} \subset \{(t,x) \in \Pi_T | b_r > u_{2r}(t,x)\} = \{(t,x) \in \Pi_T | b_r + 1 - u_{2r}(t,x) > 1\},$$

так что по неравенству Чебышева и следствию 2.1

$$\operatorname{meas}\{(t,x) \in \Pi_T | u_{1r}(t,x) > u_{2r}(t,x)\} \leqslant \int\limits_{\Pi_T} (b_r + 1 - u_{2r}(t,x)) dtdx \leqslant T \int\limits_{|x|<r} (b_r + 1 - u_{20}(x)) dx < \infty.$$

По лемме 3.1 для п.в. $t > 0$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1r}(t,x) - u_{2r}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1r}^0(x) - u_{2r}^0(x))^+ dx =$$
$$= \int\limits_{|x|<r} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to \infty$ с помощью леммы Фату, приходим к желаемой оценке

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{1+}(t,x) - u_{2+}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx.$$

Случай наименьших э.р. сводится к уже разобранному с учетом равенств $u_{1-} = -v_{1+}$, $u_{2-} = -v_{2+}$, где v_{1+}, v_{2+} — наибольшие э.р. задачи (1.12) с соответствующими начальными данными $-u_{10}(x)$, $-u_{20}(x)$. Как уже доказано, верна оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (v_{2+}(t,x) - v_{1+}(t,x))^+ dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} (u_{10}(x) - u_{20}(x))^+ dx,$$

эквивалентная требуемому соотношению

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{1-}(t,x)-u_{2-}(t,x))^+dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^n}(u_{10}(x)-u_{20}(x))^+dx.$$

3.3. Случай периодических начальных данных. Предположим теперь, что начальная функция $u_0(x)$ — периодическая. Не умаляя общности, можно считать, что решетка периодов совпадает со стандартной целочисленной решеткой $\mathbb{Z}^n$. Таким образом, $u_0(x+e)=u_0(x)$ п.в. на $\mathbb{R}^n$ для всех $e\in\mathbb{Z}^n$.

Теорема 3.2. *Наибольшее э.р. u_+ и наименьшее э.р. u_- задачи* (1.1), (1.3) *являются периодическими по пространственным переменным функциями, и они совпадают: $u_+=u_-$.*

Доказательство. Пусть $e\in\mathbb{Z}^m$. Ввиду периодичности начальной функции ясно, что функция $u(t,x+e)$ является э.р. задачи (1.1), (1.3) тогда и только тогда, когда $u(t,x)$ — э.р. этой задачи. Отсюда следует, что $u_+(t,x+e)$ является наибольшим э.р. задачи (1.1), (1.3) вместе с u_+. По единственности $u_+(t,x+e)=u_+(t,x)$ п.в. на Π для всех $e\in\mathbb{Z}^n$, т. е. u_+ — пространственно периодическая функция. Аналогично доказывается пространственная периодичность наименьшего э.р. u_-. Поскольку $u_\pm$ — слабые решения уравнения (1.1), имеем

$$(u_+-u_-)_t+\operatorname{div}_x(\varphi(u_+)-\varphi(u_-))-\Delta_x(g(u_+)-g(u_-))=0\ \text{ в } \mathcal{D}'(\Pi). \tag{3.17}$$

Пусть $\alpha(t)\in C_0^1(\mathbb{R}_+)$, $\beta(y)\in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n}\beta(y)dy=1$. Применяя (3.17) к пробной функции $\alpha(t)\beta(x/k)$, где $k\in\mathbb{N}$, получим соотношение

$$\int\limits_\Pi(u_+-u_-)\alpha'(t)\beta(x/k)dtdx+k^{-1}\int\limits_\Pi(\varphi(u_+)-\varphi(u_-))\cdot\nabla_y\beta(x/k)\alpha(t)dtdx+$$
$$+k^{-2}\int\limits_\Pi(g(u_+)-g(u_-))\Delta_y\beta(x/k)\alpha(t)dtdx=0.$$

Умножим это равенство на k^{-n} и перейдем к пределу при $k\to\infty$. Используя известное свойство

$$\lim_{k\to\infty}k^{-n}\int\limits_\Pi\mu(t,x)\alpha(t)\beta(x/k)dtdx=\int\limits_{\mathbb{R}_+\times P}\alpha(t)\mu(t,x)dtdx,$$

где $\mu(t,x)\in L^1_{loc}(\Pi)$ — x-периодическая функция, а $P=[0,1)^n$ — ячейка периодичности, получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+\times P}(u_+(t,x)-u_-(t,x))\alpha'(t)dtdx=0. \tag{3.18}$$

Ввиду произвольности $\alpha(t)\in C_0^1(\mathbb{R}_+)$ тождество (3.18) означает, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_P(u_+(t,x)-u_-(t,x))dx=0\ \text{ в } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+).$$

Поэтому для п.в. t,t_0, $t>t_0$

$$\int\limits_P(u_+(t,x)-u_-(t,x))dx=\int\limits_P(u_+(t_0,x)-u_-(t_0,x))dx. \tag{3.19}$$

Принимая во внимание начальные условия (1.5), (1.7), находим, что

$$\int\limits_P(u_+(t_0,x)-u_-(t_0,x))dx\leqslant\int\limits_P(u_+(t_0,x)-u_0(x))^+dx+\int\limits_P(u_0(x)-u_-(t_0,x))^+dx\to0,$$

когда $t_0\to0$, пробегая некоторое множество полной меры. Таким образом, из (3.19) в пределе при $t_0\to0$ следует, что

$$\int\limits_P(u_+(t,x)-u_-(t,x))dx=0$$

для п.в. $t > 0$. Так как $u_+ \geqslant u_-$, заключаем, что $u_+ = u_-$ п.в. на Π. Теорема доказана. $\square$

Поскольку любое э.р. задачи (1.1), (1.3) расположено между u_- и u_+, из теоремы 3.2 вытекает единственность э.р.:

Следствие 3.1. *Если начальная функция периодическая, то э.р. задачи* (1.1), (1.3) *единственно и совпадает с* u_+.

Более обще, справедлив принцип сравнения из теоремы 1.3.

3.4. Доказательство теоремы 1.3. Допустим для определенности, что функция $u_0(x)$ — периодическая. Случай периодической начальной функции v_0 разбирается аналогично. По теореме 3.2 функции $u_+ = u_-$ совпадают с единственным э.р. задачи (1.1), (1.3). Так как u_+ — это наибольшее э.субр., то $u \leqslant u_+ = u_-$. Ясно, что функция v — э.суперр. задачи (1.1), (1.3) с начальной функцией u_0 (поскольку $u_0 \leqslant v_0$), и так как u_- — наименьшее э.суперр. этой задачи, верно неравенство $u_- \leqslant v$. Итак, $u \leqslant u_+ = u_- \leqslant v$, что и требовалось доказать.

Подчеркнем, что для законов сохранения (1.2) теоремы 1.1–1.3 доказаны в [3–5]. При этом принцип сравнения и единственность э.р. справедливы и в более общем случае, когда начальные данные периодичны в $n-1$ независимых направлениях. Адаптируя методы работ [4, 5], нетрудно установить, что эти результаты верны и для параболических уравнений (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81*, № 2. — С. 228–255.
2. *Кружков С. Н., Панов Е. Ю.* Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных// Докл. АН СССР. — 1990. — *314*, № 1. — С. 79–84.
3. *Панов Е. Ю.* К теории обобщенных энтропийных суб- и суперрешений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 2. — С. 252–259.
4. *Панов Е. Ю.* О наибольших и наименьших обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 5. — С. 95–112.
5. *Панов Е. Ю.* К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классе локально суммируемых функций// Изв. РАН. — 2002. — *66*, № 6. — С. 91–136.
6. *Andreianov B. P., Bénilan Ph., Kruzhkov S. N.* L^1-theory of scalar conservation law with continuous flux function// J. Funct. Anal. — 2000. — *171*, № 1. — С. 15–33.
7. *Andreianov B. P., Igbida N.* On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems// Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. — 2012. — *4*, № 1-2. — С. 3–34.
8. *Andreianov B. P., Maliki M.* A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in $\mathbb{R}^N$// NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2010. — *17*, № 1. — С. 109–118.
9. *Bénilan Ph., Kruzhkov S. N.* Conservation laws with continuous flux function// NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 1996. — *3*. — С. 395–419.
10. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1999. — *147*. — С. 269–361.
11. *Kruzhkov S. N., Panov E. Yu.* Osgood's type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order// Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. — 1994. — *40*. — С. 31–54.
12. *Maliki M., Touré H.* Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem// J. Evol. Equ. — 2003. — *3*, № 4. — С. 603–622.
13. *Panov E. Yu.* On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2016. — *13*. — С. 633–659.
14. *Panov E. Yu.* To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations// Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — DOI: 10.1002/mma.6262.

Е. Ю. Панов
Новгородский государственный университет, Великий Новгород, Россия;
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-292-313 UDC 517.957

On the Theory of Entropy Solutions of Nonlinear Degenerate Parabolic Equations

© 2020 **E. Yu. Panov**

Abstract. We consider a second-order nonlinear degenerate parabolic equation in the case when the flux vector and the nonstrictly increasing diffusion function are merely continuous. In the case of zero diffusion, this equation degenerates into a first order quasilinear equation (conservation law). It is known that in the general case under consideration an entropy solution (in the sense of Kruzhkov–Carrillo) of the Cauchy problem can be non-unique. Therefore, it is important to study special entropy solutions of the Cauchy problem and to find additional conditions on the input data of the problem that are sufficient for uniqueness. In this paper, we obtain some new results in this direction. Namely, the existence of the largest and the smallest entropy solutions of the Cauchy problem is proved. With the help of this result, the uniqueness of the entropy solution with periodic initial data is established. More generally, the comparison principle is proved for entropy sub- and super-solutions, in the case when at least one of the initial functions is periodic. The obtained results are generalization of the results known for conservation laws to the parabolic case.

REFERENCES

1. S. N. Kruzhkov, "Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi" [Quasilinear first-order equations with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 2, 228–255 (in Russian).
2. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, "Konservativnye kvazilineynye zakony pervogo poryadka s beskonechnoy oblast'yu zavisimosti ot nachal'nykh dannykh" [Conservative quasilinear first-order laws with infinite domain of dependence on initial data], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **314**, No. 1, 79–84 (in Russian).
3. E. Yu. Panov, "K teorii obobshchennykh entropiynykh sub- i super-resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka" [To the theory of generalized entropic sub- and super-solutions of the Cauchy problem for first-order quasilinear equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 2, 252–259 (in Russian).
4. E. Yu. Panov, "O naibol'shikh i naimen'shikh obobshchennykh entropiynykh resheniyakh zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka" [On greatest and least generalized entropic solutions of the Cauchy problem for quasilinear first-order equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 5, 95–112 (in Russian).
5. E. Yu. Panov, "K teorii obobshchennykh entropiynykh resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka v klasse lokal'no summiruemykh funktsiy" [To the theory of generalized entropic solutions of the Cauchy problem for first-order quasilinear equation in the class of locally summable functions], *Izv. RAN* [Bull. Russ. Acad. Sci.], 2002, **66**, No. 6, 91–136 (in Russian).
6. B. P. Andreianov, Ph. Bénilan, and S. N. Kruzhkov, "L^1-theory of scalar conservation law with continuous flux function," *J. Funct. Anal.*, 2000, **171**, No. 1, 15–33.
7. B. P. Andreianov and N. Igbida, "On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems," *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 2012, **4**, No. 1-2, 3–34.
8. B. P. Andreianov and M. Maliki, "A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in $\mathbb{R}^N$," *NoDEA*: *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2010, **17**, No. 1, 109–118.
9. Ph. Bénilan and S. N. Kruzhkov, "Conservation laws with continuous flux function," *NoDEA*: *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 1996, **3**, 395–419.
10. J. Carrillo, "Entropy solutions for nonlinear degenerate problems," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1999, **147**, 269–361.

11. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, “Osgood’s type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order,” *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 1994, **40**, 31–54.
12. M. Maliki and H. Touré, “Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem,” *J. Evol. Equ.*, 2003, **3**, No. 4, 603–622.
13. E. Yu. Panov, “On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2016, **13**, 633–659.
14. E. Yu. Panov, “To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, DOI: 10.1002/mma.6262.

E. Yu. Panov
Novgorod State University, Velikiy Novgorod, Russia
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru