Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 221–271

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-221-271 УДК 519.55, 519.56

СИММЕТРИЧНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ. СТАРЫЕ И НОВЫЕ ДОСТИЖЕНИЯ

© 2020 г. **М. А. МУРАТОВ, Б. А. РУБШТЕЙН**

Аннотация. Статья представляет собой обширный обзор по теории симметричных пространств измеримых функций. Он содержит ряд новых (недавних) и старых (известных) результатов в этой области. Для большинства результатов мы приводим их доказательства или точные ссылки, где они могут быть найдены. Рассматриваемые симметричные пространства являются банаховыми (или квазибанаховыми) пространствами измеримых функций, снабженными симметричными (перестановочно инвариантными) нормами (или квазинормами).

Мы рассматриваем симметричные пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subset \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ на общих пространствах с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, причем меры μ предполагаются конечными или бесконечными σ-конечными неатомическими, в то же время не предполагается, что пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно или является пространством Лебега.

В первом разделе обзора мы описываем основные классы и основные свойства симметричных пространств, рассматриваем минимальные, максимальные, ассоциированные пространства, свойства (A), (B), (C) и свойство Фату (F). Список конкретных симметричных пространств, которые мы используем, включает в себя пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Марцинкевича $\mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Орлича—Лоренца $\mathbf{L}_{W,\Phi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и, в частности, пространства $\mathbf{L}_p(w)$, $\mathbf{M}_p(w)$, $\mathbf{L}_{p,q}$ и $\mathbf{L}_\infty(U)$.

Во втором разделе мы имеем дело с индексами растяжения (Бойда) симметричных пространств и некоторыми приложениями классического оператора H Харди—Литтлвуда. Одна из основных проблем здесь заключается в следующем: когда H действует как ограниченный оператор на заданном симметричном пространстве $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$? Особое внимание уделяется симметричным пространствам, которые обладают свойством Харди—Литтлвуда ($\mathcal{HLP}$) или слабым свойством Харди—Литтлвуда ($\mathcal{WHLP}$).

В третьем разделе мы рассматриваем некоторые теоремы интерполяции для пары пространств $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$, включая классическую теорему Кальдерона—Митягина.

В качестве приложения общей теории в последнем разделе обзора мы доказываем эргодические теоремы для чезаровских средних положительных сжатий в симметричных пространствах. Изучая различные типы сходимости, мы делаем акцент на доминантной эргодической теореме ($\mathcal{DET}$), индивидуальной (поточечной) эргодической теореме ($\mathcal{IET}$), порядковой эргодической теореме ($\mathcal{OET}$) и статистической (mean) эргодической теореме ($\mathcal{MET}$).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . 222
1. Основные определения, конструкции и примеры . . . 222
  1.1. Симметричные банаховы и квази-банаховы пространства . . . 222
  1.2. Равноизмеримые симметричные пространства . . . 224
  1.3. Минимальность. Максимальность. Условия (A), (B) и (C) . . . 228
  1.4. Основные классы симметричных пространств . . . 234
2. Индексы растяжения. Оператор Харди . . . 241
  2.1. Индексы растяжения положительных функций . . . 241
  2.2. Индексы растяжения симметричных пространств . . . 243
  2.3. Оператор Харди и условие ($\mathcal{HLP}$) . . . 245
3. Интерполяция и орбиты . . . 249
  3.1. Абсолютные сжатия и интерполяционные пространства . . . 250

© Российский университет дружбы народов, 2020

Эта работа доступна по лицензии Creative Commons 4.0 International
https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.ru

3.2. Положительные сжатия и интерполяционные пространства 252
4. Эргодические теоремы 254
4.1. Доминантные эргодические теоремы $\mathcal{DET}$ 254
4.2. Поточечная и порядковая сходимости 258
4.3. Статистические эргодические теоремы $\mathcal{MET}$ 259
Список литературы 263

Введение

Настоящий обзор содержит ряд «новых» (недавних) и «старых» (общеизвестных) результатов из теории симметричных пространств измеримых функций. В обоих случаях «старые» и «новые» теоремы снабжены короткими доказательствами или точными ссылками. Содержание обзора можно видеть из приведенного выше оглавления. Ограничимся здесь только несколькими общими замечаниями. Отбор материала определяется исключительно личными пристрастиями авторов. Мы используем определение симметричного пространства, включающее как банаховы, так и квазибанаховы пространства. В банаховом случае это определение взято из [74, гл. II, § 4.1]. Оно принадлежит Е. М. Семенову (см. [19]). В отличие от многих авторов (см. [25, 40, 86] и др.), мы не включаем в определение симметричного пространства условие максимальности или, в случае квази-банаховых пространств, условие Фату. Это позволяет включить в рассмотрение такие интересные классы, как неинтерполяционные пространства [74, гл. II, § 5.7], или, скажем, пространства Шимогаки [115], а также пространства, для которых каноническое вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ не изометрическое и даже не является открытым отображением.

В этой работе мы ограничиваемся рассмотрением симметричных пространств на пространствах с непрерывной (конечной или бесконечной) σ-конечной мерой. Никаких условий сепарабельности меры не предполагается. Более того, мы подробно описываем соответствие между симметричными пространствами на общих пространствах с мерой и их «стандартными» копиями на полупрямой или ее отрезке (пункт 1.2). К сожалению, из данной работы полностью исключены симметричные пространства на дискретных пространствах с мерой и, в частности, пространства последовательностей, также как и различные методы дискретизации. Мы надеемся восстановить этот пробел в другой работе.

Укажем еще несколько важных разделов теории симметричных пространства, не вошедших, по той или иной причине, в данный обзор.

1. Прежде всего отметим, что все приведенные результаты формулируются только для симметричных пространств, даже если они могут быть расширены на случай общих банаховых или квази-банаховых решеток.
2. Теория интерполяции изложена только для случая пары $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$, а не для общих пар симметричных или общих банаховых пространств.
3. Мы не затрагиваем здесь шкалы банаховых пространств и общую теорию экстраполяции даже в контексте симметричных пространств измеримых функций.
4. Эргодические теоремы, подробно изложенные в разделе 4, приводятся только для чезаровских сумм абсолютных сжатий. Обобщения на случай потоков, общих групп преобразований, а также субаддитивные процессы и т. д., не рассматриваются.
5. Наконец, по понятным причинам, мы не включили в обзор общую теорию симметричных пространств измеримых операторов, присоединенных к алгебрам фон Неймана, т. е. так называемые «некоммутативные» симметричные пространства.

1. Основные определения, конструкции и примеры

1.1. Симметричные банаховы и квази-банаховы пространства.

1.1.1. Равноизмеримые функции. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной или бесконечной σ-конечной неатомической мерой μ, определенной на σ-алгебре $\mathcal{F}$ подмножеств Ω. Переходя, если нужно, к μ-пополнению $\mathcal{F}_\mu$ σ-алгебры $\mathcal{F}$, можно предполагать, что измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является μ-полным, т. е. $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mu$ и $A \subseteq B \in \mathcal{F},\ \mu(B) = 0 \implies A \in \mathcal{F}_\mu,\ \mu(A) = 0$.

Мы будем писать $(I,\mathcal{B}_m,m)$ в частном случае, когда $I=[0,\infty)$ или $I=[0,a]$ с $0<a<\infty$, где m — обычная мера Лебега на I, а $\mathcal{B}_m=\mathcal{B}(I)_m$ является m-пополнением борелевской σ-алгебры $\mathcal{B}=\mathcal{B}(I)$ относительно меры m.

Обозначим через $\mathbf{L}_0=\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ множество всех классов μ-измеримых (равных μ-почти всюду) функций $f\colon\Omega\to\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Для каждой функции $f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ определим (*верхнюю*) *функцию распределения* $\eta_{f,\mu}$ модуля $|f|$, $\eta_{f,\mu}(x):=\mu\{|f|>x\}$, где $\{|f|>x\}:=\{\omega\in\Omega\colon |f(\omega)|>x\}$. Функция $\eta_{f,\mu}$ является убывающей непрерывной справа функцией на $[0,+\infty)$, такой что $\eta_{f,\mu}(x)\in[0,\mu(\Omega)]$ для всех $0\leqslant x<\infty$.

В случае $\mu(\Omega)=\infty$ возможно, что $\eta_{f,\mu}(x)=\infty$ для некоторых и даже для всех $x\in[0,\infty)$.

Для каждой функции $f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ существует единственная функция $\xi_{f,\mu}$ на $[0,\infty)$, которая является убывающей, непрерывной справа, и $\eta_{\xi_{f,\mu},m}=\eta_{f,\mu}$, $\xi_{\xi_{f,\mu},m}=\xi_{f,\mu}$. Здесь $\xi_{f,\mu}\equiv 0$, если $\eta_{f,\mu}\equiv\infty$. Функция $\xi_{f,\mu}$ может быть построена как непрерывная справа (обобщенная) обратная функция к $\eta_{f,\mu}$, т. е. $\xi_{f,\mu}(x):=\inf\{y\in[0,+\infty)\colon \eta_{f,\mu}(y)\leqslant x\}$, $x\in[0,\infty)$.

Функция $\xi_{f,\mu}$ называется *убывающей перестановкой* функции $|f|$ относительно меры μ.

В случае, если $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)=(I,\mathcal{B}_m,m)$, функция $\xi_{f,\mu}$ обычно обозначается как f^* (см., например, [74]). Мы не используем это стандартное обозначение.

В случае $\mu(\Omega)=a<\infty$ функция $\xi_{f,\mu}$ определена на отрезке $[0,a]$, так как $\eta_{f,\mu}(x)\leqslant a$ для всех $x\in[0,\infty)$.

В случае $\mu(\Omega)=\infty$ функция $\xi_{f,\mu}$ определена на $[0,\infty)$ и продолжается на $[0,\infty]$ равенством $\xi_{f,\mu}(\infty):=\lim\limits_{x\to\infty}\xi_{f,\mu}(x)=\inf\{y>0\colon \eta_f(y)<\infty\}$. В этом случае возможно, что $\eta_{f,\mu}(x)=\infty$ или $\xi_{f,\mu}(x)=\infty$ для некоторых или для всех $x\in[0,\infty)$, поэтому удобно ввести подпространство

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)&:=\{f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)\colon \xi_{f,\mu}(x)<\infty, x\in I\}=\\&=\{f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)\colon \eta_{f,\mu}(\infty)=\lim_{x\to\infty}\eta_{f,\mu}(x)=0, x>0\}.\end{aligned}$$

По определению, $\xi_{f,\mu}\in\mathbf{L}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$ тогда и только тогда, когда $f\in\mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ и $\eta_{\xi_{f,\mu},m}(y)=m(\{x\in\mathbb{R}^+\colon \xi_{f,\mu}(x)>y\})=\xi^{-1}_{f,\mu}(y)=\eta_{f,\mu}(y)$, $y>0$.

Две неотрицательные функции $f_1\in\mathbf{L}_0(\Omega_1,\mathcal{F}_{\mu_1},\mu_1)$ и $f_2\in\mathbf{L}_0(\Omega_2,\mathcal{F}_{\mu_2},\mu_2)$ называются *равноизмеримыми*, если они имеют одинаковые функции распределения $\eta_{f_1,\mu_1}=\eta_{f_2,\mu_2}$, что, очевидно, эквивалентно $\xi_{f_1,\mu_1}=\xi_{f_2,\mu_2}$.

Следует отметить, что функции $f_1\in\mathbf{L}_0(\Omega_1,\mathcal{F}_{\mu_1},\mu_1)$ и $f_2\in\mathbf{L}_0(\Omega_2,\mathcal{F}_{\mu_2},\mu_2)$ определены, возможно, на различных пространствах с мерами $(\Omega_1,\mathcal{F}_{\mu_1},\mu_1)$ и $(\Omega_2,\mathcal{F}_{\mu_2},\mu_2)$, соответственно, в то время как их перестановки ξ_{f_1,μ_1} и ξ_{f_2,μ_2} определяются на одном и том же сегменте $[0,a]$, где $a=\mu_1(\Omega_1)=\mu_1(\Omega_2)$.

1.1.2. Симметричные пространства. Нетривиальное банахово (или, более обще, квази-банахово) пространство $(\mathbf{E},\|\cdot\|_{\mathbf{E}})=(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu),\|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)})$ действительных измеримых функций на пространстве с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ называется *симметричным*, если выполнены следующие два условия:

1. Если $f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, $g\in\mathbf{E}$ и $|f|\leqslant|g|$, то $f\in\mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}}\leqslant\|g\|_{\mathbf{E}}$.
2. Если $f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, $g\in\mathbf{E}$ и $\eta_{f,\mu}=\eta_{g,\mu}$, то $f\in\mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}}=\|g\|_{\mathbf{E}}$.

Условие 1 означает, что $\mathbf{E}$ является идеальной банаховой (квази-банаховой) подрешеткой в $\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F},\mu)$. Условие 2 представляет собой *условие симметричности*, или *перестановочной инвариантности*, нормы (квазинормы) $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$.

Таким образом, симметричное пространство — это идеальная банахова (квази-банахова) решетка с симметричной нормой (квазинормой).

Так как из $|f|\leqslant|g|$ следует $\eta_{f,\mu}\leqslant\eta_{g,\mu}$ и $\xi_{f,\mu}\leqslant\xi_{g,\mu}$, то условия 1 и 2 могут быть записаны с помощью перестановок $\xi_{f,\mu}$ следующим образом: $f\in\mathbf{L}_0$, $g\in\mathbf{E}$ и $\xi_{f,\mu}\leqslant\xi_{g,\mu}\implies f\in\mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}}\leqslant\|g\|_{\mathbf{E}}$.

Рассмотрим классические пространства $\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu):=\{f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)\colon \|f\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}<\infty\}$ при $0<p\leqslant\infty$, где $\|f\|_{\mathbf{L}_p}=\|f\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}=\left(\int\limits_\Omega|f|^p d\mu\right)^{\frac1p}$ для $0<p<\infty$, а $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty}=\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}:=\inf\{a>0\colon \mu\{|f|>a\}=0\}$.

Пространства $\mathbf{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ являются идеальными банаховыми решетками, если $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и идеальными квази-банаховыми решетками при $0 < p < 1$.

В последнем случае квазинорма $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}$ является p-нормой, т. е. $\|f+g\|^p_{\mathbf{L}_p} \leqslant \|f\|^p_{\mathbf{L}_p} + \|g\|^p_{\mathbf{L}_p}$, $f, g \in \mathbf{L}_p$. Таким образом, $\mathbf{L}_p$ является полным метрическим пространством относительно метрики $\delta_p(f,g) = \|f-g\|^p_{\mathbf{L}_p}$.

С другой стороны,

$$\|f\|_{\mathbf{L}_p(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \left(\int\limits_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu})^p dm\right)^{\frac{1}{p}} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_p(I,\mathcal{B}_m,m)}$$

для каждого $0 < p < \infty$, и $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \xi_{f,\mu}(x) = \xi_{f,\mu}(0) = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty(I,\mathcal{B}_m,m)}$, так как функции $|f| \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ равноизмеримые.

Эти равенства показывают, что $\mathbf{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ являются симметричными квази-банаховыми пространствами для каждого $0 < p \leqslant \infty$ и симметричными банаховыми пространствами при $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Возвращаясь к рассмотрению общих симметричных пространств $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, рассмотрим отдельно два случая.

1. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда имеют место непрерывные вложения $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \subset \mathbf{L}_0$, причем

$$\varphi_{\mathbf{E}}(1) \cdot \|f\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geqslant \|f\|_{\mathbf{E}} \geqslant \varphi_{\mathbf{E}}(1) \cdot \|f\|_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty}, \quad f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty,$$

где $\varphi_{\mathbf{E}}(t) := \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{\mathbf{E}}$, $t \geqslant 0$ — фундаментальная функция симметричного пространства $\mathbf{E}$ и $\varphi_{\mathbf{E}}(1) = \|\mathbf{1}_{[0,1]}\|_{\mathbf{E}}$, см. [74, § II.4.1], а также [99, теорема 1.1], где доказана уточненная оценка $\varphi_{\mathbf{E}}(1)\|\cdot\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geqslant \|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ (вместо $2\varphi_{\mathbf{E}}(1)\|\cdot\|_{\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty} \geqslant \|\cdot\|_{\mathbf{E}}$, используемой в [74]).

В случае $\mu(\Omega) = a < \infty$ имеют место непрерывные вложения $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{L}_0$, причем $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty} \geqslant \|\cdot\|_{\mathbf{E}} \geqslant \dfrac{\varphi_{\mathbf{E}}(a)}{a}\|\cdot\|_{\mathbf{L}_1}$.

2. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное квази-банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, удовлетворяющее слабому неравенству треугольника

$$\|f+g\|_{\mathbf{E}} \leqslant C(\|f\|_{\mathbf{E}} + \|g\|_{\mathbf{E}}),\ f, g \in \mathbf{E} \tag{1.1}$$

с константой $C > 1$. Тогда по теореме Аоки—Ролевича [23,109] квазинорму $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ можно заменить на эквивалентную p-субаддитивную квазинорму $|||\cdot|||_{\mathbf{E}}$ такую, что

$$|||f+g|||^p_{\mathbf{E}} \leqslant |||f|||^p_{\mathbf{E}} + |||g|||^p_{\mathbf{E}},\ f, g \in \mathbf{E},$$

где $p := \dfrac{\ln 2}{\ln 2 + \ln C} < 1$. Такая квазинорма $|||\cdot|||_{\mathbf{E}}$ называется *p-нормой*, а квази-банахово пространство называется *p-нормируемым*. Отметим, что $\mathbf{E}$ становится полным линейным метрическим пространством относительно трансляционно-инвариантной метрики $\delta_{\mathbf{E}}(f,g) = \|f-g\|_{\mathbf{E}}$, $f, g \in \mathbf{E}$.

Константа $C_{\mathbf{E}} = \inf\{C$ *в слабом неравенстве треугольника* (1.1)$\}$ называется *модулем вогнутости* квази-банахова пространства $\mathbf{E}$ (см. [56] и имеющиеся там ссылки). Очевидно, $C_{\mathbf{E}} = 1$, если пространство $\mathbf{E}$ нормируемо. Обратное, вообще говоря, неверно.

1.2. Равноизмеримые симметричные пространства.

1.2.1. Определения и две основные теоремы. Напомним, что здесь, как и далее, рассматриваются измеримые пространства $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ с конечной или бесконечной σ-конечной *неатомической* мерой μ.

Соответствующее пространству $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартное пространство с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$ определяется как $I = [0, \infty)$, если $\mu(\Omega) = \infty$, и $I = [0, a]$, если $\mu(\Omega) = a < \infty$. Здесь m — обычная мера Лебега на I, а $\mathcal{B}_m$ — m-пополнение борелевской σ-алгебры $\mathcal{B} = \mathcal{B}(I)$ относительно меры m.

Симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *стандартным*, если соответствующее пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартно.

Для симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ рассмотрим множество

$$\Xi(\mathbf{E}) := \{\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m) \colon f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}.$$

Дополнительное условие $\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ имеет смысл только при $\mu(\Omega) = \infty$. В этом случае $\xi_{f,\mu}(x) < \infty$ для всех $x \in (0, \infty)$, т. е. $\eta_{f,\mu}(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \eta_{f,\mu}(x) = 0$.

Функция $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}\colon \mathbf{E} \to [0, \infty)$ индуцирует отображение $\|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E})}\colon \Xi(\mathbf{E}) \to [0, \infty)$ на множестве $\Xi(\mathbf{E})$, где $\|g\|_{\Xi(\mathbf{E})} = \|f\|_{\mathbf{E}}$, $g = \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ для некоторой функции $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Два симметричных пространства $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ будем называть *равноизмеримыми*, если $\Xi(\mathbf{E}_1) = \Xi(\mathbf{E}_2)$. Если, кроме того, $\|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_1)} = \|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_2)}$, то пространства $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\Omega_1, \mathcal{F}_{\mu_1}, \mu_1)$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2(\Omega_2, \mathcal{F}_{\mu_2}, \mu_2)$ будем называть *строго равноизмеримыми*.

Следующие две теоремы показывают, что каждый класс равноизмеримых симметричных пространств содержит стандартное симметричное пространство, в то время как все равноизмеримые стандартные симметричные пространства совпадают.

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — *стандартное симметричное пространство и* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *произвольное измеримое пространство с (конечной или бесконечной σ-конечной неатомической) мерой* μ, *и пусть*

$$\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon \xi_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}, \tag{1.2}$$

$$\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)}, \quad f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu). \tag{1.3}$$

Тогда пространство $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)})$, *определенное в* (1.2) *и* (1.3), *является симметричным пространством на* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. *Симметричные пространства* $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *и* $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *строго равноизмеримы.*

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное пространство на пространстве с мерой* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, *и пусть*

$$\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m) := \{g \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)\colon \xi_{g,m} = \xi_{f,\mu} \text{ для некоторой функции } f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}, \tag{1.4}$$

$$\|g\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)} = \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} \text{ если } \xi_{g,m} = \xi_{f,\mu} \text{ и } f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu). \tag{1.5}$$

Тогда пространство $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)})$, *определенное в* (1.4) *и* (1.5), *является стандартным симметричным пространством. Симметричные пространства* $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *и* $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *строго равноизмеримы.*

Следуя [100], рассмотрим сначала сепарабельные пространства с мерой, и затем сведем несепарабельный случай к рассмотренному.

1.2.2. Сепарабельный случай. Напомним, что пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ называется *сепарабельным*, если σ-алгебра $\mathcal{F}$ является счетно порожденной mod μ. Это означает, что существует счетная подалгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, такая что $\mathcal{F} \subseteq (\mathcal{F}(\mathcal{A}))_\mu \subseteq \mathcal{F}_\mu$, где $(\mathcal{F}(\mathcal{A}))_\mu$ — μ-пополнение σ-алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, порожденной подалгеброй $\mathcal{A}$.

Счетная подалгебра $\mathcal{A}$ плотна в $\mathcal{F}$ в следующем смысле: для каждого $A \in \mathcal{F}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $B \in \mathcal{A}$, что $\mu(A \triangle B) < \varepsilon$.

Теорема 1.3. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — *сепарабельное пространство с σ-конечной неатомической мерой и* $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — *соответствующее стандартное пространство. Тогда существует алгебраический, порядковый, топологический и сохраняющий интеграл изоморфизм*

$$\Phi\colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m).$$

Для каждого симметричного пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *ограничение* $\Phi_{\mathbf{E}} = \Phi|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)}$ *является изометрическим изоморфизмом между симметричным пространством* $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *и равноизмеримым с ним стандартным симметричным пространством* $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Эта теорема включает в себя теоремы 1.1 и 1.2 в сепарабельном случае. Изоморфизм Φ в теореме 1.3 будет описан в явном виде ниже в предложении 1.1.

Пусть $\mathcal{A}$ — счетная подалгебра в $\mathcal{F}_\mu$. Говорят, что $\mathcal{A}$ *разделяет* точки Ω, если для каждой пары точек $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ существует множество $A \in \mathcal{A}$, такое что $\omega_1 \in A$ и $\omega_2 \notin A$.

Если $\mathcal{A}$ не разделяет точки Ω, мы можем рассмотреть разбиение $\zeta = \zeta(\mathcal{A})$ в Ω, порожденное $\mathcal{A}$, полагая $\omega_1 \overset{\zeta}{\sim} \omega_2 \iff$ если не существует $A \in \mathcal{A}$ такого, что $\omega_1 \in A$ и $\omega_2 \notin A$. Разбиение ζ состоит из элементов $\zeta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, где $\zeta(\omega)$ — это пересечение всех $A \in \mathcal{A}$, для которых $\omega \in A$.

Измеримые ζ-множества имеют вид $\zeta(F) = \bigcup_{\omega \in F} \zeta(\omega)$, $F \in \mathcal{F}_\mu$. Обозначим через $\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})$ σ-алгебру всех μ-измеримых ζ-множеств. Очевидно, $\mathcal{F}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})$ и $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu \subseteq (\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A}))_\mu$. Переходя к фактор-пространству $(\Omega/\zeta, \mathcal{F}/\zeta, \mu/\zeta)$, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $\zeta(\Omega)$ разделяет точки Ω.

Предложение 1.1. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — сепарабельное пространство с σ-конечной неатомической мерой μ, и $\mathcal{A}$ — счетная подалгебра в $\mathcal{F}_\mu$, такая что $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu = \mathcal{F}_\mu$, а $\zeta(\mathcal{A})$ разделяет точки Ω. Пусть $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартное пространство с мерой.*

Тогда существует подмножество $J \subseteq I$ полной внешней меры m^* в I и сохраняющее меру отображение $\varphi\colon (\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \to (J, \mathcal{F}_J, m_J)$ такое, что сужение $\varphi|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})}\colon (\Omega, \mathcal{F}^\mu(\mathcal{A}), \mu|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})}) \to (J, \mathcal{F}_J, m_J)$ является сохраняющим меру изоморфизмом между пространством $(\Omega, \mathcal{F}^\mu(\mathcal{A}), \mu|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})})$ и пространством с мерой $(J, \mathcal{F}_J, m_J)$, индуцированным $(I, \mathcal{B}_m, m)$ на J.

Изоморфизм пространств с мерой $\varphi|_{\mathcal{F}^\mu(\mathcal{A})}$ определяет изоморфизм $\Phi\colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ из теоремы 1.3.

Предложение 1.1 требует некоторых пояснений.

- Подмножество $J \subseteq I$ не обязано быть измеримым, $A \in \mathcal{F}_J$ тогда и только тогда, когда $A = B \cap J$ для некоторого $B \in \mathcal{B}_m$ и $\mu_J(A) = m(B)$, так как J — подмножество полной внешней меры m^*. Это означает, что I является измеримой оболочкой J, см. [42, § 214 A-J].
- Если $J \in \mathcal{B}_m$, т. е. является измеримым, то $m(I \setminus J) = 0$. Измеримое подпространство $(J, \mathcal{F}_J, m_J)$ является пространством Лебега, так же как и пространство $(I, \mathcal{B}_m, m)$. Эти два пространства Лебега изоморфны, и мы можем считать без ограничения общности, что в этом случае $J = I$.
- Пусть счетная подалгебра $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ разделяет точки Ω и $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu = \mathcal{F}_\mu$. Тогда подмножество J m-измеримо тогда и только тогда, когда само пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является пространством Лебега.

Доказательство предложения 1.1 использует явное описание сепарабельных пространств с мерой, неизоморфных пространствам Лебега, и некоторые другие результаты из работы В. А. Рохлина [16]. Более подробная информация содержится в работе [100].

1.2.3. Доказательство теорем 1.1 *и* 1.2.

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — общее (не обязательно сепарабельное) неатомическое пространство с мерой, и пусть $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее стандартное пространство с мерой.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс всех подалгебр $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_\mu$, таких что

- подалгебра $\mathcal{A}$ счетная,
- соответствующее сепарабельное пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu, \mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu})$ неатомическое,
- сужение $\mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu}$ меры μ на σ-алгебру $\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu$ является σ-конечной мерой.

Напомним еще раз, что сама мера μ предполагается неатомической и σ-конечной.

Для сокращения обозначений мы будем писать: $\mathcal{F}_\mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu$, $\mu_\mathcal{A} = \mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu}$ для $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$.

Для каждой подалгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ мы выбираем и фиксируем алгебраический, порядковый, топологический и сохраняющий интеграл изоморфизм $\Phi_\mathcal{A}\colon \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A}) \to \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$, как в теореме 1.3.

Пусть $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное пространство и $\Xi_0 = \Xi(\mathbf{E}_0)$, $\|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{\Xi(\mathbf{E}_0)}$. Так как $\Phi_\mathcal{A}$ сохраняет функции распределения, пространство $\mathbf{E}_\mathcal{A} := \Phi_\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{E}_0)$ является симметричным пространством на сепарабельном пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$, и $\mathbf{E}_\mathcal{A} = \mathbf{E}_\mathcal{A}(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ — единственное симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$, которое равноизмеримо с $\mathbf{E}_0$. Таким образом, $(\Xi_\mathcal{A}, \|\cdot\|_\mathcal{A}) = (\Xi_0, \|\cdot\|_0)$ для каждой подалгебры $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$.

Переходя к пространству $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, рассмотрим пространство $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu), \|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)})$, определенное в (1.2) и (1.3). Так как пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — неатомическое и σ-конечное, то $\mathcal{F}_\mu = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\mathcal{A}$, и следовательно, $\mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathfrak{A}} \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$. Из этого равенства следует, что $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)=\bigcup\limits_{\mathcal{A}\in\mathfrak{A}}\mathbf{E}_\mathcal{A}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$. Каждое $\mathbf{E}_\mathcal{A}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ является симметричным пространством на своем собственном пространстве с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$. Поэтому их объединение является симметричным пространством на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Более того, $\Xi(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))=\Xi(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}))=\Xi(\mathbf{E}_0(I,\mathcal{B}_m,m))=\Xi_0$ для любой $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$. Для каждой функции $f\in\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ существует подалгебра $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$, такая что $f\in\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ и $\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}=\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})}=\|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}_0(I,\mathcal{B}_m,m)}=\|\xi_{f,\mu}\|_0$.

Таким образом, все симметричные пространства $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ и $\mathbf{E}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$ являются равноизмеримыми. Доказательство теоремы 1.1 завершено. □

Доказательство теоремы 1.2. Пусть теперь $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — симметричное пространство на пространстве с неатомической конечной или бесконечной σ-конечной мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ и $(I,\mathcal{B}_m,m)$ соответствующее стандартное пространство с мерой. Пусть также $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)}$ пространство и норма, определенные равенствами (1.4) и (1.5).

Выбирая фиксированную счетную подалгебру $\mathcal{A}_1\in\mathfrak{A}$, рассмотрим сепарабельное пространство с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1)=(\Omega,\mathcal{F}_{\mathcal{A}_1},\mu_{\mathcal{A}_1})$ и пересечение $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_1(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1):=\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)\cap\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_{\mathcal{A}_1},\mu_{\mathcal{A}_1})$. Тогда норма (или квазинорма) $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}$ индуцирует норму (или квазинорму) $\|\cdot\|_1=\|\cdot\|_{\mathbf{E}_1(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1)}$ на $\mathbf{E}_1$ и $(\mathbf{E}_1,\|\cdot\|_1)$ является симметричным пространством на $(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1)$.

По теореме 1.3 существует алгебраический, порядковый, топологический и сохраняющий интеграл изоморфизм $\Phi_1\colon\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1)\to\mathbf{L}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$ такой, что сужение $\Phi_1|_{\mathbf{E}_1}$ является изометрическим изоморфизм между симметричным пространством $\mathbf{E}_1=\mathbf{E}_1(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ и равноизмеримым с ним стандартным симметричным пространством $\mathbf{E}_1(I,\mathcal{B}_m,m)$.

Очевидно, $\mathbf{E}_1(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1)\subseteq\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)\iff\mathbf{E}_1(I,\mathcal{B}_m,m)\subseteq\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$. С другой стороны, пусть $g\in\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$, т. е. $\xi_{g,m}=\xi_{f,\mu}$ для некоторой функции $f\in\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Тогда существует подалгебра $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$ такая, что $f\in\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$. Используя изоморфизм $\Phi_\mathcal{A}\colon\mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})\to\mathbf{L}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$, положим $f_1=\Phi_1^{-1}(\Phi_\mathcal{A}(f))$. Тогда $f_1\in\mathbf{E}_1(\Omega,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ и $\xi_{f_1,\mu_1}=\xi_{f,\mu}=\xi_{g,m}$, т. е. $g\in\mathbf{E}_1(I,\mathcal{B}_m,m)$.

Следовательно, $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)=\mathbf{E}_1(I,\mathcal{B}_m,m)$, и $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$ является стандартным симметричным пространством, так как таковым является пространство $\mathbf{E}_1(I,\mathcal{B}_m,m)$. Все пространства $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$ и $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$, $\mathcal{A}\in\mathfrak{A}$ строго равноизмеримы.

Доказательство теоремы 1.2 завершено. □

Простейшие несепарабельные пространства с мерой $(\Omega^\Upsilon,\mathcal{F}^\Upsilon,\mu^\Upsilon)$ можно построить следующим образом: $(\Omega^\Upsilon,\mathcal{F}^\Upsilon,\mu^\Upsilon)=(I,\mathcal{B}_m,m)\times\prod\limits_{\upsilon\in\Upsilon}(\Omega_\upsilon,\mathcal{F}_\upsilon,\mu_\upsilon)$, где $(\Omega_\upsilon,\mathcal{F}_\upsilon,\mu_\upsilon)$ для любого $\upsilon\in\Upsilon$ определяется следующим образом: $\Omega_\upsilon=\{0,1\}$, $\mathcal{F}_\upsilon=2^{\{0,1\}}$, $\mu_\upsilon(0)=\mu_\upsilon(1)=1/2$.

Выбирая индексные множества Υ различной мощности, мы получаем различные пространства с мерой $(\Omega^\Upsilon,\mathcal{F}^\Upsilon,\mu^\Upsilon)$ и различные симметричные пространства $\mathbf{E}(\Omega^\Upsilon,\mathcal{F}^\Upsilon,\mu^\Upsilon)$, равноизмеримые с одним и тем же стандартным симметричным пространством $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$.

С другой стороны, для любого счетного подмножества Υ_0 из Υ естественная проекция

$$\pi_0\colon(\Omega^\Upsilon,\mathcal{F}^\Upsilon,\mu^\Upsilon)\to(\Omega^{\Upsilon_0},\mathcal{F}^{\Upsilon_0},\mu^{\Upsilon_0)}=(I,\mathcal{B}_m,m)\times\prod_{\upsilon\in\Upsilon_0}(\Omega_\upsilon,\mathcal{F}_\upsilon,\mu_\upsilon)$$

порождает сепарабельное пространство с мерой $(\Omega^{\Upsilon_0},\mathcal{F}^{\Upsilon_0},\mu^{\Upsilon_0})$, где $\mathcal{F}^{\Upsilon_0}=\{\pi_0^{-1}A_0,\ A_0\in\mathcal{F}^{\Upsilon_0}\}$ и $\mu^{\Upsilon_0}=\mu^\Upsilon|_{\mathcal{F}^{\Upsilon_0}}$. При произвольном выборе счетного подмножества Υ_0 симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega^\Upsilon,\mathcal{F}^\Upsilon,\mu^\Upsilon)\cap\mathbf{L}_0(\Omega^{\Upsilon_0},\mathcal{F}^{\Upsilon_0},\mu^{\Upsilon_0})$ изометрически изоморфно тому же стандартному симметричному пространству $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$. Однако оно не обязательно должно быть изоморфно исходному симметричному пространству $\mathbf{E}(\Omega^\Upsilon,\mathcal{F}^\Upsilon,\mu^\Upsilon)$, если Υ несчетно.

1.2.4. Равенство $\xi_{f,\mu}=f\circ\phi$. Как прямое следствие теоремы 1.3, мы можем получить следующий полезный результат.

Теорема 1.4. *Пусть $f\in\mathbf{L}_0^\xi(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — измеримая неотрицательная функция такая, что $\xi_{f,\mu}(\infty)=0$. Тогда существует сохраняющее меру отображение $\phi\colon(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)\to(I,\mathcal{B}_m,m)$ такое, что $\xi_{f,\mu}=f\circ\phi$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.3, не ограничивая общности, можно считать, что рассматриваемое пространство с мерой стандартно.

Для каждой $f \in \mathbf{L}_0^{\xi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ обозначим через ζ_f измеримое разбиение $(I, \mathcal{B}_m, m)$, которое состоит из элементов вида

$$\zeta_f(x) = \begin{cases} f^{-1}(f(x)), & \text{если } m\left(\{f = x\}\right) = 0, \\ x, & \text{если } m\left(\{f = x\}\right) > 0. \end{cases}$$

Пусть π_{ζ_f} — естественная проекция $(I, \mathcal{B}_m, m)$ на фактор-пространство $(I/\zeta_f, \mathcal{B}_m/\zeta_f, m/\zeta_f)$. Предположение $\xi_{f,\mu}(\infty) = 0$ предусматривает, что фактор-мера m/ζ_f является σ-конечной. При этом $(I/\zeta_f, \mathcal{B}_m/\zeta_f, m/\zeta_f)$ является пространством Лебега, так как функция f, а потому и разбиение ζ_f, измеримы.

Функция $\hat{f}$, определенная на I/ζ_f равенством $f = \hat{f} \circ \pi_{\zeta_f}$, является равноизмеримой с f, так как π_{ζ_f} сохраняет меру. По построению, разбиение $\zeta_{\hat{f}}$ разделяет точки I/ζ_f, а разбиение $\zeta_{\xi_{f,\mu}}$ обладает этим свойством на I.

Поэтому существует сохраняющий меру изоморфизм $\tau \colon (I/\zeta_f, \mathcal{B}_m/\zeta_f, m/\zeta_f) \to (I, \mathcal{B}_m, m)$, такой что $\hat{f} = \xi_{f,\mu} \circ \tau$. Отображение $\phi = \tau \circ \pi_{\zeta_f}$ — требуемое. □

Теорема 1.4 хорошо известна довольно давно. Явное доказательство было дано в [25, § 2.7] и ранее в [113] для случая $\Omega = \mathbb{R}$. Для пространств Лебега теорему 1.4 можно вывести из работы Рохлина [17]. Приведенное выше доказательство является новым (см. [100]).

1.3. Минимальность. Максимальность. Условия (A), (B) и (C).

1.3.1. Минимальность. Условия (A) *и* (C). Симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *минимальным*, если множество $\mathbf{F}_1$ всех простых (конечнозначных) интегрируемых функций на Ω плотно в $\mathbf{E}$, т. е. замыкание $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1)$ совпадает с $\mathbf{E}$.

Множество $\mathbf{F}_1$ состоит из всех простых функций $f \colon \Omega \to [0, \infty)$ таких, что $0 \leqslant \mu(\{|f| = a\}) < \infty$ для всех $a > 0$. Для каждого $0 < p < \infty$ множество $\mathbf{F}_1$ плотно в $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty}$.

- Пусть $\mathbf{E}$ — симметричное квази-банахово пространство с модулем вогнутости $c_{\mathbf{E}} > 1$, и пусть $0 < p < 1$ такое, что $C = 2^{1/p-1} > c_{\mathbf{E}}$. Тогда $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, причем $\mathbf{E}$ минимально тогда и только тогда, когда $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{E}$.
- Пусть $\mathbf{E}$ — симметричное банахово пространство. Тогда $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E}$, причем $\mathbf{E}$ минимально тогда и только тогда, когда $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{E}$.

В общем случае $\mathbf{E}^0 := cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1) \subseteq \mathbf{E}$ является симметричным пространством, называемым *минимальной частью* $\mathbf{E}$. Таким образом, $\mathbf{E}$ — минимальное симметричное пространство тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E}$.

Ясно, что два равноизмеримых симметричных пространства минимальны или не минимальны одновременно.

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет *условию* (A) (имеет *порядково непрерывную норму*), когда

(A) *Если* $0 \leqslant f_n \in \mathbf{E}$ *и* $f_n \downarrow 0$, *то* $\|f_n\|_{\mathbf{E}} \downarrow 0$.

Говорят, что функция $f \in \mathbf{E}$ имеет *абсолютно непрерывную норму*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\mathbf{1}_A f\| < \varepsilon$ для каждого $A \in \mathcal{F}_\mu$ с мерой $\mu(A) < \delta$.

Теорема 1.5. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное пространство на* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

- $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A).
- *Каждая функция* $f \in \mathbf{E}$ *имеет абсолютно непрерывную норму.*
- $\mathbf{E}$ *минимально и* $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$.

Этот результат хорошо известен в случае, когда $\mathbf{E}$ является симметричным банаховым пространством: см. [70, § X.3, теорема 3] и [78, утверждение 1.a.8, теорема 1.b.16]. Утверждение остается в силе, если мы заменим норму на p-норму.

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет *условию* (C) (*имеет порядково полунепрерывную норму*), если

(C) *Из* $0 \leqslant f_n \uparrow f \in \mathbf{E}$ *следует, что* $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Заметим, что симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет условию (C) тогда и только тогда, когда соответствующее ему стандартное симметричное пространство $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ удовлетворяет этому условию.

Легко видеть, что из условия (A) следуют условие (C) и минимальность.

Минимальное симметричное пространство не обязательно должно удовлетворять условию (A). В то же время, имеет место следующая теорема.

Теорема 1.6. *Любое минимальное симметричное пространство удовлетворяет условию* (C).

При доказательстве этой теоремы мы используем [99, § 2, т. 2.2], где этот результат доказан для стандартных симметричных банаховых пространств.

Доказательство. Мы можем предполагать, что $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ является p-нормой с $0 < p \leqslant 1$.

Так как условие минимальности и условие (C) являются инвариантами для равноизмеримых симметричных пространств, то можно считать, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$. В этом случае $\xi_{f,m} \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathbf{E}$.

Если $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$, то из минимальности по теореме 1.5 следует условие (A). А из условия (A), очевидно, следует условие (C).

Пусть теперь $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = c > 0$. Для каждой $f \in \mathbf{E}$ и каждой последовательности $x_n \downarrow 0$ имеем:

$$\|\xi_{f,m}\|_{\mathbf{E}} \geqslant \|\xi_{f,m} \cdot \mathbf{1}_{[0,x_n]}\|_{\mathbf{E}} \geqslant \xi_{f,m}(x_n)\|\mathbf{1}_{[0,x_n]}\|_{\mathbf{E}} = \xi_{f,m}(x_n)\varphi_{\mathbf{E}}(x_n) \geqslant c \cdot \xi_{f,m}(x_n).$$

Отсюда $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty} = \xi_{f,m}(0) = \sup\limits_n \xi_{f,m}(x_n) \leqslant \frac{1}{c}\|\xi_{f,m}\|_{\mathbf{E}} < \infty$, т. е. $f \in \mathbf{L}_\infty$. Таким образом, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_\infty$.

В случае, когда I — конечный интервал, $\mathbf{E}$ совпадает с $\mathbf{L}_\infty$, и потому удовлетворяет условию (C). Остается рассмотреть случай $I = [0.\infty)$.

Покажем, что если $\mathbf{E}$ минимально и $\mathbf{E} \subset \mathbf{L}_\infty$ (включение строгое), то для каждой функции $f \in \mathbf{E}$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} = 0. \tag{1.6}$$

Пусть $\mathbf{F}_0$ — множество всех простых функций на I с ограниченным носителем. Простая функция g принадлежит $\mathbf{F}_0$ тогда и только тогда, когда $g \cdot \mathbf{1}_{[a,\infty)} = 0$ для некоторого конечного $a > 0$.

Так как $\mathbf{F}_0$ плотно в $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty$ для $0 < p < \infty$ и $\mathbf{E}$ минимально, то мы имеем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty) = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_0).$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $g \in \mathbf{F}_0$ такая, что $\|f - g\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon$. Отсюда

$$\|f - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|^p_{\mathbf{E}} \leqslant \|f - g\|^p_{\mathbf{E}} + \|g - g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|^p_{\mathbf{E}} + \|g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]} - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|^p_{\mathbf{E}}.$$

Более того, $\|g - g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} = 0$ для достаточно больших n, и

$$\|g \cdot \mathbf{1}_{[0,n]} - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f - g\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\|f - f \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}} < c(\varepsilon)$ для достаточно больших n, и поэтому имеет место (1.6).

Пусть теперь $0 \leqslant f_n \uparrow f \in \mathbf{E} \subset \mathbf{L}_\infty$. Тогда из (1.6) следует $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} = \sup\limits_n \sup\limits_k \|f_n \cdot \mathbf{1}_{[0,k]}\|_{\mathbf{E}} = \sup\limits_k \|f \cdot \mathbf{1}_{[0,k]}\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$. □

1.3.2. Минимальность и сепарабельность. Напомним, что пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *сепарабельным*, если σ-алгебра $\mathcal{F}_\mu$ является счетно-порожденной mod μ, т. е. существует счетная σ-подалгебра $\mathcal{F}_0$ такая, что $(\mathcal{F}_0)_\mu = \mathcal{F}_\mu$.

Пространство $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является полным метрическим пространством относительно метрики $\delta_0(f, g) = \displaystyle\int\limits_\Omega \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, w\, d\mu$, $f, g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и некоторой функции $w \in \mathbf{L}_1^+(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Метрика δ_0 индуцирует топологию стохастической сходимости на $\mathbf{L}_0$, т. е. топологию сходимости по мере на всех подмножествах конечной меры.

Мы рассматриваем σ-алгебру $\mathcal{F}_\mu$ как абстрактную булеву алгебру $\nabla = \nabla(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, снабженную метрикой $\delta_\nabla(A, B) = \delta_0(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B)$, $A, B \in \nabla$. По определению, естественное вложение $\nabla \in A \to \mathbf{1}_A \in$

$\mathbf{L}_0$ является изометрией, (∇, δ_∇) является полным метрическим пространством, так же как и $(\mathbf{L}_0, \delta_0)$.

Известно (см., например, [70, § 1.6, т. 16]), что следующие условия эквивалентны:

- $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно,
- (∇, δ_∇) сепарабельно,
- $(\mathbf{L}_0, \delta_0)$ сепарабельно.

Очевидно, что сепарабельность не является инвариантом равноизмеримых симметричных пространств. Но, в отличие от сепарабельности, свойство (A), также как и минимальность, является инвариантом для равноизмеримых симметричных пространств.

Условие минимальности $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ можно сформулировать в терминах пространства $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ следующим образом. Пусть $\min(\xi_{f,\mu}, n)$ и $\xi_{f,\mu} \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}$ — верхние и правые n-срезки функции $\xi_{f,\mu}$, где $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\xi_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$.

- Симметричное пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является минимальным тогда и только тогда, когда $\|\xi_{f,\mu} - \min(\xi_{f,\mu}, n)\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)} \to 0$ и $\|\xi_{f,\mu} - \xi_{f,\mu} \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Это простое замечание в сочетании с теоремами 1.1 и 1.2 приводит к следующему результату

Теорема 1.7. *Пусть $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное пространство на стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$. Тогда*:

1. *Следующие условия эквивалентны*:
   - $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *является сепарабельным.*
2. *Следующие условия эквивалентны в случае, когда пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно*:
   - $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ *удовлетворяет условию* (A).
   - $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *сепарабельно.*

1.3.3. Ассоциированные симметричные пространства. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. *Ассоциированное пространство* $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu))^1$ симметричного пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ определяется как $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu))^1 := \left\{g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon \|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} < \infty\right\}$, где $\|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} := \sup\left\{\int\limits_\Omega fg\,d\mu,\ \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} \leqslant 1\right\}$.

Предложение 1.2. *Пусть $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее стандартное симметричное банахово пространство на стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.*

1. *Пространства $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)^1$ и $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1$ являются симметричными банаховыми пространствами на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $(I, \mathcal{B})_m, m)$, соответственно.*
2. *Пространства $(\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)^1$ и $(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m))^1$ строго равноизмеримы и*

$$\|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} = \|\xi_{g,\mu}\|_{(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1} = \sup\left\{\int\limits_I \xi_{f,\mu}\,\xi_{g,\mu}\,d\mu,\ \|f\|_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)} \leqslant 1\right\}.$$

Доказательство. Оба утверждения 1 и 2 хорошо известны в том случае, когда пространство $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ стандартное, т. е. $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ (см. [74, § II.4] или [111, гл. 7]).

Для общего σ-конечного, неатомического пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и любой фиксированной функции $g \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ можно найти счетную подалгебру $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, как в пункте 1.2.3, такую, что $g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$. В этом случае $\mathcal{F}_\mathcal{A} = \mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu$, и сужение $\mu_\mathcal{A} = \mu|_{\mathcal{F}(\mathcal{A})_\mu}$ является σ-конечной мерой, в то время как пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A})$ сепарабельно.

При этом σ-конечность меры $\mu_\mathcal{A}$ позволяет нам рассмотреть условное ожидание

$$\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{F}_\mathcal{A}}\colon (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \in f \to \mathbb{E}_\mu^{\mathcal{F}_\mathcal{A}}[f] \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mathcal{A}, \mu_\mathcal{A}),$$

даже если $\mu(\Omega) = \infty$, см. [39, §§ 2.3.7–2.3.9].

Элементарные свойства условных ожиданий приводят к равенствам

$$\|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1} = \sup\left\{ \int\limits_\Omega fg\,d\mu\colon \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} \leqslant 1\right\} = \sup\left\{ \int\limits_\Omega \mathbb{E}_\mu^{\mathcal{F}_\mathcal{A}}[f]\,g\,d\mu\colon \|f\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{ \int\limits_\Omega hg\,d\mu_\mathcal{A}\colon \|h\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})} \leqslant 1\right\} = \|g\|_{(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}))^1}.$$

С другой стороны, пространство с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ сепарабельно, и мы можем использовать алгебраический, порядковый, топологический, сохраняющий интеграл изоморфизм $\Phi_\mathcal{A}\colon \mathbf{L}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}) \to \mathbf{L}_0(I,\mathcal{B}_m,m)$ из теоремы 1.3. Этот изоморфизм индуцирует изометрический изоморфизм между пространствами $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A})$ и $\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)$ и, следовательно, определяет изометрический изоморфизм между пространствами $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}))^1$ и $(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1$.

Таким образом, $(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1$ есть стандартное пространство пространства $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mathcal{A},\mu_\mathcal{A}))^1$, а также пространства $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1$. □

Далее мы будем писать $\mathbf{E}^1(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ и $\mathbf{E}^1(I,\mathcal{B}_m,m)$ вместо $(\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu))^1$ и $(\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m))^1$.

Ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ симметричного банахова пространства $\mathbf{E}$ можно отождествить с подмножеством $\{\upsilon_g\colon g\in\mathbf{E}^1\}$ дуального пространства $\mathbf{E}^*$, где $\upsilon_g(f) := \int fg\,d\mu$, $f\in\mathbf{E}$. По определению, $\upsilon_g\in\mathbf{E}^*$ и $\|\upsilon_g\|_{\mathbf{E}^*} = \|g\|_{\mathbf{E}^1}$ для каждой функции $g\in\mathbf{E}^1$.

Естественное вложение $\upsilon : \mathbf{E}^1 \ni g \to \upsilon_g \in \mathbf{E}^*$ является изометрическим изоморфизмом $\mathbf{E}^1$ на замкнутое подпространство $\{\upsilon_g, g\in\mathbf{E}^1\}$ пространства $\mathbf{E}^*$.

Следует отметить, что в общем случае $\upsilon(\mathbf{E}^1)$ может быть собственным подмножеством $\mathbf{E}^*$. Например, $\upsilon(\mathbf{E}^1)$ — собственное подмножество $\mathbf{E}^*$, если $\mathbf{E}=\mathbf{L}_\infty$.

Теорема 1.5 теперь может быть дополнена еще одним эквивалентным условием.

Теорема 1.8 (см., например, [70, § X.4]). *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда* $\upsilon(\mathbf{E}^1) = \{\upsilon_g,\ g\in\mathbf{E}^1\} = \mathbf{E}^*$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A).

Замечание 1.1. Приведенные выше определения и результаты формально имеют смысл для общих симметричных квази-банаховых пространств $\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Однако поскольку мы имеем дело только с неатомическими пространствами с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, то дуальное пространство $\mathbf{E}^*$ и, следовательно, ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ могут быть тривиальными, если только пространство $\mathbf{E}$ не нормируемо.

Например, пусть $\mathbf{E}=\mathbf{L}_p$, $0<p\leqslant\infty$. Для $1\leqslant p\leqslant\infty$ мы имеем $(\mathbf{L}_p)^1=\mathbf{L}_q$, где $1/p+1/q=1$, в то время как $\mathbf{L}_p=\{0\}$, если $p<1$.

Читатель может использовать обзор [56] и приведенные там ссылки, чтобы найти многие полезные результаты о дуальных пространствах $\mathbf{E}^*$ ненормируемых квази-банаховых пространств $\mathbf{E}$.

Возвращаясь к симметричным банаховым пространствам, рассмотрим ассоциированные пространства $\mathbf{E}^{11} = (\mathbf{E}^1)^1$, $\mathbf{E}^{111} = (\mathbf{E}^{11})^1$ и т. д. Непосредственно из определений следует, что $\mathbf{E}\subseteq\mathbf{E}^{11}$, причем это вложение может быть строгим. Более того, $\|f\|_{\mathbf{E}^{11}} \leqslant \|f\|_\mathbf{E}$, $f\in\mathbf{E}$, т. е. естественное вложение $\mathbf{E}\to\mathbf{E}^{11}$ является сжатием.

Из условия (C) следует, что это отображение является изометрией. А именно:

Теорема 1.9. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (C).
2. $\|f\|_\mathbf{E} = \sup\{\upsilon_g(f) : \|g\|_{\mathbf{E}^1}\leqslant 1\}$.
3. $\|f\|_{\mathbf{E}^{11}} = \|f\|_\mathbf{E}$, $f\in\mathbf{E}$.

Эту теорему обычно называют теоремой Накано—Амемия—Мори, см. [97] или [70, т. X.4.7].

Подпространство $\mathbf{G}\subseteq\mathbf{E}^*$ называется *нормативным*, если $\|f\|_\mathbf{E} = \sup\{g\in\mathbf{G}\colon \|g\|_{\mathbf{E}^1}\leqslant 1\}$, см. [78, §1.b]. Условие 2 в приведенной выше теореме означает, что подпространство $\upsilon(\mathbf{E}^1)$ пространства $\mathbf{E}^*$ всегда является нормативным.

Рассмотрим, для примера, пространство $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$ с новой нормой $\|f\|_\mathbf{E} = \|f\|_{\mathbf{L}_\infty} + \xi_{f,\mu}(\infty)$, $f \in \mathbf{E}$, где $\xi_{f,\mu}(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \xi_{f,\mu}(x)$. Тогда $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_\mathbf{E})$ является симметричным банаховым пространством, которое не удовлетворяет условию (C).

В этом примере естественное вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{L}_\infty$ не является изометричным. Однако нормы $\|\cdot\|_\mathbf{E}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty}$ эквивалентны, так как для каждой функции $f \in \mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$: $\xi_{f,\mu}(\infty) \leqslant \xi_{f,\mu}(0) = \|f\|_{\mathbf{L}_\infty}$, $f \in \mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty \Longrightarrow \|f\|_{\mathbf{L}_\infty} \leqslant \|f\|_\mathbf{E} \leqslant 2\|f\|_{\mathbf{L}_\infty}$. Поэтому отображение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ является открытым.

В общем случае по теореме об открытом отображении естественное вложение $\mathbf{E} \to \mathbf{E}^{11}$ является открытым тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ является замкнутым в $\mathbf{E}^{11}$.

Однако существует симметричное банахово пространство, для которого $\mathbf{E}$ не является замкнутым в $\mathbf{E}^{11}$.

1.3.4. Максимальность. Условия (B) *и* (F). Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, а $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное банахово пространство на соответствующем пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет условию (B) (*имеет монотонно полную норму*), если

(B) *Если* $0 \leqslant f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$, $\sup\limits_n \|f_n\|_\mathbf{E} < \infty$, *то* $f_n \uparrow f$ *для некоторого* $f \in \mathbf{E}$.

Заметим, что это свойство (также как и свойства (A) и (C)) инвариантно для равноизмеримых симметричных пространств.

В случае симметричных банаховых пространств мы можем использовать вложение $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$.

Симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *максимальным* (или *порядково рефлексивным*), если $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ как множества.

Теорема 1.10. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ *как множества, т. е.* $\mathbf{E}$ *максимально.*
2. $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ *для некоторого симметричного пространства* $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
3. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (B).

Комбинируя теоремы 1.9 и 1.10, мы получаем:

Теорема 1.11. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$ *и* $\|\cdot\|_\mathbf{E} = \|\cdot\|_{\mathbf{E}^{11}}$.
2. $\mathbf{E} = \mathbf{G}^1$ *и* $\|\cdot\|_\mathbf{E} = \|\cdot\|_{\mathbf{G}^1}$ *для некоторого симметричного пространства* $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
3. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условиям* (B) *и* (C).
4. *Если* $\kappa\colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ *каноническое вложение, то существует проектор* $\pi\colon \mathbf{E}^{**} \to \kappa(\mathbf{E})$ *с нормой* $\|\pi\| = 1$.
5. *Каждая центрированная последовательность замкнутых шаров имеет непустое пересечение в* $\mathbf{E}$.

В [70, теорема X.4] этот и предыдущие результаты рассматриваются для общих банаховых K-пространств.

Комбинация свойств (B) и (C) (используемых в приведенной выше теореме) означает:

(BC) *Если* $0 \leqslant f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$ *и* $\sup\limits_n \|f_n\|_\mathbf{E} < \infty$, *то* $f_n \uparrow f$ *и* $\sup\limits_n \|f_n\|_\mathbf{E} = \|f\|_\mathbf{E}$ *для некоторого* $f \in \mathbf{E}$.

Это свойство имеет смысл для общих симметричных квази-банаховых пространств и может быть переформулировано как следующее условие Фату (F) (см. [78, § 1.б]):

(F) *Если* $\{f_n\} \subset \mathbf{E}$, $f_n \overset{(п.в.)}{\longrightarrow} f$ *и* $\sup\limits_n \|f_n\|_\mathbf{E} < \infty$, *то* $f \in \mathbf{E}$ *и* $\|f\|_\mathbf{E} \leqslant \liminf\limits_n \|f_n\|_\mathbf{E}$.

В случае $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$ свойство (F) — это утверждение классической леммы Фату.

1.3.5. Слабая секвенциальная полнота и рефлексивность. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство.

Мы снова рассмотрим вложения $\mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^{11}$, где $\mathbf{E}^0$ — минимальная часть $\mathbf{E}$, а $\mathbf{E}^{11}$ — второе ассоциированное пространство. Наша цель — специальный случай, когда $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$, т. е. когда пространство $\mathbf{E}$ минимально и максимально одновременно.

Предполагая, в дополнение к равенству $\mathbf{E}^0 = \mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$, что $\varphi_{\mathbf{E}}(0) = 0$ (т. е. $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{L}_\infty$), мы получим, что пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет обоим свойствам (A) и (B). Сочетание свойств (A) и (B) приводит нас к следующему условию:

(AB) *Если* $0 \leqslant f_n \uparrow$, $f_n \in \mathbf{E}$ *и* $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{E}} < \infty$, *то* $f_n \uparrow f$ *и* $\|f_n - f\|_{\mathbf{E}} \to 0$ *для некоторой функции* $f \in \mathbf{E}$.

Напомним, что для любого банахова пространства $\mathbf{E}$ имеет место каноническое вложение κ : $\mathbf{E} \ni f \to \kappa_f \in \mathbf{E}^{**}$, где κ_f — ограниченный линейный функционал на $\mathbf{E}^*$, определяемый равенством $\kappa_f(u) = u(f)$, $u \in \mathbf{E}^*$

Вложение $\kappa : \mathbf{E} \to \mathbf{E}^{**}$ является линейной изометрией пространства $\mathbf{E}$ на замкнутое подпространство $\kappa(\mathbf{E}) \subseteq \mathbf{E}^{**}$. Банахово пространство $\mathbf{E}$ называется *рефлексивным*, если $\kappa(\mathbf{E}) = \mathbf{E}^{**}$.

Напомним также, что банахово пространство $\mathbf{E}$ называется *слабо секвенциально полным*, если оно секвенциально полно в слабой топологии $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$. Это означает, что если $\{f_n, n \geqslant 1\} \subset \mathbf{E}$ и для каждого $u \in \mathbf{E}^*$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} u(f_n)$, то $f_n \to f$ для некоторой $f \in \mathbf{E}$ в слабой топологии $\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{E}^*)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u(f_n) = u(f)$ для каждого $u \in \mathbf{E}^*$.

В случае симметричного банахова пространства $\mathbf{E}$ условие (AB) дает эффективный критерий слабой секвенциальной полноты и рефлексивности.

Теорема 1.12. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *— симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (AB).
2. *Каждая возрастающая ограниченная по норме последовательность сходится в* $\mathbf{E}$ *по норме.*
3. $\kappa(\mathbf{E})$ *является полосой в* $\mathbf{E}^{**}$.
4. $\mathbf{E}$ *слабо секвенциально полно.*

Напомним, что $\mathbf{F}$ называется полосой, если $\mathbf{F}^{\perp\perp} = (\mathbf{F}^\perp)^\perp = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}^\perp = \{g \in \mathbf{G} \colon |f| \wedge |g| = 0$ для всех $f \in \mathbf{F}\}$.

Теорема 1.13. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *— симметричное пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E}$ *рефлексивно.*
2. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условиям* (A) *и* (B), *а* $\mathbf{E}^*$ *удовлетворяет условию* (A).
3. $\mathbf{E}$ *и* $\mathbf{E}^*$ *удовлетворяют условиям* (A) *и* (B).

Рассмотренные условия (A) и (AB) могут быть охарактеризованы в терминах общих банаховых пространств.

Теорема 1.14. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *— симметричное банахово пространство. Тогда*:

1. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A) *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *не содержит подпространства, изометричного* $\mathbf{l}_\infty$.
2. $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (AB) *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *не содержит подпространства, изометричного* $\mathbf{c}_0$.
3. $\mathbf{E}$ *рефлексивно тогда и только тогда, когда* $\mathbf{E}$ *не содержит подпространства, изометричного* $\mathbf{c}_0$ *или* $\mathbf{l}_1$.

Доказательства трех вышеприведенных теорем можно найти в [70, гл. X.4, теоремы 8–10].

1.3.6. Порядковая полнота и порядковая сходимость. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Напомним, что мера μ предполагается σ-конечной, поэтому существует вероятностная мера ν, которая эквивалентна μ. Каждое симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является плотным подмножеством пространства

$\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, рассматриваемого как полное топологическое линейное пространство относительно топологии стохастической сходимости. Действительно, $\mathbf{E}$ содержит множество $\mathbf{F}_1$ всех простых интегрируемых функций, которое плотно в $\mathbf{L}_0$.

Решетка $\mathbf{L}_0$ и ее подрешетки снабжены обычным отношением порядка «$\leqslant$» на функциях.

Решетка $\mathbf{L}_0$ является σ-полной, а также порядково полной, так как мера μ σ-конечна. Это означает, что каждое порядковое ограниченное подмножество $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{L}_0$ имеет наименьшую верхнюю грань $\sup \mathbf{F} \in \mathbf{L}_0$ и наибольшую нижнюю грань $\inf \mathbf{F} \in \mathbf{L}_0$. Мы используем здесь и далее обозначение «$\sup \mathbf{F}$» и «$\inf \mathbf{F}$» для классов μ-эквивалентных функций, которое в точности соответствует $\operatorname{esssup} \mathbf{F}$ и $\operatorname{essinf} \mathbf{F}$, для индивидуальных функций.

Напомним, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ элементов частично упорядоченного множества $\mathbf{F}$ называется *порядково сходящейся* к $f \in \mathbf{F}$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f$), если существуют $g_n \in \mathbf{F}$ и $h_n \in \mathbf{F}$ такие, что $g_n \uparrow f$, $\quad h_n \downarrow f$, $f = \sup\limits_{n\geqslant 1} g_n = \inf\limits_{n\geqslant 1} h_n \in \mathbf{F}$. Если $\mathbf{F}$ является σ-полной решеткой, то $f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{F}$ тогда и только тогда, когда множество $\{f_n,\, n \geqslant 1\}$ порядково ограничено в $\mathbf{F}$ и $f = \sup\limits_{n\geqslant 1} \inf\limits_{m\geqslant n} f_m = \inf\limits_{n\geqslant 1} \sup\limits_{m\geqslant n} f_m \in \mathbf{F}$. Очевидно, $f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $|f_n - f| \xrightarrow{(o)} 0 \in \mathbf{E}$, т. е. когда существует такая последовательность $h_n \in \mathbf{E}$, что $h_n \downarrow 0$ и $|f_n - f| \leqslant h_n$. Таким образом, для каждого симметричного банахова пространства $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ мы имеем:

- $\mathbf{E}$ является порядково полной подрешеткой порядково полной решетки $\mathbf{L}_0$.
- Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является порядково сходящейся в $\mathbf{E}$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{E}$) тогда и только тогда, когда $\{f_n,\, n \geqslant 1\}$ порядково ограничена в $\mathbf{E}$ и $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ порядково сходится в $\mathbf{L}_0$.

Здесь порядковая сходимость в $\mathbf{L}_0$ означает сходимость почти всюду на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, т. е.

- $f_n \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $f_n \xrightarrow{(\text{п.в.})} f$ на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\{f_n,\, n \geqslant 1\}$ порядково ограничена в $\mathbf{E}$.

Отметим также, что

- Если $\|f_n - f\|_{\mathbf{E}} \to 0$, то существует подпоследовательность f_{n_k} последовательности f_n такая, что $f_{n_k} \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{E}$.
- Если $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A), то из порядковой сходимости следует сходимость по норме в $\mathbf{E}$.

1.4. Основные классы симметричных пространств.

1.4.1. Три основные конструкции симметричных пространств. Всюду в этом разделе $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное пространство.

1.4.1.1. Левые композиции и модулярные пространства. Пусть $I = [0, \infty)$ и $U\colon I \to I$ — возрастающая положительная функция такая, что $U(0) = 0$ и $U(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} U(x) = \infty$. Мы полагаем

$$\mathcal{M}_{\mathbf{E}}^U(f) = \begin{cases} \|U \circ f\|_{\mathbf{E}}, & U \circ f \in \mathbf{E}, \\ \infty, & U \circ f \notin \mathbf{E}, \end{cases}$$

$U \circ \mathbf{E} = \Big\{ f \in \mathbf{L}_0\colon \mathcal{M}_{\mathbf{E}}^U\Big(\dfrac{|f|}{a}\Big) < \infty$ для некоторого $a > 0 \Big\}$ и $\|f\|_{U\circ\mathbf{E}} = \inf \Big\{ a > 0\colon \mathcal{M}_{\mathbf{E}}^U\Big(\dfrac{|f|}{a}\Big) < 1 \Big\}$. Тогда $\mathcal{M}_{\mathbf{E}}^U$ является модулярой или квазимодулярой в случае, когда $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ является нормой или квазинормой при условии, что функция U удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Для получения дополнительной информации о модулярных и квазимодулярных пространствах читатель может обратиться к работам [71, 101, 102, 110].

Если пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ является симметричным, то пространство $(U \circ \mathbf{E}, \|\cdot\|_{U\circ\mathbf{E}})$ тоже симметрично, так как $\mathcal{M}_{\mathbf{E}}^U(f_1) = \mathcal{M}_{\mathbf{E}}^U(f_2)$ для равноизмеримых функций f_1 и f_2. Наиболее важными примерами являются пространства Орлича и Орлича—Лоренца, см. ниже пункты 1.4.2 и 1.4.6.

Следует отметить, что пространство $U \circ \mathbf{E}$ является частным случаем общей конструкции Кальдерона—Лозановского $\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ [7] с $\mathbf{F} = \mathbf{L}_\infty$ (см. также [68, 85]).

1.4.1.2. Весовая функция. Пусть опять $I = [0, \infty)$ и $V\colon I \to I$ — положительная возрастающая функция такая, что $V(0) = 0$ и $V(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} V(x) = \infty$.

Мы используем оператор умножения $g \to V \cdot g$ на стандартном пространстве $\mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$, и для данного симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ положим $\mathbf{E}(V) := \mathbf{E}(V)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon V \cdot \xi_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}(V)} = \|V \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}}$.

Имеем

$$\|f+g\|_{\mathbf{E}(V)} = \|V \cdot \xi_{f+g,\mu}\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|V \cdot D_2(\xi_{f,\mu} + \xi_{g,\mu})\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|D_2(D_{1/2}(V) \cdot (\xi_{f,\mu} + \xi_{g,\mu})\|_{\mathbf{E}} \leqslant$$
$$\leqslant d_{\mathbf{E}}(2) V^\sharp(2) \|V \cdot (\xi_{f,\mu} + \xi_{g,\mu})\|_{\mathbf{E}} \leqslant d_{\mathbf{E}}(2) V^\sharp(2) C(\|V \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}} + \|V \cdot \xi_{g,\mu}\|_{\mathbf{E}}) =$$
$$= d_{\mathbf{E}}(2) V^\sharp(2) C(\|f\|_{\mathbf{E}(V)} + \|g\|_{\mathbf{E}(V)}).$$

Здесь C взято из слабого неравенства треугольника для $\mathbf{E}$, $V^\sharp(t) = \sup\limits_{x>0} \dfrac{V(tx)}{v(x)}$, $0 < t < \infty$ — функция растяжения (определение и общие свойства функции растяжения $V^\sharp$ будут описаны ниже в пункте 2.1.1), $D_t\,:\, \mathbf{L}_0 \to \mathbf{L}_0$ — оператор растяжения, и $d_{\mathbf{E}}(t) = \|D_t\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}}$, $0 < t < \infty$ (см. пункт 2.2.1).

В случае, когда $\mathbf{E}$ является симметричным банаховым пространством, $d_{\mathbf{E}}(t) \leqslant \max(1, t)$, $t > 0$, откуда $d_{\mathbf{E}}(2) \leqslant 2$. Отметим, что $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(V)}$ является симметричной квазинормой при условии, что $d_{\mathbf{E}}(2)\, V^\sharp(2)$ ограничено. Последнее условие $V^\sharp(2) < \infty$ известно как Δ_2-условие для $V^\sharp$.

Например, пространства Лоренца, Марцинкевича и Орлича—Лоренца строятся подходящим выбором $\mathbf{E}$ и V.

1.4.1.3. Мажорантная функция $\theta_{f,\mu}$ и пространство $\mathbf{E}_\theta$. Используя оператор Харди $H\colon \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_0$, $Hg(x) = \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x g\, dm$, $x \geqslant 0$, $g \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$, мы вводим мажорантную функцию Харди—Литтлвуда как $\theta_{f,\mu}(x) = H\xi_{f,\mu} = \dfrac{1}{x}\int\limits_0^x \xi_{f,\mu}\, dm$, $x \in I$, $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда имеем:

- $0 \leqslant \xi_{f,\mu}(x) \leqslant \theta_{f,\mu}(x) < \infty$, $0 < x < \infty$.
- $\theta_{f,\mu}(x)$ является убывающей и непрерывной на I.
- $\theta_{g,\mu}(x) = \dfrac{1}{x} \sup \left\{ \int\limits_A |g| dm,\ m(A) = x \right\}$, $x > 0$, $g \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$.
- $\theta_{f_1+f_2,\mu} \leqslant \theta_{f_1,\mu} + \theta_{f_2,\mu}$, $f_1, f_2 \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Последнее «неравенство треугольника» как раз показывает существенное отличие $\theta_{f,\mu}$ от $\xi_{f,\mu}$, для которого имеет место только слабое неравенство треугольника $\xi_{f_1+f_2,\mu} \leqslant D_2(\xi_{f_1,\mu} + \xi_{f_2,\mu})$.

Операция $f \to \theta_{f,\mu}$ дает эффективный способ построения новых симметричных пространств.

Действительно, пусть U — положительная функция на $I = [0, \infty)$ и $U^{(a)}(x) = U(x) \min\left(1, \dfrac{a}{x}\right)$, $x \geqslant 0$. Для каждого симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ положим

$$\mathbf{E}_\theta(U) = \mathbf{E}_\theta(U)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon U \cdot \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\},$$
$$\|f\|_{\mathbf{E}_\theta(U)} = \|f\|_{\mathbf{E}_\theta(U)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} = \|U \cdot \theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)}, \quad f \in \mathbf{E}_\theta(U)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu).$$

Предложение 1.3. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и U — ненулевая измеримая функция такая, что $U^{(a)} \in \mathbf{E}$ для некоторого $a > 0$.*

Тогда $\|\cdot\|_{\mathbf{E}_\theta(U)}$ является нормой (p-нормой), если $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$ является нормой (p-нормой).

Пространство $(\mathbf{E}_\theta(U), \|\cdot\|_{\mathbf{E}_\theta(U)})$ является симметричным пространством на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{E}_\theta(U)}(t) = \|U^{(t)}\|_{\mathbf{E}}$, $t \geqslant 0$.

Доказательство можно найти в [74, § II.6.1] или [111, § 11.1].

Следует отметить, что из неравенства $\xi_{f,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$, $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, следует вложение $\mathbf{E}_\theta(U) \subseteq \mathbf{E}$. Это вложение может быть строгим, и существуют симметричные банаховы пространства, для которых $cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{E}_\theta(U)) \neq \mathbf{E}$.

В частном случае, когда $U \equiv 1$, мы будем писать $\mathbf{E}_\theta$ вместо $\mathbf{E}_\theta(U)$ и называть пространство $\mathbf{E}_\theta$ *θ-частью* $\mathbf{E}$.

Во вложении $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E}$ случай равенства $\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}$ представляет особый интерес, см. пункт 2.3.2. В этом случае говорят, что пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет *условию Харди—Литтлвуда*, и пишут $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$.

Отметим, что наиболее важные примеры пространств $\mathbf{E}_\theta(U)$ дают пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ с $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$ и $U = V_*$, где V — квазивогнутая функция и $V_*(x) = x/V(x)$, $x > 0$.

1.4.2. Пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$. Пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ получаются как левая композиция $U \circ \mathbf{E}$ пространства $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$ с подходящей функцией Орлича $U = \Phi$.

Функция Орлича $\Phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty]$ представляет собой возрастающую непрерывную слева выпуклую функцию с условием $\Phi(0) = 0$. Мы также предполагаем, что Φ нетривиальна в том смысле, что $\Phi(x) > 0$ и $\Phi(y) < \infty$ для некоторых $x, y > 0$.

Соответствующая модуляра $\mathcal{M}^U_{\mathbf{E}} = \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}$ имеет вид

$$\mathcal{M}^U_{\mathbf{E}}(f) = \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(f) = \int\limits_I \Phi \circ \xi_{f,\mu}\, dm = \int\limits_\Omega \Phi \circ |f|\, d\mu,\ f \in \mathbf{L}^\xi_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu).$$

Интеграл конечен тогда и только тогда, когда $\Phi \circ \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_1(I, \mathcal{B}_m, m)$ $(\Phi \circ f \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu))$.

Модуляра определяет норму (обычно называемую *нормой Люксембурга*)

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf\{a > 0\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(|f/a|) \leqslant 1\},\ f \in \mathbf{L}_\Phi,$$

где $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in \mathbf{L}^\xi_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(|f/a|) < \infty$ для некоторого $a > 0\}$.

- $(\mathbf{L}_\Phi, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi})$ является симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x) = \widetilde{\Phi}(x) = (\Phi^{-1}(1/x))^{-1}$, $x \in I$.
- Пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi(I, \mathcal{B}_m, m)$ является стандартным симметричным банаховым пространством для $\mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
- $\mathbf{L}_\Phi$ удовлетворяет условиям (B), (C) и поэтому условию Фату (F).
- *Сердцевина* $\mathbf{H}_\Phi$ пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ определяется как $\mathbf{H}_\Phi = \{f \in \mathbf{L}_\Phi\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(|f/a|) < \infty$ для всех $a > 0\}$. Это пространство совпадает с минимальной частью $\mathbf{L}^0_\Phi = cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{L}_\Phi$, если функция Орлича Φ конечна на $(0, \infty)$. В противном случае $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{H}_\Phi = \{0\}$.
- Следующие условия эквивалентны: $\mathbf{L}_\Phi$ удовлетворяет условию (A) $\iff$ $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{H}_\Phi$ $\iff$ Φ удовлетворяет Δ_2-условию, т. е. $0 < \Phi(x) < \infty$ для всех $0 < x < \infty$ и $\sup\limits_{x>0} \dfrac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < \infty$.
- Для классов Юнга $\mathbf{Y}^c_\Phi = \{f \in \mathbf{L}_\Phi\colon \mathcal{M}^\Phi_{\mathbf{L}_1}(f/c) < \infty\}$ имеет место равенство $\mathbf{Y}^c_\Phi = c\,\mathbf{Y}^1_\Phi$, $c > 0$, и $\mathbf{H}_\Phi = \bigcap\limits_{c>0} c\,\mathbf{Y}_\Phi \subseteq a\,\mathbf{Y}_\Phi \subseteq b\,\mathbf{Y}_\Phi \subseteq \bigcup\limits_{c>0} c\,\mathbf{Y}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi$, $0 < a < b < \infty$, где все включения являются строгими, если Φ не удовлетворяет условию Δ_2.

  Более того, оба включения $\bigcup\limits_{a<c} a\,\mathbf{Y}_\Phi \subset c\,\mathbf{Y}_\Phi \subset \bigcup\limits_{b>c} b\,\mathbf{Y}_\Phi$, $0 < c < \infty$ также являются строгими, если классы Юнга не совпадают (см. [72, теорема II.10.1]).
- Ассоциированное пространство к $\mathbf{L}_\Phi$ совпадает с пространством Орлича $\mathbf{L}_\Psi$, где сопряженная к функции Орлича функция Ψ определяется равенством $\Psi(x) = \sup\limits_y \{xy - \Phi(y)\}$. Нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Phi}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Psi}$ на $\mathbf{L}^1_\Phi = \mathbf{L}_\Psi$ эквивалентны, $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Psi} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Phi} \leqslant 2\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Psi}$.
- Норма $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Psi}$ на $\mathbf{L}^1_\Psi = \mathbf{L}_\Phi$ (обычно называемая *нормой Орлича*) эквивалентна исходной норме, точнее, $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi}$, т. е. $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{L}^1_\Psi} \leqslant 2\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi}$.

Пространства Орлича были введены в [103, 104], см. также [45, 72, 106, 107].

В случае, когда функция Φ не является выпуклой, пространство $\mathbf{L}_\Phi$ может быть не нормируемым, но остается квази-банаховым симметричным пространством при условии, что Φ является ϕ-функцией, удовлетворяющей Δ_2-условию (см. [57, 69], а также пункт 1.4.6).

1.4.3. Пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$. Пусть W — возрастающая функция на $[0, +\infty)$ такая, что: $W(0) = 0$, W вогнута на $(0, +\infty)$ и $W(x) > 0$ для $x > 0$. Тогда W абсолютно непрерывна на $(0, \infty)$, в то время как значение $W(0+)$ может быть положительным.

Пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ определяется как

$$\mathbf{\Lambda}_W := \left\{ f \in \mathbf{L}_0^\xi\colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} := \xi_{f,\mu}(0)W(0+) + \int\limits_0^\infty \xi_{f,\mu}(x)\, W'(x)\, dx < \infty \right\}$$

(см. [74, 77, 78, 81, 82]).

Норму $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$ можно записать как интеграл Римана—Стилтьеса $\int\limits_0^\infty \xi_{f,\mu}(x)\, d\,W(x)$, который имеет атомарную часть $\xi_{f,\mu}(0)\, W(0+)$ в случае, когда $W(0+) > 0$.

Заметим, что в случае $W(0+) = 0$ пространство $\mathbf{\Lambda}_W$ может быть представлено как правая композиция $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_1 \circ W^{-1}$ или, с помощью веса W', как $\mathbf{L}_1(W')$.

- $(\mathbf{\Lambda}_W, \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W})$ является симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W = W}$.
- $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty \iff W(0+) > 0$ и $\mathbf{\Lambda}_W \supseteq \mathbf{L}_\infty \iff W(\infty) < \infty$. Таким образом, $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$ тогда и только тогда, когда выполнены оба условия $W(0+) > 0$ и $W(\infty) < \infty$.
- $\mathbf{\Lambda}_W$ удовлетворяет условиям (B) и (C), а значит, и условию Фату (F). Поэтому $\mathbf{\Lambda}_W$ является максимальным: $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W^{11}$.
- $\mathbf{\Lambda}_W^0 = cl_{\mathbf{\Lambda}_W}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty) = \mathbf{\Lambda}_W \cap \mathbf{R}_0 = \{f \in \mathbf{\Lambda}_W\colon \xi_{f,\mu}(\infty) = 0\}$. Поэтому $\mathbf{\Lambda}_W$ является минимальным $\iff W(\infty) = \infty \iff \mathbf{L}_\infty \nsubseteq \mathbf{\Lambda}_W$.
- $\mathbf{\Lambda}_W$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $W(0+) = 0$ и $W(\infty) = \infty$).

1.4.4. Пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$. Напомним, что положительная функция V на $(0, \infty)$ с $V(0) = 0$ называется *квазивогнутой*, если $V(x)$ и $V_*(x) = x/V(x)$ являются возрастающими.

Положим $\mathbf{M}_V = \mathbf{E}_\theta(U)$, где $\mathbf{E} = \mathbf{L}_\infty$ и $U = V_*$, т. е.

$$\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\colon V_* \cdot \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty(I, \mathcal{B}_m, m)\}$$

и $\|f\|_{\mathbf{M}_V(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = \|V_* \cdot \theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty(I,\mathcal{B}_m,m)} = \inf\left\{C > 0\colon \int\limits_0^x \xi_{f,\mu}\, dm \leqslant C\, V(x) \text{ для всех } x \geqslant 0\right\}$ для $f \in \mathbf{M}_V$. С другой стороны, мы можем начать с симметричного квази-банахова пространства $\overline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{L}_\infty(V_*) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon V_* \cdot \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty\}$, которое снабжено квазинормой

$$\|f\|_{\overline{\mathbf{M}}_V} = \|V_* \cdot \theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} = \inf\left\{C > 0\colon \xi_{f,\mu}(x) \leqslant C\, \frac{V(x)}{x} \text{ для всех } x > 0\right\},\ f \in \overline{\mathbf{M}}_V$$

и называется *верхним классом Марцинкевича*.

Тогда по определению $\mathbf{M}_V = (\overline{\mathbf{M}}_V)_\theta$. Мы покажем далее в пункте 2.3, что вложение $\mathbf{M}_V \subseteq \overline{\mathbf{M}}_V$ может быть строгим, и $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условию Харди—Литтлвуда ($\mathcal{HLP}$).

Напомним основные свойства пространства $\mathbf{M}_V$:

- $\mathbf{M}_V$ — симметричное банахово пространство с фундаментальной функцией $\varphi_{\mathbf{M}_V} = V_*$.
- $\mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{L}_\infty \iff V_*(0+) > 0$ и $\mathbf{M}_V \supseteq \mathbf{L}_\infty \iff V_*(\infty) < \infty$. Поэтому $\mathbf{M}_V = \mathbf{L}_\infty$ тогда и только тогда, когда имеют место условия $V_*(0+) > 0$ и $V_*(\infty) < \infty$.
- $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условиям (B) и (C) и поэтому условию Фату (F), т. е. $\mathbf{M}_V$ является максимальным, $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V^{11}$.
- Пусть $\mathbf{M}_0 = \{f \in \mathbf{M}_V\colon \lim\limits_{x\to 0+} V_*(x)\theta_{f,\mu}(x) = \lim\limits_{x\to\infty} V_*(x)\theta_{f,\mu}(x) = 0\} \subseteq \mathbf{M}_V$. Тогда подпространство $\mathbf{M}_0$ совпадает с минимальной частью $\mathbf{M}_V^0 = cl_{\mathbf{M}_V}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{M}_V$ при условии $V_*(0+) = 0$. Следовательно, $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_0$ и $V_*(0+) = 0$.

Последний результат был получен в [19], см. также [74, гл. II] и [65].

1.4.5. Связь между пространствами Лоренца и Марцинкевича. Сначала мы опишем ассоциированные пространства к пространствам $\mathbf{\Lambda}_W$ и $\mathbf{M}_V$.

Теорема 1.15. *Пусть* $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *пространство Лоренца, а* $\mathbf{M}_W = \mathbf{M}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *пространство Марцинкевича с одной и той же вогнутой весовой функцией* W. *Тогда*:

1. $\mathbf{\Lambda}_W^1 = \mathbf{M}_W$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W^1} = \|\cdot\|_{\mathbf{M}_W}$;
2. $\mathbf{M}_W^1 = \mathbf{\Lambda}_W$ *и* $\|\cdot\|_{\mathbf{M}_W^1} = \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$.

Если пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ построено по квазивогнутой функции V, которая не является вогнутой, мы можем заменить V на ее наименьшую вогнутую мажоранту W. Тогда $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_W$ и $\mathbf{M}_V^1 = \mathbf{\Lambda}_W$, причем из неравенства $\frac{1}{2}V \leqslant W \leqslant V$ следует, что $\frac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathbf{M}_V} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{M}_W} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{M}_V}$ и $\frac{1}{2}\|\cdot\|_{\mathbf{M}_V^1} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W} \leqslant \|\cdot\|_{\mathbf{M}_V^1}$. Доказательство теоремы 1.15 можно найти в [74, § II.5] или [111, § 11.3].

Теперь рассмотрим теорему вложения. Напомним, что $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = W$ и $\varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = V$, где $V_*(x) = x/V(x)$, $x > 0$.

Теорема 1.16. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство с фундаментальной функцией* $V = \varphi_{\mathbf{E}}$ *и* W — *наименьшая вогнутая мажоранта* V. *Тогда имеют место непрерывные вложения* $\mathbf{\Lambda}_W^0 \subseteq \mathbf{E} \subsetneqq \mathbf{M}_{V_*}$, *причем* $\|f\|_{\mathbf{M}_{V_*}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$, $f \in \mathbf{E}$ *и* $\|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$, $f \in \mathbf{\Lambda}_W^0$. *Также имеет место вложение* $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{E}$, *если пространство* $\mathbf{E}$ *максимально* (*т. е.* $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{11}$), *или если* $\mathbf{\Lambda}_W$ *минимально* ($\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{R}_0$).

Заметим, что квазивогнутая функция V не обязательно является вогнутой, т. е. в общем случае $W = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} \neq \varphi_{\mathbf{M}_{V_*}} = V$. Тем не менее, можно добиться равенства $\varphi_{\mathbf{E}} = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = \varphi_{\mathbf{M}_{W_*}} = W$, переходя к некоторой эквивалентной симметричной норме на $\mathbf{E}$.

Замечание 1.2. Вложение $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{E}$, вообще говоря, не верно без дополнительных предположений, что $\mathbf{E}$ максимально или $\mathbf{\Lambda}_W$ минимально. Действительно, если $\mathbf{E}$ минимально, а $\mathbf{\Lambda}_W$ не минимально, мы имеем $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{R}_0$, в то время как $\mathbf{\Lambda}_W \nsubseteq \mathbf{R}_0$, откуда $\mathbf{\Lambda}_W \nsubseteq \mathbf{E}$.

Таким образом, теорема II.5.5 из [74], в которой утверждается вложение $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{E}$ для произвольных симметричных пространств, не верна.

Теорема 1.16 была доказана в [99], см. также [111, гл. 12].

1.4.6. Пространства Орлича—Лоренца $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$. В этом и последующих пунктах мы будем считать, что пространство с мерой стандартное, т. е. $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$. Отметим, что полученные результаты и конструкции могут быть перенесены на общие пространства с мерой с помощью теоремы 1.1.

Существует два естественных способа определения общих пространств Орлича—Лоренца.

Сначала мы построим (следуя [93]) пространство «Орлича—Орлича» $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ с помощью двух функций Орлича F и Φ на $I = [0, \infty)$ и соответствующих пространств Орлича $\mathbf{L}_F$ и $\mathbf{L}_\Phi$.

Положим $\mathbf{L}_{F,\Phi} := \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} := \|\xi_{f,\mu} \circ \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}\|_{\mathbf{L}_\Phi} < \infty\}$, где инверсия $U \to \widetilde{U}$ возрастающей функции $U : I \to I$ определяется как $\widetilde{U}(x) = (U(x^{-1}))^{-1}$, а U^{-1} означает (обобщенную) обратную функцию функции U.

Таким образом, мы начинаем здесь с пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ и используем правую композицию $\mathbf{L}_\Phi \circ W^{-1}$, где $W = \widetilde{\Phi} \circ \widetilde{F}^{-1}$ и $W^{-1} = \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$. Поскольку фундаментальная функция пространства $\mathbf{L}_\phi$ имеет вид $\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x) = \widetilde{\Phi}^{-1}(x) = (\Phi^{-1}(x^{-1}))^{-1}$, $x > 0$, получаем

$$\varphi_{\mathbf{L}_{F,\Phi}}(t) = \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} = \|\mathbf{1}_{[0,t]} \circ \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(\widetilde{\Phi}(\widetilde{F}^{-1}(t))) = \widetilde{F}^{-1}(t) = \varphi_{\mathbf{L}_F}(t).$$

Равенство $\varphi_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} = \varphi_{\mathbf{L}_F}$ означает, что основным в конструкции $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ является пространство Орлича $\mathbf{L}_F$, которое подкручено функцией Φ.

С другой стороны, используя функцию $W = \widetilde{F} \circ \widetilde{\Phi}^{-1}$, мы видим, что

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{F,\Phi}} = \|\xi_{f,\mu} \circ W^{-1}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf\left\{a > 0 \colon \mathcal{M}^{\Phi}_{\Lambda_W}\left(\frac{|f|}{a}\right) < 1\right\},$$

т. е. пространство $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ может быть построено с помощью пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$ и модуляры

$$\mathcal{M}^{\Phi}_{\mathbf{\Lambda}_W}(f) = \int\limits_I \Phi(\xi_{f,\mu})\, dW = \int\limits_I \Phi \circ \xi_{f,\mu} \circ W^{-1}\, dm.$$

Таким образом, мы можем рассматривать пространство $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ как пространство Лоренца $\mathbf{\Lambda}_W$, подкрученное функцией Φ.

Заметим, что обозначение $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ кажется более уместным для пространства Орлича—Лоренца, по крайней мере в том случае, когда функция W является вогнутой. Пространство $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ строится как левая и правая композиции $\Phi \circ \mathbf{L}_1 \circ W^{-1}$ пространства $\mathbf{L}_1$. Очевидно, $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi} = \mathbf{L}_\Phi$, если $W(x) = x$, и $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi} = \mathbf{\Lambda}_W$, если $\Phi(x) = x$.

- В частном случае, когда Φ выпуклая, а W вогнутая, пространство $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ является банаховым симметричным пространством.

Однако описание общих условий на F, Φ и W, при которых пространство $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ или $\mathbf{\Lambda}_{W,\Phi}$ является банаховым (или квази-банаховым) симметричным пространством, может быть довольно сложной задачей. Как правило, и F, и Φ считаются ϕ-функциями, т. е. непрерывными, строго возрастающими, удовлетворяющими условиям $F(0) = \Phi(0) = 0$, $F(\infty) = \Phi(\infty) = \infty$, а также $\sup\limits_{x>0} \dfrac{F(2x)}{F(x)} < \infty$, $\sup\limits_{x>0} \dfrac{\Phi(2x)}{\Phi(x)} < \infty$. Последнее Δ_2-условие гарантирует обычно, что $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ является симметричным пространством, которое удовлетворяет условию Фату (F). Подробнее см. в [31, 32, 47–49, 57, 62–64, 66, 73, 76, 93–95, 119] и др.

1.4.7. Пространства $\mathbf{\Lambda}_p(w)$ *и* $\mathbf{M}_p(w)$. Как и выше, в этом пункте мы считаем, что пространство с мерой стандартное, т. е. $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$.

Пространства Лоренца $\mathbf{\Lambda}_p(w)$ и пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_p(w)$ строятся для $0 < p < \infty$ и веса $w = W'$. Вес $w\colon I \to [0, \infty)$ предполагается положительной измеримой функцией, и $W(x) = \int\limits_0^x w\,dm < \infty$, $x \in I$.

Полагаем

$$\mathbf{\Lambda}_p(w) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_p(w)} := \Bigl(\int\limits_I \xi_{f,\mu}\,dW\Bigr)^{\frac{1}{p}} < \infty\},$$
$$\mathbf{M}_p(w) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{M}_p(w)} := \sup_{x\in I} W^{\frac{1}{p}} \xi_{f,\mu}(x) < \infty\}.$$

- Если W удовлетворяет Δ_2-условию $\sup\limits_{x\in I} \dfrac{W(2x)}{W(x)} < \infty$, то пространства $(\mathbf{\Lambda}_p(w), \|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_p(w)})$ и $(\mathbf{M}_p(w), \|\cdot\|_{\mathbf{M}_p(w)})$ являются симметричными квази-банаховыми пространствами.
- Эти пространства обладают свойством Фату (F), а их фундаментальные функции имеют вид $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_p(w)} = \varphi_{\mathbf{M}_p(w)} = W^{1/p}$.

Следует отметить, что здесь также необходимо Δ_2-условие, см. [35, 57, 67, 114]. Если $W(x) = x$, то мы имеем $\mathbf{\Lambda}_p(w) = \mathbf{L}_p$ и $\mathbf{M}_p(w) = \mathbf{L}_{p,\infty}$. Если $p = 1$, то пространство $\mathbf{\Lambda}_p(w) = \mathbf{\Lambda}_W$ является симметричным банаховым пространством при условии, что весовая функция W является вогнутой. Пространство $\mathbf{M}_1(w)$ совпадает с $\mathbf{L}_\infty(W) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(W)} = \|W \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty\}$ (см. ниже, пункт 1.4.9).

1.4.8. Пространства $\mathbf{L}_{p,q}$, $0 < p, q \leqslant \infty$. Напомним, что в этом пункте рассматриваются стандартные пространства с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$. Мы используем пространства $\mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_q$ для построения пространства $\mathbf{L}_{p,q} = \mathbf{L}_{F,\Phi}$ с $\mathbf{L}_F = \mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_q$.

В случае $0 < p, q < \infty$ с $F(x) = x^q$ и $\Phi(x) = x^p$ имеем: $\widetilde{F} = F$, $\widetilde{\Phi} = \Phi$, $W(x) = F(\Phi^{-1}(x)) = x^{q/p}$, $x > 0$. Тогда

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} = \|\xi_{f,\mu} \circ W^{-1}\|_{\mathbf{L}_q} = \Bigl(\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu}(W^{-1}(x)))^q\,dx\Bigr)^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \Bigl(\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu}(x))^q\,d(x^{\frac{q}{p}})\Bigr)^{\frac{1}{q}} = \Bigl(\frac{q}{p}\int\limits_0^\infty (\xi_{f,\mu}(x))^q\,x^{\frac{q}{p}-1}\,dx\Bigr)^{\frac{1}{q}}.$$

Полагая $\mathbf{L}_{p,q} = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} < \infty\}$, мы имеем:

- $(\mathbf{L}_{p,q}), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_{p,q}}$ является симметричным квази-банаховым пространством. Это пространство удовлетворяет условию Фату (F) и $\varphi_{\mathbf{L}_{p,q}} = \varphi_{\mathbf{L}_p} = x^{1/p},\ x \geqslant 0$.

Более того:

- Если $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$, то функции F и Φ выпуклы, а W — вогнута. Следовательно, $(\mathbf{L}_{p,q}, \|\cdot\|_{\mathbf{L}_{p,q}})$ является симметричным банаховым пространством.
- Если $1 \leqslant p < \infty$ и $1 \leqslant q < \infty$, то θ-часть $(\mathbf{L}_{p,q})_\theta = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_{p,q}\} \subseteq \mathbf{L}_{p,q}$ снабжена нормой
$$\|f\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta} = \|\theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_{p,q}} = \left(\frac{q}{p}\int\limits_0^\infty (\theta_{f,\mu}(x))^q\, x^{\frac{q}{p}-1}\, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$
Тогда $((\mathbf{L}_{p,q})_\theta, \|\cdot\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta})$ тоже является симметричным банаховым пространством.
- Если $1 < p < q < \infty$, то функции F и Φ выпуклы, в то время как функция W не является вогнутой. Однако пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ удовлетворяет условию Харди—Литтлвуда ($\mathcal{HLP}$), т. е. $(\mathbf{L}_{p,q})_\theta = \mathbf{L}_{p,q}$. Пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ нормируемо с нормой $\|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}} \leqslant \|f\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta} \leqslant \dfrac{p}{p-1}\|f\|_{\mathbf{L}_{p,q}}$, $f \in \mathbf{L}_{p,q}$. Следовательно, $(\mathbf{L}_{p,q}, \|\cdot\|_{(\mathbf{L}_{p,q})_\theta})$ — симметричное банахово пространство.

В случае $0 < p < q = \infty$ мы рассматриваем $\mathbf{L}_{F,\Phi}$ с $\mathbf{L}_F = \mathbf{L}_p$ и $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\infty$, а именно $\mathbf{L}_{p,\infty} = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{L}_{p,\infty}} = \sup\limits_{x>0} x^{1/p}\,\xi_{f,\mu}(x) < \infty\}$. Пространство $\mathbf{L}_{p,\infty}$ является r-выпуклым для любого $0 < r < p$, но не является p-выпуклым. Например, пространство $\mathbf{L}_{1,\infty}$ не нормируемо.

Заметим, что в случае $0 < q < 1 < p < \infty$ фундаментальная функция $\varphi_{\mathbf{L}_{p,q}}(x) = x^{1/p}$ выпукла, в то время как пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ не является нормируемым.

Более подробно $L_{p,q}$-теория изложена в [50] и [120, § V.3] в случае $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

1.4.9. Пространства $\mathbf{L}_\infty(U)$. В этом пункте, как и выше, мы считаем пространство с мерой стандартным, т. е. $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = (I, \mathcal{B}_m, m)$.

Мы рассматриваем пространства $\mathbf{L}_\infty(U) = \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \|U \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty\}$ в предположении, что вес U является ϕ-функцией, т. е. U является непрерывной строго возрастающей положительной функцией, удовлетворяющей условиям $U(0) = 0$ и $U(\infty) = \infty$. Это пространство есть не что иное, как пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_1(w)$ с $w = U'$.

Пусть U удовлетворяет Δ_2-условию $U^\sharp(2) = \sup\limits_{x>0}\dfrac{U(2x)}{U(x)} < \infty$. Тогда:

- $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)}$ является квазинормой на $\mathbf{L}_\infty(U)$ с константой $C \geqslant V^\sharp(2)$ в слабом неравенстве треугольника;
- $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным квази-банаховым пространством;
- пространство $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ удовлетворяет условию Фату (F), и его фундаментальная функция имеет вид $\varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$.

Следующие утверждения справедливы даже в том случае, если U не удовлетворяет Δ_2-условию:

1a. $\mathbf{L}_\infty(U)$ является порядковым идеалом, т. е. $|g| \leqslant |h|,\ h \in \mathbf{L}_\infty(U) \implies g \in \mathbf{L}_\infty(U)$;
1b. $\lambda \in \mathbb{R},\ g \in \mathbf{L}_\infty(U) \implies \lambda g \in \mathbf{L}_\infty(U))$;
1c. $\mathbf{L}_\infty(U)$ является симметричным, т. е. $f \in \mathbf{L}_\infty(U) \iff \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty$;
2a. $\mathbf{L}_\infty(U) = \bigcup\{J(f)\colon 0 \leqslant f \in \mathbf{L}_0,\ \xi_{f,\mu} = 1/U\}$, где $J(f) := \{g \in \mathbf{L}_0\colon |g| \leqslant c|f|$ для некоторого $c > 0\}$ является главным идеалом, порожденным $|f|$;
2b. $\|g\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \inf\{j_f(g)\colon 0 \leqslant f \in \mathbf{L}_0,\ \xi_{f,\mu} = 1/U\}$, где $j_f(g) = \inf\{c > 0,\ |g| \leqslant c|f|\}$ с $\infty \cdot \varnothing = \infty$;
3a. $D_t(\mathbf{L}_\infty(U)) = \mathbf{L}_\infty(D_t(U))$ для всех $t > 0$, и $D_t(\mathbf{L}_\infty(U)) \supseteq D_s(\mathbf{L}_\infty(U))$ для $t \geqslant s > 0$;
3b. $D_2(\mathbf{L}_\infty(U)) = \mathbf{L}_\infty(U) + \mathbf{L}_\infty(U)$.

Очевидно, что условия 2a и 2b основаны на теореме 1.4. Условия 3a и 3b вытекают из следующих эквивалентных условий:

- U удовлетворяет Δ_2-условию;
- $0 < U^\sharp(x) < \infty$ для всех $x > 0$;
- $\mathbf{L}_\infty(U)$ является D-инвариантным, т. е. $D_t(\mathbf{L}_\infty(U)) = \mathbf{L}_\infty(U)$ для всех $t > 0$;
- $\mathbf{L}_\infty(U)$ является решеткой, т. е. оно замкнуто относительно операций $\max$ и $\min$;
- $\mathbf{L}_\infty(U) + \mathbf{L}_\infty(U) = \mathbf{L}_\infty(U)$, т. е. $\mathbf{L}_\infty(U)$ замкнуто относительно операции сложения.

Каждое из перечисленных выше условий подразумевает, что $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным квази-банаховым пространством.

Предположим теперь, что $(\mathbf{L}_\infty(U), \|\cdot\|_{\mathbf{L}_\infty(U)})$ является симметричным банаховым пространством. Тогда его фундаментальная функция $\varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$ является квазивогнутой.

Мы можем использовать функцию $V(x) = U_*(x) = x/U(x),\ x > 0$, которая является, также как и U, квазивогнутой, и рассмотреть пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$.

Непосредственно из определения следует, что $f \in \mathbf{M}_V \iff V_* \cdot \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty \Longrightarrow U \cdot \xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty \iff f \in \mathbf{L}_\infty(U)$, т. е. $\mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{L}_\infty(U)$.

На самом деле, здесь имеет место равенство $\mathbf{M}_V = \mathbf{L}_\infty(U)$, так как $\mathbf{M}_V$ является наибольшим симметричным банаховым пространством с фундаментальной функцией $V_* = \varphi_{\mathbf{M}_V} = \varphi_{\mathbf{L}_\infty(U)} = U$. Следовательно, $f \in \mathbf{M}_V \iff \xi_{f,\mu} \in \mathbf{M}_V \iff \theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_\infty \Longrightarrow \theta_{f,\mu} \in \mathbf{M}_V$, т. е. пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ удовлетворяет свойству Харди—Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$. Различные условия, при которых $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$, будут описаны ниже в разделе 2.3.3. Здесь мы используем только тот факт, что $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP}) \iff \liminf\limits_{x\to 0} \dfrac{V(2x)}{V(x)} > 1 \iff \limsup_{x\to 0} \dfrac{U(2x)}{U(x)} < 2$.

Таким образом, мы доказали:

- Пространство $\mathbf{L}_\infty(U)$ нормируемо тогда и только тогда, когда $\limsup_{x\to 0} \dfrac{U(2x)}{U(x)} < 2$. В этом случае существует эквивалентная U квазивогнутая функция U_1 такая, что $L_\infty(U_1)$ является симметричным банаховым пространством.

Заметим, что последнее условие было введено в [83] для соответствующих пространств Лоренца $\mathbf{\Lambda}_U$.

2. Индексы растяжения. Оператор Харди

2.1. Индексы растяжения положительных функций.

2.1.1. Функции растяжения. Для каждой функции $V\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ определим ее *верхнюю и нижнюю функции растяжения* $V^\sharp$ и $V^\flat$ следующим образом:

$$V^\sharp(x) = \sup_{0<y<\infty} \frac{V(xy)}{V(y)}, \quad V^\flat(x) = \inf_{0<y<\infty} \frac{V(xy)}{V(y)},\ 0 < x < \infty.$$

Имеем:

- $0 \leqslant V^\flat \leqslant V^\sharp \leqslant \infty$ и $V^\sharp(1) = V^\flat(1) = 1$;
- $V^\flat = \widetilde{V^\flat} = \widetilde{V^\sharp}$ и $V^\sharp = \widetilde{V^\sharp} = \widetilde{V^\flat}$, где инверсия $U \to \widetilde{U}$ определяется как $\widetilde{U}(x) = (U(x^{-1}))^{-1},\ x > 0$;
- $V^\sharp$ является *субмультипликативной*, т. е. $V^\sharp(xy) \leqslant V^\sharp(x)V^\sharp(y)$ для всех $x, y > 0$;
- $V^\flat$ является *супермультипликативной*, т. е. $V^\flat(xy) \geqslant V^\flat(x)V^\flat(y)$ для всех $x, y > 0$;
- $V^\sharp = V$ тогда и только тогда, когда V — конечная положительная субмультипликативная функция и $V(1) = 1$;
- $V^\flat = V$ тогда и только тогда, когда V — конечная положительная супермультипликативная функция и $V(1) = 1$;
- $V^{\sharp\sharp}(t) = V^\sharp(t),\ 0 < t < \infty$;
- $V^{\sharp\flat}(t) = V^\flat(t),\ 0 < t < \infty$;
- $V^{\flat\flat}(x) = V^\flat(x),\ 0 < x < \infty$;
- $V^{\flat\sharp}(x) = V^\sharp(x),\ 0 < x < \infty$.

Функции $V^\sharp$ и $V^\flat$ в общем случае не обязательно должны быть положительными и конечными. Например, если $V(x) = e^x,\ x > 0$, то $V^\sharp(x) = \infty$ при $x > 1$ и $V^\flat(x) = 0$ при $x < 1$.

С другой стороны, $0 < V^\flat \leqslant V^\sharp < \infty$ на $(0, \infty)$ в случае, когда это неравенство выполнено на интервале (a, b) для некоторых $0 < a < 1 < b < \infty$.

- Для любой квазивогнутой функции V функция $V^\sharp$, доопределенная на $[0, \infty)$ условием $V^\sharp(0) = 0$, тоже квазивогнута и
$$0 < V^\sharp(x) \leqslant \max(x, 1), \quad x \in (0, \infty). \tag{2.1}$$

- Для любой квазивогнутой функции V функция $V^\flat$ тоже квазивогнута и
$$0 < \min(x,1) \leqslant V^\flat(x) < \infty, \quad x \in (0,\infty). \tag{2.2}$$

2.1.2. Индексы $p(U)$ и $q(U)$. В следующем предложении определяются *индексы растяжения* $p(U)$ и $q(U)$ субмультипликативной функции U, см. [74, § II.1].

Предложение 2.1. *Пусть U субмультипликативная функция на $[0,+\infty)$. Тогда существуют пределы*
$$p(U) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln U(x)} = \sup_{x>1} \frac{\ln x}{\ln U(x)}, \quad q(U) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln U(x)} = \inf_{0<x<1} \frac{\ln x}{\ln U(x)} \tag{2.3}$$
такие, что $0 \leqslant p(U) \leqslant q(U) \leqslant \infty$.

Простейший пример: $p(V) = q(V) = p$ для мультипликативной функции $V(x) = x^{1/p}$, $0 < p \leqslant \infty$.

Возвращаясь к общим (не обязательно субмультипликативным) положительным функциям V, мы можем расширить понятие индексов растяжения $p(V)$ и $q(V)$, полагая
$$p(V) := p(V^\sharp) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)} = \sup_{x>1} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)},$$
$$q(V) := q(V^\sharp) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)} = \inf_{0<x<1} \frac{\ln x}{\ln V^\sharp(x)},$$
где функция растяжения $V^\sharp$ — субмультипликативная с $V^\sharp(1) = 1$.

Следующее 2-параметрическое семейство функций удобно использовать как «эталон» при изучении асимптотического поведения произвольных субмультипликативных функций.

Пример 2.1 (функция $S_{p,q}$). Для каждой пары чисел $0 < p,\ q \leqslant \infty$ положим
$$S_{p,q}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^{\frac{1}{q}}, & 0 < x \leqslant 1, \\ x^{\frac{1}{p}}, & 1 < x < \infty, \end{cases} \tag{2.4}$$
где $x^{\frac{1}{\infty}} = 1$ для всех $x > 0$.

Тогда

- $S_{p,q}(x) = \max(x^{\frac{1}{p}}, x^{\frac{1}{q}})$, $x > 0$ и $S_{p,q} = S^\sharp_{p,q}$ для $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$;
- $S_{p,q}(x) = \min(x^{\frac{1}{p}}, x^{\frac{1}{q}})$, $x > 0$ и $S_{p,q} = S^\flat_{p,q}$ для $0 < q \leqslant p \leqslant \infty$;
- $p(S_{p,q}) = \min(p,q)$ и $q(S_{p,q}) = \max(p,q)$ для каждой пары $0 < p,\ q \leqslant \infty$.

Возвращаясь к произвольным функциям V, мы имеем:

- В случае $p = p(V) > 0$: $V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{p}}$ для всех $x > 1$, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_1 > 1$, что $V^\sharp(x) < x^{\frac{1}{p}+\varepsilon} = x^\varepsilon S_{p,q}(x)$ для всех $x > x_1$. Таким образом, $p(V) = p = \inf\{p_1 > 0\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p_1,q}(x) = x^{\frac{1}{p_1}}$ для всех $x > 1\}$.
- В случае $q = q(V) < \infty$: $V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{q}}$ для всех $x < 1$, и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $0 < x_0 < 1$, что $V^\sharp(x) < x^{\frac{1}{q}-\varepsilon} = x^{-\varepsilon} S_{p,q}(x)$ для $0 < x < x_0$. Таким образом, $q = q(V) = \inf\{0 < q_1 < \infty\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q_1}(x) = x^{\frac{1}{q_1}}$ для всех $0 < x < 1\}$.
- В случае $p(V) = 0$ имеем: $0 = p(V) = \inf\{p > 0\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{p}}$ для всех $x > 1\}$, т. е. $V^\sharp(x) = \sup\limits_{0<y<\infty} \dfrac{V(xy)}{V(y)} = \infty$ для всех $x > 1$.
- В случае $q(V) = \infty$: $\infty = q(V) = \sup\{q < \infty\colon V^\sharp(x) \geqslant S_{p,q}(x) = x^{\frac{1}{q}}$ для всех $0 < x < 1\}$.

Предложение 2.2 (см. [74, § II.1]). *Пусть функция V квазивогнута на $\mathbb{R}^+$. Тогда функции $V^\sharp$ и $V^\flat$, доопределенные на $\mathbb{R}^+$ условиями $V^\sharp(0) = V^\flat(0) = 0$, будут тоже квазивогнутыми, и $0 < \min(1,x) \leqslant V^\flat(x) \leqslant V^\sharp(x) \leqslant \max(1,x) < \infty$, $0 < x < \infty$. В этом случае мы имеем $1 \leqslant p(V) \leqslant q(V) \leqslant \infty$.*

2.2. Индексы растяжения симметричных пространств.

2.2.1. Функции растяжения симметричных банаховых пространств. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное банахово пространство, где, как и раньше, $I = [0, a]$ или $I = [0, \infty)$.

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m)$ определен *оператор растяжения* $D_t : \mathbf{L}_0 \to \mathbf{L}_0$ как

$$D_t f(x) := \begin{cases} f\left(\dfrac{x}{t}\right), & \text{если } x \geqslant 0,\ t > 0,\ \dfrac{x}{t} \in I, \\ 0, & \text{если } \dfrac{x}{t} \notin I. \end{cases} \tag{2.5}$$

Нетрудно показать, что D_t действует как линейный непрерывный оператор относительно топологии стохастической сходимости на $\mathbf{L}_0$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное банахово пространство и $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов на $\mathbf{E}$. Тогда:*

1. $D_t^{\mathbf{E}} = D_t|_{\mathbf{E}} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$ *для каждого* $t > 0$, *и* $\{D_t^{\mathbf{E}},\ 0 < t < \infty\}$ *образует группу линейных ограниченных операторов на* $\mathbf{E}$.
2. *Функция* $d_{\mathbf{E}}(t) := \|D_t\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})}$ *является субмультипликативной и квазивогнутой на* $[0, \infty)$ *с* $d_{\mathbf{E}}(1) = 1$ *такой, что*
$$d_{\mathbf{E}}(t) = d_{\mathbf{E}}^{\sharp}(t) \leqslant \max(1, t) \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{2.6}$$
3. *Для каждой* $f \in \mathbf{E}$ *функция* $d_{\mathbf{E},f} = \|D_t f\|_{\mathbf{E}},\ \ t \geqslant 0$ *является квазивогнутой на* $[0, \infty)$ *и*
$$d_{\mathbf{E}}(t) = \sup\{d_{\mathbf{E},f}(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant 1\} = \sup\{d_{\mathbf{E},f}^{\sharp}(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant 1\},\ t \geqslant 0. \tag{2.7}$$
4. *Если* $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (C), *то*
$$d_{\mathbf{E}}(t) = \sup\{d_{\mathbf{E},f}(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant 1\} = \sup\{d(t) \colon \|f\|_{\mathbf{E}^0} \leqslant 1\} = d_{\mathbf{E}^0}(t),\ t \geqslant 0,$$
где $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1)$ *минимальная часть пространства* $\mathbf{E}$.

Доказательство теоремы 2.1 можно найти в [74, § II.4.3].

Для общих симметричных банаховых пространств $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ положим $d_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu),f} = d_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m),\xi_{f,\mu}}$, $d_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)} = d_{\mathbf{E}(I,\mathcal{B}_m,m)}$, где $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное пространство для $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Заметим, что теорема 2.1 может быть естественным образом расширена на общие симметричные квази-банаховы пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ с помощью p-нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)}$.

2.2.2. Индексы растяжения симметричных пространств. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство с функцией растяжения $d_{\mathbf{E}} = d_{\mathbf{E}}(t),\ t > 0$. В силу теоремы 2.1 функция $d_{\mathbf{E}}^{\sharp} = d_{\mathbf{E}}$ является субмультипликативной и квазивогнутой на $[0, \infty)$ с $d_{\mathbf{E}}(1) = 1$.

Поэтому мы можем определить *индексы растяжения* (*Бойда*) симметричного пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ как индексы растяжения его функции растяжения $d_{\mathbf{E}}$, т. е. $p_{\mathbf{E}} := p(d_{\mathbf{E}})$ и $q_{\mathbf{E}} := q(d_{\mathbf{E}})$, где $p(d_{\mathbf{E}})$ и $q(d_{\mathbf{E}})$ определяются как в (2.3) с $U = d_{\mathbf{E}}$, см. [27,74]. Очевидно, что $1 \leqslant p_{\mathbf{E}} \leqslant q_{\mathbf{E}} \leqslant \infty$.

Можно использовать минимальную часть $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{F}_1)$ пространства $\mathbf{E}$ и определить $p_{\mathbf{E}}^0 := p_{\mathbf{E}^0}$ и $q_{\mathbf{E}}^0 := q_{\mathbf{E}^0}$, а также определить *фундаментальные индексы растяжения* симметричного пространства $\mathbf{E}$ как $p_{\mathbf{E}}^{\varphi} = p(\varphi_{\mathbf{E}}) = p(\varphi_{\mathbf{E}}^{\sharp})$ и $q_{\mathbf{E}}^{\varphi} = q(\varphi_{\mathbf{E}}) = q(\varphi_{\mathbb{E}}^{\sharp})$, где $\varphi_{\mathbf{E}}$ — фундаментальная функция $\mathbf{E}$, см. [129].

Из предложения 2.2 и теоремы 2.1 следует, что $1 \leqslant p_{\mathbf{E}} \leqslant p_{\mathbf{E}}^0 \leqslant p_{\mathbf{E}}^{\varphi} \leqslant q_{\mathbf{E}}^{\varphi} \leqslant q_{\mathbf{E}}^0 \leqslant q_{\mathbf{E}} \leqslant \infty$, а также $p_{\mathbf{E}} = p_{\mathbf{E}}^0$ и $q_{\mathbf{E}}^0 = q_{\mathbf{E}}$ в случае, если $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (C).

Пространства Лоренца и Марцинкевича $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ максимальны. Непосредственные вычисления показывают, что $d_{\mathbf{\Lambda}_W} = W^{\sharp} = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_W}^{\sharp}$ и $d_{\mathbf{M}_V} = (V_*)^{\sharp} = (\varphi_{\mathbf{M}_V})^{\sharp}$. Поэтому, если $\mathbf{E} = \mathbf{\Lambda}_W$ или $\mathbf{E} = \mathbf{M}_V$, то имеют место равенства: $p_{\mathbf{E}} = p_{\mathbf{E}}^0 = p_{\mathbf{E}}^{\varphi}$ и $q_{\mathbf{E}} = q_{\mathbf{E}}^0 = q_{\mathbf{E}}^{\varphi}$.

С другой стороны, Шимогаки [117] построил симметричные банаховы пространства $\mathbf{E}$, для которых $p_{\mathbf{E}}^0 < p_{\mathbf{E}}^{\varphi}$ и $q_{\mathbf{E}}^{\varphi} < q_{\mathbf{E}}^0$. Точнее, как показано в [117], существуют такие симметричные банаховы пространства $\mathbf{E}$, что $\varphi_{\mathbf{E}} = \varphi_{\mathbf{L}_2}$, т. е. $p_{\mathbf{E}}^{\varphi} = q_{\mathbf{E}}^{\varphi} = 2$, в то время как $p_{\mathbf{E}} = p_{\mathbf{L}_1} = 1$. Для ассоциированных пространств $\mathbf{E}^1$, в свою очередь, $q_{\mathbf{E}^1} = q_{\mathbf{L}_\infty} = \infty$.

Более общие примеры симметричных пространств, для которых $p_{\mathbf{E}} < p_{\mathbf{E}}^{\varphi}$ и $q_{\mathbf{E}}^{\varphi} < q_{\mathbf{E}}$, построены в [74, § 6.2].

Приведенные выше определения буквально переносятся на случай, когда $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является симметричным квази-банаховым (не обязательно банаховым) пространством, но вычисление этих индексов обычно является нетривиальной задачей, см., например, работы [22, 41, 52, 57, 68, 95, 96] и ссылки в них.

2.2.3. Индексы растяжения ассоциированных пространств. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное пространство, $\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $\mathbf{E}^{11} = \mathbf{E}^{11}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — его первое и второе ассоциированные пространства. Напомним, что оба пространства, снабженные естественными нормами $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^1}$ и $\|\cdot\|_{\mathbf{E}^{11}}$, удовлетворяют условию (C), $(\mathbf{E}^0)^1 = \mathbf{E}^1$ и $(\mathbf{E}^0)^{11} = \mathbf{E}^{11}$.

Фундаментальная функция пространства $\mathbf{E}^1$ имеет вид $\varphi_{\mathbf{E}^1} = (\varphi_{\mathbf{E}})_*$, где отображение $V \to V_*$ определяется как $V_*(x) = \dfrac{x}{V(x)} \cdot \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, $x \geqslant 0$.

Пусть V — квазивогнутая функция на $[0, +\infty)$. Тогда $(V_*)^\sharp = (V^\flat)_*$ и $(V_*)^\flat = (V^\sharp)_*$,

$$\frac{1}{p(V_*)} = \frac{1}{p((V_*)^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q(V^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q(V)},$$
$$\frac{1}{p(V)} = \frac{1}{p(V^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q((V_*)^\sharp)} = 1 - \frac{1}{q(V_*)}.$$

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство, и* $\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}^1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *ассоциированное с ним пространство. Тогда* $\dfrac{1}{p^0_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{q^0_{\mathbf{E}}} = 1$, $\dfrac{1}{q^0_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{p^0_{\mathbf{E}}} = 1$.

Напомним, что ассоциированное пространство $\mathbf{E}^1$ всегда удовлетворяет условию (C). Поэтому из теоремы 2.1 вытекает:

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство,* $\mathbf{E}^1$ *и* $\mathbf{E}^{11}$ — *его первое и второе ассоциированные пространства. Тогда* $\dfrac{1}{p_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{q_{\mathbf{E}^{11}}} = 1$ *и* $\dfrac{1}{q_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{p_{\mathbf{E}^{11}}} = 1$, *в то время как в общем случае* $\dfrac{1}{p_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{q_{\mathbf{E}}} \leqslant 1$ *и* $\dfrac{1}{q_{\mathbf{E}^1}} + \dfrac{1}{p_{\mathbf{E}}} \leqslant 1$, *причем оба приведенных неравенства могут быть строгими.*

2.2.4. p-выпуклость и q-вогнутость и теоремы вложения. Следующие определения обычно применяются для общих банаховых и квази-банаховых решеток (см., например, [54, 78]), но мы в дальнейшем ограничимся случаем симметричных пространств.

Пусть $0 < p < \infty$. Квази-банахова решетка $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ называется *p-выпуклой* (соответственно *p-вогнутой*), если существуют положительные константы $C^{(p)}$ и $C_{(p)}$ такие что

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{1/p} \right\| \leqslant C^{(p)} \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p \right)^{1/p},$$

(соответственно,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|^p \right)^{1/p} \leqslant C_{(p)} \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|$$

в случае p-вогнутости) для каждого выбора элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathbf{E}$.

Также говорят, что пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ удовлетворяет *верхней p-оценке* (соответственно, *нижней q-оценке*), если приведенные выше неравенства имеют место для каждого выбора элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ of $\mathbf{E}$ с дизъюнктными носителями.

Первый (и основной) пример:

- Пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ является q-выпуклым, если $p \geqslant q$, и p-вогнутым, если $q \geqslant p$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ пространство $\mathbf{L}_{p,q}$ является r-выпуклым, если $r = \min(q, p - \varepsilon)$, и r-вогнутым, если $r = \max(p,\ q + \varepsilon)$.

Эти результаты можно найти в [25, 50], а также [52, 54]. Известны следующие факты.

- Если $\mathbf{E}$ является p-выпуклым (соответственно, q-вогнутым), то $\mathbf{E}$ r-выпукло (соответственно, r-вогнуто) для $0 < r < p$.

- p-выпуклость для $0 < p \leqslant 1$ подразумевает p-нормируемость, а это, в свою очередь, дает верхнюю p-оценку. Обратное утверждение неверно. Например, пространство $\mathbf{L}_{p,\infty}$, $0 < p < 1$, на пространстве с конечной мерой является p-нормируемым, но не является p-выпуклым.
- Для $p = 1$ пространство $\mathbf{E}$ является нормируемым тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}$ является 1-выпуклым, в то время как p-выпуклость $\mathbf{E}$ с $p > 1$ влечет, что $\mathbf{E}$ нормируемо (т. е. $\mathbf{E}$ является банаховым пространством).

Следующая теорема вложения является одним из полезных следствий p-выпуклости и q-вогнутости, см. [78, утверждение 2.b.3], а также другие результаты в [78, § 2.b].

Пример 2.2. Для каждой пары $p, q \in [1, +\infty]$ $p_{\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q} = p_{\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q} = \min(p, q)$ и $q_{\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q} = q_{\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q} = \max(p, q)$. В частности, $p_{\mathbf{L}_p} = q_{\mathbf{L}_p} = p$ для каждого $p \in [1, +\infty]$.

Теорема 2.3. *Пусть* $(p_{\mathbf{E}}, q_{\mathbf{E}})$ — *индексы растяжения симметричного пространства* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

1. *Если* $1 \leqslant p < p_E^0 \leqslant q_E^0 < q \leqslant +\infty$, *то* $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_q \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_q$.
2. *Если* $1 = p = p_{\mathbf{E}}^0 \leqslant q_{\mathbf{E}}^0 < q \leqslant +\infty$, *то* $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_q \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_q$.
3. *Если* $1 \leqslant p < p_{\mathbf{E}}^0 \leqslant q_{\mathbf{E}}^0 = q = +\infty$, *то* $\mathbf{L}_p \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty$.

2.3. Оператор Харди и условие $(\mathcal{HLP})$.

2.3.1. Подпространства $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^\theta$. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное пространство на соответствующем стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Напомним, что оператор Харди H определяется на $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$ как

$$(Hf)(x) := \frac{1}{x} \int\limits_0^x f(u)\, du, \ x \in I, \ f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m),$$

а мажорантная функция Харди—Литтлвуда $\theta_{f,\mu}$ функции $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — как

$$\theta_{f,\mu}(x) = H\xi_{f,\mu}(x) = \frac{1}{x} \int\limits_0^x \xi_{f,\mu}(u)\, du, \ x \in I.$$

Определим θ-часть $\mathbf{E}_\theta$ пространства $\mathbf{E}$ как

$$\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$$

с $\|f\|_{\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} := \|\theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)}$ для $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$. Так как $\xi_{f,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$ для любой функции f, то мы имеем вложение $\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subseteq \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

- $(\mathbf{E}_\theta, \|\cdot\|_{\mathbf{E}_\theta})$ является симметричным банаховым пространством при условии, что оно нетривиально, т. е. когда $\mathbf{E}_\theta \neq \{0\}$.

Последнее условие имеет смысл в случае, когда $\mu(\Omega) = \infty$. Поэтому мы предполагаем всюду (если не оговорено противное), что $\mathbf{1}_A \in \mathbf{E}_\theta$ для некоторого (и потому всех) $A \in \mathcal{F}_\mu$ с мерой $0 < \mu(A) < \infty$.

Во многих случаях удобнее использовать пространство $\mathbf{E}^\theta$, для которого $(\mathbf{E}^\theta)_\theta = \mathbf{E}$. Симметричное банахово пространство $\mathbf{E}^\theta$ определено корректно, если $\theta_{f,\mu} \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(I, \mathcal{B}_m, m)$ для каждой функции $f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, причем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)\}.$$

с $\|f\|_{\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)} = \|\theta_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)}$для $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)$. В «хороших» случаях мы имеем три симметричных банаховых пространства $\mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subseteq \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subseteq \mathbf{E}^\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, для которых $H(\mathbf{E}_\theta(I, \mathcal{B}_m, m)) \subseteq \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ и $H(\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)) \subseteq \mathbf{E}^\theta(I, \mathcal{B}_m, m)$. В обоих вложениях $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^\theta$ возможны как равенства, так и строгие вложения.

Например,

- Для всех $1 < p \leqslant \infty$ $(\mathbf{L}_p)_\theta = \mathbf{L}_p = (\mathbf{L}_p)^\theta$ и $(\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty)_\theta = \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty = (\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty)^\theta$.
- Если $\mathbf{E} = \mathbf{L} \ln \mathbf{L} = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon |f| \ln^+ |f| \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty\}$, то $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)_\theta = \mathbf{L} \ln \mathbf{L}$ и $(\mathbf{L} \ln \mathbf{L})^\theta = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

- Если $\mu(\Omega) = \infty$, то $(\mathbf{L}_1)_\theta = \{0\}$ и $(\mathbf{L}_1)^\theta \not\subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

Рассмотрим пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича.

2.3.1.1. Пространства Орлича. Пусть $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Орлича с выпуклой функцией Орлича Φ. Тогда:

- $(\mathbf{L}_\Phi)^\theta = \mathbf{L}_{\Phi^\theta}$, где $\Phi^\theta(x) = x\Phi'(x) - \Phi(x)$, $x \geqslant 0$, при условии, что Φ^θ является функцией Орлича, т. е. если ее производная $x\Phi''(x)$ возрастает;
- $(\mathbf{L}_\Phi)_\theta = \mathbf{L}_{\Phi_\theta}$, где $\Phi_\theta(x) = x\int\limits_0^x \dfrac{\Phi(u)}{u^2}\,du$, $x \geqslant 0$, при условии, что $\int\limits_0^1 \dfrac{\Phi(u)}{u^2}\,du < \infty$.

Например, пусть $\mathbf{Z}_\alpha = \{\mathbf{L}_{\Phi_\alpha}, 0 < \alpha < \infty\}$ — шкала Зигмунда—Орлича, определяемая функциями Орлича

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \int\limits_1^x (\ln u)^\alpha\,dx, & x > 1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тогда мы имеем $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty = \mathbf{Z}_0 \supset \mathbf{Z}_\alpha \supset \mathbf{Z}_\beta \supset \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty$, $0 < \alpha < \beta < \infty$, $p \geqslant 1$.

Для $\alpha \geqslant 1$ удобнее рассматривать функции Орлича

$$\bar{\Phi}_\alpha(x) = \Phi_\alpha(x) + \alpha\Phi_{\alpha-1}(x) = x(\ln x)^\alpha \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty}(x),\ x \geqslant 0,$$

для которых $\Phi_\alpha(x) \leqslant \bar{\Phi}_\alpha(x) \leqslant (\alpha+1)\Phi_\alpha(x)$, $x \geqslant e$. Тогда $\mathbf{L}_{\bar{\Phi}_\alpha} = \mathbf{L}_{\Phi_\alpha}$ как множества, и можно использовать стандартное обозначение $\mathbf{Z}_\alpha = \mathbf{L}\ln^\alpha\mathbf{L}$.

Так как для $\alpha \geqslant 1$, $(\Phi_\alpha)^\theta(x) = x\Phi'_\alpha(x) - \Phi_\alpha(x) = \alpha\Phi_{\alpha-1}(x)$, для каждого $\alpha \geqslant 1$ мы имеем $(\mathbf{Z}_\alpha)^\theta = \mathbf{Z}_\alpha$ как множества и $\|\cdot\|_{(\mathbf{Z}_\alpha)^\theta} = \alpha\|\cdot\|_{\mathbf{Z}_\alpha}$. Таким образом, имеют место строгие вложения $\mathbf{Z}_\alpha \subset (\mathbf{Z}_\alpha)^\theta$ и $p_{\mathbf{Z}_\alpha} = 1$, см. [39, § 2.2.16 и § 3.1.10] и [111, § 16.4].

2.3.1.2. Пространства Лоренца. Пусть $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Лоренца с вогнутой весовой функцией W, такой что $W(0+) = 0$.

- $(\mathbf{\Lambda}_W)^\theta = \mathbf{\Lambda}_{W^\theta}$, где $W^\theta(x) = W(x) - xW'(x)$, $x \geqslant 0$, при условии, что W^θ — весовая функция Лоренца.
- $(\mathbf{\Lambda}_W)^\theta = \mathbf{\Lambda}_{W_\theta}$, где $W_\theta(x) = \int\limits_0^x\int\limits_t^\infty \frac{W'(u)}{u}\,dudt$, при условии, что интеграл $\int\limits_t^\infty \dfrac{W'(u)}{u}\,du < \infty$, $t > 0$.

Например, шкала Зигмунда—Лоренца $\{\mathbf{\Lambda}_{W_r},\ 0 < r < \infty\}$, где W_r — весовая функция Лоренца, которая является наименьшей вогнутой мажорантой квазивогнутой функции $(V_r)_*(x) = x/V_r(x)$, определенной ниже в (2.9).

2.3.1.3. Пространства Марцинкевича. Пусть $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Марцинкевича с вогнутой весовой функцией V такой, что $V(0+) = 0$ и $V'(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{V(x)}{x} = 0$.

- $(\mathbf{M}_V)^\theta = \mathbf{M}_{V^\theta}$, где $V^\theta(x) = \int\limits_0^x V(u)/u\,du$, $x \geqslant 0$, при условии, что последний интеграл конечен.
- $(\mathbf{M}_V)_\theta = \mathbf{M}_{V_\theta}$, где $V_\theta(x) = xV'(x)$, $x \geqslant 0$, при условии, что функция V_θ квазивогнута.

Например, пусть $\{\mathbf{M}_{V_r},\ 0 < r < \infty\}$ — шкала Зигмунда—Марцинкевича, которую мы определяем как

$$V_r(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ (-\ln x)^{-r}, & 0 < x \leqslant a_r, \\ b_r + c_r(x - a_r), & a_r < x < \infty, \end{cases} \tag{2.9}$$

где $a_r = e^{-r-1}$, $b_r = (r+1)^{-r}$, $c_r = re^{r+1}(r+1)^{-r-1}$. Так как

$$V'_r(x) := \begin{cases} rx^{-1}(-\ln x)^{-r-1}, & 0 \leqslant x \leqslant a_r, \\ c_r, & a_r < x < \infty, \end{cases}$$

$$V''_r(x) = \begin{cases} -rx^{-2}(\ln x + r + 1)(-\ln x)^{-r-1}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & a_r < x < \infty, \end{cases}$$

мы имеем $V_r(x) > 0$, $V'_r(x) > 0$, $V''_r(x) < 0$ при $0 < x < a_r$, причем $b_r = V_r(a_r)$, $c_r = V'_r(a_r)$, $V''_r(a_r) = 0$.

Поэтому для каждого $r > 0$ функция V_r является строго возрастающей положительной выпуклой на $(0, \infty)$ с $V_r(0+) = 0$, а для пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_{V_r}$, $r > 0$, мы имеем:

- строгие вложения $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subset \mathbf{M}_{V_{r_2}} \subset \mathbf{M}_{V_{r_1}} \subset \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty$ для всех $0 < r_1 < r_2 < \infty$ и $p > 1$;
- фундаментальная функция пространства $\mathbf{M}_{V_r}$ имеет вид

$$\varphi_{\mathbf{M}_{V_r}}(x) = (V_r)_*(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x(-\ln x)^r, & 0 < x \leqslant a_r, \\ x(b_r + c_r(x - a_r))^{-1}, & a_r < x < \infty; \end{cases}$$

- $p_{\mathbf{M}_{V_r}} = p(\varphi_{\mathbf{M}_{V_r}}) = p((V_r)_*) = 1$.

Более того, для каждого $r > 1$ и достаточно малого $x > 0$

$$(V_{r-1})_\theta(x) = \int_0^x \frac{1}{u(-\ln u)^{r-1}}\, du = \frac{1}{r}(-\ln x)^r = \frac{1}{r} V_r(x),$$

откуда

- $(\mathbf{M}_{V_{r-1}})_\theta = \mathbf{M}_{V_r}$ для всех $r > 1$.

Подробности можно найти в [43].

2.3.2. Свойства Харди—Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$ *и* $(\mathcal{WHLP})$. Говорят, что симметричное пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ удовлетворяет *свойству* (*условию*) *Харди—Литтлвуда* ($\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$), если $\mathbf{E}^\theta = \mathbf{E}$ как множества.

Другими словами, пусть $\Xi(\mathbf{E}) = \{\xi_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m),\ f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}$, и $\Theta(\mathbf{E}) = \{\theta_{f,\mu} \in \mathbf{L}_0(I, \mathcal{B}_m, m),\ f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)\}$. Тогда $\Xi(\mathbf{E}) \subseteq \Theta(\mathbf{E})$, в то время как $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP}) \iff \Theta(\mathbf{E}) = \Xi(\mathbf{E})$.

Например, мы имеем:

- $\mathbf{L}_p \in (\mathcal{HLP})$ и $\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_\infty \in (\mathcal{HLP})$ для всех $1 < p \leqslant \infty$;
- $\mathbf{L}_1 \notin (\mathcal{HLP})$ и $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \in (\mathcal{HLP})$.

Свойство $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ можно сформулировать в терминах индекса $p_\mathbf{E}$ и через асимптотическое поведение функции растяжения $d_\mathbf{E}(t)$. Напомним, что $d_\mathbf{E}(t) = \|D_t\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}}$ определяется в пункте 2.2.1 (теорема 2.1).

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *симметричное банахово пространство. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1. $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$,
2. $p_\mathbf{E} > 1$,

3a. $d_\mathbf{E}(t) \leqslant Ct^{1/p}$, $t > 1$ *для некоторых* $C > 0$ *и* $p > 1$,
3b. $d_\mathbf{E}(t) = o(t)$ *при* $t \to \infty$,
3c. $d_\mathbf{E}(t_0) < t_0$ *для некоторого* $t_0 > 1$,
3d. $\int_0^\infty d_\mathbf{E}(1/t) dt < \infty$.

Первая версия теоремы была доказана в [83, 116] для максимальных пространств $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и в [1] для общих (не обязательно максимальных) пространств в случае конечной меры. Случай бесконечной меры был рассмотрен в [74, § II.6.1].

В случае, когда пространство $\mathbf{E}$ стандартное, условие $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ означает, что оператор Харди—Литтлвуда H ограничен на $\mathbf{E}$, условие 3d — что $\|H\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}} \leqslant \int_0^\infty d_\mathbf{E}(1/t) dt$.

Условие 2 может быть заменено на $p^0_\mathbf{E} > 1$, если пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (C), и даже на $p(\varphi_\mathbf{E}) > 1$, если $p_\mathbf{E}$ совпадает с фундаментальным индексом $p(\varphi_\mathbf{E})$ пространства $\mathbf{E}$.

Заметим также, что условие 3b вместе с (2.7) влечет

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|D_t \xi_{f,\mu}\|_\mathbf{E}}{t} = 0 \text{ для всех } f \in \mathbf{E}. \tag{2.10}$$

Мы будем называть последнее условие *слабым свойством Харди—Литтлвуда* ($\mathbf{E} \in (\mathcal{WHLP})$). Таким образом, $\mathbf{E} \in (\mathcal{WHLP})$ тогда и только тогда, когда $d_{\mathbf{E},f}(t) := \|D_t \xi_{f,\mu}\|_\mathbf{E} = o(t)$, $t \to \infty$.

Очевидно, $(\mathcal{HLP}) \Longrightarrow (\mathcal{WHLP})$, однако обратное утверждение неверно, т. е. из условия (2.10) в общем случае не следует 3b.

С другой стороны, если взять, в частности, $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$, то $\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}} = \|\mathbf{1}_{[0,t]}\|_{\mathbf{E}} = \varphi_{\mathbf{E}}(t)$ и $1/t\,\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}} = 1/\varphi_{\mathbf{E}^1}(t)$. Отсюда $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}}}{t} = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{\varphi_{\mathbf{E}^1}(t)} = 0 \Longleftrightarrow \varphi_{\mathbf{E}^1}(\infty) = \infty \Longleftrightarrow \mathbf{E}^1 \not\subseteq \mathbf{L}_\infty \Longleftrightarrow \mathbf{E} \not\supseteq \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{E} \notin (\mathcal{WHLP})$ при условии $\mathbf{E} \supseteq \mathbf{L}_1$.

Рассмотрим важный частный случай, когда $\mathbf{E}$ является пространством Орлича. Покажем, что все пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi$, за редким исключением, удовлетворяют условию $(\mathcal{WHLP})$.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ такое пространство Орлича, что функция Орлича Φ удовлетворяет условиям*

$$0 < \Phi(x) < \infty \text{ при } 0 < x < \infty \text{ и } \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty. \tag{2.11}$$

Тогда $\mathbf{L}_\Phi \in (\mathcal{WHLP})$.

Доказательство. Условие (2.11) означает, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\widetilde{\Phi}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\Phi^{-1}(1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\Phi^{-1}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty,$$

т. е. что $\mathbf{L}_1 \not\subseteq \mathbf{L}_\Phi$.

Для каждой ограниченной функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$ из неравенства $D_t\xi_{f,\mu} \leqslant \xi_{f,\mu}(0)$ следует, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\Phi}}{t} \leqslant \lim_{t\to\infty} \frac{\xi_{f,\mu}(0)}{t} = 0.$$

Поэтому условие (2.10) выполняется для всех функций f из минимальной части $\mathbf{L}_\Phi^0 = cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{L}_\Phi$, и даже из $cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_\infty)$ в случае $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_\Phi$.

Если $\mathbf{L}_\Phi$ не минимально и $f \notin \mathbf{L}_\Phi^0$, то существует класс Юнга $\mathbf{Y}_\Phi^c$ такой, что $f \in \mathbf{Y}_\Phi^c$, но $f \notin \mathbf{Y}_\Phi^b$ для всех $b > c$. Тогда $\|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \|\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = c$, $t > 0$, функция $d_{\mathbf{L}_\Phi,f}(t)$ ограничена и тем более $d_{\mathbf{L}_\Phi,f}(t)/t \to 0$ при $t \to \infty$ (определение и свойства классов Юнга $\mathbf{Y}_\Phi^c$ см. в пункте 1.4.2). ☐

Пусть $\mathbf{L}_\Phi$ — пространство Орлича такое, что $\mathbf{L}_1 \not\subseteq \mathbf{L}_\Phi$ и $p_{\mathbf{L}_\Phi} = 1$, например, пространство Зигмунда—Орлича $\mathbf{L}_{\Phi_\alpha}$, $0 < \alpha < \infty$, определяемое по функции Орлича (2.8). Тогда $\mathbf{L}_\Phi \in (\mathcal{WHLP})$, однако $\mathbf{L}_\Phi \notin (\mathcal{HLP})$.

Заметим, что в отличие от пространств Орлича, для всех пространств Марцинкевича из $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{WHLP})$ следует, что $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$, см. ниже пункт 2.3.3.

2.3.3. Условие $(\mathcal{HLP})$ для пространства Марцинкевича. Пусть $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — пространство Марцинкевича с квазивогнутой функцией V. В этом разделе мы предполагаем, что $V(0+) = 0$ и $V(\infty) = \infty$.

Условие 2 в теореме 2.4 можно уточнить в случае $\mathbf{E} = \mathbf{M}_V$ следующим образом.

- $V' \in \mathbf{M}_V$, $\theta_{V',m} = 1/V_*$ и $\xi_{f,m} \in \mathbf{M}_V \iff \theta_{f,m} \leqslant C\theta_{V',m}$ для некоторого $C > 0$. Отсюда $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP}) \iff 1/V_* \in \mathbf{M}_V$.
- $d_{\mathbf{M}_V} = (V_*)^\sharp = (V^\flat)_*$ влечет $p_{\mathbf{M}_V} = p((V_*)^\sharp) = p(V_*)$, в то время как $1/p(V_*) + 1/q(V) = 1$. Отсюда $p_{\mathbf{M}_V} > 1$ тогда и только тогда, когда $q(V) = q(V^\sharp) < \infty$.
- Из определения $q(V) = q(V^\sharp)$ следует, что $q(V^\sharp) = \infty \Longleftrightarrow \liminf\limits_{x\to 0} \dfrac{V(2x)}{V(x)} = 1$.
- Из условия $d_{\mathbf{M}_V}(t) = (V_*)^\sharp(t) = o(t)$ при $t \to \infty$ следует $d_{\mathbf{M}_V,f}(t) = \|D_t\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{M}_V} = o(t)$ при $t \to \infty$ для всех $f \in \mathbf{M}_V$. Однако, полагая $f = V'$, мы получим $\|D_tV'\|_{\mathbf{M}_V} = (V_*)^\sharp$. Отсюда $d_{\mathbf{M}_V}(t) = o(t)$, $t \to \infty \Longleftrightarrow d_{\mathbf{M}_V,f}(t) = o(t)$, $t \to \infty$ для всех $f \in \mathbf{M}_V$.

Последнее утверждение означает, что для пространств Марцинкевича $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{WHLP}) \Longleftrightarrow \mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$.

Нижний и *верхний классы Марцинкевича* $\underline{\mathbf{M}}_V$ и $\overline{\mathbf{M}}_V$ определяются как пространства

$$\mathbf{L}_\infty(U) = \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)} = \|U \cdot \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty} < \infty\}$$

с весовыми функциями $U = 1/V'$ и $U = V_*$, соответственно.

Напомним, что если U квазивогнута, то $U^\sharp$ тоже квазивогнута. Следовательно, функция $U^\sharp$ конечна и удовлетворяет Δ_2-условию. Таким образом, $\|f\|_{\mathbf{L}_\infty(U)}$ является квазинормой, и $\mathbf{L}_\infty(U)$ является квазинормированным пространством, удовлетворяющим условию Фату.

Учитывая равенства $V' = \xi_{V',m}$, $\theta_{V',m} = 1/V_*$ и $V'(x) \leqslant V(x)/x$, $x > 0$, получаем:

- $\underline{\mathbf{M}}_V \subseteq \mathbf{M}_V \subseteq \overline{\mathbf{M}}_V$;
- $\overline{\mathbf{M}}_V$ является симметричным пространством с квазинормой $f \to \|V_*\,\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty}$;
- $\overline{\mathbf{M}}_V$ удовлетворяет условию Фату $\varphi_{\overline{\mathbf{M}}_V} = \varphi_{\mathbf{M}_V} = V_*$;
- $\underline{\mathbf{M}}_V$ является симметричным пространством с квазинормой $f \to \|1/V'\,\xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{L}_\infty}$ при условии, что функция $x\,1/V'$ возрастает, т. е. $1/V'$ — квазивогнута; при этом $\underline{\mathbf{M}}_V$ — симметричное квази-банахово пространство со свойством Фату и $\varphi_{\underline{\mathbf{M}}_V} = \varphi_{\mathbf{M}_V} = 1/V'$.

Теорема 2.6. *Пусть V — квазивогнутая функция, такая что $V(0+) = 0$ и $V(\infty) = \infty$. Тогда*:

1. *Если $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$, то $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$*;
2. *Если $\mathbf{M}_V \notin (\mathcal{HLP})$, то оба вложения $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V \subset \overline{\mathbf{M}}_V$ строгие*;
3. *Если $(\overline{\mathbf{M}}_V, \|\cdot\|_{\overline{\mathbf{M}}_V})$ нормируемо, то $\overline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$*;
4. *Если $(\underline{\mathbf{M}}_V, \|\cdot\|_{\underline{\mathbf{M}}_V})$ нормируемо, то $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$*.

Доказательство.

1. Мы имеем $\theta_{v,m} = 1/V^*$ для $v = V' = \xi_{v,m}$. Отсюда $\mathbf{M}_V = \left\{ f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \dfrac{\theta_{f,\mu}}{\theta_{v,m}} \in \mathbf{L}_\infty \right\}$, а также $\underline{\mathbf{M}}_V = \left\{ f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \dfrac{\xi_{f,\mu}}{\xi_{v,m}} \in \mathbf{L}_\infty \right\}$, $\overline{\mathbf{M}}_V = \left\{ f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \dfrac{\xi_{f,\mu}}{\theta_{v,m}} \in \mathbf{L}_\infty \right\}$. Следовательно, $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP}) \iff \theta_{v,m} \in \mathbf{M}_V \iff \underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$.

2. Если $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$, то $\theta_{v,m} \in \mathbf{M}_V$, что противоречит условию $\mathbf{M}_V \notin (\mathcal{HLP})$. Если $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V$, то $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$, что невозможно по предыдущему.

3. Пусть на $\overline{\mathbf{M}}_V$ существует норма $\|\cdot\|$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{\overline{\mathbf{M}}_V}$. Эта норма может быть выбрана симметричной, так что $\overline{\mathbf{M}}_V$ становится симметричным банаховым пространством, фундаментальная функция которого эквивалентна $\varphi_{\overline{\mathbf{M}}_V} = V_*$. Но $\mathbf{M}_V$ есть наибольшее симметричное банахово пространство, фундаментальная функция которого эквивалентной V_*. Поэтому $\mathbf{M}_V = \overline{\mathbf{M}}_V$.

4. Пусть существует норма $\|\cdot\|$ на $\underline{\mathbf{M}}_V$, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{\underline{\mathbf{M}}_V}$. Тогда мы можем превратить $\underline{\mathbf{M}}_V$ в симметричное банахово пространство, заменяя норму $\|\cdot\|$ на эквивалентную ей симметричную норму.

Поскольку фундаментальная функция любого симметричного банахова пространства квазивогнута, фундаментальная функция $\varphi_{\underline{\mathbf{M}}_V} = 1/V'$ эквивалентна некоторой квазивогнутой функции U.

Теперь у нас есть пространство Марцинкевича $\mathbf{M}_U$, верхний класс которого $\overline{\mathbf{M}}_V$ совпадает с нижним классом $\underline{\mathbf{M}}_V$.

Из предыдущей части 3 теоремы следует $\mathbf{M}_U = \overline{\mathbf{M}}_U$. Значит, пространство $\mathbf{M}_U$, а потому и $\mathbf{M}_V = (\mathbf{M}_U)^\theta$, имеет свойство $(\mathcal{HLP})$. □

Большая часть этих результатов содержится в [1] для случая конечной меры, см. также [92] и имеющиеся там ссылки. Случай бесконечной меры был рассмотрен в [24, 119]. Приведенное выше доказательство взято из [43].

Замечание 2.1. Особый интерес здесь представляет промежуточное пространство $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\underline{\mathbf{M}}_V)$. В разделе 3.2.2 будет показано, что

- оба вложения $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ являются строгими, если вложение $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строгое;
- в этом случае симметричное банахово пространство $\mathbf{M}_V^\dagger$ не является интерполяционным.

3. Интерполяция и орбиты

В этом разделе мы рассматриваем интерполяцию абсолютных сжатий или $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-сжатий. Поэтому мы вынуждены сузить рассмотрение до симметричных банаховых пространств $\mathbf{E}$, которые удовлетворяют вложениям $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ и имеют нетривиальные двойственные пространства.

3.1. Абсолютные сжатия и интерполяционные пространства.

3.1.1. Полугруппы $\mathcal{AC}$ и $\mathcal{AC}^o$. Линейный оператор $T\colon \mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty\to\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ называется *абсолютным*, или $(\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_\infty)$*-сжатием*, если T является сжатием как в $\mathbf{L}_1$, так и в $\mathbf{L}_\infty$.

Обозначим через $\mathcal{AC}$ множество всех абсолютных сжатий.

Для каждого абсолютного сжатия $T\in\mathcal{AC}$ сужение $T|_{\mathbf{L}_1}$ является сжатием в $\mathbf{L}_1$, а сопряженный оператор $(T|_{\mathbf{L}_1})^*$ является сжатием в $\mathbf{L}_\infty$. Последний оператор на $\mathbf{L}_\infty$ определен также на $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$ и может быть расширен с $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$ на $\mathbf{L}_1$ по непрерывности, а затем на $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ по линейности. Обозначим этот расширенный оператор через T^o и отметим, что $T^o\in\mathcal{AC}$ и $T^{oo}=(T^o)^o\in\mathcal{AC}$. По определению, связь между операторами T и T^o однозначно определяется равенством

$$\int\limits_\Omega Tf\cdot g\,d\mu=\int\limits_\Omega f\cdot T^o g\,d\mu,\ f\in\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty,\ g\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty. \tag{3.1}$$

Можно показать (см., например, [74, § II.3.4]), что для каждого оператора $T\in\mathcal{AC}$ следующие условия эквивалентны:

- $(T^o)^o=T$;
- Для всех $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ и $g\in\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$, $\int\limits_\Omega Tf\cdot g\,d\mu=\int\limits_\Omega f\cdot T^o g\,d\mu$;
- T является непрерывным оператором в топологии $\sigma(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty,\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty)$ на $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$.

Пусть $\mathcal{AC}^o:=\{T\in\mathcal{AC}\colon (T^o)^o=T\}$. Тогда $\mathcal{AC}^o$ является собственной подполугруппой полугруппы $\mathcal{AC}$, а именно, существуют $T\in\mathcal{AC}$ такие, что $T\neq T^{oo}$ и $T\notin\mathcal{AC}^o$.

Особый интерес представляют два подмножества полугруппы $\mathcal{AC}^o$.

3.1.1.1. Сохраняющие меру преобразования. Пусть $\tau\colon\Omega\to\Omega$ — сохраняющее меру преобразование (с.м.п.) на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Это означает, что $\mu\circ\tau^{-1}=\mu$, т. е. для $A\in\mathcal{F}_\mu$ множество $\tau^{-1}A\in\mathcal{F}_\mu$ и $\mu(\tau^{-1}A)=\mu(A)$.

Каждое сохраняющее меру преобразование τ на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ индуцирует линейный оператор $T_\tau\colon\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty\to\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ вида $T_\tau f:=f\circ\tau$, $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$.

Так как τ сохраняет меру, то функции $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ и $T_\tau f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ равноизмеримы. Поэтому $T_\tau\in\mathcal{AC}$ и $T_\tau\mathbf{E}\subseteq\mathbf{E}$ для каждого симметричного пространства $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, в то время как ограничение T_τ на $\mathbf{E}$ является изометрией в $\mathbf{E}$. В случае, когда преобразование τ обратимо, имеем также $T_\tau\in\mathcal{AC}^o$ и $T_\tau\mathbf{E}=\mathbf{E}$

3.1.1.2. Условные ожидания. Пусть $\mathcal{G}$ — σ-подалгебра $\mathcal{F}_\mu$ на пространстве с мерой $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, и пусть $f\in\mathbf{L}_1(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Условное ожидание $\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}f$ функции f (относительно $\mathcal{G}$) представляет собой функцию $g\in\mathbf{L}_1(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ такую, что $\int\limits_A g\,d\mu=\int\limits_A f\,d\mu$ для всех $A\in\mathcal{G}$. В случае $\mu(\Omega)<\infty$ в силу теоремы Радона—Никодима такая функция g существует. В случае $\mu(\Omega)=\infty$ следует дополнительно предполагать, что сужение $\mu|_{\mathcal{G}}$ меры μ на $\mathcal{G}$ является σ-конечной мерой на $(\Omega,\mathcal{G},\mu|_{\mathcal{G}})$.

Поэтому мы будем использовать следующее определение.

- Пусть $f\in(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty)(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$, и пусть $\mathcal{G}$ — σ-подалгебра $\mathcal{F}_\mu$. Тогда $g=\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}$ является условным ожиданием тогда и только тогда, когда g является $\mathcal{G}$-измеримой и $\int\limits_A g\,d\mu=\int\limits_A f\,d\mu$ для всех $A\in\mathcal{G}$ с $\mu(A)<\infty$.

Заметим, что последнее условие $\mu(A)<\infty$ нельзя опустить, даже если $f\in\mathbf{L}_1$.

Таким образом, $\int\limits_\Omega h\,\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}f\,d\mu=\int\limits_\Omega h\,f\,d\mu$ для всех $h\in\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty(\Omega,\mathcal{G},\mu)$ и $f\in(\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty)(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$.

Отображение $f\to\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}f$ является линейным положительным оператором, таким что

$$\int\limits_\Omega\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}(hf)\,d\mu=\int\limits_\Omega h\,\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{G}}(f)\,d\mu.$$

3.1.2. Интерполяционные пространства. Пусть $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ — алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathbf{E}$, и пусть $\mathbf{B}_1(\mathbf{E})=\{T\in\mathbf{B}(\mathbf{E})\colon\|T\|_{\mathbf{E}}\leqslant1\}$ — единичный шар в $\mathbf{B}(\mathbf{E})$.

Используя вложения $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty\subseteq\mathbf{L}_i\subseteq\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$, $i=1,\infty$, рассмотрим множество $\mathbf{B}(\mathbf{L}_1,\mathbf{L}_\infty)$ всех линейных операторов $T\colon\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty\to\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$, таких что $T|_{\mathbf{L}_1}\in\mathbf{B}(\mathbf{L}_1)$ и $T|_{\mathbf{L}_\infty}\in\mathbf{B}(\mathbf{L}_\infty)$.

Если $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$, то $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$, $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)$, и $\mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$ является банаховой алгеброй относительно нормы $|||T||| := \max(\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_1)}, \|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_\infty)}) \geqslant \max(\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)}, \|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)})$.

Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$. Так как $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, то из вложения $T|_\mathbf{E}\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ следует, что $T|_\mathbf{E}$ является замкнутым оператором в $\mathbf{E}$, потому $T|_\mathbf{E} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$.

Ниже (в пункте 3.2.2) будет показано, что существуют симметричные банаховы пространства, которые не являются $\mathcal{AC}$-инвариантными.

Симметричное банахово пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ называется *интерполяционным* (или, если быть более точным, $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$-*интерполяционным*) пространством, если $T|_\mathbf{E} \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$ для всех $T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$.

Можно показать, что:

- Для каждого интерполяционного пространства $\mathbf{E}$ существует константа $c > 0$ такая, что
$$||T||_\mathbf{E} \leqslant c|||T||| \quad \text{для всех } T \in \mathbf{B}(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty).$$
Кроме того, можно считать $c = 1$, переходя к подходящей эквивалентной норме в $\mathbf{E}$.

Константа c называется *интерполяционной константой* $\mathbf{E}$. Если $c = 1$, то симметричное банахово пространство $\mathbf{E}$ называется *вполне симметричным*.

Следующее описание интерполяционных и вполне симметричных пространств связано с теоремой Кальдерона—Митягина [11, 29].

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим $\mathcal{AC}$-орбиту f:
$$\mathcal{O}(f) := \{Tf \colon T \in \mathcal{AC}\}.$$
Можно показать (см. [74, § II.3]), что верно следующее утверждение.

Теорема 3.1. *$\mathcal{O}(f) = \{g \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \theta_{g,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}\}$ для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, причем все орбиты являются замкнутыми в слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty, \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ на $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.*

Например, для каждого пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ по определению $V' \in \mathbf{M}_V$ и $\mathbf{M}_V = \mathbb{R}^+\mathcal{O}(V')$, т. е. $f \in \mathbf{M}_V$ тогда и только тогда, когда $Cf \in \mathcal{O}(V')$ для некоторого $C > 0$.

Следующий центральный результат теории следует из [29] и [11], более детальное доказательство содержится в [74, § II.4].

Теорема 3.2. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство. Тогда*:

1. *$\mathbf{E}$ является интерполяционным пространством $\iff$ $g \in \mathbf{E}$, лишь только $g \in \mathcal{O}(f)$ для некоторой $f \in \mathbf{E}$*;
2. *$\mathbf{E}$ вполне симметрично $\iff$ $g \in \mathbf{E}$, лишь только $g \in \mathcal{O}(f)$ и $\|g\|_\mathbf{E} \leqslant \|f\|_\mathbf{E}$ для некоторой $f \in \mathbf{E}$.*

Теорема утверждает, что каждое интерполяционное пространство $\mathbf{E}$ имеет вид $\mathbf{E} = \bigcup\limits_{f \in \mathbf{E}} \mathcal{O}(f)$, а для вполне симметричных пространств, кроме того, что $\|g\|_\mathbf{E} = \inf\{\|f\|_\mathbf{E} \colon g \in \mathcal{O}(f)\}$, $g \in \mathbf{E}$.

Другими словами, каждое интерполяционное пространство $\mathbf{E}$ является объединением всех пространств Марцинкевича $\mathbf{M}_V$, для которых $V' \in \mathbf{E}$, т. е. $\mathbb{R}^+\mathcal{O}(V') = \mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{E}$.

Заметим, что каждое минимальное симметричное пространство и каждое максимальное симметричное пространство являются интерполяционными, см. [74, теоремы II.4.9 и II.4.10]. В частности, пространства Орлича, Лоренца и Марцинкевича являются интерполяционными пространствами.

Более того,

- из условия $(\mathcal{HLP})$ следует условие интерполяционности.

Действительно, если $\mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ и $f \in \mathbf{E}$, то $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}$ и $\mathcal{O}(f) \subseteq \{g \in \mathbf{E} \colon \xi_{f,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}\} \subseteq \mathbf{E}$. С другой стороны, из свойства интерполяционности, в общем случае, не следует свойство $(\mathcal{HLP})$. Например, если $\mathbf{E}$ — максимальное с $p_\mathbf{E} = 1$, то $\mathbf{E}$ является интерполяционным пространством, в то время как $\mathbf{E} \notin (\mathcal{HLP})$.

Как будет показано ниже в пункте 3.2.2, существуют симметричные банаховы пространства, которые не являются интерполяционными. Первый пример такого пространства, по-видимому, был построен в [18]. С другой стороны, существуют симметричные квази-банаховы пространства, которые вполне симметричны и обладают свойством интерполяционности, но не являются нормируемыми. Как это было отмечено в [128, § 2.6], такими пространствами являются, например, пространства $\mathbf{L}_{p,q}$ с $0 < q < 1 < p < \infty$.

3.2. Положительные сжатия и интерполяционные пространства.

3.2.1. Полугруппы $\mathcal{PAC}$ и $\mathcal{PAC}^o$ и условные математические ожидания. Напомним, что оператор T, определенный на $\mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ (или на его подпространстве), называется *положительным*, если из $f \geqslant 0$ следует $Tf \geqslant 0$.

Обозначим через $\mathcal{PAC}$ множество всех положительных абсолютных сжатий. Очевидно, что $\mathcal{PAC}$ является подполугруппой полугруппы $\mathcal{AC}$.

Положительный оператор T называется *субмарковским*, если он является сжатием в $\mathbf{L}_1$. Если, кроме того, T сохраняет интеграл, т. е. $\int\limits_\Omega Tf\,d\mu = \int\limits_\Omega f\,d\mu$, $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, то оператор T называется *марковским*.

Положительный оператор T называется *монотонно непрерывным* на пространстве $\mathbf{E}$, если из $f_n \uparrow f \in \mathbf{E}$ следует, что $Tf_n \uparrow Tf$.

- Каждый положительный оператор на $\mathbf{L}_p$ является монотонно непрерывным для $1 \leqslant p < \infty$. Однако в случае $p = \infty$ положительные сжатия могут и не быть монотонно непрерывными.

С другой стороны, пусть для положительного $\mathbf{L}_1$-сжатия T сопряженный к нему оператор $T^* : \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_\infty$ определяется двойственностью $\langle Tf, g\rangle_\mu = \int\limits_\Omega Tf\,g\,d\mu = \int\limits_\Omega f\,T^*g\,d\mu = \langle f, T^*g\rangle_\mu$. Тогда:

- если T — положительное $\mathbf{L}_1$-сжатие, то сопряженный к нему оператор T^* является положительным монотонно непрерывным $\mathbf{L}_\infty$-сжатием.

Возвращаясь к полугруппе $\mathcal{AC}$, рассмотрим их общую подполугруппу $\mathcal{PAC}^o = \mathcal{AC}^o \cap \mathcal{PAC}$. Особый интерес представляют два следующих (упомянутых выше) подкласса $\mathcal{PAC}^o$.

- $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{T_\tau\}$, где $T_\tau f = f \circ \tau$, $f \in \mathbf{L}_0$ и τ является сохраняющим меру преобразованием $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{\mathbb{E}^{\mathcal{G}}_\mu\}$, где $\mathbb{E}^{\mathcal{G}}_\mu$ является условным математическим ожиданием, а соответствующая мера $\mu|_{\mathcal{G}}$ является σ-конечной на σ-подалгебре $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}_\mu$.

Первый класс $\mathcal{T}$ не оказывает влияния на интерполяционные свойства симметричного пространства $\mathbf{E}$, так как $T_\tau\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $\|T_\tau f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$, $f \in \mathbf{E}$ для каждого $T_\tau \in \mathcal{T}$. Очевидно, если преобразование τ обратимо, то мы имеем равенство $T_\tau\mathbf{E} = \mathbf{E}$ и $\|T_\tau f\|_{\mathbf{E}} = \|f\|_{\mathbf{E}}$, $f \in \mathbf{E}$. В отличие от этого, класс $\mathcal{E}$ полностью определяет свойство интерполяции в следующем смысле.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство. Тогда*:

1. $\mathbf{E}$ *интерполяционное пространство* $\iff$ $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ *для любого* $T \in \mathcal{E}$;
2. $\mathbf{E}$ *вполне симметричное пространство* $\iff$ $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ *и* $\|Tf\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$, $f \in \mathbf{E}$ *для любого* $T \in \mathcal{E}$.

На самом деле, даже один оператор T (специального вида) может быть «проверяющим» интерполяционность $\mathcal{E}$. Пусть $r > 1$. Последовательность измеримых подмножеств $A_n \subseteq \Omega$, $n \geqslant 1$ будем называть *r-адической*, если $A_n \supset A_{n+1}$ и $0 < \mu(A_n) = r\mu(A_{n+1}) < \infty$ для $n \geqslant 1$.

Для данной r-адической последовательности рассмотрим σ-алгебру $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{A_n\})$, порожденную $\{A_n,\ n \geqslant 1\}$ и $\{B \in \mathcal{F}_\mu \colon B \subseteq \Omega \setminus A_1\}$, и пусть $T_{\mathcal{H}} f = \mathbb{E}^{\mathcal{H}}_\mu(f \cdot 1_{A_1}) + f \cdot 1_{\Omega\setminus A_1}$, $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, где $\mathbb{E}^{\mathcal{H}}_\mu$ — оператор условного ожидания на $\mathcal{H}$.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство, и $T_{\mathcal{H}}$ определяется r-адической σ-алгеброй $\mathcal{H}$. Тогда*:

1. $\mathbf{E}$ *интерполяционное пространство* $\iff$ $T_{\mathcal{H}}\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$;
2. $\mathbf{E}$ *вполне симметричное пространство* $\iff$ $T_{\mathcal{H}}\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ *и* $\|T_{\mathcal{H}} f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$, $f \in \mathbf{E}$.

Эту теорему и другие, связанные с ней результаты, можно найти в [90–92].

3.2.2. Симметричные банаховы пространства, не обладающие свойством интерполяционности. Пусть $\mathbf{M}_V = \mathbf{M}_V(I, \mathcal{B}_m, m)$ — пространство Марцинкевича на стандартном измеримом пространстве $(I, \mathbf{B}_m, m)$ с $I = [0, \infty)$. Мы опять используем нижний класс Марцинкевича $\underline{\mathbf{M}}_V$ пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_V$ и его замыкание $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\underline{\mathbf{M}}_V)$ в $\mathbf{M}_V$. Промежуточное пространство $\mathbf{M}_V^\dagger$ при вложении $\underline{\mathbf{M}}_V \subseteq \mathbf{M}_V^\dagger \subseteq \mathbf{M}_V$ является симметричным банаховым пространством. Оно удовлетворяет условию (C) как подпространство $\mathbf{M}_V$, однако (в отличии от $\mathbf{M}_V$) не обязано быть максимальным в тех случаях, когда вложение $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строгое.

Напомним, что по теореме 2.6 $\mathbf{M}_V \notin (\mathcal{HLP})$ тогда и только тогда, когда $p_{\mathbf{M}_V} = p(V_*) = 1$, и вложение $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V$ в этом случае строгое.

Предположим также, что функция $U(x) = xV'(x),\ x > 0$ является квазивогнутой, также как и функция V. Тогда для соответствующего пространства Марцинкевича $\mathbf{M}_U$ имеем:

(a) $p_{\mathbf{M}_U} = p(U_*) = 1$ и $\mathbf{M}_U \notin (\mathcal{HLP})$, также как и $\mathbf{M}_V$;
(b) $\mathbf{M}_U = (\mathbf{M}_V)_\theta \subset \overline{\mathbf{M}}_U = \underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V = (\mathbf{M}_U)^\theta$, где оба включения являются строгими;
(c) $\overline{\mathbf{M}}_U = cl_{\overline{\mathbf{M}}_U}(\mathbf{M}_U)$ и $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\mathbf{M}_U)$, т. е. $\mathbf{M}_U$ плотно в $\overline{\mathbf{M}}_U = \underline{\mathbf{M}}_V$, а также в $\mathbf{M}_V^\dagger$.

Чтобы найти пару (U, V) с указанными выше свойствами, можно использовать шкалу Зигмунда—Марцинкевича $\{\mathbf{M}_{V_r},\ 0 < r < \infty\}$ (которая определяется в (2.9)), и подставить, например, $U = V_2$ и $V = V_1$, $r = 1, 2$.

Теорема 3.5 предоставляет широкий класс симметричных банаховых пространств, которые не являются интерполяционными.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathbf{M}_U$ и $\mathbf{M}_V$ — два пространства Марцинкевича с квазивогнутыми функциями U и V такими, что $U(x) = xV'(x),\ x > 0$ и $p_{\mathbf{M}_U} = p(\mathbf{M}_V) = 1$. Предположим также, что $V(0) = U(0) = 0$ и $V(\infty) = U(\infty) = \infty$. Тогда*:

1. *оба вложения $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строгие*;
2. *симметричное банахово пространство $\mathbf{M}_V^\dagger = cl_{\mathbf{M}_V}(\underline{\mathbf{M}}_V)$ не является интерполяционным.*

Доказательство. Из предположений теоремы следуют условия (a), (b) и (c).

Если $\underline{\mathbf{M}}_V = \mathbf{M}_V^\dagger$, то $\underline{\mathbf{M}}_V$ нормируемо, что противоречит условию 4 теоремы 2.6. Поэтому вложение $\underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger$ строгое.

Предположим, что $\mathbf{M}_V^\dagger = \mathbf{M}_V$. Тогда из условия (c) следует, что $\mathbf{M}_U$ плотно в $\mathbf{M}_V$, и потому единичный шар $(\mathbf{M}_U)_1$ пространства $\mathbf{M}_U$ плотен в единичном шаре $(\mathbf{M}_V)_1$ пространства $\mathbf{M}_V$. По определению пространства Марцинкевича $(\mathbf{M}_U)_1 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \theta_{f,\mu} \leqslant U\} = \mathcal{O}(U')$ и $(\mathbf{M}_V)_1 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \theta_{f,\mu} \leqslant V\} = \mathcal{O}(V')$, где обе орбиты $\mathcal{O}(U')$ и $\mathcal{O}(V')$ замкнуты в слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty, \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ на $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ в силу теоремы 3.1. Следовательно, $\mathcal{O}(U') = (\mathbf{M}_U)_1$ плотно в $\mathcal{O}(V') = (\mathbf{M}_V)_1$, и значит $(\mathbf{M}_U)_1 = (\mathbf{M}_V)_1$ и $\mathbf{M}_U = \mathbf{M}_V$. Равенство противоречит условиям (a) и (b), поэтому вложение $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ строго.

Предположим теперь, что симметричное банахово пространство $\mathbf{M}_V^\dagger$ — интерполяционное. Тогда по теореме 3.1 $V' \in \underline{\mathbf{M}}_V \subset \mathbf{M}_V^\dagger \implies (\mathbf{M}_V)_1 = \mathcal{O}(V') = \{TV' \colon T \in \mathcal{AC}\} \subseteq \mathbf{M}_V^\dagger \implies \mathbf{M}_V \subseteq \mathbf{M}_V^\dagger$. Противоречие с $\mathbf{M}_V^\dagger \neq \mathbf{M}_V$ завершает доказательство теоремы. □

Замечание 3.1.

- Построение «неинтерполяционных» пространств на основе строгого вложения $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ известно уже давно. Приведенная выше теорема и ее доказательство взяты из [43]. Более ранняя версия была представлена в [74, § II.5.7]. Следует отметить, что несмотря на то, что приведенная там лемма 5.5 неверна, она может быть легко исправлена дополнительным условием на пространство $\mathbf{M}_V$. А именно, следует дополнительно потребовать, чтобы соответствующая V функция $U(x) = xV'(x)$ была квазивогнутой.
- Еще одно применение строгого вложения $\mathbf{M}_V^\dagger \subset \mathbf{M}_V$ связано с существованием нетривиальных симметричных функционалов на симметричных пространствах. Отсылаем читателя к серии работ в этом направлении: [36, 58, 59, 79, 80].

4. Эргодические теоремы

4.1. Доминантные эргодические теоремы $\mathcal{DET}$.

4.1.1. Консервативные и строго консервативные операторы. В этом разделе мы описываем разложение Хопфа $\Omega = C(T) \cup D(T)$ и разложение $\Omega = \widetilde{C}(T) \cup \widetilde{D}(T))$ для положительного сжатия T на $\mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Первое из них выделяет консервативную часть $C(T)$, а второе — строго консервативную часть $\widetilde{C}(T)$ оператора T. Хотя все понятия даны для общих положительных $\mathbf{L}_1$-сжатий, в дальнейшем мы будем использовать только операторы $T \in \mathcal{PAC}$.

Для получения более подробной информации мы отсылаем читателя к работам [75, гл. 3], [39, гл. 8] или, в частном случае, когда оператор $T = T_\tau$ определяется несингулярным преобразованием τ, к работе [21, гл. 1].

Пусть $T : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{L}_1$ — положительное $\mathbf{L}_1$-сжатие. Дуальный оператор $T^* : \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_\infty$ является положительным $\mathbf{L}_\infty$-сжатием. Заметим, что оба оператора T и T^* монотонно непрерывны.

Пусть T_P и T^*_P — соответствующие операторы потенциала, т. е. выполнено

$$T_P f := \sum_{n=0}^{\infty} T^n f \quad \text{и} \quad T^*_P f := \sum_{n=0}^{\infty} (T^*)^n f.$$

Тогда Ω однозначно $mod\,\mu$ представимо в виде дизъюнктного объединения $\mathcal{C}(T) \cup \mathcal{D}(T)$ такого, что:

- для всех $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, $T_P f = \infty$ на $\mathcal{C}(T) \cap \{T_P > 0\}$;
- для всех $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, $T_P f < \infty$ на $\mathcal{D}(T)$.

Это разложение Хопфа $\{\mathcal{C}(T),\ \mathcal{D}(T)\}$, однозначное $mod\,\mu$, определяется следующими двумя условиями (относительно T^*):

- для всех $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_\infty$, $T^*_P g = \infty$ на $\mathcal{C}(T) \cap \{T^*_P > 0\}$;
- существует $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_\infty$ такая, что $T^*_P g \leqslant 1$ и $\{g > 0\} = \mathcal{D}(T)$.

Непересекающиеся множества $\mathcal{C}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$ называются *консервативной и диссипативной частью* Ω для оператора T.

Существует и третий способ описания разложения Хопфа. А именно, множества $\mathcal{C}(T)$ и $\mathcal{D}(T)$ определяются однозначно $(mod\,\mu)$ условиями:

- если $g \geqslant 0$ и $g \geqslant T^*g$, то $g = T^*g$ на $\mathcal{C}(T)$;
- существует $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_\infty$, такая что $g \geqslant T^*g$ и $g > T^*g$ на $\mathcal{D}(T)$.

Функцию g в последнем условии можно выбрать с дополнительными свойствами: $(T^*)^n f \to 0$ почти всюду на $\mathcal{D}(T)$ и $g = 0$ на $\mathcal{C}(T)$.

Если $\Omega = \mathcal{C}(T)$, то оператор T называется *консервативным*. Если $\Omega = \mathcal{D}(T)$, то оператор T называется *диссипативным*.

Рассмотрим теперь разложение $\Omega = \widetilde{\mathcal{C}}(T) \cup \widetilde{\mathcal{D}}(T))$. Множества $\widetilde{\mathcal{C}}(T)$ и $\widetilde{\mathcal{D}}(T)$, называемые *положительной* и *нулевой* частью оператора T, определяются однозначно $mod\,\mu$ условиями:

- существует $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$, такая что $Tf = f$ и $\{f > 0\} = \widetilde{\mathcal{C}}$;
- множество $\widetilde{\mathcal{D}} = \widetilde{\mathcal{D}}(T)$ можно представить как счетное объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_n$ непересекающихся множеств $\mathcal{D}_n$, такое что $\lim\limits_{n\to\infty} \int A^*_{n,T} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_n}\, d\mu = 0$, где $A^*_{n,T} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} T^{*k}$.

Разложения $(\mathcal{C}(T), \mathcal{D}(T))$ и $(\widetilde{\mathcal{C}}(T), \widetilde{\mathcal{D}}(T))$ связаны включениями $\widetilde{\mathcal{C}}(T) \subseteq \mathcal{C}(T)$ и $\mathcal{D}(T) \subseteq \widetilde{\mathcal{D}}(T)$. Таким образом, мы имеем разложение Ω на три непересекающихся подмножества

$$\Omega = \widetilde{\mathcal{C}}(T) \cup \mathcal{C}_0(T) \cup \mathcal{D}(T),$$

где $\mathcal{C}_0(T) = \mathcal{C}(T) \cap \widetilde{\mathcal{D}}(T)$. Множество $\widetilde{\mathcal{C}}(T)$ называется *строго консервативной* частью оператора T.

Если $\Omega = \widetilde{\mathcal{C}}(T)$, то оператор T называется *строго консервативным*.

Множество $A \in \mathcal{F}_\mu$ называется *T-поглощающим*, если $Tf \in \mathbf{L}_1(A)$ для любой функции $f \in \mathbf{L}_1(A)$, где $\mathbf{L}_1(A) = \{f \in \mathbf{L}_1 \colon f \geqslant 0,\ f = 0 \text{ вне } A\}$.

Консервативная часть $\mathcal{C} = \mathcal{C}(T)$ является T-поглощающим множеством, и мы используем обозначение $\mathcal{A} = \mathcal{A}(T)$ для класса всех T-поглощающих подмножеств консервативной части $\mathcal{C}(T)$:

- $T^*\mathbf{1}_C = \mathbf{1}_C$ и $C \in \mathcal{A}$;
- $\mathcal{A}$ является σ-алгеброй подмножеств $\mathcal{C}$;
- $\mathcal{A}$ представляет собой класс всех подмножеств вида $C_f := \{T_P^* f = +\infty\}$, где $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_1$;
- $\mathcal{A}$ представляет собой класс всех подмножеств $A \subset \mathcal{C}$, таких что $T^*\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A$;
- неотрицательная измеримая функция h на $\mathcal{C}$ является $\mathcal{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $T^*h = h$ на $\mathcal{C}$;
- функция $h \in \mathbf{L}_\infty$ на $\mathcal{C}$ является $\mathcal{A}$-измеримой тогда и только тогда, когда $T^*h = h$ на $\mathcal{C}$.

Обозначим для сокращения записи $\widetilde{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{C}}(T)$ и $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{A \in \mathcal{A} \colon \mu(A \cap \widetilde{\mathcal{D}}) = 0\}$. Тогда:

- $\widetilde{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$ и $T^*\mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{C}}} = \mathbf{1}_{\widetilde{\mathcal{C}}}$;
- $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{F} \colon \mu(A \cap \widetilde{\mathcal{D}}) = 0,\ T^*\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\}$;
- $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \in \mathcal{F} \colon A = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} A_n,\ \mu(A_n) < \infty,\ T\mathbf{1}_{A_n} = \mathbf{1}_{A_n}\}$;
- $\widetilde{\mathcal{A}}$ является σ-подалгеброй алгебры $\mathcal{F}$ такой, что мера $\mu_{\widetilde{\mathcal{A}}} = \mu|_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ является σ-конечной.

Мы видим, что если T — строго консервативный, то условное ожидание $\mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}}$ индуцирует проекции $\mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \to \mathbf{L}_1(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu)$ и $\mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \to \mathbf{L}_\infty(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu)$, где $\mathbf{L}_1(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu) = \{f \in \mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon Tf = f\}$ и $\mathbf{L}_\infty(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}, \mu) = \{f \in \mathbf{L}_\infty(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon T^*f = f\}$.

4.1.2. $\mathcal{DET}$ для положительных абсолютных сжатий. Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство на пространстве с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, и $\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)$ — соответствующее ему стандартное симметричное банахово пространство на стандартном пространстве с мерой $(I, \mathcal{B}_m, m)$.

Пусть $T \in \mathcal{PAC}$ и $A_{n,T} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} T^{k-1}$, $n \geqslant 1$ — соответствующие чезаровские средние.

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим *доминантную функцию*

$$f_T^{\blacklozenge}(w) := \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (T^{k-1}|f|)(w),\ w \in \Omega. \tag{4.1}$$

Заранее не ясно, что $f_T^{\blacklozenge}(w) < \infty$ для почти всех $w \in \Omega$. Из классического максимального неравенства (4.4), которое приведено ниже, этот факт следует для любой функции $f \in \mathbf{L}_1$.

Для симметричного банахова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и положительного абсолютного сжатия $T \in \mathcal{PAC}$ нас интересуют следующие две проблемы.

- Что собой представляет подмножество $\mathbf{E}_{\mathcal{DET}}^T := \{f \in \mathbf{E} \colon f_T^{\blacklozenge} \in \mathbf{E}\}$?
- Что собой представляет подкласс симметричных банаховых пространств $\mathbf{E}$, таких что $\mathbf{E}_{\mathcal{DET}}^T = \mathbf{E}$ для $T \in \mathcal{PAC}$?

Поскольку пространство $\mathbf{E}$ — порядково полное (см. 1.3.6), то условие $f_T^{\blacklozenge} \in \mathbf{E}$ означает, что последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T} f\}_{n=1}^\infty$ порядково ограничена в $\mathbf{E}$. Отсюда, конечно, следует, что $Tf \in \mathbf{E}$ и $A_{n,T} f \in \mathbf{E}$, $n \geqslant 1$.

С другой стороны, рассматривая эти проблемы, мы не предполагаем *априори*, что $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$. Однако, если $\mathbf{E}_{\mathcal{DET}}^T = \mathbf{E}$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, то $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, и потому $\mathbf{E}$ является интерполяционным пространством.

Напомним, что через $\mathbf{E}_\theta = \mathbf{E}_\theta(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) = \{f \in \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)\}$ обозначается θ-часть симметричного пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство, $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$ такое, что $Tf \in \mathbf{E}$. Тогда если $f \in \mathbf{E}_\theta$, то $f_T^{\blacklozenge} \in \mathbf{E}$ и $\|f_T^{\blacklozenge}\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}_\theta}$.*

Следующие три предложения определяют отношения между функциями распределения $\lambda_f(x) := \theta_{f,\mu}^{-1}(x) = m(\{\theta_{f,\mu} > x\})$, $x \geqslant 0$ функций $\theta_{f,\mu} = \theta_{\xi_{f,\mu}, m}$ и интегралами вида

$$\mathcal{I}_f(x) := \frac{1}{x} \int\limits_{\{|f| > x\}} |f|\, d\mu = \frac{1}{x} \int\limits_{\{\xi_{f,\mu} > x\}} \xi_{f,\mu}\, dm = \mathcal{I}_{\xi_{f,\mu}}(x).$$

Предложение 4.1. *Пусть $0 \leqslant f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $C > 1$. Тогда*:

$$(C-1) m(\{\theta_{f,\mu} > Cx\}) \leqslant \mathcal{I}_f(x) \leqslant m(\{\theta_{f,\mu} > x\}) \quad \text{для всех} \quad x > \xi_{f,\mu}(\infty). \tag{4.2}$$

Доказательство.

1. Первое неравенство. Функция $\theta_{f,\mu}(x)$ непрерывна и строго убывает на $0 < x < \xi_{f,\mu}(\infty) = \theta_{f,\mu}(\infty)$. Следовательно, обратная функция λ_f непрерывна и строго убывает для всех $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$. Тогда мы имеем $\theta_{f,\mu}(\lambda_f(x)) = x$ для всех $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$, где $\lambda_f(x) = m\{\theta_{f,\mu} > x\} = m\{\theta_{f,\mu} \geqslant x\}$.

Положим $s = \lambda_f(Cx)$ для фиксированного $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$ и $C > 1$. Тогда мы имеем $Cx > \xi_{f,\mu}(\infty)$ и $\theta_{f,\mu}(s) = Cx$. Если $s \leqslant \eta_{f,\mu}(x)$, то

$$s = \lambda_f(Cx) = \frac{1}{Cx}\int\limits_0^s \xi_{f,\mu}\,dm \leqslant \frac{1}{Cx}\int\limits_0^{\eta_{f,\mu}(x)} \xi_{f,\mu}\,dm = \frac{1}{C}\mathcal{I}_{\xi_{f,\mu}}(x),$$

откуда $(C-1)s < Cs \leqslant \mathcal{I}_{\xi_{f,\mu}}(x)$.

Если $s > \eta_{f,\mu}(x)$, то так как функция $\xi_{f,\mu}$ убывающая, имеем $\xi_{f,\mu}(s) \leqslant x$. В таком случае

$$\frac{1}{Cx}\int\limits_{\eta_{f,\mu}(x)}^s \xi_{f,\mu}\,dm \leqslant \frac{1}{Cx}\int\limits_0^s x\,dm = \frac{s}{C},$$

$$s - \frac{s}{C} \leqslant \frac{1}{Cx}\int\limits_0^s \xi_{f,\mu}\,dm - \frac{1}{Cx}\int\limits_{\eta_{f,\mu}(x)}^s \xi_{f,\mu}\,dm = \frac{1}{Cx}\int\limits_0^{\eta_{f,\mu}(x)} \xi_{f,\mu}\,dm = \frac{1}{C}\mathcal{I}_f(x).$$

Таким образом, $s(C-1) \leqslant \mathcal{I}_f(x)$, т. е. первое неравенство в 4.1 доказано.

2. Второе неравенство. Пусть $s = \lambda_f(x)$ для фиксированного $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$. Тогда $\theta_{f,\mu}(s) = x$ и

$$s = \frac{1}{x}\int\limits_0^s \xi_{f,\mu}\,dm \geqslant \frac{1}{x}\int\limits_{\{\xi_{f,\mu} > \xi_{f,\mu}(s)\}} \xi_{f,\mu}\,dm \geqslant \frac{1}{x}\int\limits_{\{\xi_{f,\mu} > x\}} \xi_{f,\mu}\,dm = \mathcal{I}_f(x),$$

так как $x = \theta_{f,\mu}(s) \geqslant \xi_{f,\mu}(s)$. Следовательно, $\lambda_f(x) \geqslant \mathcal{I}_f(x)$. □

Напомним, что $\eta_{\xi_{f,\mu},m}(x) = \eta_{f,\mu}(x) = \mu(\{|f| > x\})$ для $x > \xi_{f,\mu}(\infty)$.

Предложение 4.2. *Пусть* $0 \leqslant f \in \mathbf{L}_0^\xi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $0 \leqslant g \in \mathbf{L}_0^\xi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *и* $\xi_{f,\mu}(\infty) = \xi_{g,\mu}(\infty) = 0$. *Если*

$$\eta_{f,\mu}(x) \leqslant \frac{1}{x}\int\limits_{\{g > x\}} f\,d\mu,\ x > 0, \tag{4.3}$$

то $\xi_{g,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$.

Доказательство. Из (4.3) и предложения 4.1 следует, что

$$x \leqslant \frac{1}{s}\int\limits_{\{g>x\}} f\,d\mu \leqslant \frac{1}{s}\sup\left\{\int\limits_A f\,d\mu,\ \mu A = s\right\} \leqslant \frac{1}{s}\int\limits_0^s \xi_{f,\mu}\,dm = \theta_{f,\mu}(s)$$

для всех $x > \xi_{g,\mu}(\infty) = 0$ и $s = \mu\{g > x\}$, т. е. $x \leqslant \theta_{f,\mu}(\mu\{g > x\})$ для всех $x > 0$.

Так как λ_f является непрерывной убывающей функцией, то $\lambda_f \geqslant \eta_{g,\mu}$, а значит, $\theta_{f,\mu} \geqslant \xi_{g,\mu}$. □

Нам необходимо классическое максимальное неравенство Хопфа—Данфорда—Шварца для положительных абсолютных сжатий (см. [38, § VIII.6], [75, § 1.6] или [39, § 8.2]).

Для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеем

$$\eta_{f_T^\blacklozenge,\mu}(x) = \mu\{f_T^\blacklozenge > x\} \leqslant \frac{1}{x}\int\limits_{\{f_T^\blacklozenge > x\}} f\,d\mu,\ x > 0. \tag{4.4}$$

Это неравенство непосредственно вытекает из максимальной эргодической теоремы Хопфа, примененной к функции $f_x(\omega) = f(\omega) - x,\ x > 0$, где используется только интегрируемость функций f_x^+. Следовательно, неравенство (4.4) справедливо для всех $f \in \mathbf{R}_0 = cl_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$.

Если $f \in \mathbf{R}_0$, то $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{R}_0$, а также $\theta_{f,\mu} \in \mathbf{R}_0$, т. е. пара f и $g = f_T^\blacklozenge$ удовлетворяют условию предложения 4.2. Отсюда $\xi_{g.\mu} = \xi_{f_T^\blacklozenge,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$ для всех $f \in \mathbf{R}_0$. Таким образом, переходя к функции

$f - c$, где $c = \xi_{f,\mu}(\infty) = \xi_{g,\mu}(\infty)$, мы видим, что последнее неравенство справедливо для всех $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$.

Таким образом, мы получаем

Предложение 4.3. $\xi_{f_T^\diamondsuit,\mu} \leqslant \theta_{f,\mu}$ *для всех* $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$.

Доказательство теоремы 4.1. В силу предложения 4.3, $f \in \mathbf{E}_\theta \iff \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E} \implies \xi_{f_T^\blacklozenge,\mu} \in \mathbf{E} \iff f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$. □

Замечание 4.1. θ-пара $\mathbf{E}_\theta \subseteq \mathbf{E}$, используемая в теореме 4.1, может быть заменена на пару $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}^\theta$, определенную в пункте 2.3.1. А именно,

- Если $f \in \mathbf{E}$, то $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}^\theta$ и $\|f_T^\blacklozenge\|_{\mathbf{E}^\theta} \leqslant \|f\|_{\mathbf{E}}$.

Это имеет смысл сделать, например, в том случае, когда $\mathbf{E}_\theta = \{0\}$, в то время как $\mathbf{E}^\theta \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ вполне определено.

Теорема 4.1 была доказана в [98], и ранее в [28] для случая конечной меры.

4.1.3. Обратная $\mathcal{DET}$ для консервативных сохраняющих меру преобразований. Теорема 4.1 показывает, что для каждого симметричного банахова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ и $T \in \mathcal{PAC}$ подпространство $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}} = \{f \in \mathbf{E}\colon f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}\}$ содержит подмножество $\mathbf{E}_\theta = \{f \in \mathbf{E}\colon \theta_{f,\mu} \in \mathbf{E}\}$. Следующее обратное к $\mathcal{DET}$ утверждение описывает ситуацию, когда $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}} = \mathbf{E}_\theta$.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — *симметричное банахово пространство,* τ — *эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, *и оператор* $T = T_\tau \in \mathcal{T}$ *имеет вид* $T_\tau f = f \circ \tau$. *Тогда из* $f_T^\blacklozenge \in \mathbf{E}$ *следует, что* $f \in \mathbf{E}_\theta$ *и* $\|f_T^\blacklozenge\|_{\mathbf{E}} \geqslant 1/2\, d_{\mathbf{E}}(1/2)\|f\|_{\mathbf{E}_\theta}$. *В частности,* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}} = \mathbf{E}_\theta$.

Нам будет необходимо следующее обратное максимальное неравенство:

$$\frac{1}{x} \int\limits_{\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\}} f\, d\mu \leqslant 2\mu\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\},\ x > 0, \tag{4.5}$$

где $f \geqslant 0$, $T = T_\tau$ и τ — эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, см. [75, § 1.6.2].

Предложение 4.4. *Пусть* τ — *эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на* $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ *и* $T = T_\tau$. *Тогда для каждого* $f \in \mathbf{R}_0$

$$\theta_{f,\mu}(x) \leqslant 2\xi_{f_T^\blacklozenge,\mu}\left(\frac{x}{2}\right),\ x > 0. \tag{4.6}$$

Доказательство. По предложению 4.1 с $C = 2$ имеем

$$m(\{\theta_{f,\mu} > 2x\}) \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{\{|f| > x\}} |f|\, d\mu,\ x > f^*(\infty),$$

где $f^*(\infty) = 0$, так как $f \in \mathbf{R}_0$. Из обратного максимального неравенства (4.5) следует, что

$$\frac{1}{x} \int\limits_{\{|f| > x\}} |f|\, d\mu \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\}} f\, d\mu \leqslant 2\mu\{f_T^\blacklozenge \geqslant x\},\ x > 0.$$

Таким образом, $m(\{\theta_{f,\mu} \geqslant 2x\}) \leqslant 2\mu\{f_T^\blacklozenge > x\}$, $x > 0$, и для всех $x > 0$

$$\frac{1}{2}\theta_{f,\mu}(x) = \frac{1}{2}\inf\{2y > 0\colon m(\{\theta_{f,\mu} > 2y\}) \leqslant x\} = \inf\{y > 0\colon m(\{\theta_{f,\mu} > 2y\}) \leqslant x\} \leqslant$$
$$\leqslant \inf\{y > 0\colon m(\{\theta_{f,\mu} \geqslant 2y\}) \leqslant x\} \leqslant \inf\left\{y > 0\colon \mu\left(\left\{f_T^\blacklozenge > \frac{y}{2}\right\}\right) \leqslant x\right\} = \xi_{f_T^\blacklozenge,\mu}\left(\frac{x}{2}\right).$$

□

Доказательство теоремы 4.2. Переходя к функции $f-\xi_{f,\mu}(\infty)$, мы видим, что неравенство (4.6) в предложении 4.4 выполняется для всех $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$. Следовательно, $\xi_{f_T^\diamondsuit,\mu}(x)\geqslant\dfrac{1}{2}\theta_{f,\mu}(2x)=\dfrac{1}{2}(D_{1/2}\theta_{f,\mu})(x)$, $x>0$, откуда из $f_T^\blacklozenge\in\mathbf{E}$ следует $f\in\mathbf{E}_\theta$ и $\|f_T^\blacklozenge\|_{\mathbf{E}}\geqslant 1/2\,d_{\mathbf{E}}(1/2)\|f\|_{\mathbf{E}_\theta}$.

В силу теоремы 4.1 мы имеем также $\mathbf{E}^T_{\mathcal{DET}}=\mathbf{E}_\theta$. $\square$

Напомним, что симметричное банахово пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию *Харди—Литтлвуда* ($\mathbf{E}\in(\mathcal{HLP})$), если $\mathbf{E}_\theta=\mathbf{E}$, Говорят, что пространство $\mathbf{E}$ *удовлетворяет* $(\mathcal{DET})$ ($\mathbf{E}\in(\mathcal{DET})$), если $f_T^\blacklozenge\in\mathbf{E}$ для любой функции $f\in\mathbf{E}$ и $T\in\mathcal{PAC}$.

Следствие 4.1. $\mathbf{E}\in(\mathcal{DET})\iff\mathbf{E}\in(\mathcal{HLP})$.

4.2. Поточечная и порядковая сходимости.

4.2.1. Индивидуальная эргодическая теорема в $\mathbf{R}_0$. Напомним, что $\mathbf{R}_0=\mathbf{R}_0(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — минимальная часть пространства $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Пространство $\mathbf{R}_0$ совпадает с замыканием $cl_{\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty)$ пространства $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$ в $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ и состоит из всех функций $f\in\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ таких, что $\xi_{f,\mu}(\infty)=0$, или (эквивалентно) $\eta_{f,\mu}(x)<\infty$ для всех $x>0$.

Теорема 4.3. *Если $T\in\mathcal{PAC}$ и $f\in\mathbf{R}_0$, то $A_{n,T}f$ сходится почти всюду на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ к конечному пределу f^∞. Если, кроме того, T строго консервативен ($\Omega=\mathcal{C}(T)$), то $f^\infty=\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{A}}f$ и $f^\infty(\omega)=0$ для почти всех $\omega\in\widetilde{\mathcal{C}}_0(T)$.*

Обратно, пусть $\mu(\Omega)=\infty$ и $T=T_\tau$, где τ — эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Тогда существует $f\in\mathbf{L}_\infty$, такая что $A_{n,T}f$ не является сходящейся почти всюду на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$.

Доказательство. Первая часть теоремы является улучшенной версией индивидуальной эргодической теоремы Данфорда—Шварца (см. [39, теорема 8.6.11]).

Для того, чтобы доказать «обратное» утверждение, рассмотрим эргодическое консервативное сохраняющее меру μ преобразование τ на $(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$. Условие $\mu(\Omega)=\infty$ (вместе с эргодичностью) означает, что и $T=T_\tau$ является нуль-консервативным, т. е. $\Omega=\mathcal{C}_0(T)$. Таким образом, $A_{n,T}f\overset{(\text{п.в.})}{\longrightarrow}0$ для всех $f\in\mathbf{R}_0$.

Предположим теперь, что:

$$A_{n,T}f \text{ сходится почти всюду на } (\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu) \text{ для каждой функции } f\in\mathbf{L}_\infty. \tag{4.7}$$

Тогда для любой вероятностной меры $\nu\sim\mu$ и любого измеримого множества A существует предел

$$\widetilde{\nu}(A):=\lim_{n\to\infty}\int\limits_\Omega A_{n,T}\mathbf{1}_A\,d\nu=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\nu(\tau^{-k}A). \tag{4.8}$$

С помощью [75, теоремы 4.3.1–4.3.3] можно показать, что слабая сходимость $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\nu\circ\tau^{-k}\to\widetilde{\nu}$ в (4.8) дает фактически сходимость по норме.

Действительно, пусть $h=\dfrac{d\nu}{d\mu}\in\mathbf{L}_1(\mu)$ — производная Радона—Никодима и $T^o_\tau\colon\mathbf{L}_1(\nu)\ni g\to T^o_\tau g:=g\circ\tau^{-1}\,\dfrac{h\circ\tau^{-1}}{h}\in\mathbf{L}_1(\nu)$. Тогда

$$\int\limits_\Omega(T^o_\tau g)(\omega)d\nu(\omega)=\int\limits_\Omega g(\tau^{-1}\omega)\,\frac{h(\tau^{-1}\omega)}{h(\omega)}d\nu(\omega)=$$
$$=\int\limits_\Omega g(\tau^{-1}\omega)\,h(\tau^{-1}\omega)d\mu(\omega)=\int\limits_\Omega g(\omega)\,h(\omega)d\mu(\omega)=\int\limits_\Omega g(\omega)\,d\nu(\omega),$$

т. е. оператор T_τ^o является положительной изометрией в $\mathbf{L}_1(\nu)$, а также его двойственный оператор T_τ является положительной изометрией в $\mathbf{L}_\infty(\nu)$. Полагая $g = \mathbf{1}_\Omega \in \mathbf{L}_1(\nu)$ и используя статистическую эргодическую теорему [75, теорема 2.1.1], получаем, что при условии (4.7) из слабой сходимости $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T_\tau^o \mathbf{1}_\Omega$ следует сильная сходимость, а функция $\widetilde{h} \in \mathbf{L}_1(\nu)$ есть не что иное, как $\dfrac{d\widetilde{\nu}}{d\nu}$.

Таким образом, $\widetilde{\nu} = \dfrac{d\widetilde{\nu}}{d\nu}\nu$ является τ-инвариантной мерой на Ω, такой что $\widetilde{\nu} \sim \mu$ и $\widetilde{\nu}(\Omega) = 1$. Так как τ — эргодическое консервативное и $\widetilde{\nu}(\Omega) = \infty$, то каждая такая τ-инвариантная мера имеет вид $c\mu$, где константа $c > 0$. Противоречие показывает, что (4.7) не выполняется. □

Доказательство обратной части теоремы 4.3 взято из [98].

Из приведенной выше теоремы имеется следствие.

Следствие 4.2. *Если $T \in \mathcal{PAC}$ и $f \in \mathbf{R}_0$, то $A_{n,T}f$ сходится стохастически на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu))$ к $f^\infty \overset{(п.в.)}{=} -\lim\limits_{n\to\infty} A_{n,T}f$.*

Стохастическая эргодическая теорема Кренгеля [75, теорема 4.4.8] утверждает стохастическую сходимость $A_{n,T}f$ для любого положительного $\mathbf{L}_1$-сжатия T и $f \in \mathbf{L}_1$.

Теорема 4.4. *Пусть T — положительное сжатие в $\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{L}_1$ средние $A_{n,T}f$ сходятся стохастически на $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Предельная функция f^∞ является T-инвариантной и равна нулю на $\widetilde{\mathcal{D}}(T) = \mathcal{D}(T) \cup \mathcal{C}_0(T)$. Если $f \geqslant 0$, то f^∞ совпадает почти всюду с $\liminf\limits_{n\to\infty} A_{n,T}f$.*

Однако (п.в.)-предел в этой теореме не всегда существует (см. [75, § 3.6]), в отличие от рассматриваемого нами случая, когда $T \in \mathcal{PAC}$. Если $T \in \mathcal{PAC}$, стохастическая сходимость имеет место также и в $\mathbf{R}_0$, что следует из теоремы 4.3.

4.2.2. Порядковая эргодическая теорема. Комбинируя теоремы 4.1, 4.2 и 4.3, мы теперь можем описать условия порядковой сходимости чезаровских средних $A_{n,T}f$ для $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathcal{PAC}$.

Соответствующие проблемы заключаются в следующем.

- Что собой представляет множество $\mathbf{E}^T_{\mathcal{OET}} := \{f \in \mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty$ сходится порядково в $\mathbf{E}\}$?
- Что собой представляет подкласс пространств $\mathbf{E}$ таких, что $\mathbf{E}^T_{\mathcal{OET}} = \mathbf{E}$ для $T \in \mathcal{PAC}$?

Теорема 4.5. *Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ — симметричное банахово пространство.*

1. *Пусть $T \in \mathcal{PAC}$. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{R}_0$ последовательность средних $A_{n,T}f$ порядково сходится в $\mathbf{E}$.*
2. *Пусть $T = T_\tau$, где τ — эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Если $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{R}_0$, то существует $f \in \mathbf{E}$ такая, что последовательность $A_{n,T}f$ не сходится порядково в $\mathbf{E}$.*

Первая часть теоремы следует из теорем 4.1 и 4.3, вторая часть следует из теорем 4.2 и 4.3.

Говорят, что пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет $(\mathcal{OET})$ ($\mathbf{E} \in (\mathcal{OET})$), если последовательность средних $A_{n,T}f$ порядково сходится в $\mathbf{E}$ для любой функции $f \in \mathbf{E}$ и любого оператора $T \in \mathcal{PAC}$.

Следствие 4.3. $\mathbf{E} \in (\mathcal{OET}) \iff \mathbf{E} \in (\mathcal{HLP})$ *и* $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{R}_0$.

4.3. Статистические эргодические теоремы $\mathcal{MET}$.

4.3.1. Статистические эргодические теоремы в банаховых пространствах. Статистические (*mean*) эргодические теоремы $(\mathcal{MET})$ имеют дело со сходимостью по норме чезаровских средних $A_{n,T}f = 1/n \sum\limits_{k=1}^{n} T^{k-1}f$ для $f \in \mathbf{E}$ и $T \in \mathbf{B}(\mathbf{E})$.

Оператор T в банаховом пространстве $\mathbf{E}$ удовлетворяет $(\mathcal{MET})$ в $\mathbf{E}$, если $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$, где подпространство $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ определяется как

$$\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} := \{f \in \mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty \text{ сходится по норме } \mathbf{E}\},\ T \in \mathbf{B}(\mathbf{E}). \tag{4.9}$$

Для описания множества $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ рассмотрим следующие условия:

(a) $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|A_{n,T}\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})}<\infty$ (оператор T ограничен по Чезаро);

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 1/nT^{n-1}f=0$ для всех $f\in\mathbf{E}$.

Оба условия (a) и (b) выполняются, если

(c) $\sup\limits_{n\geqslant 0}\|T^n\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})}<\infty$ для всех $f\in\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$.

Положим

$$\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)=\{f\in\mathbf{E}\colon Tf=f\}\quad\text{и}\quad\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*)=\{h\in\mathbf{E}^*\colon T^*h=h\},\tag{4.10}$$

где T^* — дуальный к T оператор, действующий в пространстве $\mathbf{E}^*$.

Следующие результаты содержатся в классических работах [51, 108, 124, 125].

Теорема 4.6. *При выполнении условий* (a) *и* (b) *следующие условия эквивалентны для каждой пары* $f,g\in\mathbf{E}$:

1. $g\in\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ *и* $g\in\overline{co}\{T^nf,\ n\geqslant 0\}$;
2. $g=\lim\limits_{n\to\infty}A_{n.T}f$;
3. $g=w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}A_{n.T}f$;
4. g *является слабой кластер-предельной точкой последовательности* $\{A_{n.T}f\}$.

Теорема 4.7 (см. [75, § 2.1] и указанные там ссылки)**.** *Если условия* (a) *и* (b) *выполнены, то* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}=\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)\oplus cl\{f-Tf\colon f\in\mathbf{E}\}$.

Оператор $\Pi\colon\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}\ni f\to\Pi f:=\lim\limits_{n\to\infty}A_{n.T}f\in\mathbf{E}$ *является проектором из* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ *на* $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$, *таким что* $\Pi=\Pi^2=T\Pi=\Pi T$ *и*

$$cl\{f-Tf\colon f\in\mathbf{E}\}=\{f\in\mathbf{E}\colon \Pi f=0\}=\{f\in\mathbf{E}\colon <f,h-T^*h>=0\ \text{для всех}\ f\in\mathbf{E}^*\}.$$

Нам понадобится следующий критерий Сайна (см. [118] и [75, т. 1.4]).

Теорема 4.8. $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}=\mathbf{E}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ *разделяет точки* $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*)$.

4.3.2. Статистические эргодические теоремы в симметричных пространствах. Пусть $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — симметричное банахово пространство и $T\in\mathcal{PAC}$ такой, что $T\mathbf{E}\subseteq\mathbf{E}$. Мы также предполагаем, что оператор T удовлетворяет условиям (a) и (b), необходимым для $(\mathcal{MET})$ в общих банаховых пространствах, см. пункт 4.3.1.

Заметим, что если пространство $\mathbf{E}$ является интерполяционным, то оно T-инвариантно и $T|_{\mathbf{E}}\in\mathbf{B}(\mathbf{E})$ для каждого $T\in\mathcal{AC}$. Более того, если $\mathbf{E}$ — вполне симметрично, то $\|T|_{\mathbf{E}}\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})}\leqslant 1$, т. е. для T выполняется условие (c) на $\mathbf{E}$, а значит и оба условия (a) и (b).

Для данного симметричного банахова пространства $\mathbf{E}$ и $T\in\mathcal{PAC}$ нас интересуют следующие две проблемы.

- Что собой представляет множество $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}=\{f\in\mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty$ сходится по норме в $\mathbf{E}\}$?
- Что собой представляет подкласс пространств $\mathbf{E}$ таких, что $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}=\mathbf{E}$?

Теорема 4.9. *Пусть* $\mathbf{E}=\mathbf{E}(\Omega,\mathcal{F}_\mu,\mu)$ — *симметричное банахово пространство,* $\mathbf{E}$ *удовлетворяет условию* (A) (*т. е.* $\mathbf{E}$ *минимально и* $\varphi_{\mathbf{E}}(0+)=0$), *и* $\mathbf{1}_\Omega\notin\mathbf{E}^1$. *Пусть* $T\in\mathcal{PAC}$ *такой, что* $T\mathbf{E}\subseteq\mathbf{E}$, *и* T *удовлетворяет условиям* (a) *и* (b) *на* $\mathbf{E}$. *Тогда* $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}=\mathbf{E}$, *т. е.* T *удовлетворяет* $(\mathcal{MET})$.

Доказательство. Из условия (A) в силу теоремы 1.5 следует, что $\mathbf{E}$ минимально и $\varphi_{\mathbf{E}}(0+)=0$, т. е. $\mathbf{E}\nsubseteq\mathbf{L}_\infty$. Кроме того, по теореме 1.8 дуальное пространство $\mathbf{E}^*$ отождествляется с ассоциированным пространством $\mathbf{E}^1$, в то время как дуальный оператор $T^*_{\mathbf{E}}=(T|_{\mathbf{E}})^*\in\mathcal{B}(\mathbf{E}^*)$ оператора $T_{\mathbf{E}}=T|_{\mathbf{E}}$ отождествляется с оператором $T^o_{\mathbf{E}^1}=(T^o|_{\mathbf{E}^1})\in\mathcal{B}(\mathbf{E}^1)$.

Напомним, что ассоциированный оператор T^o определен на $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$ равенством (3.1).

Так как $T^o\in\mathcal{PAC}$ (и даже $T^o\in\mathcal{PAC}^o$), мы можем применить теорему 4.3. Так что для каждого $g\in\mathbf{R}_0$ средние $A_{n,T^o}g$ сходятся почти всюду на $(\Omega,\mathcal{F},\mu))$ к некоторому конечному пределу. Предельная функция $g^\infty_{T^o}=\lim\limits_{n\to\infty}A_{n,T^o}g$ является T^o-инвариантной и обращается в нуль на $\widetilde{\mathcal{D}}(T^o)$, при этом $g^\infty_{T^o}=\mathbb{E}^{\widetilde{\mathcal{A}}^o}_\mu g$ на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$. Здесь $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$ — строго консервативная часть оператора T^o и $\widetilde{\mathcal{A}}^o=\mathcal{A}(T^o)\cap\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)=\{A\in\mathcal{A}(T^o)\colon \mu(A\cap\widetilde{\mathcal{D}}(T^o))=0\}$ — сужение σ-алгебры $\mathcal{A}(T^o)$ на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$.

Условное ожидание $\Pi^o = \mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}^o}$ определяет проекцию Π^o, так что $\Pi^o g = 0$ на $\widetilde{\mathcal{D}}(T^o)$ и $\Pi^o g = \mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}^o} g$ на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$.

Так как T^o строго консервативен на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$, то σ-подалгебра $\widetilde{\mathcal{A}}^o$ имеет вид $\widetilde{\mathcal{A}}^o = \{A \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}(T^o)\colon T^o\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\}$, а также $\widetilde{\mathcal{A}}^o = \{A \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}(T^o)\colon T^{oo}\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\}$.

Теперь сравним множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T) = \{f \in \mathbf{E}\colon Tf = f\}$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*) = \{h \in \mathbf{E}^*\colon T^*h = h\}$, определенные в (4.10). Очевидно, $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*)$ отождествляется с $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$. Мы покажем, что $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ разделяет точки множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$.

Так как $\mathbf{E}^1 \subseteq \mathbf{R}_0$, каждая T^o-инвариантная функция $g \in \mathbf{E}^1$ обращается в нуль на $\widetilde{\mathcal{D}}(T^o)$ и $\mathbb{E}_\mu^{\widetilde{\mathcal{A}}^o} g = g$, т. е. $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) = \{g \in \mathbf{E}^1\colon T^o g = g\} = \{g \in \mathbf{E}^1\colon \Pi^o g = g\} = \mathbf{E}^1(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T^o), \mu)$. Так как T^o строго консервативен на $\widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$, получаем, что $T^o\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A \Longleftrightarrow T^{oo}\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A$ для $A \subseteq \widetilde{\mathcal{C}}(T^o)$, откуда $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) = \{g \in \mathbf{E}^1\colon T^{oo}g = g\}$.

С другой стороны, $Tf = f$ для $f \in \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$ означает, что

$$\int\limits_\Omega f\, g\, d\mu = \int\limits_\Omega Tf\, g\, d\mu = \int\limits_\Omega f\, T^o g\, d\mu = \int\limits_\Omega T^{oo} f\, g\, d\mu$$

для всех $g \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, т. е. $T^{oo}f = f$. Таким образом, $(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T), \mu) \subseteq \mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ и $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) \subseteq (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T^o), \mu)$. Так как $(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T), \mu)$ разделяет точки $(\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\Omega, \widetilde{\mathcal{A}}(T^o), \mu)$, то множество $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ разделяет точки множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$, которое, как было указано выше, отождествляется с $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^*}(T^*)$. Применяя критерий Сайна (теорема 4.8), завершаем доказательство. $\square$

Пример 4.1. В следующих примерах $\mathbf{E}$ является минимальным и вполне симметричным. Каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ удовлетворяет условию (c), и следовательно, условиям (a) и (b), поскольку $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $T|_{\mathbf{E}}$ — сжатие в $\mathbf{E}$.

- Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{L}_p$, $1 < p < \infty$. Тогда каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.9, и потому T удовлетворяет $(\mathcal{MET})$, т. е. $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \{f \in \mathbf{E}\colon \{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty$ сходится по норме в $\mathbf{E}\} = \mathbf{E}$.
- Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$. Тогда в $\mathbf{E}$ выполняется условие (A), но $\mathbf{E}^1 = \mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{E}^1 \ni \mathbf{1}_\Omega$ тогда и только тогда, когда $\mu(\Omega) < \infty$. Таким образом, $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$, если $\mu(\Omega) < \infty$, но $(\mathcal{MET})$ может быть не верна, если $\mu(\Omega) = \infty$.

  Действительно, пусть $\mu(\Omega) = \infty$, τ — обратимое эргодическое консервативное сохраняющее меру преобразование на Ω и $T = T_\tau$. Для каждой функции $0 < f \in \mathbf{L}_1 \subset \mathbf{R}_0$ имеем: $A_{n,T}f \overset{\text{(п.в.)}}{\longrightarrow} f(\infty) = 0$ и $\|A_{n,T}f\| \to c > 0$, где $c = \|f\|_{\mathbf{L}_1}$. Таким образом, $A_{n,T}f$ не сходится по норме. При этом $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T) = \{0\}$, в то время как $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o) = \mathbb{R}\mathbf{1}_\Omega$. Множество $\mathbf{F}^{\mathbf{E}}(T)$ не разделяет точки множества $\mathbf{F}^{\mathbf{E}^1}(T^o)$.
- Пусть $\mathbf{E} = \mathbf{R}_0 = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)^0$ — минимальная часть $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ и $\mu(\Omega) = \infty$. Каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.9, так что $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$. Напомним, что $A_{n,T}f$ сходится почти всюду, стохастически и даже по мере для каждой функции $f \in \mathbf{R}_0$, см. пункт 4.2.1.

Возвращаясь к общим симметричным банаховым пространствам, отметим еще раз следующее.

- Если $\mathbf{E}$ — вполне симметричное пространство, то из условия $T \in \mathcal{PAC}$ вытекает, что $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})} \leqslant 1$. Следовательно, пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (c), а потому и условиям (a) и (b).
- Если пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ сепарабельно, то пространство $\mathbf{E}$ удовлетворяет условию (A) тогда и только тогда, когда оно сепарабельно (см. теорему 1.7). Однако статистическая эргодическая теорема может иметь место и на несепарабельных пространствах с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, например, если $\mathbf{E} = \mathbf{L}_p(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, $1 < p < \infty$.
- В случае $\mu(\Omega) < \infty$ свойство (A) означает, что $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$ является минимальным и $\mathbf{E} \neq \mathbf{L}_\infty$. Каждый оператор $T \in \mathcal{PAC}$ является строго консервативным и

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(T^o) = \{A \in \mathcal{F}_\mu\colon T \cdot \mathbf{1}_A = T^o \cdot \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A\ (mod\, \mu)\}.$$

4.3.3. Описание множества $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$. В данном разделе мы будем считать, что $\mu(\Omega) < \infty$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеет вид $T = T_\tau$, где $\tau \in \mathcal{T}$ — обратимое сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Для каждого симметричного банахова пространства $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ из этих предположений следует, что $T\mathbf{E} \subseteq \mathbf{E}$ и $\|T\|_{\mathbf{B}(\mathbf{E})} = 1$, даже если $\mathbf{E}$ не является вполне симметричным. Таким образом, в $\mathbf{E}$ выполнены условия (a), (b) и (c).

Так как $\mu(\Omega) < \infty$, то мы имеем $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$ и $\mathbf{1}_\Omega \in \mathbf{E}^1$. Если, кроме того, $\mathbf{E} \neq \mathbf{L}_\infty$, то $\varphi_{\mathbf{E}}(0+) = 0$ и минимальная часть $\mathbf{E}^0 = cl_{\mathbf{E}}(\mathbf{L}_\infty)$ имеет свойство (A). Таким образом, теорема 4.9 показывает, что $\mathbf{E}^0 \subseteq \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$.

Нас интересует случай, когда $\mathbf{E}^0 \subset \mathbf{E}$, т. е. когда $\mathbf{E}$ — не минимально.

Теорема 4.10. *Пусть $\mu(\Omega) < \infty$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеет вид $T = T_\tau$, где τ — обратимое сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда*:

1. *Если τ — апериодическое, то для каждой функции $f \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^0$ существует такая функция f_1, что f и f_1 равноизмеримы, но $A_{n,T} f_1$ не сходится по норме в $\mathbf{E}$. Минимальная часть $\mathbf{E}^0$ является наибольшим симметричным подпространством $\mathbf{E}$, на котором T удовлетворяет $\mathcal{MET}$.*
2. *$\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} = \mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда τ — периодическое.*

Очевидно, что часть 1 вытекает из части 2, так как последовательность операторов $A_{n,T}$, $n = 1, 2, \dots$ сходится в $\mathbf{B}(\mathbf{E})$, если τ является периодическим.

Часть 1 — это основная часть теоремы. Она была опубликована впервые в [4], а с подробными доказательствами — в книгах [3, 5]. Хотя этот результат был доказан только для случая, когда пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ является пространством Лебега, он может быть расширен на класс общих пространств с мерой с помощью наших теорем 1.1 и 1.2.

Следующий результат дополняет теорему 4.10 и уточняет структуру подпространства $\mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$.

Теорема 4.11. *Пусть $\mu(\Omega) < \infty$ и $T \in \mathcal{PAC}$ имеет вид $T = T_\tau$, где τ — обратимое сохраняющее меру преобразование на $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$. Тогда*:

1. *Пусть τ — апериодическое, а σ-алгебра T-инвариантных множеств $\mathcal{A}(T) = \{A \in \mathcal{F}_\mu\colon \mu(A \triangle \tau(A)) = 0\}$ не имеет атомов. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^0$ существует функция $f_1 \in \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ такая, что функции f_1 и f равноизмеримы.*
2. *Пусть τ — эргодическое, $g \in \mathbf{E}$ и $\rho_{\mathbf{E}}(g, \mathbf{E}^0) := \inf\limits_{g_0 \in \mathbf{E}^0} \|g - g_0\|_{\mathbf{E}}$. Тогда $f \in \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}} \iff \lim\limits_{nto\infty} \rho_{\mathbf{E}}(A_{n,T} f, \mathbf{E}^0) = 0$.*
3. *Пусть τ — эргодическое и $\mathbf{E} \in (\mathcal{WHLP})$. Тогда для каждой функции $f \in \mathbf{E} \setminus \mathbf{E}^0$ существует функция $f_1 \in \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ такая, что функции f_1 и f равноизмеримы.*

Доказательство можно найти в [3, 5], а также в [121]. Напомним, что слабое свойство Харди—Литтлвуда $(\mathcal{WHLP})$ было определено соотношением (2.10) в пункте 2.3.2. Оно слабее свойства Харди—Литтлвуда $(\mathcal{HLP})$, поэтому утверждение 3 в теореме 4.11 может быть применено ко всем не минимальным пространствам $\mathbf{E}$ с $p_{\mathbf{E}} < 1$.

Например, каждое пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ такое, что $\mathbf{L}_\Phi \subset \mathbf{L}_1$, имеет свойство $(\mathcal{WHLP})$, даже если $p_{\mathbf{L}_\Phi} = 1$. В то же время, для пространств Марцинкевича $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{WHLP})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}_V \in (\mathcal{HLP})$.

Пусть теперь $\mathbf{M}_V$ — пространство Марцинкевича с $p_{\mathbf{M}_V} = 1$ (например, каждое пространство Зигмунда—Марцинкевича $\mathbf{M}_{V_r}$, $r \geqslant 1$, является таким). Тогда $\mathbf{M}_V$ не имеет свойства $(\mathcal{WHLP})$ и, следовательно, существует функция $f \in \mathbf{M}_V$, для которой, с учетом (2.10),

$$\lim_{n \to \infty} \rho_{\mathbf{E}}(A_{n,T} f, \mathbf{E}^0) = \lim_{t \to \infty} \frac{\|D_t \xi_{f,\mu}\|_{\mathbf{E}(I, \mathcal{B}_m, m)}}{t} = c > 0,$$

где $(I, \mathcal{B}_m, m)$ — стандартное симметричное банахово пространство пространства $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$.

Таким образом, мы имеем, в отличии от условия 3, в предположении, что τ — эргодическое: $f \notin \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ и $f_1 \notin \mathbf{E}^T_{\mathcal{MET}}$ для всех f_1 таких, что функции f_1 и f равноизмеримы.

Здесь $\mathbf{M}_V$ не имеет свойства $(\mathcal{WHLP})$, и часть 3 предыдущей теоремы не верна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Браверман М. Ш., Меклер А. А.* О свойстве Харди—Литтлвуда для симметричных пространств// Сиб. мат. ж. — 1977. — *18*, № 3. — С. 522–540.
2. *Векслер А. С.* Эргодическая теорема в симметричных пространствах// Сиб. мат. ж. — 1985. — *26*, № 4. — С. 189–191.
3. *Векслер А. С.* Статистические эргодические теоремы в симметричных пространствах. — Ташкент: Lambert Academic Publishing, 2018.
4. *Векслер А. С., Федоров А. Л.* Статистическая эргодическая теорема в несепарабельных симметричных пространствах функций// Сиб. мат. ж. — 1989. — *29*, № 3. — С. 183–185.
5. *Векслер А. С., Федоров А. Л.* Симметричные пространства и статистические эргодические теоремы для автоморфизмов и потоков. — Ташкент: ФАН, 2016.
6. *Винокуров В. Г., Рубштейн Б. А., Федоров А. Л.* Пространство Лебега и его измеримые разбиения. — Ташкент: ТашГУ, 1986.
7. *Лозановский Г. Я.* О банаховых структурах Кальдерона// Докл. АН СССР. — 1967. — *172*, № 5. — С. 1018–1020.
8. *Меклер А. А.* Об усредненной мажоризации функций с помощью перестановок// Тр. ЛИАП. — 1974. — *84*.
9. *Меклер А. А.* Промежуточные пространства и бистохастические проекторы// Мат. исслед. — 1975. — *10*, № 1. — С. 270–275.
10. *Меклер А. А.* Усредняющие операторы над σ-подалгебрами на идеалах в $L_1(\mu)$// Дисс. к.ф.-м.н. — Л., 1977.
11. *Митягин Б. С.* Интерполяционная теорема для модулярных пространств// Мат. сб. — 1965. — *66*. — С. 473–482.
12. *Муратов М. А., Пашкова Ю. С.* Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2006. — № 2. — С. 47–59.
13. *Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2003. — *17*, № 2. — С. 36–48.
14. *Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А.* Доминантная эргодическая теорема в пространствах Лоренца// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2009. — *22*, № 1. — С. 86–92.
15. *Муратов М. А, Рубштейн Б. А., Векслер А. С.* Сходимость с регулятором в эргодических теоремах// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2011. — *24*, № 1. — С. 23–34.
16. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры// Мат. сб. — 1949. — *25*, № 1. — С. 107–150.
17. *Рохлин В. А.* Метрическая классификация измеримых функций// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*. — С. 169–174.
18. *Руссу Г. И.* Симметричные пространства функций, не обладающие свойством мажорантности// Мат. исслед. — 1969. — *4*. — С. 82–93.
19. *Семенов Е. М.* Об одной шкале пространств с интерполяционным свойством// Докл. АН СССР. — 1963. — *148*, № 5. — С. 1038–1041.
20. *Семенов Е. М.* Теоремы вложения для банаховых пространств измеримых функций// Докл. АН СССР. — 1964. — *156*, № 6. — С. 1292–1295.
21. *Aaronson J.* An introduction to infinite ergodic theory. — Providence: AMS, 1997.
22. *Agora E., Antezana J., Carro M. J., Soria J.* Lorentz–Shmogaki an Boyd theorems for weighted Lorentz spaces// J. London Math. Soc. — 2014. — *89*. — C. 321–336.
23. *Aoki T.* Locally bounded linear topological spaces// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1947. — *18*. — C. 588–594.
24. *Astashkin S. V.* On the normability of Marcinkiewicz classes// Math. Notes. — 2007. — *81*. — C. 429–431.
25. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. — Boston, etc.: Academic Press, 1988.
26. *Birkhof G. D.* Proof of the ergodic theorem// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1931. — *17*. — C. 656–660.
27. *Boyd D. V.* Indices of function spaces and their relationship to interpolation// Can. J. Math. — 1969. — *21*. — C. 1245–1254.
28. *Braverman M., Rubshtein B-Z., Veksler A.* Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces// Stud. Math. — 1998. — *128*. — C. 145–157.
29. *Calderon A. P.* Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkewicz// Stud. Math. — 1966. — *26*. — C. 273–299.
30. *Calderon A. P., Zygmund A.* On the existence of certain singular integrals// Acta Math. — 1952. — *88*. — C. 85–139.
31. *Carro M. J., Soria J.* Weighted Lorentz spaces and Hardy operator// J. Funct. Anal. — 1993. — *112*. — C. 480–494.

32. *Cerda J., Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz–Lorentz spaces// Positivity. — 1998. — *2*. — C. 311–337.
33. *Chilin V. I., Krygin A. V., Sukochev F. A.* Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators// Integral Equ. Oper. Theory. — 1992. — *15*. — C. 186–226.
34. *Chilin V., Litvinov S.* Almost uniform and strong convergence in ergodic theorems for symmetric spaces// Acta Math. Hungar. — 2019. — *157*. — C. 229–253.
35. *Cwicel M., Kaminska A., Maligranda L., Pick L.* Are generalized Lorentz “spaces” really spaces?// Proc. Am. Math. Soc. — 2003. — *132*. — C. 3615–3625.
36. *Dodds P. G., De Pagter B., Semenov E. M., Sukochev F. A.* Symmetric functionals and singular traces// Positivity. — 1998. — *2*. — C. 47–75.
37. *Dodds P. G., Sukochev F. A., Schlichtermann G.* Weak compactness criteria in symmetric spaces of measurable operators// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2001. — *131*. — C. 363–384.
38. *Dunford N., Schwartz J.* Linear Operators. Part 1. — New York: Interscience, 1958.
39. *Edgar G. A., Sucheston L.* Stopping Times and Directed Processes. — Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
40. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings. — Berlin: Springer, 2004.
41. *Florenza A., Krbec M.* Indices of Orlicz spaces and some applications// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1997. — *38*. — C. 433–451.
42. *Fremlin D. H.* Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation. — Colchester: Torres Fremlin, 2003.
43. *Grabarnik G. Ya., Rubshtein B.-Z. A.* On the Marcinkiewicz classes. — Preprint, 2020.
44. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* A maximal theorem with function-theoretic application// Acta Math. — 1930. — *54*. — C. 81–116.
45. *Harjulehto P., Hästö P.* Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces. — Cham: Springer, 2019.
46. *Hopf E.* On the ergodic theorem for positive linear operators// J. Reine Angew. Math. — 1960. — *295*. — C. 101–106.
47. *Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of some Calderon–Lozanovskii and Orlicz–Lorentz spaces// Houston J. Math. — 1996. — *22*. — C. 639–663.
48. *Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* Geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces// Can. Math. Bull. — 1997. — *40*. — C. 316–329.
49. *Hudzik H., Kaminska A., Mastylo M.* On the dual of Orlicz–Lorentz spaces// Proc. Am. Math. Soc. — 2003. — *130*. — C. 1645–1654.
50. *Hunt R.* On $L(p,q)$-spaces// L'Eins. Math. — 1966. — *12*. — C. 249–276.
51. *Kakutani Sh.* Iterations of linear operator in complex Banach spaces// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1938. — *14*. — C. 295–300.
52. *Kalton N. J.* Convexity, type and the three space problem// Stud. Math. — 1980. — *69*. — C. 247–287.
53. *Kalton N. J.* Linear operators on L_p, $0 < p < 1$// Trans. Am. Math. Soc. — 1980. — *259*. — C. 319–355.
54. *Kalton N. J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices// Glasgoo Math. J. — 1984. — *25*. — C. 141–152.
55. *Kalton N. J.* Banach envelopes of non-locally convex spaces// Can. J. Math. — 1986. — *38*. — C. 65–86.
56. *Kalton N. J.* Quasi-Banach spaces// В сб.: «Handbook of the Geometry of Banach spaces». — Amsterdam: North-Holland, 2003. — C. 1099–1106.
57. *Kalton N. J., Kaminska A.* Type and order convexity of Marcinkiewicz and Lorentz spaces and applications// Glasgow Math. J. — 2005. — *47*. — C. 123–137.
58. *Kalton N. J., Sedaev A., Sukochev F. A.* Fully symmetric functionals on a Marcinkiewicz space and Dixmier traces// Adv. Math. — 2011. — *226*. — C. 3540–3549.
59. *Kalton N. J., Sukochev F. A.* Rearrangement-invariant functionals with application to traces on symmetrically normed ideals// Can. Math. Bull. — 2008. — *51*. — C. 67–80.
60. *Kalton N. J., Sukochev F. A.* Symmetric norms and spaces of operators// J. Reine Angew. Math. — 2008. — *621*. — C. 81–121.
61. *Kalton N. J., Sukochev F. A., Zanin D.* Orbits in symmetric spaces. II// Stud. Math. — 2010. — *197*. — C. 257–274.
62. *Kaminska A.* Extreme points in Orlicz–Lorentz spaces// Arch. Math. — 1990. — *55*. — C. 173–180.
63. *Kaminska A.* Some remarks on Orlicz–Lorentz spaces// Math. Nachr. — 1990. — *147*. — C. 29–38.
64. *Kaminska A.* Uniform convexity of generalized Lorentz spaces// Arch. Math. — 1991. — *56*. — C. 181–188.
65. *Kaminska A., Han Ju Lee.* M-ideal property in Marcinkiewicz spaces// Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math. — 2004. — *44*, № 1. — C. 123–144.

66. *Kaminska A., Lin P. K., Sun H.* Uniformly normal structure of Orlicz–Lorentz spaces// В сб.: «Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability». Proc. conf. Univ. Missouri, Columbia, USA, May 29–June 3, 1994. — New York: Marcel Dekker, 1996. — С. 229–238.
67. *Kaminska A., Maligranda L.* Order convexity and concavity of Lorentz spaces $\Lambda_{p.w}, 0 < p < \infty$// Stud. Math. — 2004. — *160*, № 3. — С. 267–287.
68. *Kaminska A., Maligranda L., Persson L. E.* Indices, covexity and concavity of Calderon–Lozanovskii spaces// Math. Scand. — 2003. — *92*. — С. 141–160.
69. *Kaminska A., Zyluk M.* Local geometric properties in quasi-normed Orlicz spaces// Arxiv. — 2019. — 1911.10256v1 [Math.FA].
70. *Kantorovich L. V., Akilov G. V.* Functional Analysis. — Oxford, etc.: Pergamon Press, 1982.
71. *Koshi Sh., Shimogaki T.* On quasi-modular spaces// Stud. Math. — 1961. — *21*. — С. 15–36.
72. *Krasnoselskii M. A., Rutitzkii Ya. B.* Convex Functions and Orlicz Spaces. — Groningen–The Netherlands: P. Noordhoff, 1961.
73. *Krbec M., Lang J.* Embeddings between weighted Orlicz–Lorentz spaces// Georg. Math. J. — 1997. — *4*. — С. 117–128.
74. *Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M.* Interpolation of Linear Operators. — Providence: AMS, 1982.
75. *Krengel U.* Ergodic Theorems. — Berlin: De Gruyter, 1985.
76. *Lin P. K., Sun H.* Some geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces// Arch. Math. — 1995. — *64*. — С. 500–511.
77. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1977.
78. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces II. Function Spaces. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1979.
79. *Lord S., Sedaev A., Sukochev F.* Dixmier traces as singular symmetric functionals and applications to measurable operators// J. Funct. Anal. — 2005. — *224*. — С. 72–206.
80. *Lord S., Sukochev F., Zanin Z.* Singular Traces. Theory and Applications. — Berlin: de Gruyter, 2013.
81. *Lorentz G. G.* Some new functional spaces// Ann. Math. — 1950. — *51*. — С. 37–55.
82. *Lorentz G. G.* On the theory of spaces $\mathbf{\Lambda}$// Pacific J. Math. — 1951. — *1*. — С. 411–429.
83. *Lorentz G. G.* Majorants in spaces of integrable function// Amer. J. Math. — 1955. — *77*. — С. 484–492.
84. *Lorentz G. G., Shimogaki T.* Majorants for interpolation theorems// Publ. Ramanujan Inst. — 1969. — *1*. — С. 115–122.
85. *Lozanovskii G. Ya.* On some Banach lattices II// Sib. Math. J. — 1971. — *12*. — С. 397–401.
86. *Luxemburg W. A. J.* Rearrangement invariant Banach function spaces// Queen's Papers in Pure Appl. Math. — 1967. — *10*. — С. 83–144.
87. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. I. — Amsterdam–London: North-Holland, 1971.
88. *Matuszewska W., Orlicz W.* On certain properties of ϕ-functions// Bull. Acad. Polon. Sci. — 1960. — *8*. — С. 439–443.
89. *Matuszewska W., Orlicz W.* On some classes of functions with regarg to their order of growth// Stud. Math. — 1965. — *26*. — С. 11–24.
90. *Mekler A. A.* On rearrangement invariant and majorant hulls of averages of rearrangement invariant and majorant ideals// J. Math. Anal. Appl. — 1992. — *171*. — С. 555–566.
91. *Mekler A. A.* On averaging of rearrangement ideals of the space $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ by non-atomic σ-subalgebras of Σ// Positivity. — 2010. — *14*. — С. 191–214.
92. *Mekler A. A.* Conditianal expectations and interpolation of linear operators on ordered ideals between $L_1(0,1)$ and $L_1(0,1)$// ArXiv. — 2018. — 1803.09796v1.
93. *Montgomery-Smith S. J.* Orlicz–Lorentz spaces// Proc. of the Orlicz Mem. Conf., Oxford, USA, March 21–23, 1991. — Oxford: Univ. Mississippi, 1991. — Exp. № 6. — С. 1–11.
94. *Montgomery-Smith S. J.* Comparison of Orlicz–Lorentz spaces// Stud. Math. — 1992. — *103*. — С. 161–189.
95. *Montgomery-Smith S. J.* Boyd indices of Orlicz–Lorentz spaces// Proc. Second Conf. Function Spaces, Edwardsville, USA, May 24–28, 1994. — New York: Marcel Dekker, 1995. — С. 321–334.
96. *Montgomery-Smith S. J.* The Hardy operator and Boyd indices// Proc. Conf. «Interaction between functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability», Columbia, USA, May 29–June 3, 1994. — New York: Marcel Dekker, 1996. — С. 359–364.
97. *Mori T., Amemiya I., Nakano H.* On the reflexivity of semi-continuous norms// Proc. Jap. Acad. — 1955. — *31*. — С. 684–685.
98. *Muratov M. A., Pashkova J. S., Rubshtein B.-Z. A.* Order convergence ergodic theorems in rearrangement invariant spaces// Oper. Theory Adv. Appl. — 2013. — *227*. — С. 123–142.

99. *Muratov M. A., Rubshtein B.-Z. A.* Main embedding theorems for symmetric spaces of measurable functions// Proc. 8th Int. Conf. «Topological Algebras and Their Applications», Playa de Villas de Mar Beach, Dominican Republic, May 26–30, 2014. — Berlin: De Gruyter, 2018. — С. 176–192.
100. *Muratov M. A., Rubshtein B.-Z. A.* Equimeasurable symmetric spaces of measurable functions// ArXiv. — 2020. — 2006.15702v1 [math.FA].
101. *Musielak J.* Orlicz Spaces and Modular Spaces. — Berlin, etc.: Springer, 1983.
102. *Nakano H.* Modular Semiordered Linear Spaces. — Tokyo: Maruzen, 1950.
103. *Orlicz W.* Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B// Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A. — 1932. — № 8-9. — С. 207–220.
104. *Orlicz W.* Über Räume (L^M)// Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A. — 1936. — *1936.* — С. 93–107.
105. *Ornstein D. S.* A remark on the Birkhoff ergodic theorem// Illinois J. Math. — 1971. — *15.* — С. 77–79.
106. *Rao M. M.* Theory of Orlicz Spaces. — New York: M. Dekker, 1991.
107. *Rao M. M., Ren Z. D.* Applications of Orlicz Spaces. — New York: M. Dekker, 2002.
108. *Riesz F.* Some mean ergodic theorems// J. London Math. Soc. — 1938. — *13.* — С. 274–278.
109. *Rolewicz S.* On a certain class of metric linear spaces// Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III. — 1957. — *5.* — С. 471–473.
110. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces. — Warsaw: PWM, 1972.
111. *Rubshtein B.-Z. A., Grabarnik G. Ya., Muratov M. A., Pashkova Yu. S.* Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces. — Cham: Springer, 2016.
112. *Ryff J. V.* Orbits of L^1-functions under doubly stochastic operators// Trans. AMS. — 1965. — *117.* — С. 92–100.
113. *Ryff J. V.* Measure preserving transformation and rearrangements// J. Math. Anal. Appl. — 1970. — *31*, № 2. — С. 449–458.
114. *Sawyer E. T.* Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces// Stud. Math. — 1990. — *96.* — С. 145–158.
115. *Shimogaki T.* Hardy–Littlewood majorants in function spaces// J. Math. Soc. Japan. — 1965. — *17.* — С. 365–375.
116. *Shimogaki T.* On the complete continuity of operators in an interpolation theorem// J. Funct. Anal. — 1968. — *2.* — С. 31–51.
117. *Shimogaki T.* A note on norms of compression operators// Proc. Jap. Acad. — 1970. — *46.* — С. 239–249.
118. *Sine R. C.* A mean ergodic theorem// Proc. Am. Math. Soc. — 1970. — *24.* — С. 438–439.
119. *Soria J.* Lorentz spaces of weak type// Quart. J. Math. Oxford. — 1998. — *46.* — С. 93–103.
120. *Stein E. M., Weiss G.* Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971.
121. *Sukochev F. A., Veksler A. S.* The mean ergodic theorem in symmetric spaces// Stud. Math. — 2019. — *245.* — С. 229–253.
122. *Sukochev F. A., Zanin D.* Orbits in symmetric spaces// J. Funct. Anal. — 2009. — *257.* — С. 194–218.
123. *Sukochev F. A., Zanin D.* Traces on symmetrically normed operator ideals// J. Reine Ang. Math. — 2013. — *678.* — С. 163–299.
124. *Yosida K.* Mean ergodic theorems in Banach spaces// Proc. Imp. Acad. Tokyo. — 1938. — *14.* — С. 292–294.
125. *Yosida K., Kakutani Sh.* Operator-theoretical treatment of Markoff's process and mean ergodic theorems// Anal. Math. — 1941. — *42.* — С. 188–228.
126. *Zaanen A. C.* Integration. — Amsterdam: North-Holland, 1967.
127. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces II. — Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, 1983.
128. *Zanin D.* Orbits and Khinchine-type inequalities in symmetric spaces// Ph.D. Thesis. — Flinders Univ., 2011.
129. *Zippinn M.* Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant spaces// J. Funct. Anal. — 1971. — *7.* — С. 267–284.

М. А. Муратов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: mamuratov@gmail.com

Б. А. Рубштейн
Университет им. Д. Бен-Гуриона, Беэр-Шева, Израиль
E-mail: benzion@math.bgu.ac.il

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-221-271 UDC 519.55, 519.56

Symmetric Spaces of Measurable Functions: Old and New Advances

© 2020 **M. A. Muratov, B.-Z. A. Rubshtein**

Abstract. The article is an extensive review in the theory of symmetric spaces of measurable functions. It contains a number of new (recent) and old (known) results in this field. For the most of the results, we give their proofs or exact references, where they can be found.

The symmetric spaces under consideration are Banach (or quasi-Banach) latices of measurable functions equipped with symmetric (rearrangement invariant) norm (or quasinorm).

We consider symmetric spaces $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu) \subset \mathbf{L}_0(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ on general measure spaces $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, where the measures μ are assumed to be finite or infinite σ-finite and nonatomic, while there are no assumptions that $(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ is separable or Lebesgue space.

In the first section of the review, we describe main classes and basic properties of symmetric spaces, consider minimal, maximal, and associate spaces, the properties (A), (B), and (C), and Fatou's property.

The list of specific symmetric spaces we use includes Orlicz $\mathbf{L}_\Phi(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Lorentz $\mathbf{\Lambda}_W(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, Marcinkiewicz $\mathbf{M}_V(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$, and Orlicz–Lorentz $\mathbf{L}_{W,\Phi}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ spaces, and, in particular, the spaces $\mathbf{L}_p(w)$, $\mathbf{M}_p(w)$, $\mathbf{L}_{p,q}$, and $\mathbf{L}_\infty(U)$.

In the second section, we deal with the dilation (Boyd) indexes of symmetric spaces and some applications of classical Hardy–Littlewood operator H. One of the main problems here is: when H acts as a bounded operator on a given symmetric space $\mathbf{E}(\Omega, \mathcal{F}_\mu, \mu)$? A spacial attention is paid to symmetric spaces, which have Hardy–Littlewood property ($\mathcal{HLP}$) or weak Hardy–Littlewood property ($\mathcal{WHLP}$).

In the third section, we consider some interpolation theorems for the pair of spaces ($\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_\infty$) including the classical Calderon–Mityagin theorem.

As an application of general theory, we prove in the last section of review Ergodic Theorems for Cesaro averages of positive contractions in symmetric spaces. Studying various types of convergence, we are interested in Dominant Ergodic Theorem ($\mathcal{DET}$), Individual (Pointwise) Ergodic Theorem ($\mathcal{IET}$), Order Ergodic Theorem ($\mathcal{OET}$), and also Mean (Statistical) Ergodic Theorem ($\mathcal{MET}$).

REFERENCES

1. M. Sh. Braverman and A. A. Mekler, "O svoystve Khardi—Littlvuda dlya simmetrichnykh prostranstv" [On the Hardy–Littlewood property for symmetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1977, **18**, No. 3, 522–540 (in Russian).
2. A. S. Veksler, "Ergodicheskaya teorema v simmetrichnykh prostranstvakh" [Ergodic theorem in symmetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1985, **26**, No. 4, 189–191 (in Russian).
3. A. S. Veksler, *Statisticheskie ergodicheskie teoremy v simmetrichnykh prostranstvakh* [Statistical Ergodic Theorems in Symmetric Spaces], Lambert Academic Publishing, Tashkent, 2018 (in Russian).
4. A. S. Veksler and A. L. Fedorov, "Statisticheskaya ergodicheskaya teorema v neseparabel'nykh simmetrichnykh prostranstvakh funktsiy" [Statistical ergodic theorem in nonseparable symmetric spaces of functions], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1989, **29**, No. 3, 183–185 (in Russian).
5. A. S. Veksler and A. L. Fedorov, *Simmetrichnye prostranstva i statisticheskie ergodicheskie teoremy dlya avtomorfizmov i potokov* [Symmetric Spaces and Statistical Ergodic Theorems for Automorphisms and Flows], FAN, Tashkent, 2016 (in Russian).
6. V. G. Vinokurov, B. A. Rubshteyn, and A. L. Fedorov, *Prostranstvo Lebega i ego izmerimye razbieniya* [Lebesgue Space and Its Measurable Partitions], TashGU, Tashkent, 1986 (in Russian).
7. G. Ya. Lozanovskiy, "O banakhovykh strukturakh Kal'derona" [On Calderon Banach structures], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1967, **172**, No. 5, 1018–1020 (in Russian).
8. A. A. Mekler, "Ob usrednennoy mazhorizatsii funktsiy s pomoshch'yu perestanovok" [On averaged majorization of functions by means of permutations], *Tr. LIAP* [Proc. LIAP], 1974, **84** (in Russian).

© Peoples' Friendship University of Russia, 2020

This work is licensed under a Creative Commons 4.0 International License https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/

9. A. A. Mekler, "Promezhutochnye prostranstva i bistokhasticheskie proektory" [Intermediate spaces and bistochastic projectors], *Mat. issled.* [Math. Research], 1975, **10**, No. 1, 270–275 (in Russian).
10. A. A. Mekler, *Usrednyayushchie operatory nad σ-podalgebrami na idealakh v $L_1(\mu)$* [Averaging operators over σ-subalgebras on ideals in $L_1(\mu)$], PhD Thesis, Leningrad, 1977 (in Russian).
11. B. S. Mityagin, "Interpolyatsionnaya teorema dlya modulyarnykh prostranstv" [Interpolational theorem for modular spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1965, **66**, 473–482 (in Russian).
12. M. A. Muratov and Yu. S. Pashkova, "Dominantnaya ergodicheskaya teorema v prostranstvakh Orlicha izmerimykh funktsiy na poluosi" [Dominant ergodic theorem in Orlicz spaces of measurable functions on a semiaxis], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2006, No. 2, 47–59 (in Russian).
13. M. A Muratov A, Yu. S. Pashkova, and B. A. Rubshteyn, "Dominantnaya ergodicheskaya teorema v simmetrichnykh prostranstvakh izmerimykh funktsiy dlya posledovatel'nosti absolyutnykh szhatiy" [Dominant ergodic theorem in symmetric spaces of measurable functions for a sequence of absolute contractions], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2003, **17**, No. 2, 36–48 (in Russian).
14. M. A Muratov A, Yu. S. Pashkova, and B. A. Rubshteyn, "Dominantnaya ergodicheskaya teorema v prostranstvakh Lorentsa" [Dominant ergodic theorem in Lorentz spaces], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2009, **22**, No. 1, 86–92 (in Russian).
15. M. A Muratov A, B. A. Rubshteyn, and A. S. Veksler, "Skhodimost' s regulyatorom v ergodicheskikh teoremakh" [Convergence with a regulator in ergodic theorems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2011, **24**, No. 1, 23–34 (in Russian).
16. V. A. Rokhlin, "Ob osnovnykh ponyatiyakh teorii mery" [On basic concepts in the measure theory], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1949, **25**, No. 1, 107–150 (in Russian).
17. V. A. Rokhlin, "Metricheskaya klassifikatsiya izmerimykh funktsiy" [Metric classification of measurable functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, 169–174 (in Russian).
18. G. I. Russu, "Simmetrichnye prostranstva funktsiy, ne obladayushchie svoystvom mazhorantnosti" [Symmetric spaces of functions without majorant property], *Mat. issled.* [Math. Research], 1969, **4**, 82–93 (in Russian).
19. E. M. Semenov, "Ob odnoy shkale prostranstv s interpolyatsionnym svoystvom" [On one scale of spaces with interpolation property], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **148**, No. 5, 1038–1041 (in Russian).
20. E. M. Semenov, "Teoremy vlozheniya dlya banakhovykh prostranstv izmerimykh funktsiy" [Embedding theorems for Banach spaces of measurable functions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **156**, No. 6, 1292–1295 (in Russian).
21. J. Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, AMS, Providence, 1997.
22. E. Agora, J. Antezana, M. J. Carro, and J. Soria, "Lorentz–Shmogaki an Boyd theorems for weighted Lorentz spaces," *J. London Math. Soc.*, 2014, **89**, 321–336.
23. T. Aoki, "Locally bounded linear topological spaces," *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1947, **18**, 588–594.
24. S. V. Astashkin, "On the normability of Marcinkiewicz classes," *Math. Notes*, 2007, **81**, 429–431.
25. C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Academic Press, Boston, etc., 1988.
26. G. D. Birkhof, "Proof of the ergodic theorem," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1931, **17**, 656–660.
27. D. V. Boyd, "Indices of function spaces and their relationship to interpolation," *Can. J. Math.*, 1969, **21**, 1245–1254.
28. M. Braverman and B-Z. Rubshtein, A. Veksler, "Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces," *Stud. Math.*, 1998, **128**, 145–157.
29. A. P. Calderon, "Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkewicz," *Stud. Math.*, 1966, **26**, 273–299.
30. A. P. Calderon and A. Zygmund, "On the existence of certain singular integrals," *Acta Math.*, 1952, **88**, 85–139.
31. M. J. Carro and J. Soria, "Weighted Lorentz spaces and Hardy operator," *J. Funct. Anal.*, 1993, **112**, 480–494.
32. J. Cerda, H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, "Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz–Lorentz spaces," *Positivity*, 1998, **2**, 311–337.
33. V. I. Chilin, A. V. Krygin, and F. A. Sukochev, "Extreme points of convex fully symmetric sets of measurable operators," *Integral Equ. Oper. Theory*, 1992, **15**, 186–226.
34. V. Chilin and S. Litvinov, "Almost uniform and strong convergence in ergodic theorems for symmetric spaces," *Acta Math. Hungar.*, 2019, **157**, 229–253.

35. M. Cwicel, A. Kaminska, L. Maligranda and L. Pick, “Are generalized Lorentz “spaces” really spaces?,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2003, **132**, 3615–3625.
36. P. G. Dodds, B. De Pagter, E. M. Semenov, and F. A. Sukochev, “Symmetric functionals and singular traces,” *Positivity*, 1998, **2**, 47–75.
37. P. G. Dodds, F. A. Sukochev, and G. Schlichtermann, “Weak compactness criteria in symmetric spaces of measurable operators,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 2001, **131**, 363–384.
38. N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators. Part 1*, Interscience, New York, 1958.
39. G. A. Edgar and L. Sucheston, *Stopping Times and Directed Processes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
40. D. E. Edmunds and W. D. Evans, *Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings*, Springer, Berlin, 2004.
41. A. Florenza and M. Krbec, “Indices of Orlicz spaces and some applications,” *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1997, **38**, 433–451.
42. D. H. Fremlin, *Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation*, Torres Fremlin, Colchester, 2003.
43. G. Ya. Grabarnik and B.-Z. Rubshtein, “On the Marcinkiewicz classes” [On the Marcinkiewicz classes], *Preprint*, 2020.
44. G. H. Hardy and J. E. Littlewood, “A maximal theorem with function-theoretic application,” *Acta Math.*, 1930, **54**, 81–116.
45. P. Harjulehto and P. Hästö, *Orlicz Spaces and Generalized Orlicz Spaces*, Springer, Cham, 2019.
46. E. Hopf, “On the ergodic theorem for positive linear operators,” *J. Reine Angew. Math.*, 1960, **295**, 101–106.
47. H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, “Geometric properties of some Calderon–Lozanovskii and Orlicz–Lorentz spaces,” *Houston J. Math.*, 1996, **22**, 639–663.
48. H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, “Geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces,” *Can. Math. Bull.*, 1997, **40**, 316–329.
49. H. Hudzik, A. Kaminska, and M. Mastylo, “On the dual of Orlicz–Lorentz spaces,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2003, **130**, 1645–1654.
50. R. Hunt, “On $L(p,q)$-spaces,” *L’Eins. Math.*, 1966, **12**, 249–276.
51. Sh. Kakutani, “Iterations of linear operator in complex Banach spaces,” *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1938, **14**, 295–300.
52. N. J. Kalton, “Convexity, type and the three space problem,” *Stud. Math.*, 1980, **69**, 247–287.
53. N. J. Kalton, “Linear operators on L_p, $0 < p < 1$,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1980, **259**, 319–355.
54. N. J. Kalton, “Convexity conditions for non-locally convex lattices,” *Glasgoo Math. J.*, 1984, **25**, 141–152.
55. N. J. Kalton, “Banach envelopes of non-locally convex spaces,” *Can. J. Math.*, 1986, **38**, 65–86.
56. N. J. Kalton, “Quasi-Banach spaces,” In: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 2003, pp. 1099–1106.
57. N. J. Kalton and A. Kaminska, “Type and order convexity of Marcinkiewicz and Lorentz spaces and applications,” *Glasgow Math. J.*, 2005, **47**, 123–137.
58. N. J. Kalton, A. Sedaev, and F. A. Sukochev, “Fully symmetric functionals on a Marcinkiewicz space and Dixmier traces,” *Adv. Math.*, 2011, **226**, 3540–3549.
59. N. J. Kalton and F. A. Sukochev, “Rearrangement-invariant functionals with application to traces on symmetrically normed ideals,” *Can. Math. Bull.*, 2008, **51**, 67–80.
60. N. J. Kalton and F. A. Sukochev, “Symmetric norms and spaces of operators,” *J. Reine Angew. Math.*, 2008, **621**, 81–121.
61. N. J. Kalton, F. A. Sukochev, and D. Zanin, “Orbits in symmetric spaces. II,” *Stud. Math.*, 2010, **197**, 257–274.
62. A. Kaminska, “Extreme points in Orlicz–Lorentz spaces,” *Arch. Math.*, 1990, **55**, 173–180.
63. A. Kaminska, “Some remarks on Orlicz–Lorentz spaces,” *Math. Nachr.*, 1990, **147**, 29–38.
64. A. Kaminska, “Uniform convexity of generalized Lorentz spaces,” *Arch. Math.*, 1991, **56**, 181–188.
65. A. Kaminska and Han Ju Lee, “M-ideal property in Marcinkiewicz spaces,” *Ann. Soc. Math. Pol., Ser. I, Commentat. Math.*, 2004, **44**, No. 1, 123–144.
66. A. Kaminska, P. K. Lin, and H. Sun, “Uniformly normal structure of Orlicz–Lorentz spaces,” In: *Interaction between Functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability*, Proc. Conf. Univ. Missouri, Columbia, USA, May 29–June 3, 1994, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 229–238.
67. A. Kaminska and L. Maligranda, “Order convexity and concavity of Lorentz spaces $\Lambda_{p.w}, 0 < p < \infty$,” *Stud. Math.*, 2004, **160**, No. 3, 267–287.
68. A. Kaminska, L. Maligranda, and L. E. Persson, “Indices, covexity and concavity of Calderon–Lozanovskii spaces,” *Math. Scand.*, 2003, **92**, 141–160.

69. A. Kaminska and M. Zyluk, “Local geometric properties in quasi-normed Orlicz spaces,” *Arxiv*, 2019, 1911.10256v1 [Math.FA].
70. L. V. Kantorovich and G. V. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford, etc., 1982.
71. Sh. Koshi and T. Shimogaki, “On quasi-modular spaces,” *Stud. Math.*, 1961, **21**, 15–36.
72. M. A. Krasnoselskii and Ya. B. Rutitzkii, *Convex Functions and Orlicz Spaces*, P. Noordhoff, Groningen–The Netherlands, 1961.
73. M. Krbec and J. Lang, “Embeddings between weighted Orlicz–Lorentz spaces,” *Georg. Math. J.*, 1997, **4**, 117–128.
74. S. G. Krein, Yu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpolation of Linear Operators*, AMS, Providence, 1982.
75. U. Krengel, *Ergodic Theorems*, De Gruyter, Berlin, 1985.
76. P. K. Lin and H. Sun, “Some geometric properties of Orlicz–Lorentz spaces,” *Arch. Math.*, 1995, **64**, 500–511.
77. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
78. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1979.
79. S. Lord, A. Sedaev, and F. Sukochev, “Dixmier traces as singular symmetric functionals and applications to measurable operators,” *J. Funct. Anal.*, 2005, **224**, 72–206.
80. S. Lord, F. Sukochev, and Z. Zanin, *Singular Traces. Theory and Applications*, de Gruyter, Berlin, 2013.
81. G. G. Lorentz, “Some new functional spaces,” *Ann. Math.*, 1950, **51**, 37–55.
82. G. G. Lorentz, “On the theory of spaces $\mathbf{\Lambda}$,” *Pacific J. Math.*, 1951, **1**, 411–429.
83. G. G. Lorentz, “Majorants in spaces of integrable function,” *Amer. J. Math.*, 1955, **77**, 484–492.
84. G. G. Lorentz and T. Shimogaki, “Majorants for interpolation theorems,” *Publ. Ramanujan Inst.*, 1969, **1**, 115–122.
85. G. Ya. Lozanovskii, “On some Banach lattices II,” *Sib. Math. J.*, 1971, **12**, 397–401.
86. W. A. Luxemburg, “Rearrangement invariant Banach function spaces,” *Queen’s Papers in Pure Appl. Math.*, 1967, **10**, 83–144.
87. W. A. Luxemburg and A. C. Zaanen, *Riesz Spaces. Vol. I*, North-Holland, Amsterdam–London, 1971.
88. W. Matuszewska and W. Orlicz, “On certain properties of ϕ-functions,” *Bull. Acad. Polon. Sci.*, 1960, **8**, 439–443.
89. W. Matuszewska and W. Orlicz, “On some classes of functions with regarg to their order of growth,” *Stud. Math.*, 1965, **26**, 11–24.
90. A. A. Mekler, “On rearrangement invariant and majorant hulls of averages of rearrangement invariant and majorant ideals,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, **171**, 555–566.
91. A. A. Mekler, “On averaging of rearrangement ideals of the space $L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ by non-atomic σ-subalgebras of Σ,” *Positivity*, 2010, **14**, 191–214.
92. A. A. Mekler, “Conditianal expectations and interpolation of linear operators on ordered ideals between $L_1(0,1)$ and $L_1(0,1)$,” *ArXiv*, 26 Mar. 2018, 1803.09796v1.
93. S. J. Montgomery-Smith, “Orlicz–Lorentz spaces,” *Proc. of the Orlicz Mem. Conf., Oxford, USA, March 21–23, 1991.*, Univ. Mississippi, Oxford, 1991, Exp. No. 6, 1–11.
94. S. J. Montgomery-Smith, “Comparison of Orlicz–Lorentz spaces,” *Stud. Math.*, 1992, **103**, 161–189.
95. S. J. Montgomery-Smith, “Boyd indices of Orlicz–Lorentz spaces,” Proc. Second Conf. *Function Spaces*, Edwardsville, USA, May 24–28, 1994, Marcel Dekker, New York, 1995, pp. 321–334.
96. S. J. Montgomery-Smith, “The Hardy operator and Boyd indices,” Proc. Conf. *Interaction between functional Analysis, Harmonic Analysis, and Probability*, Columbia, USA, May 29–June 3, 1994, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 359–364.
97. T. Mori, I. Amemiya, and H. Nakano, “On the reflexivity of semi-continuous norms,” *Proc. Jap. Acad.*, 1955, **31**, 684–685.
98. M. A. Muratov, J. S. Pashkova, and B.-Z. Rubshtein, “Order convergence ergodic theorems in rearrangement invariant spaces,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2013, **227**, 123–142.
99. M. A. Muratov and B.-Z. Rubshtein, “Main embedding theorems for symmetric spaces of measurable functions,” Proc. 8th Int. Conf. *Topological Algebras and Their Applications*, Playa de Villas de Mar Beach, Dominican Republic, May 26–30, 2014, De Gruyter, Berlin, 2018, pp. 176–192.
100. M. A. Muratov and B.-Z. Rubshtein, “Equimeasurable symmetric spaces of measurable functions,” *ArXiv*, 2020, 2006.15702v1 [math.FA].
101. J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer, Berlin, etc., 1983.
102. H. Nakano, *Modular Semiordered Linear Spaces*, Maruzen, Tokyo, 1950.

103. W. Orlicz, “Über eine gewisse Klasse von Räumen von Typus B,” *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A*, 1932, No. 8-9, 207–220.
104. W. Orlicz, “Über Räume (L^M),” *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Ser. A*, 1936, **1936**, 93–107.
105. D. S. Ornstein, “A remark on the Birkhoff ergodic theorem,” *Illinois J. Math.*, 1971, **15**, 77–79.
106. M. M. Rao, *Theory of Orlicz Spaces*, M. Dekker, New York, 1991.
107. M. M. Rao and Z. D. Ren, *Applications of Orlicz Spaces*, M. Dekker, New York, 2002.
108. F. Riesz, “Some mean ergodic theorems,” *J. London Math. Soc.*, 1938, **13**, 274–278.
109. S. Rolewicz, “On a certain class of metric linear spaces,” *Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III*, 1957, **5**, 471–473.
110. S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, PWM, Warsaw, 1972.
111. B.-Z. Rubshtein, G. Ya. Grabarnik, M. A. Muratov, and Yu. S. Pashkova, *Foundations of Symmetric Spaces of Measurable Functions. Lorentz, Marcinkiewicz and Orlicz Spaces*, Springer, Cham, 2016.
112. J. V. Ryff, “Orbits of L^1-functions under doubly stochastic operators,” *Trans. AMS*, 1965, **117**, 92–100.
113. J. V. Ryff, “Measure preserving transformation and rearrangements,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1970, **31**, No. 2, 449–458.
114. E. T. Sawyer, “Boundedness of classical operators in classical Lorentz spaces,” *Stud. Math.*, 1990, **96**, 145–158.
115. T. Shimogaki, “Hardy–Littlewood majorants in function spaces,” *J. Math. Soc. Japan*, 1965, **17**, 365–375.
116. T. Shimogaki, “On the complete continuity of operators in an interpolation theorem,” *J. Funct. Anal.*, 1968, **2**, 31–51.
117. T. Shimogaki, “A note on norms of compression operators,” *Proc. Jap. Acad.*, 1970, **46**, 239–249.
118. R. C. Sine, “A mean ergodic theorem,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1970, **24**, 438–439.
119. J. Soria, “Lorentz spaces of weak type,” *Quart. J. Math. Oxford*, 1998, **46**, 93–103.
120. E. M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.
121. F. A. Sukochev and A. S. Veksler, “The mean ergodic theorem in symmetric spaces,” *Stud. Math.*, 2019, **245**, 229–253.
122. F. A. Sukochev and D. Zanin, “Orbits in symmetric spaces,” *J. Funct. Anal.*, 2009, **257**, 194–218.
123. F. A. Sukochev and D. Zanin, “Traces on symmetrically normed operator ideals,” *J. Reine Ang. Math.*, 2013, **678**, 163–299.
124. K. Yosida, “Mean ergodic theorems in Banach spaces,” *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 1938, **14**, 292–294.
125. K. Yosida and Sh. Kakutani, “Operator-theoretical treatment of Markoff’s process and mean ergodic theorems,” *Anal. Math.*, 1941, **42**, 188–228.
126. A. C. Zaanen, *Integration*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
127. A. C. Zaanen, *Riesz Spaces II*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1983.
128. D. Zanin, *Orbits and Khinchine-type Inequalities in Symmetric Spaces*, Ph.D. Thesis, Flinders Univ., 2011.
129. M. Zippinn, “Interpolation of operators of weak type between rearrangement invariant spaces,” *J. Funct. Anal.*, 1971, **7**, 267–284.

M. A. Muratov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: mamuratov@gmail.com

B.-Z. A. Rubshtein
Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel
E-mail: benzion@math.bgu.ac.il