Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 272–291

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-272-291 УДК 517.929

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ СОСЕДНИХ ПОДОБЛАСТЕЙ

© 2020 г. **Д. А. НЕВЕРОВА**

Аннотация. Данная статья посвящена изучению качественных свойств решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений. Для рассматриваемых задач ранее были получены результаты о существовании обобщенных решений и доказано, что гладкость этих решений сохраняется в некоторых подобластях, но может нарушаться внутри области даже для бесконечно гладкой функции в правой части уравнения. Подобласти здесь определяются как связные компоненты множества, полученного из области Q выбрасыванием всевозможных сдвигов границы ∂Q на векторы некоторой группы, порожденной сдвигами, входящими в разностные операторы.

Для случая дифференциально-разностных уравнений, рассматриваемых на отрезке с краевыми условиями второго рода, автором были получены условия на коэффициенты разностных операторов, при выполнении которых для любой непрерывной функции в правой части уравнения существует классическое решение задачи, совпадающее с обобщенным. Гладкость решений второй краевой задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений внутри некоторых подобластей, за исключением ε-окрестностей угловых точек, в шкале пространств Соболева W_2^k была также исследована автором ранее. Однако проблема гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений на границе соседних подобластей оставалась неисследованной. Настоящая работа посвящена изучению этого вопроса в шкале пространств Гельдера. Будут получены необходимые и достаточные условия на коэффициенты разностных операторов, гарантирующие сохранение гладкости обобщенного решения на границе соседних подобластей для любой функции в правой части уравнения из пространства Гельдера.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Современная теория функционально-дифференциальных уравнений началась с работ А. Д. Мышкиса [12,13]. Развитием этой теории занимались также такие математики, как Л. Э. Эльсгольц [7], Г. А. Каменский [8, 23], Р. Беллман и К. Кук [2], Дж. Хейл [21] и др. Изучение эллиптических функционально-дифференциальных уравнений началось с работ Ф. Хартмана и Г. Стампакья [22], А. Б. Антоневича [1], В. С. Рабиновича [16] и др.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Интерес к изучению подобных задач связан с целым рядом их приложений в теории управления системами с последействием [10], теории упругости многослойных пластин и оболочек [26], нелинейной оптике [4, 29], теории многомерных диффузионных процессов [28], теории нелокальных эллиптических задач [3,19], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [30] и др.

Общая теория краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах [17,19,28] и др. Исследования широкого класса эволюционных функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени методами спектральной теории рассматривались в [5, 6].

В работе [28] для краевых задач для дифференциально-разностных уравнений сформулированы необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева, а также изучена гладкость обобщенных решений задачи Дирихле в пространствах Соболева. В частности, было показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри области даже при бесконечно дифференцируемых правых частях уравнений и сохраняется лишь в некоторых подобластях. Вторая краевая задача для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений и параболических уравнений со сдвигом по пространственным переменным изучалась в работах [14, 18, 20]. Результаты о существовании классического решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с непрерывной правой частью, а также о гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения с правой частью из пространства Гельдера и пространств Соболева W_2^k приведены в работах [14, 15, 24, 25].

В настоящей работе изучается гладкость обобщенного решения задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей в шкале гельдеровских пространств.

Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})_{x_i} = f(x) \qquad (x \in Q \subset \mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu, x_i) = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{1.2}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q, операторы R_{ijQ} определены по формуле $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$; $I_Q\colon L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$; $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q; $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — симметрические разностные операторы вида

$$(R_{ij}u)(x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_{ijh}(u(x+h) + u(x-h)) \quad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Здесь $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами; a_{ijh} — вещественные числа, $a_{ijh} = a_{jih}$ $(i, j = 1, \ldots, n, h \in \mathcal{M})$.

2. Геометрические вопросы и вспомогательные утверждения

В этом разделе мы рассмотрим некоторые геометрические вопросы, возникающие для рассматриваемого типа задач. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти в [28, гл. 2].

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \bigcup_i \overline{X}_i$ $(i = 1, \ldots, N_1)$, где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n \geqslant 2$. При этом в окрестности каждой точки $x^0 \in \partial Q \setminus \bigcup_i X_i$ область Q диффеоморфна n-мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.*

В частности, $Q \subset \mathbb{R}^n$ может быть ограниченной областью с границей $\partial Q \in C^\infty$, а также цилиндром $(0,d) \times G$ или прямоугольником, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$).

Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h)$.

Определение 2.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r $(r = 1, 2, \dots)$ назовем *разбиением области* Q.

Заметим, что множество $\mathcal{R}$ не более, чем счетно.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, \dots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \leqslant ([\operatorname{diam} Q] + 1)^n$.

Введем множество $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}.$$

Это множество играет важную роль при изучении гладкости решений. Из определения множества $\mathcal{K}$ вытекают следующие леммы.

Лемма 2.1. *Пусть* $x^0 \in \partial Q \cap \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Лемма 2.2. *Пусть* $x^0 \in \bigcap\limits_i \partial Q_{s_i l_i}$ *и* $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ *при* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Будем также считать, что всюду далее выполнено следующее условие.

Условие 2.2. *Пусть* $\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0$, *где* $\mu_{n-1}(\cdot)$ — *мера Лебега в* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Обозначим через Γ_p компоненты связности открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$.

Лемма 2.3. *Если* $(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ *при некотором* $h \in M$, *то либо* $\Gamma_p + h \subset Q$, *либо существует* $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ *такое, что* $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.

В силу леммы 2.3 мы можем следующим образом разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}$, $p = 1, 2, \dots,\ h \in M\}$ на классы. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1. существует $h \in M$ такое, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$;
2. в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$, направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более, чем двум классам. Будем обозначать множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \dots$ — номер класса, j — номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r, J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r))$.

Лемма 2.4. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ *существует подобласть* Q_{sl} *такая, что* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$, *если* $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Лемма 2.5. *Для любого* $r = 1, 2, \dots$ *существует единственное* $s = s(r)$ *такое, что* $N(s) = J(r)$, *и при этом подобласти* s*-го класса* Q_{sl} *можно перенумеровать так, что* $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$.

Лемма 2.6. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset Q$ *существуют подобласти* $Q_{s_1 l_1}$ *и* $Q_{s_2 l_2}$ *такие, что* $Q_{s_1 l_1} \neq Q_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3 l_3} = \varnothing$, *если* $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

Пример 2.1. Рассмотрим случай прямоугольника $Q = (0, 2) \times (0, 1)$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\}$. Разобьем прямоугольник Q на подобласти. В этом примере разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей $Q_1 = Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1)$, $Q_2 = Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$ (см. рис. 1). Легко видеть, что множество $\mathcal{K} = \{(0, 0); (1, 0); (2, 0); (0, 1); (1, 1); (2, 1)\}$.

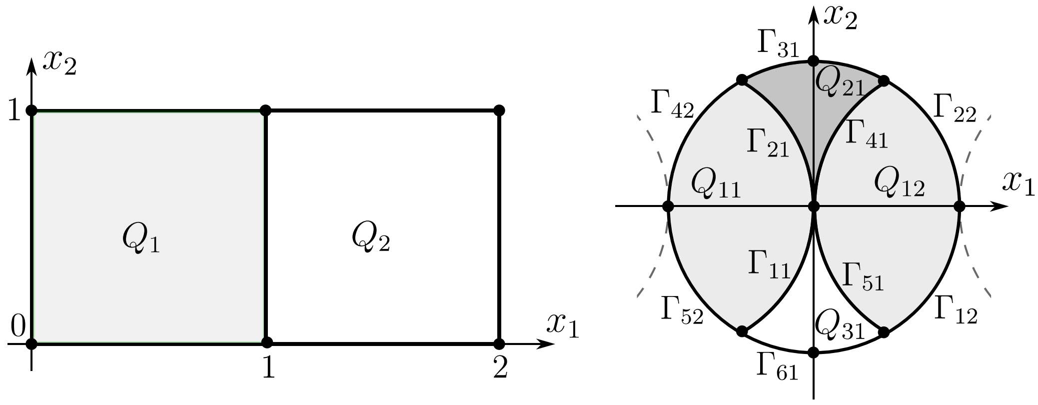

Рис. 1. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примерах 2.1 и 2.2. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

Пример 2.2. Рассмотрим случай, когда множество Q представляет собой единичный круг $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\}$. Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из семи точек

$$\mathcal{K} = \{(0,0),\ (1,0),\ (-1,0),\ (-1/2, -\sqrt{3}/2),\ (-1/2, \sqrt{3}/2),\ (1/2, -\sqrt{3}/2),\ (1/2, \sqrt{3}/2)\}.$$

Разбиение области Q и классы границ, а также множество $\mathcal{K}$ представлены на рис. 1.

3. Разностные операторы

В этом разделе мы рассмотрим свойства разностных операторов. Введенные по формуле (1.3), разностные операторы R_{ij} действуют во всем $\mathbb{R}^n$. Чтобы рассмотреть их в области Q, мы ввели линейные операторы I_Q, P_Q, R_{ijQ}.

Лемма 3.1. *Операторы $R_{ij}\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_{ijQ}\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ ограничены.*

Далее мы рассмотрим некоторые свойства разностных операторов R_{ijQ} в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из коэффициентов разностного оператора и нулей.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$, а через $P_s\colon L_2(Q) \to L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что $L_2(Q) = \bigoplus\limits_s L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$, где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.2. $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ *— инвариантное подпространство операторов R_{ijQ}.*

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $U_s\colon L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right) \to L_2^N(Q_{s1})$, определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ равенством

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{3.1}$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = \bar{0})$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{sl})$.

Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.2}$$

В соответствии с видом разностных операторов R_{ij} матрицы R_{ijs} являются симметричными.

Лемма 3.3. *Операторы* $R_{ijQs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, *определенные по формуле* $R_{ijQs} = U_s R_{ijQ} U_s^{-1}$, *являются операторами умножения на квадратные матрицы* R_{ijs}, *соответственно.*

Замечание 3.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_{ijs} состоят из конечного множества чисел a_{ijh} и нулей, то множество различных матриц конечно (см. [27]).

Введем блочную матрицу R_s вида $R_s = \|R_{ijs}\|_{i,j=1}^n$.

Условие 3.1. *Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности, если матрицы* $R_s + R_s^*$ $(s = 1, 2, \dots)$ *положительно определены. Здесь матрица* R_s^* *является сопряженной к* R_s.

Поэтому если уравнение (1.1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности, то существует константа $c > 0$ такая, что для всех $s = 1, 2, \dots$ и всех $Y \in \mathbb{C}^{nN(s)}$ справедливо $\mathrm{Re}(R_s Y, Y) \geqslant c(Y, Y)$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{nN(s)}$.

Всюду далее мы будем считать, что дифференциально-разностное уравнение (1.1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Определение 3.1. Краевую задачу (1.1)-(1.2) будем называть *второй краевой задачей*, или *задачей Неймана*, для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Обозначим через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q)$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q)$. В пространстве $W_2^k(Q)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q D^\alpha u(x) D^\alpha \overline{v} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Обозначим $W_{2,loc}^k(Q)$ $(k > 0)$ пространство комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q')$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q')$, где Q' — произвольная внутренняя подобласть области Q, т. е. $Q' \Subset Q$.

Введем пространство $C^k(\overline{Q})$ как множество непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{Q}$ с нормой

$$\|u\|_{C^k(\overline{Q})} = \max_{0 \leqslant |\beta| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{Q}} |D^\beta u(x)|. \tag{3.3}$$

Введем неограниченный оператор $A_R : L_2(Q) \supset D(A_R) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$A_R v = -\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} v_{x_j})_{x_i},$$

где $D(A_R) = \{v \in W_2^1(Q) : A_R v \in L_2(Q)\}$.

Определение 3.2. Функцию u будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (1.1)-(1.2), если $u \in W_2^1(Q)$ и для всех $v \in W_2^1(Q)$

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}. \tag{3.4}$$

Используя методы, изложенные в [11, гл. IV, §1], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда вторая краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_Q f(x) dx = 0. \tag{3.5}$$

При этом существует единственное обобщенное решение $u(x)$ такое, что $\int\limits_Q u(x)dx = 0$. Всякое другое решение имеет вид $\tilde{u}(x) = u(x) + c$, где c — некоторая константа.

Приведем теперь полученные ранее результаты о гладкости решений, которые понадобятся нам в следующем разделе.

Из работ [27, с. 347] и [14] известно, обобщенное решение сохраняет гладкость в подобластях Q_{sl} $(s = 1, 2, \ldots; l = 1, \ldots, N(s))$, за исключением окрестности точек множества $\mathcal{K}$.

Теорема 3.2. *Пусть уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности и $u(x)$ — обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2) *и $f \in W_2^k(Q)$. Тогда $u \in W_2^{k+2}(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для каждого $\varepsilon > 0$, где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$ $(s = 1, 2 \ldots; l = 1, \ldots, N(s))$.*

4. Гладкость обобщенных решений на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера

Рассмотрим теперь вопрос о гладкости обобщенного решения $u(x)$ краевой задачи (1.1)-(1.2) и сформулируем условия на коэффициенты разностных операторов R_{ij}, при которых обобщенное решение $u(x)$ принадлежит пространству Гельдера $C^{2+\alpha}$ в некоторой окрестности точки, лежащей на границе соседних подобластей, для всех $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, удовлетворяющих условию (3.5). Покажем, что, как и в случае первой краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения (см. [25]), гладкость обобщенного решения может нарушаться в Q.

Пусть дифференциально-разностный оператор A_R сильно эллиптический, и пусть область Q удовлетворяет условиям 2.1 и 2.2. Предположим, что $u(x)$ — обобщенное решение краевой задачи (1.1)-(1.2), где $f \in C^\alpha(\overline{Q})$.

Зафиксируем $s = p$ и рассмотрим точку $y^1 \in Q \bigcap (\partial Q_{p1} \setminus \mathcal{K})$. Обозначим $y^l = y^1 + h_{pl} \in \partial Q_{pl} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1, \ldots, N(p))$, где $Q_{pl} = Q_{p1} + h_{pl}$. Будем предполагать, что $y^l \in Q$ $(l = 1, \ldots, J_0)$, $y^l \in \partial Q$ $(l = J_0 + 1, \ldots, N(p))$.

В силу леммы 2.6 существует единственная подобласть $Q_{qj} \neq Q_{p1}$ такая, что $y^1 \in \partial Q_{qj}$. Перенумеруем подобласти q-го класса так, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{ql}$ $(l = 1, \ldots, J_0)$.

Введем точки $z^l \in \overline{Q}$ $(l = 1, \ldots, N(q))$, так, что $z^l = z^j - h_{qj} + h_{ql} \in \partial Q_{ql} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1, \ldots, N(q))$, $z^j = y^1$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что $y^l = z^l \in Q$ $(l = 1, \ldots, J_0)$, $z^l \in \partial Q$ $(l = J_0 + 1, \ldots, N(q))$.

В силу лемм 2.1, 2.2, мы можем выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялись следующие условия:

- $\delta < \min\limits_{s,l} \min\{\rho(x^{sl}, \mathcal{K}), 1/2\}$;
- множества $\partial Q_{sl} \bigcap B_\delta(x^{sl})$ связные и принадлежат классу C^∞ $(l = 1, \ldots, N(s); s = p, q)$;
- $B_\delta(x^{sl}) \subset Q$, $B_\delta(x^{sl}) \bigcap Q_{s_1 l_1} = \varnothing$ $(s = p, q; l = 1, \ldots, J_0; (s_1, l_1) \neq (s, l))$;
- $B_\delta(x^{sl}) \bigcap Q = B_\delta(x^{sl}) \bigcap Q_{sl}$ $(s = p, q; l = J_0 + 1, \ldots, N(s))$;
- $x^{pl} = y^l$, $x^{ql} = z^l$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $y^1 = 0$, а уравнение поверхности $\gamma = \Gamma_{p1} \bigcap B_\delta(0)$ имеет вид $x_n = 0$. В противном случае можно применить стандартную процедуру распрямления границы (см., например, [11, теорема 4, §2, гл. 4]).

Положим $Q_{p1} \bigcap B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta, x_n < 0\}$, $\partial Q_{p1} \bigcap B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \delta, x_n = 0\}$.

Поскольку функция $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1.1)-(1.2), то для всех $v \in \dot{C}^\infty(B_\delta(y^l))$ $(l = 1, \ldots, J_0)$ справедливо интегральное тождество

$$-\int\limits_{B_\delta(y^l)} \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} \bar{v} dx = \int\limits_{B_\delta(y^l)} f \bar{v} dx. \tag{4.1}$$

В силу соотношений (3.1) и леммы 3.3, интегральное тождество (3.4) можно записать в виде

$$-\int\limits_{B_\delta(0)} \sum_{i,j=1}^n w_{x_i}^{ijl} \bar{\varphi} dx = \int\limits_{B_\delta(0)} f^l \bar{\varphi} dx \quad (l = 1, \ldots, J_0), \tag{4.2}$$

где $w^{ijl}(x) = (R_{ijs}U_sP_su_{x_j})_l(x)$, $f^l(x) = (U_sP_sf)_l(x)$ для $x \in \omega_s = Q_{s1} \bigcap B_\delta(0)$ $(s = p, q)$, $\varphi \in \dot{C}^\infty(B_\delta(0))$ — произвольная функция.

Без ограничения общности положим $\mu(p) = 1$, $\mu(q) = 2$.

В силу теоремы 3.2 о гладкости обобщенных решений $w^{ijl} \in W_2^1(\omega_s)$. Поэтому, интегрируя по частям левую часть тождества (4.2), получим

$$-\int\limits_{B_\delta(0)} \sum_{i,j=1}^{n} w_{x_i}^{ijl}\bar{\varphi}dx = -\sum_{s=p,q}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\mu(s)}\int\limits_{\gamma_s} w^{njl}|_{\gamma_s}\,\bar{\varphi}|_{\gamma_s}dx' + \sum_{s=p,q}\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\omega_s} w^{ijl}\bar{\varphi}_{x_i}dx, \tag{4.3}$$

где $\gamma = \gamma_s = \{x \in \partial Q_{s1} : |x| < \delta\}$; $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $x = (x', 0)$; $w^{njl}|_{\gamma_s}$ — след функции w^{njl}, определенной в ω_s $(s = p, q)$.

С другой стороны, из интегрального тождества (3.4) следует, что

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{B_\delta(0)} w^{ijl}\bar{\varphi}_{x_i}dx = \int\limits_{B_\delta(0)} f^l\bar{\varphi}dx \quad (l = 1, \ldots, J_0) \tag{4.4}$$

для любой функции $\varphi \in \dot{C}^\infty(B_\delta(0))$.

Из (4.2)–(4.4), поскольку φ — произвольная функция, получим, что обобщенное решение задачи (1.1)-(1.2) удовлетворяет условиям

$$\sum_{s}\sum_{j}(-1)^{\mu(s)+1}w^{njl}|_{\gamma_{ml}} = 0 \quad (m = 1, 2; l = 1, \ldots, J_0), \tag{4.5}$$

где $\gamma_{1l} = \partial Q_{pl} \bigcap B_{2\delta}(x^{pl})$, $\gamma_{2l} = \partial Q_{ql} \bigcap B_{2\delta}(x^{ql})$. Заметим, что числа $N(p) = N_1$ и $N(q) = N_2$ не могут одновременно равняться J_0. Для определенности будем считать, что $N(q) \neq J_0$.

Из теоремы 3.2 при $k = 0$ следует, что обобщенное решение $u(x)$ удовлетворяет

$$\left.\left(\sum_{i,j=1}^{n} R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu, x_i)\right)\right|_{\partial Q \setminus \mathcal{K}^\varepsilon} = 0.$$

Доказательство этого следствия можно найти в [20]. Отсюда получим, что на γ_{ml} $(m = 1, 2; l = J_0 + 1, \ldots, N(s))$ функция $u(x)$ удовлетворяет краевому условию

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{\mu(s)+1}R_{njQ}u_{x_j} = 0 \quad (x \in \gamma_{ml}; l = J_0 + 1, \ldots, N_m, m = 1, 2). \tag{4.6}$$

Введем матрицы A_{ijs}, полученные из R_{ijs} вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк; матрицы B_{ijs}, полученные из R_{ijs} вычеркиванием первых J_0 строк $(i, j = 1, \ldots, n)$. Рассмотрим соответствующие им матрицы со штрихами, построенные следующим образом: матрицы A'_{ijs}, B'_{ijs} получены из матриц A_{ijs}, B_{ijs}, соответственно, вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ столбцов; матрицы A''_{ijs}, B''_{ijs} получены из матриц A_{ijs}, B_{ijs}, соответственно, вычеркиванием первых J_0 столбцов.

Поясним, что матрица A'_{ijs} соответствует действию разностного оператора R_{ijQ}, отображающего точку x^{sk} в точку x^{sl} $(k, l = 1, \ldots, J_0)$, т. е. внутренняя точка переходит во внутреннюю. В свою очередь, матрица A''_{ijs} соответствует действию разностного оператора R_{ijQ}, отображающего точку x^{sk} в точку x^{sl} $(k = 1, \ldots, J_0,\ l = J_0 + 1, \ldots, N(s))$, т. е. внутренняя точка переходит в точку, лежащую на границе. Аналогично, матрица B'_{ijs} соответствует отображению точки x^{sk} в точку x^{sl} $(k = J_0 + 1, \ldots, N(s),\ l = 1, \ldots, J_0,)$, т. е. точка, лежащая на границе ∂Q, переходит во внутреннюю. Матрица B''_{ijs} соответствует действию разностного оператора R_{ijQ}, отображающего точку x^{sk} в точку x^{sl} $(k = J_0 + 1, \ldots, N(s),\ l = J_0 + 1, \ldots, N(s))$, т. е. граничная точка переходит в точку, также лежащую на границе:

$$R_{ijs} = \begin{pmatrix} A'_{ijs} & A''_{ijs} \\ B'_{ijs} & B''_{ijs} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} r_{ijs}^{11} & \ldots & r_{ijs}^{1J_0} & r_{ijs}^{1J_0+1} & \ldots & r_{ijs}^{1N(s)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{ijs}^{J_01} & \ldots & r_{ijs}^{J_0J_0} & r_{ijs}^{J_0J_0+1} & \ldots & r_{ijs}^{J_0N(s)} \\ \hline r_{ijs}^{J_0+1,1} & \ldots & r_{ijs}^{J_0+1,J_0} & r_{ijs}^{J_0+1,J_0+1} & \ldots & r_{ijs}^{J_0+1,N(s)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{ijs}^{N(s)1} & \ldots & r_{ijs}^{N(s)J_0} & r_{ijs}^{N(s)J_0+1} & \ldots & r_{ijs}^{N(s)N(s)} \end{array}\right).$$

Заметим, что по построению

$$A'_{ijp} = A'_{ijq} \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{4.7}$$

Аналогичным образом введем вектор-функции $V_s = (U_sP_su)|_\gamma$, $W_{js} = (U_sP_su)_{x_j}|_\gamma$, $Y_{ijs} = (U_sP_su)_{x_ix_j}|_\gamma$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ и соответствующие им векторы V'_s, W'_{js}, Y'_{ijs} размерности J_0, полученные вычеркиванием из V_s, W_{js}, Y_{ijs}, соответственно, последних $N(s) - J_0$ элементов, и векторы V''_s, W''_{js}, Y''_{ijs} размерности $N(s) - J_0$, полученные вычеркиванием из V_s, W_{js}, Y_{ijs}, соответственно, первых J_0 элементов:

$$V_s = \begin{pmatrix} V'_s \\ V''_s \end{pmatrix}, \quad W_{is} = \begin{pmatrix} W'_{is} \\ W''_{is} \end{pmatrix}, \quad Y_{ijs} = \begin{pmatrix} Y'_{ijs} \\ Y''_{ijs} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Тогда с помощью введенных матриц и векторов условия (4.5), (4.6) можно записать в виде

$$\sum_{s=p,q} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)+1} A_{njs} W_{js} = 0, \tag{4.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} B_{njs} W_{js} = 0. \tag{4.10}$$

Из теоремы 3.2 о внутренней гладкости обобщенного решения следует, что

$$V'_p = V'_q, \quad W'_{jp} = W'_{jq} \quad (j = 1, \ldots, n-1). \tag{4.11}$$

Введем вектор-функцию $Z = \begin{pmatrix} W'_{np} - W'_{nq} \\ W''_{np} \end{pmatrix}$. Тогда в силу (4.7)–(4.11), вектор-функция Z удовлетворяет системе уравнений

$$A_{nnp} Z = A''_{nnq} W''_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} (A''_{njp} W''_{jp} - A''_{njq} W''_{jq}), \tag{4.12}$$

$$B_{nnp} Z = -B'_{nnp} W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B_{njp} W_{jp}. \tag{4.13}$$

При этом справедливо равенство

$$B''_{nnq} W''_{nq} = -B'_{nnq} W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B_{njq} W_{jq}. \tag{4.14}$$

Из условия сильной эллиптичности следует, что R_{nnq} положительно определена, а все ее главные миноры положительны. Поэтому существует обратная матрица $(B''_{nnq})^{-1}$, которую мы обозначим через B^{-1}. Тогда из (4.14) вытекает

$$W''_{nq} = -B^{-1} B'_{nnq} W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B^{-1} B_{njq} W_{njq}. \tag{4.15}$$

Подставляя (4.15) в (4.12), получим

$$A_{nnp}Z = -A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq}W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1}\left\{A''_{nnq}B^{-1}B'_{njq}W'_{jq} + A''_{njp}W''_{jp} + (A''_{nnq}B^{-1}B''_{njq} - A'_{njq})W''_{jq}\right\}. \tag{4.16}$$

Введем вектор-функции H^j размера $m(j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ $H^j = \begin{pmatrix} W'_{jp} \\ W''_{jp} \\ W''_{jq} \end{pmatrix}$, $H^n = W'_{nq}$, где $m(n) = J_0$, $m(j) = N(p) + N(q) - J_0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$; вектор-функцию $\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V''_p \\ V''_q \end{pmatrix}$ размерности $N(p) + N(q) - 2J_0$, а также блочные матрицы

$$T^j = \begin{pmatrix} A''_{nnq}B^{-1}B'_{njq} & A''_{njp} & A''_{njq}B^{-1}B''_{njq} - A''_{njq} \\ B'_{njp} & B''_{njp} & 0 \end{pmatrix}, \quad T^n = \begin{pmatrix} A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq} \\ B'_{nnp} \end{pmatrix},$$

$$G^j = \begin{pmatrix} B^{-1}B'_{njq} & 0 & B^{-1}B''_{njq} \end{pmatrix}, \quad G^n = B^{-1}B'_{nnq} \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Тогда в силу (4.11) уравнения (4.13), (4.16) и (4.15) можно записать в виде

$$R_{nnp}Z = -\sum_{j=1}^{n} T^j H^j, \tag{4.17}$$

$$W''_{nq} = -\sum_{j=1}^{n} G^j H^j. \tag{4.18}$$

Обозначим через Λ^j_{lk} матрицы, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матриц T^j. Заметим, что используя введенные обозначения, мы можем сформулировать результат, доказанный в [20], об условиях сохранения гладкости обобщенных решений краевой задачи (1.1)-(1.2) на границе соседних подобластей в пространствах Соболева для любой $f \in L_2(Q)$.

Теорема 4.1. *Для данного l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2) $u(x)$ *принадлежит $W_2^2(B_\delta(y^l))$ для любой $f \in L_2(Q)$, удовлетворяющей условию* (3.5)*, в том и только в том случае, когда*

$$\det \Lambda^j_{lk} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m(j)). \tag{4.19}$$

Развивая использованный в [8, §15] метод доказательства теоремы 4.1 и используя введенные вектор-функции и матрицы, далее мы сформулируем условия на принадлежность обобщенного решения рассматриваемой задачи с правой частью $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ пространству $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$.

Будем считать, что $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ и выполнено следующее условие.

Условие 4.1. *Пусть $f \in C^\alpha(\overline{Q})$. Пусть $u(x) \in W_2^1(Q)$ — обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2)*. Тогда $u \in C^{2+\alpha}(\overline{Q}_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2, \ldots; l = 1, \ldots, N(s))$.*

Заметим, что это условие не является искусственным: используя теорему 3.2 и теоремы вложения, можно гарантировать соответствующую гладкость в подобластях за счет повышения гладкости правой части в соболевских пространствах.

При $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ обобщенное решение задачи (1.1)-(1.2) удовлетворяет условию

$$\sum_s \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)+1} R_{ijQ} u_{x_i x_j}|_{\gamma + h_{sl}} = 0 \quad (l = 1, \ldots, J_0). \tag{4.20}$$

Используя введенные выше обозначения, равенство (4.20) можно переписать в виде

$$\sum_s \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)+1} (A'_{ijs}Y'_{ijs} + A''_{ijs}Y''_{ijs}) = 0, \tag{4.21}$$

$$\sum_s \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)+1} (B'_{ijs}Y'_{ijs} + B''_{ijs}Y''_{ijs}) = 0. \tag{4.22}$$

В силу (4.7) представим (4.21) в виде

$$\sum_{i,j=1}^{n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) = \sum_{s} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs}.$$

Выразив из последнего равенства следы вторых нормальных производных на внутренних кусках границы и используя продифференцированные соотношения (4.17), (4.18), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
A'_{nnp}(Y'_{nnp} - Y'_{nnq}) &= -\sum_{i+j<2n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_{s} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs} = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) - \sum_{i=1}^{n-1} (A'_{inp} + A'_{nip})(W'_{np} - W'_{nq})_{x_i} + \sum_{s} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs} = \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) - \sum_{i=1}^{n-1} (A_{inp} + A_{nip}) Z_{x_i} + \sum_{i,j=1}^{n-1} (A''_{ijq} Y''_{ijq} - A''_{ijp} Y''_{ijp}) - \\
&- \sum_{i,j=1}^{n-1} (A''_{inq} + A''_{niq}) G^j \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{n-1} (A''_{inp} + A''_{nip}) G^n Y'_{inq} + \sum_{s} (-1)^{\mu(s)} A''_{nns} Y''_{nns}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

В силу неравенства $\det R_{nnp} \neq 0$ из (4.17) можно выразить Z и переписать (4.23) в виде

$$\begin{aligned}
A'_{nnp}(Y'_{nnp} - Y'_{nnq}) = -\sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_{i,j=1}^{n-1} (A''_{ijq} Y''_{ijq} - A''_{ijp} Y''_{ijp}) + \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}_A^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \\
+ \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}_A^{in} Y'_{niq} + \sum_{s} \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{\mu(s)} A''_{ijs} Y''_{ijs},
\end{aligned} \tag{4.24}$$

где $\mathcal{H}_A^{ij} = (A_{inp} + A_{nip}) R_{nnp}^{-1} T^j - (A''_{inq} + A''_{niq}) G^j$, $(i, j = 1, \ldots, n-1)$, $\mathcal{H}_A^{in} = (A_{inp} + A_{nip}) R_{nnp}^{-1} T^n - (A''_{inq} + A''_{niq}) G^n$, $(i = 1, \ldots, n-1)$.

Заметим, что если выполнены условия теоремы 4.1, то $Y'_{ijp} = Y'_{ijq}$ $(i, j = 1, \ldots, n-1)$. Тогда, преобразуя последнее слагаемое в (4.24), мы получим выражение

$$A_{nnp} \Phi = \sum_{i,j=1}^{n-1} \tilde{\mathcal{H}}_A^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}_A^{in} Y'_{niq} + A''_{nnq} Y''_{nnq}, \tag{4.25}$$

которое аналогично по своей структуре равенству (4.12). Здесь $\Phi = \begin{pmatrix} Y'_{nnp} - Y'_{nnq} \\ Y''_{nnp} \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathcal{H}}_A^{ij} = \mathcal{H}_A^{ij} + \begin{pmatrix} 0 & -A''_{ijp} & A''_{ijq} \end{pmatrix}$.

Преобразуем теперь (4.22), умножив B_{nnp} на Φ, предполагая выполненными условия теоремы 4.1 и используя продифференцированное уравнение (4.18); получим

$$\begin{aligned}
&B_{nnp}\Phi = (B'_{nnq} - B'_{nnp}) Y'_{nnq} + B''_{nnq} Y''_{nnq} - \sum_{s} \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{\mu(s)+1} B_{ijs} Y_{ijs} - \\
&- \sum_{i=1}^{n-1} (B_{inp} Y_{inp} - B_{inq} Y_{inq} + B_{nip} Y_{nip} - B_{niq} Y_{niq}) = (B'_{nnq} - B'_{nnp}) Y'_{nnq} + B''_{nnq} Y''_{nnq} - \sum_{i,j=1}^{n-1} (B'_{ijp} - B'_{ijq}) Y'_{ijp} - \\
&- \sum_{s} \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{\mu(s)+1} B''_{ijs} Y''_{ijs} - \sum_{s} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{\mu(s)+1} (B_{ins} + B_{nis}) Y_{ins} = (B'_{nnq} - B'_{nnp}) Y'_{nnq} +
\end{aligned}$$

$$+ B''_{nnq}Y''_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1}(B_{inp} + B_{nip})Y_{inp} + \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}_B^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}_B^{in} Y'_{niq}, \quad (4.26)$$

что аналогично по своей структуре равенству (4.13). Здесь $\mathcal{H}_B^{ij} = -\begin{pmatrix} B'_{ijp} - B'_{ijq} & B''_{ijp} & -B''_{ijq} \end{pmatrix} - (B''_{inq} + B''_{niq})G^j \quad (i,j = 1,\dots,n-1)$, $\mathcal{H}_B^{in} = (B'_{inq} - B'_{niq}) - (B''_{inq} + B''_{niq})G^n$ $(i = 1,\dots,n-1)$.

Используя (4.25) и (4.26), мы получим, что (4.20) эквивалентно следующему равенству:

$$R_{nnp}\Phi = \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}^{in} Y'_{niq} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ B'_{nnq} - B'_{nnp} \end{pmatrix} Y'_{nnq} + \begin{pmatrix} A''_{nnq} \\ B''_{nnq} \end{pmatrix} Y''_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix} Y_{inp} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n-1} \mathcal{H}^{ij} \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{H}^{in} Y'_{niq} + \mathcal{B}Y_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix} Y_{inp}, \quad (4.27)$$

где $\mathcal{H}^{ij} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{H}}_A^{ij} \\ \mathcal{H}_B^{ij} \end{pmatrix}$, $\mathcal{H}^{in} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_A^{in} \\ \mathcal{H}_B^{in} \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & A''_{nnq} \\ B'_{nnq} - B'_{nnp} & B''_{nnq} \end{pmatrix}$.

Введем вектор-функции $\mathbf{Y}^{ij}$ размера $m(i,j)$ $(i = 1,\dots,n-1; j = 1,\dots,n)$:

$$\mathbf{Y}^{ij} = \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{in} = Y'_{niq}, \quad \mathbf{W}^i = \begin{pmatrix} W''_{ip} \\ W''_{iq} \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Тогда аналогично выражению (4.17) равенство (4.27) можно записать в виде

$$R_{nnp}\Phi = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^{ij}\mathbf{Y}^{ij} + \mathcal{B}Y_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix} Y_{inp}. \quad (4.29)$$

Приведенные выше громоздкие выкладки позволили привести (4.20) к виду (4.29), где в левой части стоит невырожденная матрица, умноженная на вектор-функцию, первыми J_0 элементами которой является разность следов вторых нормальных производных обобщенного решения на общей границе соседних подобластей. В случае выполнения условий теоремы 4.1 правая часть (4.29) представлена в виде, аналогичном по своей структуре (4.17). Тогда для того, чтобы сформулировать критерий гладкости обобщенных решений задачи (1.1)-(1.2) на границе соседних подобластей в терминах алгебраических условий, аналогичных (4.19), введем следующие обозначения:

- матрицы α_{lk}^{ij}, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матрицы $\mathcal{H}^{ij}$ $(i = 1,\dots,n-1;\ j = 1,\dots,n;\ l = 1,\dots,J_0;\ k = 1,\dots,m(j))$;
- матрицы θ_{lk}^i, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матрицы $\begin{pmatrix} 0 \\ B_{inp} + B_{nip} \end{pmatrix}$ $(i = 1,\dots,n-1; l = 1,\dots,J_0; k = 1,\dots,N(p))$;
- матрицы ψ_{lk}, полученные из R_{nnp} заменой l-го столбца k-м столбцом матрицы $\mathcal{B}$ $(l = 1,\dots,J_0;$ $k = 1,\dots,N(q))$;
- $\alpha^{ij} = \|\det \alpha_{lk}^{ij}/\Delta\|$ $(i = 1,\dots,n-1; j = 1,\dots,n; l = 1,\dots,J_0; k = 1,\dots,m(j))$;
- $\psi = \|\det \psi_{lk}/\Delta\|$ $(l = 1,\dots,J_0; k = 1,\dots,N(q))$;
- $\theta^i = \|\det \theta_{lk}^i/\Delta\|$ $(i = 1,\dots,n-1; l = 1,\dots,J_0; k = 1,\dots,N(p))$;
- $\Delta = \det R_{nnp} \neq 0$ в виду сильной эллиптичности исходного уравнения.

Используя введенные обозначения, мы можем переписать уравнение (4.29) следующим образом:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha^{ij}\mathbf{Y}^{ij}\right) + \psi Y_{nnq} - \sum_{i=1}^{n-1} \theta^i Y_{inp}. \quad (4.30)$$

Сформулируем критерий сохранения гладкости обобщенных решений на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера.

Теорема 4.2. *Пусть уравнение* (1.1) *сильно эллиптическое. Пусть обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *удовлетворяет условию* 4.1. *Тогда для заданного* l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ *и любой* $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, *удовлетворяющей условию* (3.5), *обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *принадлежит* $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ *в том и только в том случае, когда выполнено* (4.19) *и справедливы равенства*

$$\det \alpha_{lk}^{ij} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1; j = 1, \ldots, n; k = 1, \ldots, m(j)), \tag{4.31}$$

$$\det \psi_{lk} = 0 \quad (k = 1, \ldots, N(q)), \tag{4.32}$$

$$\det \theta_{lk}^i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1; k = J_0 + 1, \ldots, N(p)). \tag{4.33}$$

Доказательство. Необходимость и достаточность условия (4.19), гарантирующего принадлежность обобщенного решения $W_2^2(B_\delta(y^l))$ (см. теорему 4.1), подробно доказаны в [20]. Ниже мы рассмотрим отдельно доказательство достаточности и необходимости условий (4.31)–(4.33).

Достаточность. Пусть для некоторого l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ выполнены равенства (4.31)–(4.33). Из (4.30) следует, что элемент Φ_l вектора Φ равен нулю, т. е. $u_{x_n x_n}\big|_{\gamma_{pl}} = u_{x_n x_n}\big|_{\gamma_{ql}}$.

Отсюда вытекает, что $u \in C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$.

Необходимость. Пусть одно из условий (4.31)–(4.33) нарушено. Построим функцию $u \in D(A_R)$ такую, что $A_R u \in C^\alpha(\overline{Q})$, но $u \notin C^{2+\alpha}(B_\delta(x^{pl}))$.

Положим

$$u(x) = \begin{cases} \left(U_s^{-1} v\right), & x \in \bigcup\limits_l Q_{sl}, s = p, q, \\ 0, & x \in Q \setminus \bigcup\limits_{s,l} Q_{sl}, s = p, q, \end{cases}$$

где $v(x) = \left(A_s(x')\dfrac{x_n^2}{2} + B_s(x')x_n + C_s(x')\right)\eta(x_n)$ при $x = (x', x_n) \in Q_{s1}$, $A_s(x')$, $B_s(x')$, $C_s(x')$ — гладкие вектор-функции размера $N(s)$ $(s = p, q)$, обращающиеся в нуль при $\|x'\| < 2\varepsilon$; функция $\eta(x_n) \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(x_n) = 1$ при $x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\eta(x_n) = 0$ при $x \notin (-2\varepsilon, 2\varepsilon)$, где $0 < \varepsilon < \delta/3$.

Здесь и далее мы будем использовать вектор-функции и соответствующие им вектор-функции со штрихами (см. (4.8)).

Тогда очевидно получим, что

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}^{ij} = \begin{pmatrix} (C'_p(x'))_{x_i x_j} \\ (C''_p(x'))_{x_i x_j} \\ (C''_q(x'))_{x_i x_j} \end{pmatrix}, \mathbf{Y}^{in} = (B'_q(x'))_{x_i}, \mathbf{W}^i = \begin{pmatrix} (C''_p(x'))_{x_i} \\ (C''_q(x'))_{x_i} \end{pmatrix}, \\ \Phi = \begin{pmatrix} A'_p(x') - A'_q(x') \\ A''_p(x') \end{pmatrix}, \quad Y_{inp} = (B_p(x'))_{x_i}, \quad Y_{nnq} = A_q(x'). \end{gathered} \tag{4.34}$$

Таким образом, равенство (4.30) можно переписать в терминах $A_s(x')$, $B_s(x')$, $C_s(x')$ и их производных следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A'_p(x') - A'_q(x') \\ A''_p(x') \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha^{ij} \begin{pmatrix} (C_p(x'))_{x_i x_j} \\ (C''_q(x'))_{x_i x_j} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n-1} \left[\alpha^{in}(B'_q)_{x_i} - \theta^i(B_p(x'))_{x_i}\right] + \psi A_q(x'). \tag{4.35}$$

Заметим, что функция $u(x)$ тогда и только тогда принадлежит $W_2^1(Q)$, когда $V'_p = V'_q$, т. е.

$$C'_p(x') = C'_q(x'). \tag{4.36}$$

Аналогично, для того, чтобы $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо равенства (4.36), выполнялось соотношение

$$B'_p(x') = B'_q(x'). \tag{4.37}$$

Зафиксируем l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ и введем векторы $b_0 = (e_1, \ldots, e_{J_0})$, $b_1 = (e_{J_0}, \ldots, e_{J_0 + N(p)})$, $b_2 = (e_{N(p)+1}, \ldots, e_{N(p)+N(q)-J_0})$ с элементами $e_k = \delta_{kr}$, где δ_{kr} — символ Кронекера ($\delta_{rr} = 1$, $\delta_{kr} = 0$, если $k \neq r$).

1. Пусть для $k = r$ выполнено $\det \psi_{lr} \neq 0$ $(1 \leqslant r \leqslant N(q))$. Положим

$$A'_p(x') = (b_0 - (\psi_r)')\xi(x'), \quad A''_p(x') = -(\psi_r)''\xi(x'),$$
$$A'_q(x') = \xi(x')b_0, \quad A''_q(x') = 0,$$
$$B_p(x') = 0, \quad B_q(x') = 0, \quad C_p(x') = 0, \quad C_q(x') = 0,$$

где ψ_r — r-й столбец матрицы ψ; функция $\xi \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, $\xi(x') = 1$ при $x' \in \gamma_{p1} \bigcap B_\varepsilon(0)$ и $\xi(x') = 0$ при $x' \notin \gamma_{p1} \bigcap B_{2\varepsilon}(0)$.

Легко видеть, что соотношения (4.17), (4.18), (4.35)–(4.37) выполнены, и $u \in D(A_R)$ — обобщенное решение (1.1)-(1.2) при некоторой $f \in C^\alpha(\overline{Q})$. Но при этом

$$u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{pl}} \neq u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{ql}}.$$

Следовательно, $u \notin C^2(B_a(y^l))$.

2. Пусть для $i = t$, $j = u$ и $k = r$ $(t, u = 1, \dots, n-1;\ 1 \leqslant r \leqslant m(j) = N(p) + N(q) - J_0)$ выполнено $\det \alpha^{ij}_{lr} \neq 0$. Положим

$$A_p(x') = \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha^{ij}_r (x_t x_u \xi)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n-1} \theta^i \begin{pmatrix} 0 \\ -\sum\limits_{j=1}^{n-1} (\Lambda^j_r)''(x_t x_u \xi)_{x_i x_j} \end{pmatrix}, \quad A_q(x') = 0,$$

$$B'_p(x') = 0, \quad B''_p(x') = -\sum_{j=1}^{n-1} (\Lambda^j_r)''(x_t x_u \xi)_{x_j},$$

$$B'_q(x') = 0, \quad B''_q(x') = -\sum_{j=1}^{n-1} G^j_r (x_t x_u \xi)_{x_j} - S \tbinom{b_1}{b_2} (x_t x_u \xi),$$

$$C_p(x') = \tbinom{b_0}{b_1} (x_t x_u \xi), \quad C_q(x') = \tbinom{b_0}{b_2} (x_t x_u \xi),$$

где α^{ij}_r, Λ^j_r и G^j_r — r-е столбцы матриц α^{ij}, Λ^j и G^j, соответственно. Вообще говоря, для l-й компоненты вектора A_p последнее слагаемое в выражении для A_p равно 0 в виду структуры матриц θ^i.

Как и в случае 1, $u \in D(A_R)$ — обобщенное решение (1.1)-(1.2) — при некоторой $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ удовлетворяет соотношениям (4.17), (4.18), (4.35)–(4.37). Однако $A_p(x') \neq A_q(x')$, т. е.

$$u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{pl}} \neq u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{ql}}.$$

Следовательно, $u \notin C^2(B_a(y^l))$.

3. Пусть для $i = t$, $j = n$ и $k = r$ $(t = 1, \dots, n-1;\ 1 \leqslant r \leqslant J_0)$ выполнено $\det \alpha^{in}_{lr} \neq 0$. Положим

$$A_p(x') = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\alpha^{in}_r (x_t \xi)_{x_i} - \theta^i \begin{pmatrix} b_0 \\ -(\Lambda^n_r)'' \end{pmatrix} (x_t \xi)_{x_i} \right), \quad A_q(x') = 0,$$

$$B'_p(x') = b_0(x_t\xi), \quad B''_p(x') = -(\Lambda^n_r)''(x_t\xi), \quad B'_q(x') = b_0(x_t\xi), \quad B''_q = -G^n_r(x_t\xi),$$
$$C_p(x') = 0, \quad C_q(x') = 0.$$

По построению, как и ранее, $u \in D(A_R)$ при некоторой $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ и справедливы равенства (4.17), (4.18), (4.35)–(4.37), однако $u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{pl}} \neq u_{x_nx_n}\big|_{\gamma_{ql}}$. Следовательно, $u \notin C^2(B_a(y^l))$.

4. Пусть для $i = t$ и $k = r$ $(t = 1, \dots, n-1;\ J_0 + 1 \leqslant r \leqslant N(p))$ выполнено $\det \theta^i_{lr} \neq 0$. Используем результат пункта 3 и положим

$$A_p(x') = -\sum_{i=1}^{n-1} \theta^i \begin{pmatrix} b_0 \\ -(\Lambda^n_r)'' \end{pmatrix} (x_t \xi)_{x_i}, \quad A_q(x') = 0,$$

$$B'_p(x') = b_0(x_t\xi), \quad B''_p(x') = -(\Lambda^n_r)''(x_t\xi), B'_q(x') = b_0(x_t\xi), \quad B''_q = -G^n_r(x_t\xi),$$
$$C_p(x') = 0, \quad C_q(x') = 0.$$

По построению $u \in D(A_R)$ при некоторой $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, однако обобщенное решение $u(x)$ не принадлежит $C^2(B_a(y^l))$. □

Случай $N(q) \neq J_0$ **и** $N(p) = J_0$**.** Отдельно рассмотрим случай, когда количество подобластей одного из классов совпадает с числом J_0, т. к. матрицы, используемые в формулировке теоремы о гладкости обобщенных решений на границе подобластей, в этой ситуации меняют свой вид. Напомним, что числа $N(p)$ и $N(q)$ не могут одновременно равняться J_0. Без ограничения общности в рамках доказательства теоремы 4.2 мы считали $N(q) \neq J_0$. Для случая $N(p) = J_0$ рассуждения, аналогичные указанным выше, приводят нас к следующему:

$$W''_{nq} = -B^{-1}B'_{nnq}W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} B^{-1}B_{jq}W_{jq} = -\sum_{j=1}^{n} G^j H^j \tag{4.38}$$

$$A'_{nnp}Z = \sum_{j=1}^{n} A''_{njq}W''_{jq} = -A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq}W'_{nq} - \sum_{j=1}^{n-1} A''_{nnq}B^{-1}B_{jq}W_{jq} + \sum_{j=1}^{n-1} A''_{njq}W''_{jq} = -\sum_{j=1}^{n} T^j H^j, \tag{4.39}$$

где

$$Z = (W'_{np} - W'_{nq}), \quad H^j = \begin{pmatrix} W'_{jp} \\ W''_{jq} \end{pmatrix}, \quad H^n = (W'_{nq}), \quad \mathbf{V} = (V''_q),$$
$$T^j = \begin{pmatrix} A''_{nnq}B^{-1}B'_{njq} & A''_{nnq}B^{-1}B''_{njq} - A''_{njq} \end{pmatrix}, \quad T^n = A''_{nnq}B^{-1}B'_{nnq},$$
$$G^j = B^{-1}B_{njq}, \quad G^n = B^{-1}B'_{nnq} \quad (j = 1, \dots, n-1).$$

Отметим, что критерий сохранения гладкости решения на границе подобластей в пространствах Соболева (теорема 4.1) имеет тот же вид. Однако условия сохранения гладкости в пространствах Гельдера несколько меняются. Так, в виду того, что $N(p) = J_0$, равенство (4.21) примет вид

$$\sum_{i,j=1}^{n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) = \sum_{i,j=1}^{n} A''_{ijq}Y''_{ijq}.$$

Тогда, повторяя рассуждения, приведенные выше, получим

$$\begin{aligned} A'_{nnp}\Phi = &- \sum_{i+j<2n} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_{i,j=1}^{n} A''_{ijq}Y''_{ijq} = \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}(A'_{inp} + A'_{nip})Z_{x_i} - \sum_{i,j=1}^{n-1} A'_{ijp}(Y'_{ijp} - Y'_{ijq}) + \sum_{i=1}^{n-1}(A''_{inq} + A''_{niq})(W''_{nq})_{x_i} + \\ &+ A''_{nnq}Y''_{nnq} + \sum_{i,j=1}^{n-1} A''_{ijq}Y''_{ijq} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{H}^{ij}\mathbf{Y}^{ij} + \mathcal{B}Y_{nnq}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{H}^{ij} = (A'_{nip} + A'_{inp})R^{-1}_{nnp}T^j - (A''_{inq} + A''_{niq})G^j + \begin{pmatrix} 0 & A''_{ijq} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{H}^{in} = (A'_{inp} + A'_{nip})R^{-1}_{nnp}T^n - (A''_{inq} + A''_{niq})G^n,$$
$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & A''_{nnq} \\ B'_{nnq} & B''_{nnq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{ij} = \begin{pmatrix} Y'_{ijp} \\ Y''_{ijq} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}^{in} = Y'_{inq}, \quad \mathbf{W}^i = W''_{iq} \quad (i, j = 1, \dots, n-1).$$

Используя данное выше определение матриц α^{ij}_{lk}, ψ_{lk}, сформулируем необходимое и достаточное условие гладкости обобщенного решения на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера для случая $N(p) = J_0$, $N(q) \neq J_0$.

Теорема 4.3. *Пусть* $N(p) = J_0$, $N(q) \neq J_0$ *и уравнение* (1.1) — *сильно эллиптическое. Пусть обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *удовлетворяет условию* 4.1. *Тогда для заданного* l $(1 \leqslant l \leqslant J_0)$ *и любой* $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, *удовлетворяющей условию* (3.5), *обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1)-(1.2) *принадлежит* $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ *в том и только в том случае, когда выполнено* (4.19) *и справедливы равенства*

$$\det \alpha^{ij}_{lk} = 0, \quad (i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m(j)),$$
$$\det \psi_{lk} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1; k = 1, \dots, N(q) - J_0).$$

Доказательство теоремы 4.3 проводится аналогично доказательству теоремы 4.2.

Рассмотрим примеры сохранения и нарушения гладкости обобщенных решений на границе соседних подобластей в пространствах Гельдера.

Как показывает следующий пример, для некоторых задач выполнение условий теоремы 4.1 о гладкости обобщенных решений в пространстве Соболева гарантирует гладкость решений в гельдеровских пространствах (если решение обладает необходимой гладкостью внутри подобластей).

Пример 4.1. Рассмотрим краевую задачу

$$-(R_{11Q}u_{x_1})_{x_1} - (R_{22Q}u_{x_2})_{x_2} = f(x) \qquad (x \in Q)\,, \tag{4.40}$$

$$\sum_{i=1}^{2} R_{iiQ}u_{x_i}\cos(\nu, x_i) = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.41}$$

где $Q = (0, 2+d) \times (0,1)$, $0 < d < 1$,

$$R_{11}u = R_{22}u = u(x_1,x_2) + \gamma(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)) + \vartheta(u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)).$$

Разбиение области $Q = (0,2+d)\times(0,1)$, $0 < d < 1$ под действием сдвигов из $\mathcal{M} = \{(0,0), (\pm1,0), (\pm2,0)\}$ состоит из двух классов подобластей $Q_{ql} = (l-1, l-1+d) \times (0,1)$ $(l = 1,2,3 = N(q))$ и $Q_{pl} = (l-1+d, l) \times (0,1)$ $(l = 1,2 = N(p))$, $J_0 = 2$.

Рассмотрим вопрос сохранения гладкости на границе подобластей Q_{11} и Q_{21}, т. е. $l = 1$. Таким образом, матрицы R_q и R_p примут вид

$$R_q = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & \vartheta & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \vartheta & \gamma & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \gamma & \vartheta \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & \vartheta & \gamma & 1 \end{pmatrix}, \quad R_p = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Для сильной эллиптичности задачи (4.40)-(4.41) γ и ϑ должны быть такими, чтобы матрицы R_p и R_q были положительно определенными. Будем считать это условие выполненным. Тогда согласно теореме 3.1 эта задача разрешима для $f \in L_2(Q)$, удовлетворяющей условию (3.5) разрешимости задачи Неймана. Пусть $u \in W_2^1(Q)$ — обобщенное решение рассматриваемой задачи.

Согласно теореме 4.1, обобщенное решение $u(x)$ краевой задачи (4.40)-(4.41) тогда и только тогда принадлежит $W_2^2(B_\delta(y^l))$, когда каждая из матриц

$$\Lambda_{11}^1 = \Lambda_{12}^1 = \begin{pmatrix} \vartheta^2 & \gamma \\ \gamma\vartheta & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{11}^2 = \Lambda_{12}^2 = \Lambda_{131}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является вырожденной, т. е. выполнены равенства

$$\vartheta^2 - \gamma^2\vartheta = 0. \tag{4.42}$$

Легко видеть, что $\vartheta = \gamma^2$ гарантирует $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$.

С другой стороны, для того, чтобы обобщенное решение $u(x)$, удовлетворяющее условию 4.1, принадлежало $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ для любой функции $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо выполнения (4.42), был нулевым определитель каждой из матриц

$$\alpha_{11}^{21} = \alpha_{12}^{21} = \alpha_{11}^{22} = \alpha_{12}^{22} = \psi_{11} = \psi_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{13}^{22} = \psi_{13} = \begin{pmatrix} \vartheta & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Подставив $\vartheta = \gamma^2$ в (4.43), получим, что все матрицы (4.43) вырожденные.

Таким образом, если в задаче (4.40)-(4.41) коэффициенты разностных операторов удовлетворяют соотношению $\vartheta = \gamma^2$, то для обобщенного решения этой задачи, удовлетворяющего условию 4.1, гладкость на границе подобластей Q_{11} и Q_{21} в шкале пространств Гельдера автоматически следует из гладкости $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$.

На следующем примере покажем, что условия гладкости обобщенного решения краевой задачи (1.1)-(1.2) в соболевских и гельдеровских пространствах, вообще говоря, могут не совпадать.

Пример 4.2. Рассмотрим краевую задачу

$$-(R_{11Q}u_{x_1})_{x_1} - (R_{12Q}u_{x_2})_{x_1} - (R_{21Q}u_{x_1})_{x_2} - (R_{22Q}u_{x_2})_{x_2} = f(x) \qquad (x \in Q)\,, \tag{4.44}$$

$$\sum_{i,j=1}^{2} R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu, x_i) = 0 \qquad (x \in \partial Q), \tag{4.45}$$

где $Q = (0, 2+d) \times (0,1)$, а разностные операторы имеют вид

$$R_{11}u = u(x_1,x_2) + 0{,}5(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)) + 0{,}25(u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)),$$
$$R_{12}u = R_{21}u = 0{,}5u(x_1,x_2) + 0{,}25(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)) + 0{,}125(u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)),$$
$$R_{22}u = u(x_1,x_2) + 0{,}4(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)) + 0{,}3(u(x_1+2,x_2) + u(x_1-2,x_2)).$$

Также как и в примере 4.1, разбиение области состоит из двух классов. Рассмотрим вопрос сохранения гладкости на границе подобластей Q_{11} и Q_{21}, т. е. $l = 1$. Матрицы R_q и R_p согласно (3.2) примут вид

$$R_q = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 1 & 0{,}125 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 1 & 0{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}4 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}125 & 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}3 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_p = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что эти матрицы являются положительно определенными и, следовательно, дифференциально-разностное уравнение (4.44) является сильно эллиптическим.

Как и прежде, будем считать, что задача (4.44)-(4.45) разрешима и $u \in W_2^1(Q)$ — обобщенное решение рассматриваемой задачи.

Согласно теореме 4.1, обобщенное решение $u(x)$ краевой задачи (4.44)-(4.45) тогда и только тогда принадлежит $W_2^2(B_\delta(y^l))$, когда каждая из матриц

$$\Lambda_{11}^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}^2}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{11(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0625 & 0{,}5 \\ 0{,}125 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

$$\Lambda_{12}^1 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{11(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}^2}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.47}$$

$$\Lambda_{11}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}r_{12(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{12(\pm2,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}03125 & 0{,}5 \\ 0{,}0625 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

$$\Lambda_{12}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}r_{12(\pm1,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{12(\pm1,0)}}{r_{11(0,0)}} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}0625 & 0{,}5 \\ 0{,}125 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.49}$$

$$\Lambda_{13}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{r_{11(\pm2,0)}r_{12(0,0)}}{r_{11(0,0)}} - r_{12(\pm2,0)} & r_{11(\pm1,0)} \\ \dfrac{r_{11(\pm1,0)}r_{12(0,0)}}{r_{11(0,0)}} - r_{12(\pm1,0)} & r_{11(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.50}$$

является вырожденной. Из (4.46)–(4.50) видно, что справедливость соотношений

$$r_{12(\pm2,0)} = \frac{r_{22(\pm1,0)}r_{12(\pm1,0)}}{r_{22(0,0)}}, \quad r_{22(\pm2,0)} = \frac{r_{22(\pm1,0)}^2}{r_{22(0,0)}} \tag{4.51}$$

гарантирует принадлежность $u(x)$ пространству $W_2^2(B_\delta(y^l))$. Коэффициенты разностных операторов в постановке задачи подобраны соответствующим образом, следовательно, $u \in W_2^2(B_\delta(y^l))$.

С другой стороны, для того, чтобы обобщенное решение $u(x)$, удовлетворяющее условию 4.1, принадлежало $C^{2+\alpha}(B_\delta(y^l))$ для любой функции $f \in C^\alpha(\overline{Q})$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо выполнения (4.46)–(4.50), каждая из матриц α_{lk}^{ij} ($i = 1,\dots,n-1$; $j = 1,\dots,n$; $k = 1,\dots,m(j)$), ψ_{lk} ($i = 1,\dots,n-1$; $k = 1,\dots,N(q)-J_0$) была вырожденной. Общий вид формул элементов этих матриц очень громоздкий, поэтому приведем только формулы расчета, например, для элементов матрицы α_{11}^{21}:

$$\alpha_{11}^{21}[1,1] = \frac{-2r_{11(\pm 2,0)}}{r_{11(0,0)}(r^2_{11(0,0)} - r^2_{11(\pm 1,0)})}\Big(r^2_{11(0,0)}r_{12(\pm 2,0)} - r_{11(0,0)}r_{11(\pm 1,0)}r_{12(\pm 1,0)} - \\ - r_{11(0,0)}r_{11(\pm 2,0)}r_{12(0,0)} + r^2_{11(\pm 1,0)}r_{12(0,0)} - r^2_{11(\pm 1,0)}r_{12(\pm 2,0)} + r_{11(\pm 1,0)}r_{11(\pm 2,0)}r_{12(\pm 1,0)}\Big),$$

$$\alpha_{11}^{21}[2,1] = \frac{-2r_{11(\pm 2,0)}}{r_{11(0,0)}(r^2_{11(0,0)} - r^2_{11(\pm 1,0)})}\Big(r^2_{11(0,0)}r_{12(\pm 1,0)} - \\ - r_{11(0,0)}r_{11(\pm 1,0)}r_{12(0,0)} - r_{11(0,0)}r_{11(\pm 2,0)}r_{12(\pm 1,0)} + r_{11(\pm 1,0)}r_{11(\pm 2,0)}r_{12(0,0)}\Big),$$

$$\alpha_{11}^{21}[1,2] = r_{11(\pm 1,0)}, \quad \alpha_{11}^{21}[2,2] = r_{11(0,0)}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\alpha_{11}^{21} = \alpha_{12}^{21} = \alpha_{11}^{22} = \alpha_{12}^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{13}^{22} = \begin{pmatrix} 0{,}175 & 0{,}5 \\ 0{,}15 & 1 \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

$$\psi_{11} = \psi_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_{13} = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

Очевидно, что это не так при заданных коэффициентах разностных операторов: $\det \alpha_{13}^{22} \neq 0$. Таким образом, $u \notin C^{2+\alpha}(B_\delta(y^1))$. Отметим, что при выполнении условий 3.1, 4.1 и справедливости соотношений (4.51) можно гарантировать гладкость обобщенного решения рассматриваемой краевой задачи (4.44)-(4.45) на границе подобластей Q_{11} и Q_{21} для любой правой части $f \in C^\alpha(\overline{Q})$ при $r_{12(\pm 1,0)} = \dfrac{r_{11(\pm 1,0)}r_{12(0,0)}}{r_{11(0,0)}}$, $r_{22(\pm 2,0)} = \dfrac{r_{11(\pm 1,0)}r_{22(\pm 1,0)}}{r_{11(0,0)}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739-740.
4. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 5–36.
5. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
6. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 6. — С. 641–645.
7. *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом// Усп. мат. наук. — 1962. — *17*, № 2. — С. 77–164.
8. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: Изд-во МАИ, 1992.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
10. *Красовский Н. Н.* Теория управления движения. — М.: Наука, 1968.
11. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.

12. *Мышкис А. Д.* Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом// Усп. мат. наук. — 1949. — *4*, № 5 (33). — С. 99–141.
13. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
14. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 655–671.
15. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 702–719.
16. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.
17. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 31–38.
18. *Селицкий А. М., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*. — С. 324–347.
19. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
20. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
21. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
22. *Hartman F., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential-functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–310.
23. *Kamenskii G.* Extrema of nonlocal functionals and boundary-value problems for functional differential equations. — New York: Nova Science Publ., 2007.
24. *Neverova D. A.* Generalized and classical solutions to the second and third boundary value problem for difference-differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2014. — *21*. — С. 47–65.
25. *Neverova D. A., Skubachevskii A. L.* On the smoothness of generalized solutions to boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — *22*, № 4. — С. 504–517.
26. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 192–207.
27. *Skubachevskii A. L.* The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*, № 3. — С. 332–361.
28. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.
29. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 2. — С. 261–278.
30. *Skubachevskii A. L.* Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem// Math. Nachr. — 2018. — *291*. — С. 2660–2692.

Д. А. Неверова
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `dneverova@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-272-291 UDC 517.929

Smoothness of Generalized Solutions of the Neumann Problem for a Strongly Elliptic Differential-Difference Equation on the Boundary of Adjacent Subdomains

© 2020 **D. A. Neverova**

Abstract. This paper is devoted to the study of the qualitative properties of solutions to boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations. Some results for these equations such as existence and smoothness of generalized solutions in certain subdomains of Q were obtained earlier. Nevertheless, the smoothness of generalized solutions of such problems can be violated near the boundary of these subdomains even for infinitely differentiable right-hand side. The subdomains are defined as connected components of the set that is obtained from the domain Q by throwing out all possible shifts of the boundary ∂Q by vectors of a certain group generated by shifts occurring in the difference operators.

For the one dimensional Neumann problem for differential-difference equations there were obtained conditions on the coefficients of difference operators, under which for any continuous right-hand side there is a classical solution of the problem that coincides with the generalized solution.

Also there was obtained the smoothness (in Sobolev spaces W_2^k) of generalized solutions of the second and the third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations in subdomains excluding ε-neighborhoods of certain points.

However, the smoothness (in Hölder spaces) of generalized solutions of the second boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations on the boundary of adjacent subdomains was not considered. In this paper, we study this question in Hölder spaces. We establish necessary and sufficient conditions for the coefficients of difference operators that guarantee smoothness of the generalized solution on the boundary of adjacent subdomains for any right-hand side from the Hölder space.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, "Ob indekse i normal'noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigov na granitse" [On the index and normal solvability of a general elliptic boundary-value problem with a finite group of translations on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. R. Bellman and K. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739-740 (in Russian).
4. E. M. Varfolomeev, "O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional'no-differentsial'nykh operatorov, voznikayushchikh v nelineynoy optike" [On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 5–36 (in Russian).
5. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Issledovanie funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami" [Investigation of functional differential equations with unbounded operator coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **477**, No. 6, 641–645 (in Russian).
7. A. M. Zverkin, G. A. Kamenskii, S. B. Norkin, and L. E. El'sgol'ts, "Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom" [Differential equations with deviating argument], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1962, **17**, No. 2, 77–164 (in Russian).
8. G. A. Kamenskii and A. L. Skubachevskii, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1992 (in Russian).
9. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).

10. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniya* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
11. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
12. A. D. Myshkis, "Obshchaya teoriya differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom" [General Theory of Differential Equations with Delayed Argument], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1949, **4**, No. 5 (33), 99–141 (in Russian).
13. A. D. Myshkis, *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Delayed Argument], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1951 (in Russian).
14. D. A. Neverova, "Gladkost' obobshchennykh resheniy vtoroy i tret'ey kraevykh zadach dlya sil'no ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [Smoothness of generalized solutions of the second and third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 655–671 (in Russian).
15. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, "O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
16. V. S. Rabinovich, "O razreshimosti differentsial'no-raznostnykh uravneniy na $\mathbb{R}^n$ i v poluprostranstve" [On solvability of differential-difference equations in $\mathbb{R}^n$ and in the half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
17. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and dilatations of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 31–38 (in Russian).
18. A. M. Selitskii and A. L. Skubachevskii, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [The second boundary-value problem for parabolic functional differential equation], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2007, **26**, 324–347 (in Russian).
19. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
20. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).
21. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
22. F. Hartman and G. Stampacchia, "On some nonlinear elliptic differential-functional equations," *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–310.
23. G. Kamenskii, *Extrema of Nonlocal Functionals and Boundary-Value Problems for Functional Differential Equations*, Nova Science Publ., New York, 2007.
24. D. A. Neverova, "Generalized and classical solutions to the second and third boundary value problem for difference-differential equations," *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
25. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, "On the smoothness of generalized solutions to boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains," *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 504–517.
26. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 192–207.
27. A. L. Skubachevskii, "The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
28. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
29. A. L. Skubachevskii, "Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics," *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 2, 261–278.
30. A. L. Skubachevskii, "Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem," *Math. Nachr.*, 2018, **291**, 2660–2692.

D. A. Neverova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: dneverova@gmail.com