Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 209–220

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-209-220 УДК 517.983.24, 517.984.4

ДИЛАТАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2020 г. **Ю. Л. КУДРЯШОВ**

Аннотация. В статье строятся различные дилатации линейных операторов. Рассматривается явное построение унитарной дилатации оператора сжатия. Затем с помощью понятия операторного узла линейного ограниченного оператора строится J-унитарная дилатация ограниченного оператора. Методом Б. С. Павлова строится самосопряженная дилатация ограниченного диссипативного оператора. Рассматривается спектральное и трансляционное представления самосопряженной дилатации плотно заданного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Используя понятие операторного узла для ограниченного оператора и преобразования Кэли, вводится понятие операторного узла для линейного оператора. С помощью этого понятия строится J-самосопряженная дилатация плотно заданного оператора, у которого есть регулярная точка.

Указаны условия изоморфизма посторонних дилатаций и их минимальности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В последнее время изучение неунитарных и несамосопряженных операторов происходит по трем направлениям: теория рассеяния, метод характеристических функций и метод дилатаций. Все эти направления тесно связаны между собой.

Построение унитарных и самосопряженных дилатаций операторов общего вида позволяет получить информацию об этих операторах и свести их изучение к классам операторов, которые достаточно хорошо изучены.

В данном обзоре нас будут интересовать явные построения различных дилатаций линейных операторов. При этом за строгими доказательствами сформулированных теорем мы будем отсылать к соответствующим статьям. Доказательство, связанное с построением J-самосопряженной дилатации с помощью операторного узла, будет дано в конце обзора, причем все рассмотренные ранее дилатации будут частным случаем последней или ей изоморфны.

Определение 1.1. В случае ограниченных операторов, оператор B, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *дилатацией* [14] оператора A, который действует в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} \subset H$, если

$$A^n h = PB^n h \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \text{ и } h \in \mathfrak{H}, \tag{1.1}$$

где P — оператор ортогонального проектирования в H на $\mathfrak{H}$. При этом условие (1.1) эквивалентно любому из следующих условий:

1) $(A^n h, g) = (B^n h, g)$ для всех $\{f, g\} \subset \mathfrak{H}$ и $n \in \mathbb{N}$;
2) $(A - \lambda I)^{-1} h = P(B - \lambda I)^{-1} h$ для всех $h \in \mathfrak{H}$ и $\lambda \in W(\lambda_0, \varepsilon) \subset \rho(A) \cap \rho(B)$, где $W(\lambda_0, \varepsilon)$ — ε-окрестность точки λ_0;
3) $R^n(A, \alpha) h = PR^n(B, \alpha) h$ для всех $h \in \mathfrak{H}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \rho(A) \cap \rho(B)$, где $R(T, \alpha) = (T - \alpha I)^{-1}$.

Последние два условия имеют смысл и в случае неограниченных операторов, и, таким образом, любое из них можно принять в качестве определения дилатации произвольного линейного оператора A, у которого $\rho(A) \neq \varnothing$.

Определение 1.2. Дилатации B_1 и B_2 оператора A, действующие соответственно в пространствах H_1 и H_2, называются *изоморфными*, если существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что: 1) $Uh = h \, (\forall h \in \mathfrak{H})$, 2) $B_2 = UB_1U^{-1}$.

2. Унитарная дилатация оператора сжатия

Унитарная дилатация сжатия впервые была построена в работах Б. С. Надя и довольно полно изучена в работах Б. С. Надя, Ч. Фояша [14] и других авторов.

Обозначим множество линейных ограниченных операторов, действующих из всего гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, через $[H_1, H_2]$; если $H_1 = H_2$, то $[H_1]$.

Рассмотрим сжатие $T \in [\mathfrak{H}]$, т. е. $\|T\| \leqslant 1$, и его дефектные операторы $D = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$, $D_* = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$.

Образуем гильбертово пространство $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n$ элементов вида $h = \Big(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots\Big)$, где $h_0 \in \mathfrak{H}$, $h_n \in \overline{D\mathfrak{H}}$, $h_{-n} \in \overline{D_*\mathfrak{H}}$, $n \in \mathbb{N}$ (рамка означает, что элемент стоит на нулевом месте), $\|h\|_H^2 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} \|h_n\|^2 < \infty$.

Вложим $\mathfrak{H}$ в H, приняв, что $h_0 \equiv \Big(\ldots, 0, 0, \boxed{h_0}, 0, 0, \ldots\Big)$ и ортопроектор P на $\mathfrak{H}$ действует по формуле $P\Big(\ldots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \ldots\Big) = h_0$.

Зададим в H оператор U: $Uh = \Big(\ldots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + D_*h_{-1}}, -T^*h_{-1} + Dh_0, h_1, h_2, \ldots\Big)$.

Теорема 2.1. *Оператор U является унитарной дилатацией сжатия T, причем минимальной в том смысле, что $H = \overline{\operatorname{span}\{U^n h | n \in \mathbb{Z}, h \in \mathfrak{H}\}}$. Эта минимальная дилатация определяется с точностью до изоморфизма.*

3. J-унитарная дилатация линейного ограниченного оператора

J-унитарную дилатацию построили Ч. Дэвис [16], Л. А. Сахнович [13], а затем А. В. Кужель [8], причем способы построения дилатаций у этих авторов были различны. Мы приведем дилатацию, построенную в [8].

Пусть $T \in [\mathfrak{H}]$,

$$\begin{aligned} D = |I - T^*T|^{\frac{1}{2}}, \quad D_* = |I - TT^*|^{\frac{1}{2}}, \\ \mathfrak{J} = \operatorname{sign}(I - T^*T), \quad \mathfrak{J}_* = \operatorname{sign}(I - TT^*). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Как и в разделе 1, образуем гильбертово пространство $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n$, где $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_n = \overline{D\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{H}_{-n} = \overline{D_*\mathfrak{H}}$, $n \in \mathbb{N}$. Построим в пространстве H оператор J: $Jh = \Big(\ldots, \mathfrak{J}_*h_{-2}, \mathfrak{J}_*h_{-1}, \boxed{h_0}, \mathfrak{J}h_1, \mathfrak{J}h_2, \ldots\Big)$, тогда $J^* = J = J^{-1}$. С помощью оператора J зададим в H новое скалярное произведение $[h, \tilde{h}] = (Jh, \tilde{h})_H$ и будем говорить в обычном смысле о J-метрике и J-унитарности. В пространстве H построим оператор U аналогично тому, как это делалось в п. 1, имея в виду, что оператор D и D_* определяются соотношениями (3.1).

Теорема 3.1. *Оператор U является J-унитарной дилатацией оператора T, причем минимальной, т. е. $H = \operatorname{span} \overline{\{U^n h | h \in \mathfrak{H}, n \in \mathbb{Z}\}}$.*

Теперь мы построим J-унитарную дилатацию с помощью понятия операторного узла, введенного в [18], а затем в [2], следующим образом.

Рассмотрим гильбертовы пространства $\mathfrak{H}$, E_-, E_+ и операторы $T \in [\mathfrak{H}]$, $\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}]$, $\Psi \in [\mathfrak{H}, E_+]$, $K \in [E_-, E_+]$, $J_- \in [E_-]$, $J_+ \in [E_+]$, $J_\pm = J_\pm^* = J_\pm^{-1}$.

Определение 3.1. Совокупность перечисленных выше пространств и операторов называется *операторным узлом*, если выполняются равенства

$$\begin{array}{lll} T^*T + \Psi^* J_+ \Psi = I, & T^*\Phi + \Psi^* J_+ K = 0, & \Phi^*\Phi + K^* J_+ K = J_-, \\ TT^* + \Phi J_- \Phi^* = I, & T\Psi^* + \Phi J_- K^* = 0, & \Psi\Psi^* + K J_- K^* = J_+. \end{array}$$

С помощью понятия операторного узла в [18], а затем в [2], строится J-унитарная дилатация, а в [1] были проведены полные строгие доказательства.

Рассмотрим пространство $H = \bigoplus\limits_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{H}_n$, где $\mathfrak{H}_{\pm n} = E_\pm$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}$, и в H зададим оператор U:
$Uh = \Big(\dots, h_{-3}, h_{-2}, \boxed{Th_0 + \Phi h_{-1}}, \Psi h_0 + K h_{-1}, h_1, h_2, \dots\Big)$, где $h = \Big(\dots, h_{-2}, h_{-1}, \boxed{h_0}, h_1, h_2, \dots\Big)$.
Введем в H индефинитную метрику: $Jh = \Big(\dots, J_- h_{-2}, J_- h_{-1}, \boxed{h_0}, J_+ h_1, J_+ h_2, \dots\Big)$.

Теорема 3.2. *Оператор U является J-унитарной дилатацией оператора T, причем минимальной, т. е. $H = \overline{\operatorname{span}\{U^n \mathfrak{H} | n \in \mathbb{Z}\}}$, если $E_+ = \overline{\Psi \mathfrak{H}}, E_- = \overline{\Phi^* \mathfrak{H}}$. При этом минимальная дилатация определена с точностью до J-унитарного изоморфизма.*

Замечание 3.1. Если положить $\Psi = D$, $J_- = \mathfrak{J}_*$, $\Phi = D_*$, $J_+ = \mathfrak{J}$ и $K = -T^*$, то мы получаем дилатацию, построенную в [8].

4. Самосопряженная дилатация ограниченного диссипативного оператора

Простейшие соображения говорят о том, что для диссипативного оператора должна существовать самосопряженная дилатация. Для этого достаточно воспользоваться преобразованием Кэли.

Таким образом, в случае диссипативных операторов задача сводится к явному построению самосопряженной дилатации. Эта задача была решена в работах Б. С. Павлова [10,11] для оператора Шредингера. Анализ показывает, что этот метод построения самосопряженной дилатации применим к произвольному ограниченному диссипативному оператору. Рассмотрим этот метод.

Пусть $A \in [\mathfrak{H}]$ — диссипативный оператор, $-i \in \rho(A)$; $V = \dfrac{A - A^*}{2i} \geqslant 0$, $E = \overline{\sqrt{V}\mathfrak{H}}$. Образуем пространства вектор-функций $L_2([0,\infty), E) = H_+$ и $L_2((-\infty, 0], E) = H_-$.

Построим пространство $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ и в нем оператор S_V следующим образом: вектор $v = (v_-(t), h_0, v_+(t))^T \in \mathfrak{D}(S_V)$ входит в область определения оператора S_V тогда и только тогда, когда 1) $\left\{v_\pm, \dfrac{dv_\pm(t)}{dt} \subset H_\pm\right\}$, 2) $v_+(0) = i\sqrt{2V} h_0 + v_-(0)$.

Если $v \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$S_V(v) = S_V \begin{pmatrix} v_-(t) \\ h_0 \\ v_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{dv_-(t)}{dt} \\ Ah_0 + \sqrt{2V} v_-(0) \\ i\dfrac{dv_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.1. *Оператор S_V является самосопряженной дилатацией оператора A.*

С помощью понятия открытой системы и узла для ограниченного диссипативного оператора такая дилатация была построена в [2]. Заметим, что другими методами самосопряженная дилатация была построена для конкретных дифференциальных выражений в [12,15,17].

5. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора

Пусть A — плотно определенный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, и $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим дефектные операторы $B = iR - iR^* - 2R^*R$, $\tilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*$, где $R = (A + iI)^{-1}$: $B \geqslant 0$, $\tilde{B} \geqslant 0$,

$$Q = \sqrt{B}, \tilde{Q} = \sqrt{\tilde{B}}, \tag{5.1}$$

$$\mathfrak{H}_1 = \overline{Q\mathfrak{H}}, \mathfrak{H}_2 = \overline{\tilde{Q}\mathfrak{H}}. \tag{5.2}$$

Построим пространства вектор-функций $H_+ = L_2\left([0; +\infty), \mathfrak{H}_1\right)$, $H_- = L_2\left((-\infty, 0], \mathfrak{H}_2\right)$, $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ и определим в H оператор S следующим образом: вектор $h = (h_-, h_0, h_+)^T$, где $h_\pm \in H_\pm$, $h_0 \in \mathfrak{H}$, принадлежит $\mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\{h_\pm, \dfrac{dh_\pm(t)}{dt}\} \subset H_\pm$,
2) $\varphi = h_0 + \tilde{Q}h_0 \in \mathfrak{D}(A)$,
3) $h_+(0) = T^*h_-(0) + iD\varphi$, где $T^* = I + 2iR^*$, $D = Q(A + iI)$.

Если $h \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$Sh = S\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{dh_-(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\varphi \\ i\dfrac{dh_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

В [3] доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Оператор S является самосопряженной дилатацией оператора A.*

Теорема 5.2. *Дилатация S является минимальной в том смысле, что*

$$H = \overline{\operatorname{span}\{R_i^n(S)h, R_{-i}^n(S)h | h \in \mathfrak{H}, n \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}}.$$

Эта теорема доказана в [7].

Построенная дилатация S называется *спектральным представлением* самосопряженной дилатации диссипативного оператора. В [8, 9] построено трансляционное представление такой дилатации, которое мы сейчас рассмотрим.

Пусть A — плотно заданный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $-i \in \rho(A)$. Рассмотрим операторы (5.1) и пространства (5.2).

Образуем гильбертово пространство $\mathscr{H} = \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}_+$, где $\mathfrak{H}_- \bigoplus\limits_{-\infty}^{-1} \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_+ = \bigoplus\limits_{1}^{\infty} \mathfrak{H}_1$. Элементами $\mathscr{H}$ являются векторы $f = \left(\dots, f_{-2}, f_{-1}, \boxed{f_0}, f_1, f_2, \dots\right)$, где $f_k \in \mathfrak{H}_1$, при $k \geqslant 1$, $f_k \in \mathfrak{H}_2$ при $k \leqslant -1$, $f_0 \in \mathfrak{H}$ и $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} \left\|f_k{}^2\right\| < \infty$.

В пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим неограниченные операторы S_+ и S_-, действующие по формулам $S_+f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, $S_-f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{-k}$. Построим в пространстве $\mathscr{H}$ оператор S_T. Пусть $f \in \mathfrak{D}(S_T)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $f \in \mathfrak{D}(S_+) \cap \mathfrak{D}(S_-)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|S_nf\|^2 < \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|S_{-n}f\|^2 < \infty$, где $S_nf = -\dfrac{1}{2}f_n - \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k$ и $S_{-n}f = \dfrac{1}{2}f_{-n} + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_{-k}$;
2) $\varphi = f_0 + \tilde{Q}S_-f \in \mathfrak{D}(A)$;
3) $S_+f = T^*S_-f + iD\varphi$, где $D = Q(A + iI)$, $T = I - 2iR, R = (A + iI)^{-1}$. Если $f \in \mathfrak{D}(S_T)$, то $S_Tf = \left(\dots, g_{-1}, \boxed{g_0}, g_1, \dots\right)$, где $g_0 = -if_0 + (A + iI)\varphi$, $g_n = iS_nf\ (\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$.

В [8] доказана теорема.

Теорема 5.3. *Оператор S_T является самосопряженной дилатацией диссипативного оператора A.*

В [4] получена следующая теорема.

Теорема 5.4. *Если пространство* $\mathfrak{H}_1 = \overline{Q\mathfrak{H}}$ *и* $\mathfrak{H}_2 = \overline{\hat{Q}\mathfrak{H}}$ *сепарабельны, то самосопряженные дилатации* S *и* S_T *диссипативного оператора* A *изоморфны.*

Теорема 5.5. *Если* A — *ограниченный диссипативный оператор и* $-i \in \rho(A)$, *то самосопряженные дилатации* S *и* S_V *оператора* A *изоморфны.*

Эта теорема доказана в [4, 6].

6. J-САМОСОПРЯЖЕННАЯ ДИЛАТАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть A — линейный, плотно заданный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $-i \in \rho(A)$.

Рассмотрим операторы

$$R = (A + iI)^{-1}, \quad B = iR - iR^* - 2R^*R, \quad \tilde{B} = iR - iR^* - 2RR^*. \tag{6.1}$$

Пусть

$$\begin{gathered} Q = \sqrt{|B|}, \quad \tilde{Q} = \sqrt{|\tilde{B}|}, \\ \mathcal{J} = \operatorname{sign} B, \quad \tilde{\mathcal{J}} = \operatorname{sign} \tilde{B}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Пространство $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$ определяется как и в разделе 4. Операторы Q и $\tilde{Q}$ теперь определяются по формулам (6.2). Затем в пространстве H определяем оператор S аналогично тому, как это делается в разделе 4.

Введем в пространстве H J-метрику следующим образом: пусть $h_\pm(t) \in H_\pm$, $J_1 h_- = \tilde{\mathcal{J}} h_-(t)$, $J_2 h_+ = \mathcal{J} h_+(t)$ ($\mathcal{J}$ и $\tilde{\mathcal{J}}$ действуют при каждом фиксированном t),

$$J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1 h_- \\ h_0 \\ J_2 h_+ \end{pmatrix}.$$

В [5] доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Оператор* S *является* J*-самосопряженной дилатацией оператора* A.

Построенный оператор S является спектральным представлением J-самосопряженной дилатации оператора A. В [8] аналогичным образом было построено трансляционное представление такой дилатации.

Теперь, используя понятие операторного узла, введенное в п. 2, определим это понятие для неограниченного оператора. Пусть A — линейный, плотно заданный оператор, действующий в пространстве $\mathfrak{H}$, $-i \in \rho(A)$ и операторы B и $\tilde{B}$ определяются по формулам (6.1).

Определение 6.1. Совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$, E_- и E_+ и операторов $\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}]$, $\Psi \in [\mathfrak{H}, E_+]$, $K \in [E_-, E_+]$, $J_- \in [E_-, E_-]$, $J_+ \in [E_+, E_+]$, $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, где $J_\pm = J_\pm^{-1} = J_\pm^*$, которые удовлетворяют соотношениям:

$$B = \Psi^* J_+ \Psi, \tag{6.3}$$
$$T^*\Phi + \Psi^* J_+ K = 0, \tag{6.4}$$
$$2\Phi^*\Phi + K^* J_+ K = J_-, \tag{6.5}$$
$$\tilde{B} = \Phi J_- \Phi^*, \tag{6.6}$$
$$T\Psi^* + \Phi J_- K^* = 0, \tag{6.7}$$
$$2\Psi\Psi^* + K J_- K^* = J_+, \tag{6.8}$$

называется *операторным узлом* для оператора A.

Из (6.4) получаем

$$\Phi^* T + K^* J_+ \Psi = 0. \tag{6.9}$$

Из (6.7) получаем

$$\Psi T^* + K J_- \Phi^* = 0. \tag{6.10}$$

Используя введенное понятие операторного узла построим J-самосопряженную дилатацию $\mathbf{S}$ линейного оператора A следующим образом. Пусть $H_- = L_2((-\infty; 0], E_-)$, $H_+ = L_2([0; \infty), E_+)$, $H = H_- \oplus \mathfrak{H} \oplus H_+$. Введем в H индефинитную метрику:

$$Jh = J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_- h_-(t) \\ h_0 \\ J_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Вектор $h = (h_+, h_0, h_-)^T \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $\{h_\pm, \dfrac{dh_\pm(t)}{dt}\} \subset H_\pm$,
2) $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$,
3) $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\tilde{h}$;

$$\mathbf{S}\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{dh_-(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A+iI)\tilde{h} \\ i\dfrac{dh_+(t)}{dt} \end{pmatrix}.$$

Теорема 6.2. *Оператор* $\mathbf{S}$ *является* J*-самосопряженной дилатацией оператора* A.

Доказательство. Найдем сопряженный оператор $\mathbf{S}^*$. Обозначим $\Gamma_\pm h_\pm(t) = i\dfrac{dh_\pm(t)}{dt}$. Используя свойства оператора дифференцирования, получим

$$(\Gamma_\pm f, \varphi)_{H_\pm} - (f, \Gamma_\pm\varphi)_{H_\pm} = \mp i(f(0), \varphi(0))_{\mathfrak{H}},$$

$$(\mathbf{S}h, g)_H = (h_-, \Gamma_- g_-)_{H_-} + (h_+, \Gamma_+ g_+)_{H_+} - i(h_+(0), g_+(0))_{E_+} +$$

$$+ i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} - i(h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} + ((A+iI)\hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.

Введем обозначение $C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} - i(h_+(0), g_+(0))_{E_+} + i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} + ((A+iI)\hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}}$. Используем условие 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$:

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} - i(-Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\hat{h}, g_+(0))_{E_+} + i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} + ((A+iI)\hat{h}, g_0)_{\mathfrak{H}}.$$

Положим $h_-(0) = 0$, тогда $\hat{h} = h_0$ и

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (\Psi(A+iI)h_0, g_+(0))_{E_+} + ((A+iI)h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} =$$

$$= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + ((A+iI)h_0, \Psi^* g_+(0))_{E_+} + ((A+iI)h_0, g_0)_{\mathfrak{H}} = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + ((A+iI)h_0, g_0 + \Psi^* g_+(0))_{\mathfrak{H}}.$$

Если $g' = g_0 + \Psi^* g_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$, то $C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (h_0, (A* - iI)g')_{\mathfrak{H}} = (h_0, ig_0 + (A* - iI)g')_{\mathfrak{H}}$. Теперь

$$C = (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + i(h_-(0), K^* g_+(0))_{E_-} + ((A+iI)\hat{h}, g_0 + \Psi^* J_+ g_+(0))_{\mathfrak{H}} + i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} =$$

$$= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + i(h_-(0), K^* g_+(0))_{E_-} + (h_0 + \Phi h_-(0), (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + i(h_-(0), g_-(0))_{E_-} =$$

$$= (h_0, ig_0)_{\mathfrak{H}} + (h_-(0), -iK^* g_+(0))_{E_-} + (h_0, (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + (\Phi h_-(0), (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + i\,(h_-(0), g_-(0))_{E_-} =$$

$$= (h_0, ig_0 + (A^* - iI)g')_{\mathfrak{H}} + (h_-(0), -iK^* g_+(0) + \Phi^*(A^* - iI)g' - ig_-(0))_{E_-},$$

тогда

$$-iK^* g_+(0) + \Phi^*(A^* - iI)g' - ig_-(0) = 0,$$

т. е.

$$g_-(0) = -K^* g_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)g'.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{S}^*$ определяется следующим образом.

Вектор $h = (h_-, h_0, h_+)^T \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия

1) $\{h_\pm, \Gamma_\pm h_\pm\} \subset H_\pm$,
2) $h' = h_0 + \Psi^* h_+(0) \in D(A^*)$,
3) $h_-(0) = -K^* h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)h'$;

$$\mathbf{S}^* \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_- h_-(t) \\ ih_0 + (A^* - iI)h' \\ \Gamma_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Докажем равенство $\mathbf{S} = J\mathbf{S}^* J$, где

$$J \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_- h_-(t) \\ h_0 \\ J_+ h_+(t) \end{pmatrix}.$$

Для его доказательства нам понадобятся следующие утверждения.

Если выполнены условия 2) и 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$, то вектор $\hat{h} = h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ и имеет место равенство

$$(A + iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \tag{6.11}$$

где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0), \hat{h} = h_0 + \Psi^* J_+ h_+(0)$. Действительно, $h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}$. Подействуем на это равенство оператором $\Psi^* J_+$:

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) + i\Psi^* J_+ \Psi(A + iI)\widetilde{h}.$$

Используем соотношение (6.3):

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) + (-R + R^* - 2iR^* R)(A + iI)\widetilde{h},$$

$$\Psi^* J_+ h_+(0) = -\Psi^* J_+ K h_-(0) - \widetilde{h} + R^*(A + iI)\widetilde{h} - 2iR^*\widetilde{h},$$

или

$$\Psi^* J_+ h_+(0) + \Psi^* J_+ K h_-(0) + \widetilde{h} = R^*(A + iI)\widetilde{h} - 2iR^*\widetilde{h}. \tag{6.12}$$

Преобразуем левую часть равенства, используя (6.4):

$$\Psi^* J_+ h_+(0) - T^*\Phi h_-(0) + h_0 + \Phi h_-(0) = \Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 - 2iR^*\Phi h_-(0) = \hat{h} - 2iR^*\Phi h_-(0).$$

Подставляя в (6.12), получим

$$\Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 = 2iR^*\Phi h_-(0) + R^*(A + iI)\hat{h} - 2iR^*\widetilde{h}. \tag{6.13}$$

Следовательно, вектор $\hat{h} = \Psi^* J_+ h_+(0) + h_0 \in \mathfrak{D}(A^*)$.

Подействуем на равенство (6.13) оператором $(A^* - iI)$:

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\widetilde{h} - 2i\widetilde{h},$$

$$(A^* - iI)\hat{h} = 2i\Phi h_-(0) + (A + iI)\hat{h} - 2ih_0 - 2i\Phi h_-(0),$$

и получаем (6.11).

Теперь докажем, что если выполняются условия 2) и 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$, то вектор $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$ и имеет место равенство

$$(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \tag{6.14}$$

где $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0), \hat{h} = h_0 + \Psi^* h_+(0)$.

Действительно, запишем условие 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$: $h_-(0) = -K^* h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$ и подействуем на это равенство оператором ΦJ_-:

$$\Phi J_- h_-(0) = -\Phi J_- K^* h_+(0) - i\Phi J_- \Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Используя равенства (6.6) и (6.7), получаем

$$\Phi J_- h_-(0) = T\Psi^* h_+(0) - i(iR - iR^* - 2RR^*)(A - iI)\hat{h},$$

$$\Phi J_- h_-(0) = \Psi^* h_+(0) - 2iR\Psi^* h_+(0) + R(A^* - iI)\hat{h} - \hat{h} + 2iR\hat{h}. \tag{6.15}$$

Тогда $h' = h_0 + \Phi J_- h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$.

Подействуем на равенство (6.15) оператором $(A + iI)$:

$$(A + iI)h' = -2i\Psi^* h_+(0) + (A^* - iI)\hat{h} + 2i(h_0 + \Psi^* h_+(0)).$$

Таким образом, $(A + iI)h' - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0$ и (6.14) доказано.

Итак, докажем что

$$\mathbf{S}h = J\mathbf{S}^*Jh, \tag{6.16}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}, \quad Jh = \begin{pmatrix} J_+h_+ \\ h_0 \\ J_-h_- \end{pmatrix}.$$

Пусть $h \in \mathfrak{D}(S)$ и $Jh \in \mathfrak{D}(S^*)$, тогда

$$\mathbf{S}^*Jh = \mathbf{S}^* \begin{pmatrix} J_+h_+ \\ h_0 \\ J_-h_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{J_+dh_+(t)}{dt} \\ ih_0 + (A^* - iI)\hat{h} \\ i\dfrac{J_-dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix},$$

где $\hat{h} = h_0 + \Psi J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Используя (6.11), получаем

$$\mathbf{S}^*Jh = \begin{pmatrix} iJ_+\dfrac{dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ iJ_-\dfrac{J_-dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix}, \qquad J\mathbf{S}^*Jh = \begin{pmatrix} i\dfrac{J_+dh_+(t)}{dt} \\ -ih_0 + (A + iI)\widetilde{h} \\ i\dfrac{dh_-(t)}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{S}h.$$

Надо доказать, что

$$\mathfrak{D}(S^*) = J\mathfrak{D}(S). \tag{6.17}$$

Равенство (6.16) было доказано в предположении (6.17). Пусть $h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$, докажем что $Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$.

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A + iI)\widetilde{h}, \tag{6.18}$$

где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Надо доказать, что $J_-h_-(0) = -K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$, где $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$. Из (6.11) получим $(A + iI)\widetilde{h} = 2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}$. Подействуем на равенство (6.18) оператором K^*J_+ и применим равенства (6.5) и (6.9). Получаем:

$$K^*J_+h_+(0) = -K^*J_+Kh_-(0) + iK^*J_+\Psi(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) = (2\Phi^*\Phi - J_-)h_-(0) - i\Phi^*T(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}),$$

$$K^*J_+h_+(0) + J_-h_-(0) = 2\Phi^*\Phi h_-(0) - iT(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}).$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) - i\Phi^*(I - 2iR)(2ih_0 + (A^* - iI)\hat{h}) = 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h} - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h}.$$

Вычислим $2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h}$, используя (6.11). Получаем:

$$2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*Th_0 - 2\Phi^*R(A^* - iI)\hat{h} = 2\Phi^*\Phi h_-(0) + 2\Phi^*(I - 2iR)h_0 - 2\Phi^*R((A + iI)\hat{h} - 2ih_0) =$$

$$= \Phi^*(2\Phi h_-(0) + 2h_0 - 4iRh_0 - 2h_0 - 2\Phi h_-(0) + 4iRh_0) = 0,$$

таким образом, $J_-h_-(0) = K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}$.

Пусть $Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$. Докажем, что $h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$,

$$h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}, \quad Jh = \begin{pmatrix} J_-h_- \\ h_0 \\ J_+h_+ \end{pmatrix}, \quad Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*).$$

Это означает, что $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0) \in \mathfrak{D}(A^*)$ и

$$J_-h_-(0) = -K^*J_+h_+(0) - i\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}. \tag{6.19}$$

Из равенства (6.11), если $Jh \in \mathfrak{D}(\mathbf{S}^*)$, получаем

$$(A + iI)\widetilde{h} - (A^* - iI)\hat{h} = 2ih_0, \tag{6.20}$$

$\hat{h} \in \mathfrak{D}(A^*)$, $\widetilde{h} \in \mathfrak{D}(A)$, $\hat{h} = h_0 + \Psi^*J_+h_+(0)$, $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$, т. е. условие 2) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$ выполняется.

Проверим выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(\mathbf{S})$ для вектора h. Надо доказать равенство

$$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\widetilde{h},$$

где $\tilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$. Подействуем на равенство (6.19) оператором KJ_- и получим

$$Kh_-(0) = -KJ_-K^*J_+h_+(0) - iKJ_-\Phi^*(A^* - iI)\hat{h}.$$

Используя (6.8) и (6.10), получаем

$$Kh_-(0) = (2\Psi\Psi^* - J_+)J_+h_+(0) + i\Psi(I + 2iR^*)(A^* - iI)\hat{h},$$

$$Kh_-(0) + h_+(0) = 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi(I + 2iR^*)(A^* - iI)\hat{h}.$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi(A^* - iI)\hat{h} - 2\Psi(h_0 + \Psi^*J_+h_+(0)) =$$

$$= 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) + i\Psi((A+iI)\widetilde{h} - 2ih_0) - 2\Psi h_0 - 2\Psi\Psi^*J_+h_+(0) = i\Psi(A+iI)\widetilde{h},$$

$h_+(0) = -Kh_-(0) + i\Psi(A+iI)\widetilde{h}$, где $\widetilde{h} = h_0 + \Phi h_-(0)$.

Докажем, что $\mathbf{S}$ — дилатация оператора A. Обозначим $\Gamma_-h_-(t) = i\dfrac{dh_-(t)}{dt}$, $\Gamma_+h_+(t) = i\dfrac{dh_+(t)}{dt}$, $\Gamma_0 = \Gamma_+|_M$, где $M = \{h_+(t) \in \mathfrak{D}(\Gamma_+) | h_+(0) = 0\}$.

Рассмотрим в пространстве $H = H_- \oplus g \oplus H$ оператор $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}h = \mathbf{R}\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_- \\ R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_+ + e^{-i\lambda t}v_+(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in \rho(\Gamma_-) \cap \rho(\Gamma_0) \cap \rho(A) = \rho(\lambda)$. Так как $-i \in \rho(\lambda)$, то λ принадлежит некоторой окрестности точки $-i$, которая содержится в $\rho(\lambda)$.

$$(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_+(x) = \frac{1}{i}\int_0^x e^{-i\lambda(x-t)}h_+(t)dt, \qquad (\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t) = \frac{1}{i}\int_{-\infty}^x e^{-i\lambda(x-t)}h_-(t)dt.$$

При этом

$$v_-(0) = [(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_-(t)]_{t=0}, \qquad v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)),$$

$\mu = \lambda + i$, $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$. Пусть $h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$, тогда

$$(\mathbf{S} - \lambda I)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ -\mu h_0 + (A+iI)\widetilde{h} \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $\mathbf{R} = (\mathbf{S} - \lambda I)^{-1}$:

$$\mathbf{R}(\mathbf{S} - \lambda I)\begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)h_- \\ (A - \lambda I)\widetilde{h} + \mu\Phi h_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_- \\ y_0 \\ y_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $y_0 = h_0$, $y_+ = h_+$.

$y_0 = R_\lambda((A - \lambda I)\widetilde{h} + \mu\Phi h_-(0)) - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) = \widetilde{h} + \mu R_\lambda\Phi h_-(0) - \Phi h_-(0) - \mu R_\lambda\Phi v_-(0) = h_0$,

т. к. $v_-(0) = h_-(0)$.

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)((A - \lambda I)\widetilde{h} - \mu\Phi h_-(0) - \mu\Phi v_-(0)) =$$

$$= -Kh_-(0) + i\Psi^*(I + \mu R_\lambda)(A - \lambda I)\widetilde{h} = -Kh_-(0) + i\Psi^*(A - \lambda I)\widetilde{h} + i\mu\Psi^*\widetilde{h} =$$

$$= -Kh_-(0) + i\Psi^*(A + iI)\widetilde{h} = h_+(0),$$

таким образом, $y_+ = h_+$. Теперь докажем, что $\forall h \in H$, $\mathbf{R}h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})$. Действительно:

1) очевидно, что $v_\mp \in H_\mp$.
2) $\widetilde{h} = v_0 + \Phi v_-(0) = R_\lambda h_0 - (I + \mu R_\lambda)\Phi v_-(0) + \Phi v_-(0) = R_\lambda(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) \in \mathfrak{D}(A)$.
3) Проверим равенство

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(A+iI)(v_0 + \Phi v_-(0)) =$$
$$= -Kv_-(0) + i\Psi^*(A+iI)(R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Psi^* v_-(0) + \Psi^* v_-(0)) =$$
$$= -Kv_-(0) + \Psi^*(I+\mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)) = v_+(0).$$

Таким образом, $\mathbf{R}h \in \mathfrak{D}(\mathbf{S})(\forall h \in H)$. Теперь докажем, что $(\mathbf{S}-\lambda I)\mathbf{R}h = h, \forall h \in H$.

$$(\mathbf{S}-\lambda I)\mathbf{R}h = (\mathbf{S}-\lambda I)\begin{pmatrix} v_- \\ v_0 \\ v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_- - \lambda I)v_- \\ (A-\lambda I)(v_0 + \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) \\ (\Gamma_+ - \lambda I)v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_- \\ \Theta_0 \\ \Theta_+ \end{pmatrix} = \Theta.$$

Докажем, что $\Theta = h$:

$$\Theta_- = (\Gamma_- - \lambda I)(\Gamma_- - \lambda I)^{-1}h_- = h_-,$$
$$\Theta_0 = (A-\lambda I)(v_0 + \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) =$$
$$= (A-\lambda I)(R_\lambda h_0 - (I+\mu R_\lambda)\Phi v_-(0) - \Phi v_-(0)) + \mu\Phi v_-(0) = h_0,$$
$$\Theta_+ = (\Gamma_+ - \lambda I)[(\Gamma_0 - \lambda I)^{-1}h_0 + e^{-i\lambda t}v_+(0)],$$

где

$$v_+(0) = -Kv_-(0) + i\Psi^*(I+\mu R_\lambda)(h_0 - \mu\Phi v_-(0)).$$

Поскольку $(\Gamma_+ - \lambda I)e^{-i\lambda t}v_-(0) = 0$, то $\Theta_+ = h_+$.

Как легко видеть оператор $\mathbf{R}$ ограничен и определен на всем пространстве H. □

Замечание 6.1. При доказательстве равенства $\mathbf{R} = (\mathbf{S}-\lambda I)^{-1}$ не использовались свойства узла, поэтому $\mathbf{R} = (\mathbf{S}-\lambda I)^{-1}$ для любых операторов $\Psi^* \in [E_+, \mathfrak{H}]$ и $\Phi \in [E_-, \mathfrak{H}]$.

Замечание 6.2. Если положить $E_- = \overline{\widetilde{Q}\mathfrak{H}}$, $E_+ = \overline{Q\mathfrak{H}}$, $\Psi = Q$, $\Phi = \widetilde{Q}$ и $J = I$, где Q и $\widetilde{Q}$ определены равенством (5.1), то мы получаем спектральное представление самосопряженной дилатации диссипативного оператора A.

Замечание 6.3. Если Q и $\widetilde{Q}$ определить равенством (6.2) и $\mathcal{J} = \operatorname{sign} B$, $\widetilde{\mathcal{J}} = \operatorname{sign} \widetilde{B}$, то получаем спектральное представление J-самосопряженной дилатации линейного оператора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Биданец А. В., Кудряшов Ю. Л.* J-изометрические и J-унитарные дилатации операторного узла// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2016. — № 3. — С. 21–30.
2. *Золотарев В. А.* Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов. — Харьков: ХНУ, 2003.
3. *Кудряшов Ю. Л.* Симметричные и самосопряженные дилатации диссипативных операторов// Теор. функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — *37*. — С. 51–54.
4. *Кудряшов Ю. Л.* Связь между различными представителями самосопряженной дилатации диссипативного оператора// Деп. в ВИНИТИ. — 03.01.1983. — № 3-83.
5. *Кудряшов Ю. Л.* J-эрмитовы и J-самосопряженные дилатации линейных операторов// Динам. системы. — 1984. — № 3. — С. 94–98.
6. *Кудряшов Ю. Л.* Изоморфизм двух представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — *23*, № 3. — С. 32–38.
7. *Кудряшов Ю. Л.* Минимальность самосопряженной дилатации диссипативного оператора// Динам. системы. — 2014. — *4*, № 3-4. — С. 279–285.
8. *Кужель А. В.* Самосопряженные и J-самосопряженные дилатации линейных операторов// Теор. функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — *37*. — С. 54–62.
9. *Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л.* Симметричные и самосопряженные дилатации диссипативных операторов// Докл. АН СССР. — 1980. — *253*, № 4. — С. 812–815.
10. *Павлов Б. С.* Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов// В сб.: «Матем. программир. и смежн. вопр. Теория операторов в линейных пространствах». — М.: ЦЭМИ, 1976. — С. 3–69.
11. *Павлов Б. С.* Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям// Мат. сб. — 1977. — *102*, № 4. — С. 511–536.
12. *Павлов Б. С., Фаддеев М. Д.* Построение самосопряженной дилатации для задачи с импедансным граничным условием// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1977. — *73*. — С. 217–223.

13. *Сахнович Л. А.* О J-унитарной дилатации ограниченного оператора// Функц. анализ и его прилож. — 1974. — *8*, № 3. — С. 83-84.
14. *Секефальви-Надь Б.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1970.
15. *Allahverdiev B. P., Ugurlu E.* On self-adjoint dilation of the dissipative extension of a direct sum differential operator// Banach J. Math. Anal. — 2013. — *7*, № 2. — С. 194–207.
16. *Davis Ch.* J-unitary dilation of general operators// Acta Sci. Math. — 1970. — *31*, № 1-2. — С. 75–86.
17. *Kurasov P. B., Elander N.* Complex scaling and self-adjoint dilations// Int. J. Quantum Chem. — 1993. — *46*, № 3. — С. 415–418.
18. *Temme D.* The point spectrum of unitary dilations in Kreĭ space// Math. Nachr. — 1998. — *194*, № 1. — С. 205–224.

Ю. Л. Кудряшов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: kudryashov_2889@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-209-220 UDC 517.983.24, 517.984.4

Dilatations of Linear Operators

© 2020 **Yu. L. Kudryashov**

Abstract. The article is devoted to building various dilatations of linear operators. The explicit construction of a unitary dilation of a compression operator is considered. Then the J-unitary dilatation of a bounded operator is constructed by means of the operator knot concept of a bounded linear operator. Using the Pavlov method, we construct the self-adjoint dilatation of a bounded dissipative operator. We consider spectral and translational representations of the self-adjoint dilatation of a densely defined dissipative operator with nonempty set of regular points.

Using the concept of an operator knot for a bounded operator and the Cayley transform, we introduce an operator knot for a linear operator. By means of this concept, we construct the J-self-adjoint dilatation of a densely defined operator with a regular point.

We obtain conditions of isomorphism of extraneous dilations and their minimality.

REFERENCES

1. A. V. Bidanets and Yu. L. Kudryashov, “J-izometricheskie i J-unitarnye dilatatsii operatornogo uzla” [J-isometric and J-unitary dilatations of an operator knot], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2016, No. 3, 21–30 (in Russian).
2. V. A. Zolotarev, *Analiticheskie metody spektral’nykh predstavleniy nesamosopryazhennykh i neunitarnykh operatorov* [Analytical Methods of Spectral Representations of Non-self-adjoint and Nonunitary Operators], KhNU, Khar’kov, 2003 (in Russian).
3. Yu. L. Kudryashov, “Simmetrichnye i samosopryazhennye dilatatsii dissipativnykh operatorov” [Symmetric and self-adjoint dilatations of dissipative operators], *Teor. funktsiy, funkts. analiz i ikh pril.* [Funct. Theory Funct. Anal Appl.], 1982, **37**, 51–54 (in Russian).
4. Yu. L. Kudryashov, “Svyaz’ mezhdu razlichnymi predstavitelyami samosopryazhennoy dilatatsii dissipativnogo operatora” [Relation between different representatives of self-adjoint dilatation of a dissipative operator], *Dep. v VINITI* [Dep. VINITI], 03.01.1983, No. 3-83 (in Russian).
5. Yu. L. Kudryashov, “J-ermitovy i J-samosopryazhennye dilatatsii lineynykh operatorov” [J-Hermitian and J-self-adjoint dilatations of linear operators], *Dinam. sistemy* [Dynam. Syst.], 1984, No. 3, 94–98 (in Russian).

6. Yu. L. Kudryashov, “Izomorfizm dvukh predstavleniy samosopryazhennoy dilatatsii dissipativnogo operatora” [Isomorphism of two representations of self-adjoint dilatation of a dissipative operator], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Cer. Fiz.-mat. nauki* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Phys. Math. Sci.], 2011, **23**, No. 3, 32–38 (in Russian).
7. Yu. L. Kudryashov, “Minimal’nost’ samosopryazhennoy dilatatsii dissipativnogo operatora” [Minimality of self-adjoint dilatation of a dissipative operator], *Dinam. sistemy* [Dynam. Syst.], 2014, **4**, No. 3-4, 279–285 (in Russian).
8. A. V. Kuzhel’, “Samosopryazhennye i J-samosopryazhennye dilatatsii lineynykh operatorov” [Self-adjoint and J-self-adjoint dilatations of linear operators], *Teor. funktsiy, funkts. analiz i ikh pril.* [Funct. Theory Funct. Anal Appl.], 1982, **37**, 54–62 (in Russian).
9. A. V. Kuzhel’ and Yu. L. Kudryashov, “Simmetrichnye i samosopryazhennye dilatatsii dissipativnykh operatorov” [Symmetric and self-adjoint dilatations of dissipative operators], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1980, **253**, No. 4, 812–815 (in Russian).
10. B. S. Pavlov, “Teoriya dilatatsiy i spektral’nyy analiz nesamosopryazhennykh differentsial’nykh operatorov” [Dilatation theory and spectral analysis of non-self-adjoint differential operators], In: *Matem. programmir. i smezhn. vopr. Teoriya operatorov v lineynykh prostranstvakh* [Math. Programming and Related Issues. Theory of Operators in Linear Spaces], TsEMI, Moscow, 1976, pp. 3–69 (in Russian).
11. B. S. Pavlov, “Samosopryazhennaya dilatatsiya dissipativnogo operatora Shredingera i razlozhenie po ego sobstvennym funktsiyam” [Self-adjoint dilatation of the dissipative Schrödinger operator and expansion in its eigenfunctions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **102**, No. 4, 511–536 (in Russian).
12. B. S. Pavlov and M. D. Faddeev, “Postroenie samosopryazhennoy dilatatsii dlya zadachi s impedansnym granichnym usloviem” [Construction of a self-adjoint dilatation for a problem with impedance boundary condition], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1977, **73**, 217–223 (in Russian).
13. L. A. Sakhnovich, “O J-unitarnoy dilatatsii ogranichennogo operatora” [On J-unitary dilatation of a bounded operator], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1974, **8**, No. 3, 83-84 (in Russian).
14. B. Szökefalvi-Nagy, *Garmonicheskiy analiz operatorov v gil’bertovom prostranstve* [Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
15. B. P. Allahverdiev and E. Ugurlu, “On self-adjoint dilation of the dissipative extension of a direct sum differential operator,” *Banach J. Math. Anal.*, 2013, **7**, No. 2, 194–207.
16. Ch. Davis, “J-unitary dilation of general operators,” *Acta Sci. Math.*, 1970, **31**, No. 1-2, 75–86.
17. P. B. Kurasov and N. Elander, “Complex scaling and self-adjoint dilations,” *Int. J. Quantum Chem.*, 1993, **46**, No. 3, 415–418.
18. D. Temme, “The point spectrum of unitary dilations in Kreĭ space,” *Math. Nachr.*, 1998, **194**, No. 1, 205–224.

Yu. L. Kudryashov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: kudryashov_2889@mail.ru