Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 2 (2020). С. 160–181

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-160-181 УДК 517.938

О ВКЛЮЧЕНИИ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ МОРСА—СМЕЙЛА В ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ ПОТОК

© 2020 г. **В. З. ГРИНЕС, Е. Я. ГУРЕВИЧ, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. В настоящем обзоре приводятся результаты последних лет по решению проблемы Ж. Палиса о нахождении необходимых и достаточных условий включения каскада Морса—Смейла в топологический поток. На сегодняшний день проблема решена Палисом для диффеоморфизмов Морса—Смейла, заданных на многообразиях размерности два. Результат для окружности является тривиальным упражнением. В размерности три и выше возникают новые эффекты, связанные с возможностью дикого вложения замыканий инвариантных многообразий седловых периодических точек, что приводит к дополнительным препятствиям включения диффеоморфизмов Морса—Смейла в топологический поток. Прогресс, достигнутый в решении проблемы Палиса в размерности три, связан с относительно недавним получением полной топологической классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла на трехмерных многообразиях и введением новых инвариантов, описывающих вложение сепаратрис седловых периодических точек в несущее многообразие. Переход к более высокой размерности требует привлечения новейших результатов топологии многообразий. Необходимые сведения из топологии, играющие ключевые роли в доказательствах, также излагаются в обзоре.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Постановка задачи и история вопроса

Динамические системы с непрерывным (потоки) и дискретным (каскады) временем имеют тесную взаимосвязь. Так, если поток на многообразии M^n обладает глобальной секущей, то его свойства во многом определяются свойствами отображения последования Пуанкаре на этой секущей. Численные методы решения дифференциальных уравнений естественным образом приводят к отображениям с дискретным временем. Один из показателей адекватности численного моделирования состоит в том, что полученный в результате каскад топологически сопряжен сдвигу на единицу времени вдоль траекторий исходного потока. В работах [29, 30] показано, что дискретизация методом Рунге—Кутты системы $n \geqslant 2$ дифференциальных уравнений, определяющих поток Морса—Смейла без периодических траекторий (структурно-устойчивый поток с конечным

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект № 17-11-01041, за исключением разделов 2-3, выполненных при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2019-1931).

неблуждающим множеством) на диске, при достаточно малой величине шага дискретизации задает дискретную динамическую систему, топологически сопряженную сдвигу на единицу времени вдоль траекторий исходного потока. Это означает, что полученная дискретная динамическая система включается в топологический поток.

Изучение взаимосвязи между каскадами и потоками приводит к классической задаче об отыскании условий включения диффеоморфизмов (или гомеоморфизмов) в поток. Пусть M^n — гладкое связное замкнутое многообразие размерности n. Напомним, что C^m-*потоком* ($m \geqslant 0$) на многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство C^m-диффеоморфизмов $X^t : M^n \to M^n$ такое, что $X^0(x) = x$ и $X^t(X^s(x)) = X^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M^n$. C^0-поток еще называют *топологическим потоком*.

Говорят, что диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ замкнутого многообразия M^n *включается в* C^m-*поток*, если f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий некоторого C^m-потока X^t ($f = X^1$), заданного на M^n.

Так как поток определяет изотопию, соединяющую сдвиг на единицу времени вдоль траекторий и тождественное отображение, то неизотопные тождественному диффеоморфизмы не включаются ни в какие потоки. Таким образом, множество каскадов значительно богаче, чем множество сдвигов на единицу времени вдоль траекторий потоков. В работе [43] доказано, что множество C^r-диффеоморфизмов ($r \geqslant 1$), включающихся в C^1-поток, является подмножеством первой категории в $\mathit{Diff}^r(M^n)$. Согласно [3], множество C^2-диффеоморфизмов, включающихся в C^1-гладкий поток, нигде не плотно в пространстве диффеоморфизмов Морса—Смейла.

В то же время, для любого многообразия M^n существует открытое в $\mathit{Diff}^1(M^n)$ множество диффеоморфизмов, включающихся в топологический поток. Этот факт вытекает из следующего рассуждения. В силу [47] на любом многообразии существует функция Морса, градиентный поток которой может быть сколь угодно близко аппроксимирован потоком X^t Морса—Смейла без замкнутых траекторий. Сдвиг на единицу времени X^1 вдоль траекторий такого потока является диффеоморфизмом Морса—Смейла, который, в силу [42, 44], являются структурно устойчивыми. Следовательно, существует окрестность $U(X^1) \subset \mathit{Diff}^1(M^n)$ такая, что любой диффеоморфизм $f \in U(X^1)$ топологически сопряжен с X^1 посредством некоторого гомеоморфизма h, поэтому f включается в топологический поток $h^{-1}X^t h$.

Напомним, что диффеоморфизм f, заданный на замкнутом многообразии M^n, называется *диффеоморфизмом Морса—Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит из гиперболических периодических точек, и для любых двух точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение устойчивого многообразия W^s_p точки p и неустойчивого многообразия W^u_q точки q трансверсально. Везде далее рассматривается класс $G(M^n)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла на ориентируемых многообразиях.

В работе Ж. Палиса [42] сформулированы следующие необходимые условия включения диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ в топологический поток:

(1) *неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек*;
(2) *ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию*;
(3) *если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.*

В дальнейшем условия (1)–(3) будем называть *условиями Палиса*.

В работе [42] также показано, что при $n = 2$ эти условия являются достаточными (см. теорему 5.1) и поставлена задача обобщения этого результата на случай большей размерности (отметим, что из [28] следует, что необходимое и достаточное условие включения в поток диффеоморфизма Морса—Смейла окружности совпадает с первым условием Палиса). Проблема Палиса исчерпывающим образом решена в размерности три в работах [6, 13]; для более высокой размерности — лишь частично, для класса диффеоморфизмов Морса—Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере, см. [32]. Изложению этих результатов и связанных с ними топологических проблем посвящен настоящий обзор.

2. Свойства диффеоморфизмов Морса—Смейла и связанные обозначения

Напомним некоторые факты, связанные с динамикой диффеоморфизмов Морса—Смейла, к которым мы будем обращаться многократно в дальнейших разделах.

Пусть $f: M^n \to M^n$ — диффеоморфизм. Точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей точкой* диффеоморфизма f, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geqslant N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$. Очевидно, что периодическая точка является неблуждающей. Согласно определению диффеоморфизма Морса—Смейла его неблуждающее множество совпадает с множеством периодических точек.

Периодическая точка p периода m диффеоморфизма f называется *гиперболической*, если дифференциал $Df^m(p): T_pM^n \to T_pM^n$, рассматриваемый как линейное отображение касательного пространства T_pM^n в себя, не имеет собственных значений, равных по модулю единице. Согласно теореме Гробмана—Хартмана [8, 9, 34], в некоторой окрестности гиперболической периодической точки p диффеоморфизм f^m топологически сопряжен линейному диффеоморфизму, определяемому матрицей Якоби $\left.\left(\dfrac{\partial f^m}{\partial x}\right)\right|_p$.

Отсюда получаем, что для гиперболической периодической точки p существуют так называемые *устойчивое многообразие* $W^s_p = \{x \in M^n : \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^{km}(x), p) = 0\}$ и *неустойчивое многообразие* $W^u_p = \{x \in M^n : \lim\limits_{n\to+\infty} d(f^{-km_p}(x), p) = 0\}$, где d — метрика на M^n. Неустойчивые и устойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Число j, равное числу собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших единицы и, соответственно, совпадающее с размерностью неустойчивого многообразия $\dim W^u_p$, называется *индексом Морса* гиперболической точки p. Тогда размерность устойчивого многообразия вычисляется по формуле $\dim W^s_p = n - j$.

Везде в дальнейшем мы будем обозначать через Ω^j_f, $j \in \{0, \ldots, n\}$ множество гиперболических периодических точек диффеоморфизма f с индексом Морса j. Точка с индексом Морса $0 < j < n$ называется *седловой*, остальные точки называются *узловыми*, при этом узловая точка с индексом 0 называется *стоком*, а с индексом n — *источником*.

Напомним, что *n-шаром* (*n-диском*) называется многообразие с краем, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1\}$. *Сферой* называется многообразие S^n, гомеоморфное границе $\mathbb{S}^{n-1}$ шара $\mathbb{B}^n$.

В силу сопряженности с линейным сжатием, в окрестности неподвижной стоковой точки p существует замкнутый n-шар $U_p \subset W^s_p$ такой, что $f(U_p) \subset \operatorname{int} U_p$ и $\bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(U_p) = p$. Таким образом, стоковая гиперболическая неподвижная точка является аттрактором диффеоморфизма f в смысле следующего определения.

Замкнутое f-инвариантное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \operatorname{int} U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей*, а объединение $\bigcup\limits_{k\geqslant 0} f^{-k}(U_A)$ называется *бассейном* аттрактора. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

Для любой периодической гиперболической точки p компонента связности ℓ^s_p (ℓ^u_p) множества $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) называется *сепаратрисой точки* p. Для любого подмножества $P \subset \Omega_f$ будем обозначать через W^u_P (W^s_P) объединение неустойчивых (устойчивых) многообразий всех точек из множества P.

Тесная связь топологии несущего многообразия с динамическими свойствами диффеоморфизмов Морса—Смейла во многом объясняется следующим фактом (см. [35, 47]).

Предложение 2.1. *Пусть $f: M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда W^u_p и W^s_p являются гладкими подмногообразиями многообразия M^n, диффеоморфными $\mathbb{R}^j$ и $\mathbb{R}^{n-j}$, соответственно, для любой периодической точки $p \in \Omega_f$, и $M^n = \bigcup\limits_{p\in\Omega_f} W^u_p = \bigcup\limits_{p\in\Omega_f} W^s_p$.*

Хотя инвариантные многообразия седловых периодических точек диффеоморфизма Морса—Смейла f являются подмногообразиями многообразия M^n, их замыкания могут иметь сложную топологическую структуру. Например, такое поведение имеет место, когда сепаратриса седловой точки участвует в гетероклинических пересечениях.

Пусть $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \Omega_f$ — различные седловые периодические точки диффеоморфизма Морса—Смейла f. Пересечение инвариантных многообразий $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$, в случае $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2} \neq \varnothing$, называется *гетероклиническим*. Поскольку инвариантные многообразия пересекаются трансверсально и каждое из $W^s_{\sigma_1}$, $W^u_{\sigma_2}$ является подмногообразием, то любая компонента связности гетероклинического пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}$ также является подмногообразием. Если $\dim\left(W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}\right) \geqslant 1$, то компонента связности такого пересечения называется *гетероклиническим многообразием*. В частности, если $\dim\left(W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_2}\right) = 1$, то гетероклиническое многообразие называется *гетероклинической кривой*.

Асимптотическое поведение неустойчивой сепаратрисы в общем случае описывается следующим предложением.

Предложение 2.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда*

$$cl(\ell^u_p) \setminus (\ell^u_p \cup p) = \bigcup_{r \in \Omega_f : \ell^u_p \cap W^s_r \neq \varnothing} W^u_r$$

для любой неустойчивой сепаратрисы ℓ^u_p периодической точки $p \in \Omega_f$. В частности, если ℓ^u_p — седловая сепаратриса, не участвующая в гетероклинических пересечениях, то $cl(\ell^u_\sigma) \setminus (\ell^u_\sigma \cup \sigma) = \{\omega\}$, где ω — стоковая периодическая точка. При этом, если $j = 1$, то $cl(\ell^u_\sigma)$ — топологически вложенная дуга в M^n, если $j \geqslant 2$, то $cl(\ell^u_\sigma)$ — топологически вложенная в M^n сфера $\mathbb{S}^j$.

3. Условия Палиса

В этом разделе мы приводим доказательство необходимости выполнения условий Палиса для включения диффеоморфизма Морса—Смейла в топологический поток, предложенное Палисом в [42].

Лемма 3.1 (необходимые условия Палиса)**.** *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, включающийся в топологический поток X^t. Тогда*:

1) *неблуждающее множество Ω_f совпадает с множеством неподвижных точек*;
2) *ограничение диффеоморфизма f на каждое инвариантное многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ сохраняет его ориентацию*;
3) *если для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто, то оно не содержит компактных компонент связности.*

Доказательство.

1) Предположим, что множество Ω_f содержит периодическую точку p периода m_p, большего единицы. Тогда точка p принадлежит замкнутой траектории потока X^t, и все точки этой траектории являются периодическими периода m_p для потока X^t. Но тогда все эти точки являются периодическими и для диффеоморфизма f, являющегося сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X^t, что противоречит конечности его неблуждающего множества.

2) Из гиперболичности множества Ω_f следует, что инвариантное многообразие W^u_p произвольной неподвижной точки $p \in \Omega_f$ либо совпадает с точкой p, либо является гладко вложенным в M^n открытым диском размерности $\dim W^u_p \in \{1 \ldots, n\}$. В случае $W^u_p = p$ по определению f сохраняет ориентацию W^u_p. Пусть $\dim W^u_p > 0$. Так как f включается в поток X^t, то W^u_p является инвариантным относительно потока X^t, следовательно, ограничение $X^t|_{W^u_p}$ потока X^t на множество W^u_p является изотопией от тождественного отображения к $f|_{W^u_p}$, поэтому $f|_{W^u_p}$ является сохраняющим ориентацию отображением.

3) Пусть для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ непусто и K — компактная компонента связности этого пересечения. Тогда множество K инвариантно относительно потока X^t и, следовательно, инвариантно относительно диффеоморфизма f. Пусть $x \in K$, тогда последовательность $\{f^i(x)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x^* \in K$, следовательно, точка x^* является неблуждающей, что невозможно, так как $x^* \in W^s_p$. $\square$

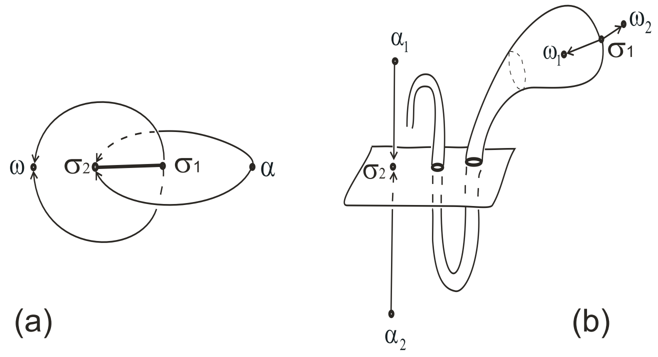

Рис. 1. Пересечения инвариантных многообразий седловых точек

На рисунке 1 приведены фазовые портреты диффеоморфизмов Морса—Смейла, инвариантные многообразия седловых точек которых: a) пересекаются по некомпактной кривой; b) пересекаются по счетному множеству компактных кривых.

4. Включение в поток диффеоморфизмов окружности

Единственное замкнутое многообразие размерности один — окружность $\mathbb{S}^1$.

В силу [28] гомеоморфизм $h:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий: 1) h имеет неподвижную точку, 2) h — периодический, 3) h имеет транзитивную орбиту. Из предложения 2.1 следует, что если f — диффеоморфизм Морса—Смейла, то его неблуждающее множество непусто (и конечно, по определению) и состоит из источниковых и стоковых периодических точек. Для включения в поток необходимо, чтобы f являлся сохраняющим ориентацию, тогда из неподвижности одной периодической точки следует неподвижность всех периодических точек диффеоморфизма f. Таким образом, необходимое и достаточное условие включения в топологический поток диффеоморфизма Морса—Смейла окружности состоит в неподвижности хотя бы одной его периодической точки. Приведем независимое доказательство этого факта.

Теорема 4.1. *Диффеоморфизм Морса—Смейла $f:\mathbb{S}^1\to\mathbb{S}^1$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его неблуждающее множество Ω_f состоит из неподвижных точек.*

Доказательство. Необходимость следует из условия (1) Палиса. Докажем достаточность. Пусть множество Ω_f состоит из неподвижных точек. Построим поток X^t на окружности такой, что $f=X^1$.

Множество неподвижных точек диффеоморфизма f делит окружность $\mathbb{S}^1$ на конечное число открытых дуг, каждая из которых является f-инвариантной. Пусть $l\in\mathbb{S}^1$ — одна таких дуг. Определим поток X^t_l на l такой, что f является сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока X^t_l. Пусть $c\subset l$ — компактная дуга, ограниченная точками $x\in l$ и $f(x)$, тогда существует диффеоморфизм $\varphi_c:[1,2]\to c$ такой, что $\varphi_c(1)=x,\varphi_c(2)=f(x)$. Отметим, что $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} f^i(c)=l$, поэтому для каждой точки $y\in l$ найдется целое i_y такое, что $f^{i_y}(y)\in c$. Определим гомеоморфизм $\varphi_l:\mathbb{R}_+\to l$ соотношением $\varphi_l(y)=2^{-i_y}\varphi_c^{-1}(f^{i_y}(y))$. Гомеоморфизм φ_l сопрягает линейное растяжение $a_+(s)=2s$, $s\in\mathbb{R}_+$ с ограничением $f|_l$ диффеоморфизма f на дугу l. Отображение a_+ включается в поток $a^t_+(s)=2^ts$. Положим $X^t_l(y)=\varphi_l(a^t_+(\varphi_l^{-1}(y)))$, тогда $X^1_l(y)=f|_l$.

Аналогично определим поток на всех дугах окружности, заключенных между соседними неподвижными точками и доопределим полученные потоки в неподвижных точках. В результате получим искомый поток X^t на окружности такой, что $X^1=f$. □

5. Включение в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла поверхностей

Следующая теорема доказана в [42] (см. теорему 4.2 на с. 402).

Теорема 5.1 (теорема Палиса)**.** *Если диффеоморфизм $f\in G(M^2)$ удовлетворяет условиям Палиса, то он включается в топологический поток.*

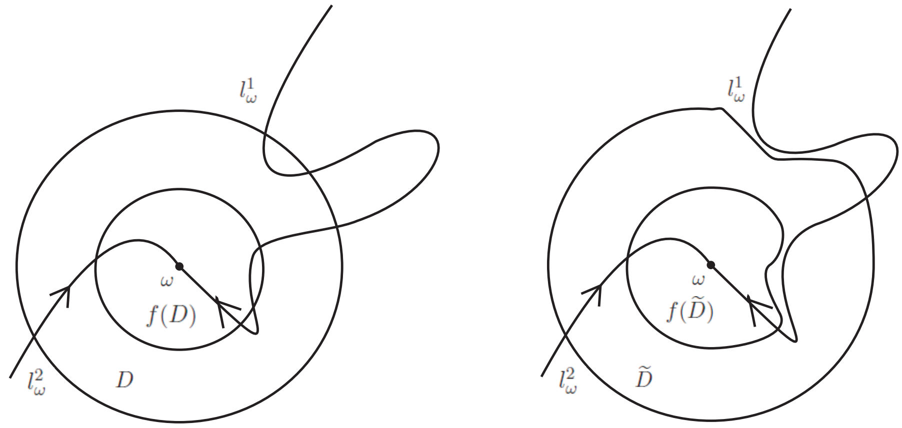

Рис. 2. Модификация диска D

Схема доказательства. Отметим, что для $n = 2$ условие (3) Палиса означает, что инвариантные многообразия различных седловых неподвижных точек диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ не пересекаются. В [42] для диффеоморфизма f непосредственно строится топологический поток X^t, сдвиг на единицу времени f^1 вдоль траекторий которого совпадает с f. Построение базируется на следующих шагах.

1) Из гиперболичности и условий (1)-(2) Палиса следует, что для любой седловой точки $p \in \Omega_f$ существует окрестность u_p и гомеоморфизм $h_p : u_p \to \mathbb{R}^2$ такой, что $f|_{u_p} = h_p^{-1} b h_p|_{u_p}$, где $b(x, y) = (1/2x, 2y)$ — линейный гомеоморфизм плоскости. Отображение b включается в поток $b^t(x, y) = ((1/2)^t x, 2^t y)$, поэтому ограничение диффеоморфизма f на множество u_p включается в топологический поток $g_p^t = h_p^{-1} b^t h_p|_{u_p}$. Положим $v = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 y^2 \leqslant 1, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 2\}$, $v_p = h_p^{-1}(v)$, $V_p = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} f^i(v_p)$, поставим в соответствие каждой точке $M \in V_p$ число $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^n(M) \subset v_p$ и определим поток G_p^t на множестве V_p соотношением $G_p^t(M) = f^{-n}(g_p^t(f^n(M)))$. Окрестность V_p назовем *линеаризующей окрестностью седловой точки* p. Очевидно, что линеаризующие окрестности можно выбрать так, чтобы для любых седловых точек $p \neq q$ выполнялось условие $V_p \cap V_q = \varnothing$. Обозначим через G^t поток на объединении всех линеаризующих окрестностей, для каждой седловой точки p совпадающий с G_p^t.

2) Пусть ω — стоковая неподвижная точка диффеоморфизма f. Из гиперболичности точки ω следует, что существует гладко вложенный диск $D \subset W^s_\omega$ такой, что $\omega \subset \operatorname{int} D$, $f(D) \subset \operatorname{int} D$.

Обозначим через $\ell^1_\omega, \dots, \ell^k_\omega$ множество всех сепаратрис седловых точек, принадлежащих множеству W^s_ω, и через $V^1_\omega, \dots, V^k_\omega$ компоненты связности линеаризующих окрестностей, принадлежащих W^s_ω такие, что $\ell^i_\omega \subset V^i_\omega$ для любого $i \in \{1, \dots, k\}$. Не уменьшая общности, положим, что граница диска D трансверсальна всем сепаратрисам седловых точек диффеоморфизма f, лежащим в многообразии W^s_ω, (этого всегда можно добиться малыми шевелениями) и, в силу непрерывности, траекториям потока $G^t \cap W^s_\omega$. Тогда пересечение $\partial D \cap \bigcup\limits_{p \in \Omega^1_f} V_p$ состоит из конечного числа компактных дуг. Тогда можно выбрать диск $\widetilde{D} \subset W^s_\omega$ со следующими свойствами:

1. $\omega \subset \operatorname{int} \widetilde{D}$, $f(\widetilde{D}) \subset \operatorname{int} \widetilde{D}$,
2. для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ пересечение $V^i_\omega \cap (\widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D})$ состоит в точности из одной полосы.

На рис. 2 схематично показана процедура модификации диска D в диск $\widetilde{D}$, граница которого пересекается с каждой сепаратрисой из множества $\ell^1_\omega, \dots, \ell^k_\omega$ в единственной точке.

Тогда ограничение потока G^t на множество $\widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D}) \cap \bigcup\limits_{p \in \Omega^1_f} V_p$ естественным образом достраивается до потока g^t_ω на этом множестве, который доопределяется на множестве $W^s_\omega \setminus \omega = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} f^i(\widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D}))$ следующим образом. Каждой точке $M \in W^s_\omega \setminus \omega$ поставим в соответствие целое число n такое, что $f^n(M) \subset \widetilde{D} \setminus f(\operatorname{int} \widetilde{D})$, и положим $g^t_\omega(M) = f^{-n}(G^t(f^n(M))$. Теперь для построения искомого потока X^t осталось только доопределить поток, составленный из потоков G^t, G^t_ω, в неподвижных источниковых и стоковых точках. $\square$

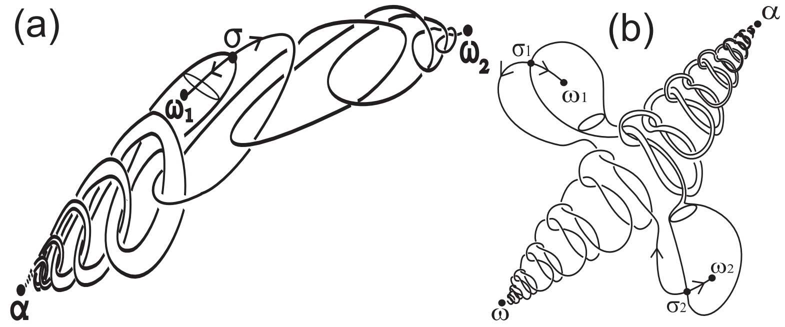

Рис. 3. Диффеоморфизмы с дико вложенными сепаратрисами

6. Включение в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла трехмерных многообразий

6.1. Эффекты размерности 3. Как оказалось, в размерности $n = 3$ дополнительным препятствием для включения диффеоморфизма Морса—Смейла в топологический поток является возможность дикого вложения сепаратрис седловых точек, см. рис. 3. Первые примеры таких диффеоморфизмов построены в работах [16, 45, 46].

Напомним определение диких многообразий. Пусть M^n — топологическое многообразие размерности $n \geqslant 3$ и $N^k \subset \operatorname{int} M^n$ — компактное топологическое многообразие размерности $k < n$, вообще говоря, с непустым краем. Согласно [20], многообразие N^k называется *локально плоским в точке* $x \in N^k$, если существует окрестность $U(x) \subset M^n$ точки x и гомеоморфизм $\varphi : U(x) \to \mathbb{R}^n$ такой, что $\varphi(N^k \cap U(x)) \subset \mathbb{R}^k$, где $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство, а $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ — гиперплоскость размерности k. Если многообразие N^k является локально плоским в каждой своей точке, то оно называется *локально плоским*. Заметим, что в последнем случае множество N^k является подмногообразием многообразия M^n. Если многообразие N^k не является локально плоским хотя бы в одной точке $x \in N^k$, то оно называется *диким* в M^n, а точка x называется *точкой дикости*.

На рисунке 3 справа изображен фазовый портрет диффеоморфизма $f \in G(S^3)$, у которого замыкание двумерной сепаратрисы и одной из одномерных сепаратрис седловой неподвижной точки σ (содержащей в своем замыкании стоковую точку ω_2) являются дикой сферой и дугой соответственно.

Основное препятствие к обобщению доказательства теоремы 5.1 для размерности $n = 3$ состоит в том, что в общем случае в окрестности стоковой точки ω не существует шара со свойствами, аналогичными свойствам диска $\widetilde{D}$. Так, для диффеоморфизма, фазовый портрет которого изображен на рис. 3 слева, граница любого шара, содержащего стоковую точку ω_2, пересекается с сепаратрисой седла σ, содержащей точку ω_2 в замыкании, минимум в трех точках. Для диффеоморфизма f, фазовый портрет которого изображен на рис. 3 справа, в окрестности точки ω существует шар D, граница которого пересекается с каждой сепаратрисой, принадлежащей W^s_ω, в единственной точке. Но не существует расслоения кольца $D \setminus \operatorname{int} f(D)$ на отрезки, которое бы содержало в качестве слоев дуги этих одномерных сепаратрис. Поэтому уже ограничение таких диффеоморфизмов на устойчивые многообразия стоковых точек не включаются в топологические потоки, для которых одномерные сепаратрисы, содержащие эти стоковые точки в своем замыкании, совпадали бы с траекториям потока. При этом, в силу результатов работы К. Куперберг [38], дикая дуга может быть траекторией некоторого топологического потока на 3-многообразии.

Для более точного понимания препятствий включения диффеоморфизмов из класса $G(M^3)$ в топологический поток напомним несколько определений.

Множество $\mathbb{F} \subset \mathbb{R}^n$ будем называть *стандартным одномерным пучком*, если оно состоит из конечного числа прямолинейных лучей с началом в точке $O(0, \ldots, 0)$. Подмножество $F \subset \mathbb{R}^n$, снабженное индуцированной топологией и гомеоморфное $\mathbb{F}$, будем называть *одномерным пучком*. При этом пучок F будем называть *ручным*, если существует гомеоморфизм $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что $H(F) = \mathbb{F}$; в противном случае пучок F будем называть *диким*.

Частным случаем одномерного пучка является дуга. Первые примеры диких дуг в $\mathbb{R}^3$ были построены Е. Артином и Р. Фоксом в 1948 году (см. [14]). Отметим, что ручность каждого из элементов, входящих в пучок $F \subset \mathbb{R}^3$, еще не является гарантией того, что пучок в целом будет ручным. Например, в работе [26] построен пример так называемого *умеренно дикого одномерного*

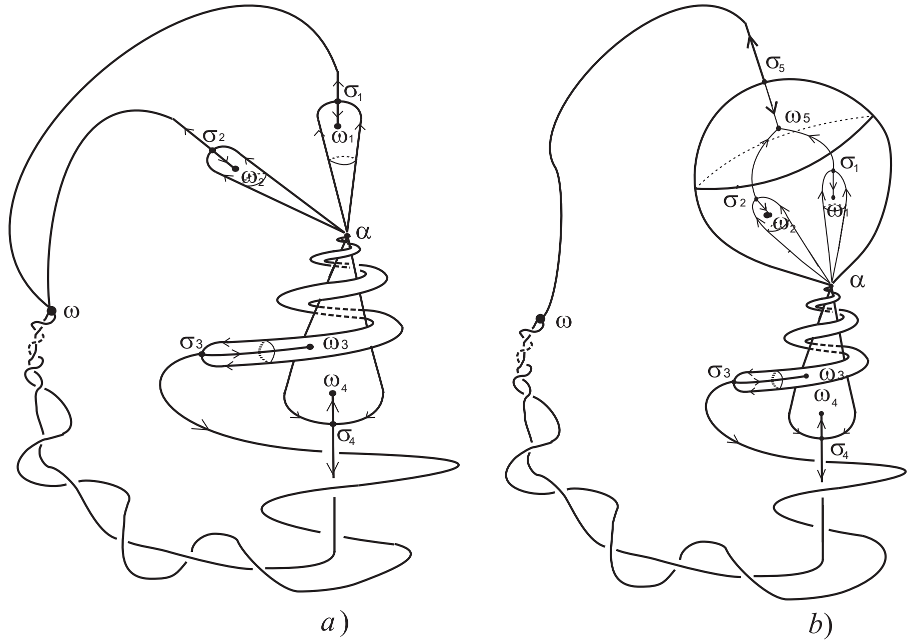

Рис. 4. Фазовые портреты диффеоморфизмов из класса $G(\mathbb{S}^3)$, не включающихся ни в какие топологические потоки: a) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но пучок F_ω не является тривиальным; b) диффеоморфизм, все пучки одномерных сепаратрис которого являются тривиальными.

пучка, т. е. такого дикого пучка, что любой содержащийся в нем пучок из меньшего числа дуг является ручным.

Пусть α — источниковая точка диффеоморфизма $f \in G(M^3)$. Будем обозначать через L_α объединение всех одномерных устойчивых сепаратрис седловых точек диффеоморфизма f, принадлежащих W^u_α. Положим $F_\alpha = L_\alpha \cup \alpha$ и назовем F_α *пучком одномерных устойчивых сепаратрис*.

Пучок одномерных устойчивых сепаратрис F_α назовем *ручным*, если существует гомеоморфизм $h_\alpha : W^u_\alpha \to \mathbb{R}^3$, отображающий F_α на стандартный ручной пучок. В противном случае будем говорить, что пучок сепаратрис F_α является *диким*. Если ручной (дикий) пучок F_α содержит только одну сепаратрису, то будем называть эту сепаратрису *ручной* (*дикой*).

Аналогично определяется *ручной* (*дикий*) *пучок* одномерных неустойчивых сепаратрис F_ω, состоящий из стоковой точки ω и всех одномерных неустойчивых сепаратрис L_ω седловых точек диффеоморфизма f, принадлежащих W^s_ω.

На рис. 3, a) одномерная сепаратриса, идущая в стоковую точку ω_2, является дикой дугой, а пучок сепаратрис, идущих в сток ω на рис. 3, b), является умеренно диким пучком.

Как оказалось, необходимое условие включения диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ в поток заключается даже в более сильном, нежели ручность, требовании, использующем линейное растяжение евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, определяемое формулой $A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, 2x_3)$.

Пучок одномерных сепаратрис F_α называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $H_\alpha : W^u_\alpha \to \mathbb{R}^3$ такой, что $f|_{W^u_\alpha} = H^{-1}_\alpha A H_\alpha|_{W^u_\alpha}$ и $H_\alpha(F_\alpha)$ — стандартный одномерный пучок. Аналогично определяется *тривиальный пучок* одномерных сепаратрис F_ω.

Из рассуждений выше ясно, что тривиальность всех пучков одномерных сепаратрис является необходимым условием включения диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ в топологический поток (строгое доказательство этого факта аналогично доказательству предложения 6.1, которое мы приводим ниже). Сюрпризом оказался тот факт, что добавление к списку Палиса условия тривиальности всех пучков одномерных сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ не приводит к достаточным условиям его включения в топологический поток. Иллюстрирующий этот факт пример построен в работе [13], его фазовый портрет приведен на рисунке 4, b). На рисунке 4, a) изображен фазовый портрет диффеоморфизма из класса $G(S^3)$, все пучки одномерных сепаратрис которого являются ручными, но среди них есть пучок, не являющийся тривиальным.

6.2. Схема диффеоморфизма. Решение проблемы Палиса в случае $n \geqslant 3$ оказалось возможным благодаря существенному продвижению в решении задачи топологической классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла. В цикле работ [1, 2, 16–19, 46] С. Бонатти, В. З. Гринесом, О. В. Починкой, Е. Пеку, В. С. Медведевым и Ф. Лауденбахом для диффеоморфизмов Морса—Смейла на трехмерных многообразиях был введен новый полный топологический инвариант, названный схемой диффеоморфизма, и решена проблема реализации всех классов топологической сопряженности. Благодаря этому удалось сформулировать необходимые и достаточные условия включения диффеоморфизма Морса—Смейла в топологический поток, выражающиеся в весьма компактном и естественном условии, накладываемом на схему диффеоморфизма. Для точной формулировки этого условия приведем вначале определение схемы диффеоморфизма.

Напомним, что через Ω^i_f обозначено множество неподвижных точек диффеоморфизма $f: M^3 \to M^3$ Морса—Смейла, размерность неустойчивых многообразий которых равна $i \in \{0,1,2,3\}$. Класс таких сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла обозначим через $G(M^3)$.

Представим многообразие M^3 в виде объединения трех множеств $A_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} W^u_\sigma) \cup \Omega^0_f$, $R_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^2_f} W^s_\sigma) \cup \Omega^3_f$, $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$. Из [7] следует, что множества A_f, R_f, V_f являются связными, множество A_f является аттрактором, R_f — репеллером, а V_f состоит из блуждающих орбит гомеоморфизма f, идущих от R_f к A_f.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f. Установлено, что $\widehat{V}_f$ является многообразием, а естественная проекция $p_f : V_f \to \widehat{V}_f$ является накрытием. При этом накрытие p_f индуцирует эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\hat{V}_f)$ целое число m такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет точку x с точкой $f^m(x)$.

Положим $\hat{L}^s_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} p_f(W^s_\sigma \setminus \sigma)$, $\hat{L}^u_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^2_f} p_f(W^u_\sigma \setminus \sigma)$.

Определение 6.1. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f, \eta_f)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f \in G(M^3)$.

Определение 6.2. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмом $f, f' \in G(M^3)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ такой, что $\hat{\varphi}(\hat{L}^s_f) = \hat{L}^s_{f'}$, $\hat{\varphi}(\hat{L}^u_f) = \hat{L}^u_{f'}$ и $\eta_f = \eta_{f'}\hat{\varphi}_*$.

В [17, 19] доказан следующий факт.

Утверждение 6.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

6.3. Необходимые и достаточные условия включения в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла трехмерных многообразий. Для формулировки условий включения диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ в топологический поток определим стандартную схему.

Положим $g_f = \dfrac{|\Omega^1_f \cup \Omega^2_f| - |\Omega^0_f \cup \Omega^3_f| + 2}{2}$, где $|P|$ означает мощность множества P. Обозначим через $\mathbb{S}_{g_f}$ ориентируемую замкнутую поверхность рода g_f и положим $\mathbb{V}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$.

Определим на множестве $\mathbb{V}_{g_f}$ поток $A^t_{g_f}$ соотношением $A^t_{g_f}(x,s) = (x, s+t)$, где $x \in \mathbb{S}_{g_f}$, $s \in \mathbb{R}$. По построению $\widehat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{V}_{g_f}/_{A^1_{g_f}}$. Обозначим через $p_{g_f} : \mathbb{V}_{g_f} = \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ естественную проекцию.

Определение 6.3. Схему S_f диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_f : \widehat{V}_f \to \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такой, что для каждой компоненты связности $\hat{\lambda}$ множества $\hat{L}^s_f \cup \hat{L}^u_f$ найдется простая замкнутая дуга $c_{\hat{\lambda}} \subset \mathbb{S}_{g_f}$ такая, что $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}) = c_{\hat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$.

В работах [6, 13] доказан следующий факт.

Теорема 6.1. *Диффеоморфизм $f \in G(M^3)$ включается в топологический поток тогда и только тогда, когда его схема является тривиальной.*

Изложим здесь схему доказательства теоремы 6.1, разбив его на два утверждения.

Предложение 6.1. *Пусть диффеоморфизм $f \in G(M^3)$ включается в топологический поток. Тогда его схема S_f является тривиальной.*

Схема доказательства. Если диффеоморфизм f включается в некоторый топологический поток X^t ($f = X^1$), то неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f совпадает с множеством состояний равновесия потока X^t, при этом устойчивое (неустойчивое) многообразие любой неподвижной точки $p \in \Omega_f$ совпадает с устойчивым (неустойчивым) многообразием соответствующего состояния равновесия потока X^t.

Обозначим через X^t_f ограничение потока X^t на множество V_f. Из построения множества V_f следует, что для любой точки $x \in V_f$ имеют место включения $\lim\limits_{t\to+\infty} X^t_f(x) \in A_f$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} X^t_f(x) \in R_f$. Таким образом, для любых точек $p, q \in V_f$ существуют окрестности $U_p, U_q \subset V_f$ и константа $T > 0$ такие, что $X^t_f(U_p) \cap U_q = \varnothing$ для любого $|t| > T$. Тогда из [27, теорема 3] следует, что поток X^t_f является параллелизуемым, т. е. существует множество $\Sigma_f \subset V_f$ и гомеоморфизм $\xi_f : V_f \to \Sigma_f \times \mathbb{R}$ такие, что $\bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} X^t_f(\Sigma_f) = V_f$ и $\xi_f(X^t_f(z)) = (z, t)$ для любых $z \in \Sigma_f, t \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что множество Σ_f является деформационным ретрактом многообразия V_f. Из [10, теоремы III.4, IV.3; с. 56, 69] следует, что топологическая размерность Σ_f равна двум. Тогда в силу [49, теорема 2] Σ_f является многообразием без края. Таким образом, Σ_f — замкнутая ориентируемая поверхность. Обозначим через ρ_f род этой поверхности. Покажем теперь, что $\rho_f = g_f$.

По построению поверхность Σ_f делит многообразие на две части, замыкания которых обозначим через P_{A_f}, P_{R_f}, полагая, что $A_f \subset \operatorname{int} P_{A_f}$, $R_f \subset \operatorname{int} P_{R_f}$. Более того, аттрактор A_f является деформационным ретрактом P_{A_f} и, следовательно, они имеют одинаковый гомотопический тип, а значит, и эйлерову характеристику. При этом $\chi(P_{A_f}) = 1 - \rho_f$, поскольку P_{A_f} — 3-многообразие с краем Σ_f и $\chi(A_f) = |\Omega^0_f| - |\Omega^1_f|$, поскольку A_f — клеточный комплекс, состоящий из $|\Omega^0_f|$ нульмерных и $|\Omega^1_f|$ одномерных клеток. Таким образом, $|\Omega^0_f| - |\Omega^1_f| = 1 - \rho_f$. Из аналогичных рассуждений для аттрактора получаем, что $|\Omega^3_f| - |\Omega^1_f| = 1 - \rho_f$. Складывая два последних равенства, получаем, что $|\Omega^0_f| - |\Omega^1_f| + |\Omega^3_f| - |\Omega^2_f| = 2 - 2\rho_f$, откуда $\rho_f = \dfrac{|\Omega^1_f \cup \Omega^2_f| - |\Omega^0_f \cup \Omega^3_f| + 2}{2}$ и, следовательно, $\rho_f = g_f$.

Поскольку каждая двумерная сепаратриса λ диффеоморфизма f является объединением траекторий потока X^t_f, гомеоморфных $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, то существует простая замкнутая кривая $\gamma_\lambda \subset \Sigma_f$ такая, что $\xi_f(\lambda) = \gamma_\lambda \times \mathbb{R}$. Тогда существует гомеоморфизм $h_f : \Sigma_f \to \mathbb{S}_{g_f}$ такой, что $c_\lambda = h_f(\gamma_\lambda)$ — простая гладкая замкнутая кривая для любой двумерной сепаратрисы λ. Определим гомеоморфизм $\psi_f : V_f \to \mathbb{V}_{g_f}$ соотношением $\psi_f(X^t_f(z)) = A^t_{g_f}(h_f(z))$. По построению гомеоморфизм ψ_f сопрягает потоки X^t_f и $A^t_{g_f}$, а значит, и их сдвиги на единицу времени. При этом $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$. По построению $\hat{\mathbb{V}}_{g_f} = \mathbb{V}_{g_f}/A^1_{g_f}$. Тогда гомеоморфизм $\hat{\psi}_f = p_{g_f}\psi_f p_f^{-1} : \hat{V}_f \to \hat{\mathbb{V}}_{g_f}$ удовлетворяет условию определения 6.3. Таким образом, схема S_f является тривиальной и утверждение доказано. □

Предложение 6.2. *Пусть схема S_f диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальна. Тогда f включается в топологический поток.*

Схема доказательства. Построим топологический поток $\tilde{X}^t$ на многообразии M^3, сдвиг на единицу времени которого топологически сопряжен с диффеоморфизмом f посредством некоторого гомеоморфизма $h : M^3 \to M^3$. Отсюда будет следовать, что диффеоморфизм f включается в топологический поток $X^t = h\tilde{X}^t h^{-1}$.

Построение искомого потока проводится аналогично предложенному в работе [18] (см. также в [1] более детально) решению задачи реализации классов топологической сопряженности диффеоморфизмов. Перечислим принципиальные шаги в построении.

Шаг 1. Из определения тривиальной схемы следует, что существует гомеоморфизм $\psi_f : V_f \to \mathbb{V}_{g_f}$ такой, что:

1) $f|_{V_f} = \psi_f^{-1} A^1_{g_f} \psi_f$, где $A^1_{g_f}$ — сдвиг на единицу времени потока $A^t_{g_f}$;
2) для любой двумерной сепаратрисы λ диффеоморфизма f существует простая гладкая замкнутая кривая c_λ на поверхности $\mathbb{S}_{g_f}$ такая, что $\psi_f(\lambda) = c_\lambda \times \mathbb{R}$.

Напомним, что L^s_f, L^u_f — объединение всех устойчивых, неустойчивых, соответственно, двумерных сепаратрис диффеоморфизма f. Положим $\mathbb{L}^s = \psi_f(L^s_f)$ и $\mathbb{L}^u = \psi_f(L^u_f)$. Для множества цилиндров $\mathbb{L}^\delta = \lambda^\delta_1 \cup \dots \cup \lambda^\delta_{l^\delta}$, $\delta \in \{s,u\}$ обозначим через $N(\mathbb{L}^\delta) = N(\lambda^\delta_1) \cup \dots \cup N(\lambda^\delta_{l^\delta})$ множество их попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей таких, что $N(\lambda^\delta_i) = K^\delta_i \times \mathbb{R}$, где $K^\delta_i \subset \mathbb{S}_{g_f}$ — гладкое двумерное кольцо для каждого $i = 1, \dots, l^\delta$.

В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим подмножество $N = \{(x_1,x_2,x_3) : (x_1^2+x_2^2)x_3^2 < 1\}$ и зададим на нем поток B^t формулой $B^t(x_1,x_2,x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^t x_3)$. Положим $\hat{N}^s = (N \setminus Ox_3)/B^1$. По построению многообразие $\hat{N}^s$ диффеоморфно $K \times \mathbb{R}$, где K стандартное двумерное кольцо. Тогда существует диффеоморфизм $\mu^s_i : N(\lambda^s_i) \to (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $A^t_{g_f}|_{N(\lambda^s_i)}$ и $B^t|_{N \setminus Ox_3}$. Обозначим через $\mu^s : N(\mathbb{L}^s) \to (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu^s_1, \dots, \mu^s_{l^s}$. Положим $Q^s = \mathbb{V}_{g_f} \bigcup\limits_{\mu^s} (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$. Тогда топологическое пространство Q^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^s = (\mathbb{V}_{g_f}) \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^s})$ и обозначим через $p_s : \bar{Q}^s \to Q^s$ естественную проекцию. Положим $p_{s,1} = p_s|_{\mathbb{V}_{g_f}}$, $p_{s,2} = p_s|_{N \times \mathbb{Z}_{l^s}}$. Тогда поток $\tilde{Y}^t_s$ на многообразии Q^s определяется формулой

$$\tilde{Y}^t_s(x) = \begin{cases} p_{s,1}(A^t_{g_f}(p^{-1}_{s,1}(x))), \ x \in p_{s,1}(\mathbb{V}_{g_f}); \\ p_{s,2}(B^t(p^{-1}_{s,2}(x))), \ x \in p_{s,2}(N \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{l^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{Y}^t_s$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице.

Шаг 2. Снова обозначим через $\mathbb{L}^u$, $N(\mathbb{L}^u)$ образы этих множеств относительно проекции p_s. Положим $\hat{N}^u = (N \setminus Ox_3)/(B^1)^{-1}$. Тогда существует диффеоморфизм $\mu^u_i : N(\lambda^u_i) \to (N \setminus Ox_3)$, сопрягающий потоки $\tilde{Y}^t_s|_{N(\lambda^u_i)}$ и $B^{-t}|_{N \setminus Ox_3}$ для любого $i = 1, \dots, l^u$. Обозначим через $\mu^u : N(\mathbb{L}^u) \to (N \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{l^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\mu^u_1, \dots, \mu^u_{l^u}$. Положим $Q^u = Q^s \bigcup\limits_{\mu^u} (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$. Тогда топологическое пространство Q^u является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{Q}^u = Q^s \cup (N \times \mathbb{Z}_{l^u})$ и обозначим через $p_u : \bar{Q}^u \to Q^u$ естественную проекцию. Положим $p_{u,1} = p_u|_{Q^s}$, $p_{u,2} = p_u|_{N \times \mathbb{Z}_{l^u}}$. Тогда поток $\tilde{Y}^t_u$ на многообразии Q^u определяется формулой

$$\tilde{Y}^t_u(x) = \begin{cases} p_{u,1}(\tilde{Y}^t_s(p^{-1}_{u,1}(x))), \ x \in p_{u,1}(Q^s); \\ p_{u,2}(B^{-t}(p^{-1}_{u,2}(x))), \ x \in p_{u,2}(N \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{l^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{Y}^t_u$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, и l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум.

Шаг 3. Положим $R^s = Q^u \setminus W^s_{\Omega_{\tilde{Y}^t_u}}$ и обозначим через $\rho^s_1, \dots, \rho^s_{n^s}$ компоненты связности множества R^s. Определим на многообразии $\mathbb{R}^3$ топологический поток D^t формулой $D^t(x_1,x_2,x_3) = (2^{-t}x_1, 2^{-t}x_2, 2^{-t}x_3)$. Тогда каждая компонента ρ^s_i диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\tilde{Y}^t_u|_{\rho^s_i}$ гладко сопряжен с потоком $D^t|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν^s_i. Обозначим через $\nu^s : R^s \to (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^s}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu^s_1, \dots, \nu^s_{n^s}$. Положим $M^s = Q^u \bigcup\limits_{\nu^s} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$. Тогда топологическое пространство M^s является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим $\bar{M}^s = Q^u \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$ и обозначим через $q_s : \bar{M}^s \to M^s$ естественную проекцию. Положим $q_{s,1} = q_s|_{Q^u}$, $q_{s,2} = q_s|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s}}$. Тогда поток $\tilde{X}^t_s$ на многообразии M^s определяется формулой

$$\tilde{X}^t_s(x) = \begin{cases} q_{s,1}(\tilde{Y}^t_u(q^{-1}_{s,1}(x))), \ x \in q_{s,1}(Q^u); \\ q_{s,2}(B^{-t}(q^{-1}_{s,2}(x))), \ x \in q_{s,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{n^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{X}^t_s$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, и n^s стоковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 4. Положим $R^u = M^s \setminus W^u_{\Omega_{\tilde{X}^t_s}}$ и обозначим через $\rho^u_1, \ldots, \rho^u_{n^u}$ компоненты связности множества R^u. Тогда каждая компонента ρ^u_i диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ и поток $\tilde{X}^t_s|_{\rho^u_i}$ гладко сопряжен с потоком $D^{-t}|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$ посредством некоторого диффеоморфизма ν^u_i. Обозначим через $\nu^u : R^u \to (\mathbb{R}^3 \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{n^u}$ диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов $\nu^u_1, \ldots, \nu^u_{n^u}$. Положим $M^u = M^s \bigcup\limits_{\nu^u} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$. Тогда топологическое пространство M^u является гладким связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Положим $\bar{M}^u = M^s \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$ и обозначим через $q_u : \bar{M}^u \to M^u$ естественную проекцию. Положим $q_{u,1} = q_u|_{M^s}$, $q_{u,2} = q_u|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u}}$. Тогда поток $\tilde{X}^t_u$ на многообразии M^u определяется формулой

$$\tilde{X}^t_u(x) = \begin{cases} q_{u,1}(\tilde{X}^t_s(q^{-1}_{u,1}(x))), \ x \in q_{u,1}(M^s); \\ q_{u,2}(B^{-t}(q^{-1}_{u,2}(x))), \ x \in q_{u,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), \ i \in \mathbb{Z}_{n^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока $\tilde{X}^t_u$ состоит из l^s седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице, l^u седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, n^s стоковых неподвижных гиперболических точек и n^u источниковых неподвижных гиперболических точек.

Шаг 5. Положим $\tilde{f} = \tilde{X}^1_u$. По построению диффеоморфизм $\tilde{f}$ является диффеоморфизмом Морса—Смейла на многообразии M^u и его ограничение $\tilde{f}|_{V_{\tilde{f}}}$ топологически сопряжено с диффеоморфизмом $f|_{V_f}$ посредством гомеоморфизма, переводящего двумерные сепаратрисы диффеоморфизма $\tilde{f}$ в двумерные сепаратрисы диффеоморфизма f с сохранением устойчивости. Таким образом, схемы диффеоморфизмов $\tilde{f}$ и f эквивалентны, а сами диффеоморфизмы $\tilde{f}, f$ в силу утверждения 6.1 топологически сопряжены. Следовательно, $M^u = M^3$ и $\tilde{X}^t = \tilde{X}^t_u$ — искомый поток. $\square$

6.4. Связь условия тривиальности схемы и условий Палиса. Пусть схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ тривиальна. Покажем, что отсюда следуют все условия Палиса.

1) Покажем, что все седловые периодические точки диффеоморфизма f имеют период, равный единице. Предположим, что $\sigma \in \Omega^2_f$ — седловая точка периода m_σ такая, что диффеоморфизм $f|_{W^u_\sigma}$ является сохраняющим ориентацию. Тогда существует гомеоморфизм $h : W^u_\sigma \to \mathbb{R}^2$ такой, что $hf^{m_\sigma}|_{W^u_\sigma} = a_+ h$, где $a_+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное отображение плоскости, задаваемое формулой $a_+(x_1, x_2) = (2x_1, 2x_2)$. Положим $K = \{(x_1, x_2)|\ 1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 4\}$. Кольцо K $(h^{-1}(K))$ является фундаментальной областью действия a_+ (f) на множестве $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ $(\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma-1} W^u_{f^i(\sigma)} \setminus f^i(\sigma))$. Пространство орбит $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/_{a_+}$ $(\hat{\lambda}^u_\sigma = (\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma-1} W^u_{f^i(\sigma)} \setminus f^i(\sigma))/_f = p_f(\bigcup\limits_{i=0}^{m_\sigma-1} W^u_{f^i(\sigma)} \setminus f^i(\sigma))$ этого действия получается склейкой компонент края кольца K $(h^{-1}(K))$ по диффеоморфизму a_+ (f). Так как a_+ является сохраняющим ориентацию отображением, то многообразие $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/_{a_+}$ и, следовательно, многообразие $\hat{\lambda}^u_\sigma$ диффеоморфно тору. Выберем на множестве $h^{-1}(K)$ дугу $\tilde{l}$, соединяющую точки x и $f^{m_\sigma}(x)$, принадлежащие разным компонентам связности края кольца $h^{-1}(K)$. Тогда замкнутая дуга $l = p_f(\tilde{l})$ является негомотопной нулю петлей на торе $\hat{\lambda}^u_\sigma$ и $\eta_f([p_f(l)]) = m_\sigma$. Тогда из условия существования гомеоморфизма $\hat{\psi}_f : \hat{V}_f \to \widehat{\mathbb{V}}_{g_f}$ такого, что $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}^u_\sigma) = c_{\hat{\lambda}^u_\sigma} \times \mathbb{S}^1$ следует, что $m_\sigma = 1$.

2) Покажем, что ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие произвольной седловой точки является сохраняющим ориентацию. Из этого условия будет следовать инвариантность каждой сепаратрисы произвольной седловой точки, что приводит к неподвижности стоковых и источниковых точек, каждая из которых, в силу предложений 2.1, 2.2, лежит в замыкании некоторой сепаратрисы седловой точки.

Пусть $\sigma \in \Omega^2_f$ — седловая неподвижная точка такая, что диффеоморфизм $f|_{W^u_\sigma}$ меняет ориентацию W^u_σ. Тогда существует гомеоморфизм $h : W^u_\sigma \to \mathbb{R}^2$ такой, что $hf|_{W^u_\sigma} = a_- h$, где $a_- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное отображение плоскости, задаваемое формулой $a_-(x_1, x_2) = (-2x_1, 2x_2)$. Тогда пространство орбит $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/_{a_-}$ $(\hat{\lambda}^u_\sigma = (W^u_\sigma \setminus \sigma)/_f = p_f(W^u_\sigma \setminus \sigma))$ диффеоморфно бутылке Клейна, что противоречит тривиальности схемы.

Пусть $\sigma' \in \Omega^1_f$ и $f|_{W^u_{\sigma'}}$ является меняющим ориентацию. Так как f в целом является сохраняющим ориентацию, то $f|_{W^s_{\sigma'}}$ меняет ориентацию на $W^s_{\sigma'}$. Применим к точке σ' те же рассуждения, что и для точки σ. В результате получим, что все седловые точки диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ с тривиальной схемой являются неподвижными, а ограничение диффеоморфизма f на инвариантное многообразие произвольной седловой точки является сохраняющим ориентацию.

3) Пусть p, q — такие седловые неподвижные точки диффеоморфизма f, что $W^u_p \cap W^s_q \neq \varnothing$. Покажем, что пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ не содержит компактных компонент связности.

Положим $\hat{\lambda}^u_p = p_f(W^u_p \setminus p), \hat{\lambda}^s_q = p_f(W^s_q \setminus q)$. Если $p \in \Omega^1_f, q \in \Omega^2_f$, то $W^u_p \subset A_f$, следовательно, проекция многообразия $W^s_q \backslash q$ не содержит точек, принадлежащих многообразию $W^s_q \cap W^u_p$. Поэтому множество $\hat{\lambda}^s_p$ некомпактно, что противоречит тому факту, что это множество (в тривиальной схеме) гомеоморфно тору. Если $p \in \Omega^2_f$, $q \in \Omega^2_f$, то по условию существуют замкнутые дуги $c_p, c_q \subset \mathbb{S}_{g_f}$ такие, что $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}^u_p) = c_p \times \mathbb{S}^1$, $\hat{\psi}_f(\hat{\lambda}^s_q) = c_q \times \mathbb{S}^1$, следовательно, проекция каждой компоненты связности пересечения $W^u_p \cap W^s_q$ является множеством вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, где $x \in c_p \cap c_q$ — точка. Из конструкции следует, что $p_f^{-1}(\{x\} \times \mathbb{S}^1)$ гомеоморфно вложенной в V_f вещественной прямой, следовательно, пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ не содержит компактных компонент.

7. Достаточные условия включения в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла на сфере размерности четыре и выше

Обозначим через $G_*(S^n)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла сферы S^n размерности $n \geqslant 4$ таких, что для любого $f \in G_*(S^n)$ инвариантные многообразия различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ не пересекаются. Из отсутствия пересечения инвариантных многообразий различных седловых периодических точек следует, что множество седловых периодических точек диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ состоит из точек, размерность инвариантных многообразий которых принимает значения только 1 и $(n-1)$ (см. [31, теорема 1.3], [32, предложение 4.2], а также [12, лемма 2.2]).

Поскольку нас интересует вопрос включения диффеоморфизма f в топологический поток, далее будем предполагать, что все точки из Ω_f являются неподвижными (что влечет за собой выполнение всех условий Палиса для $f \in G_*(S^n)$).

В силу предложения 2.1 инвариантные многообразия седловых периодических точек любого диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ Морса—Смейла являются гладкими подмногообразиями. Кроме того, в силу предложения 2.2, если неустойчивая сепаратриса ℓ^u_σ седловой точки σ не пересекается ни с какими устойчивыми многообразиями седловых точек, отличных от σ, то замыкание $cl\,\ell^u_\sigma$ этой сепаратрисы состоит из нее самой, точки σ, и некоторой стоковой точки ω. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 7.1. *Пусть $f \in G_*(S^n)$, σ — его седловая периодическая точка. Тогда множество $cl\,\ell^u_\sigma$ является сферой размерности $n-1$, если $\sigma \in \Omega^{n-1}_f$, и компактной дугой, если $\sigma \in \Omega^1_f$.*

В отличие от размерности 3, замыкания сепаратрис седловых точек диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ являются топологическими подмногообразиями сферы S^n. Этот факт непосредственно вытекает из следующего утверждения.

Предложение 7.2.

1. *Пусть $N^{n-1} \subset \operatorname{int} M^n$ — дикое многообразие, $n \geqslant 4$, и B — множество точек такое, что N^{n-1} локально плоское в каждой точке $N^{n-1} \setminus B$. Тогда B несчетно.*
2. *Пусть $l \in \mathbb{R}^n$ — дикая дуга, $n \geqslant 4$. Тогда множество ее точек дикости более чем счетно.*
3. *Пучок $F \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$, ручных дуг является ручным*[1].

Первое утверждение предложения 7.2 является следствием результатов Дж. Кантрелла, А. В. Чернавского и Р. Кирби[2] (см. [21], [25, утверждение 3A.6]). Второе и третье утверждения

[1]То есть в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 4$ нет умеренно диких пучков.

[2]В работе [25] отмечается, что утверждение 7.2 является следствием результатов А. В. Чернавского и Р. Кирби, полученных независимо в 1968 году. Ранее, в 1963 году, Дж. Кантреллом получено менее общее утверждение, которое может быть сформулировано следующим образом: *если сфера $S^{n-1} \subset S^n$, $n \geqslant 4$, является дикой и B — множество*

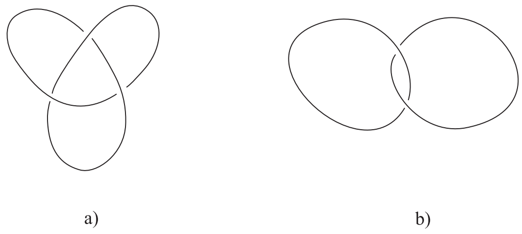

Рис. 5. a) нетривиальная дуга; b) нетривиальное зацепление.

предложения 7.2 следуют из работ [22, 23]. Отметим, что в работе [15] доказано существование диких дуг в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 4$ (но тогда эти дуги, как следует из [22, 23], имеют более чем счетное число точек дикости).

Из предложений 7.2, 7.1 следует, что сепаратрисы седловых точек диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ размерности $(n-1)$ являются ручными сферами, а одномерные сепаратрисы образуют ручные пучки. Методами работы [22] можно доказать и более сильный факт тривиальности пучков одномерных сепаратрис (см. [4, следствие 4.1]). Однако отсюда еще не следует, что пучки сепаратрис размерности $(n-1)$ являются ручными и все диффеоморфизмы из класса $G_*(S^n)$ при $n \geqslant 4$ включаются в топологические потоки. Тем не менее, в работе [32] удалось увидеть определенную двойственность между вложениями сепаратрис размерности 1 и $(n-1)$ и доказать следующую теорему.

Теорема 7.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G_*(S^n)$, $n \geqslant 4$, включается в топологический поток.*

Инструментом доказательства теоремы 7.1 вновь является схема диффеоморфизма, которая вводится ниже аналогично тому, как это сделано в размерности 3. Мы вводим понятие тривиальности схемы и приводим основные идеи доказательства того факта, что схема любого диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ является тривиальной. После доказательства тривиальности схемы доказательство включения диффеоморфизма f в топологический поток проводится полностью аналогично доказательству теоремы 6.1.

Представим сферу S^n в виде объединения множеств $A_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} W^u_\sigma)\cup\Omega^0_f$, $R_f = (\bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^{n-1}_f} W^s_\sigma)\cup\Omega^n_f$, $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$.

Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f и через $p_{_f} : V_f \to \widehat{V}_f$ естественную проекцию, положим $\hat{L}^s_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} p_{_f}(W^s_\sigma \setminus \sigma)$, $\hat{L}^u_f = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^{n-1}_f} p_{_f}(W^u_\sigma \setminus \sigma)$.

Определение 7.1. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}^s_f, \hat{L}^u_f)$ называется *схемой* диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$.

Определение 7.2. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмом $f, f' \in G_*(S^n)$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \to \widehat{V}_{f'}$ такой, что $\hat{\varphi}(\hat{L}^s_f) = \hat{L}^s_{f'}$ и $\hat{\varphi}(\hat{L}^u_f) = \hat{L}^u_{f'}$.

В [31], в частности, доказано следующее утверждение.

Утверждение 7.1. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G_*(S^n)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Определение 7.3. Схему S_f диффеоморфизма $f \in G_*(S^n)$ назовем *тривиальной*, если существует гомеоморфизм $\hat{\psi}_{_f} : \widehat{V}_f \to \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ такой, что для каждой компоненты связности $\hat{\lambda}$ множества $\hat{L}^s_f \cup \hat{L}^u_f$ найдется гладко вложенная сфера $S^{n-2}_{\hat{\lambda}} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ размерности $(n-2)$ такая, что $\hat{\psi}_{_f}(\hat{\lambda}) = S^{n-2}_{\hat{\lambda}} \times \mathbb{S}^1$.

7.1. Вспомогательные результаты. Следующее утверждение, доказанное в [32] (см. также уточнения в [33]), резюмирует результаты, полученные в работах [24, 36, 41, 48] относительно

точек такое, что S^{n-1} — локально-плоская в каждой точке множества $S^{n-1} \setminus B$, то множество B состоит более чем из одной точки (см. [21]).

вложений тривиальной коразмерности (большей трех). В частности, из этих результатов следует, что все локально плоско вложенные замкнутые дуги и зацепления (объединения замкнутых дуг) в пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности $n \geqslant 4$, являются тривиальными, т. е. переводятся гомеоморфизмом пространства на дуги (объединения дуг), лежащие в координатной плоскости. Примеры нетривиальной замкнутой дуги и нетривиального зацепления в $\mathbb{R}^3$ приведены на рис. 5.

Простую замкнутую дугу $\beta \in M^n$ будем называть *узлом*, а образ топологического вложения $e : S^1 \times B^{n-1} \to M^n$ такого, что $e(S^1 \times \{O\}) = \beta$, — *трубчатой окрестностью* узла β.

Предложение 7.3. *Пусть M^n — топологическое многообразие, возможно, с непустым краем ∂M^n, а $\{\beta_i\}_{i=1}^k$, $\{\beta_i'\}_{i=1}^k$ — семейства попарно непересекающихся простых замкнутых дуг, локально плоско вложенных в $\operatorname{int} M^n$ такие, что для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ дуги β_i, β_i' гомотопны. Пусть $\{N_{\beta_i}\}_{i=1}^k, \{N_{\beta_i'}\}_{i=1}^k$ — попарно непересекающиеся трубчатые окрестности этих дуг в $\operatorname{int} M^n$.*

Тогда существует гомеоморфизм $h : M_n \to M^n$ такой, что $h(\beta_i) = \beta_i', h(N_{\beta_i}) = N_{\beta_i'}$, $i \in \{1, \dots, k\}$, и $h|_{\partial M^n} = id$.

Основным инструментом доказательства тривиальности схемы диффеоморфизмов рассматриваемого класса является хирургия вдоль узлов, которая, как доказывается в предложении 7.4, в размерности 4 и выше не меняет топологии многообразия (что, как хорошо известно, неверно в трехмерном случае).

Пусть M^n — топологическое многообразие, возможно, с непустым краем, $\beta \in \operatorname{int} M^n$ — узел и $N_\beta \subset \operatorname{int} M^n$ — его трубчатая окрестность. Склеим многообразия $M^n \setminus \operatorname{int} N_\beta$ и $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ при помощи произвольного обращающего ориентацию гомеоморфизма $\varphi : \partial N_\beta \to \mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ и обозначим полученное многообразие через Q^n. Будем говорить, что Q^n получено из M^n *хирургией вдоль узла* β.

Предложение 7.4. *Q^n гомеоморфно M^n.*

Доказательство. Положим $N' = M^n \setminus \operatorname{int} N_\beta$, тогда $Q^n = N' \bigcup\limits_{\varphi} \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и для любого $X \subset N' \cup \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ определена естественная проекция $\pi : X \to Q^n$.

Пусть $\psi = \varphi^{-1}\pi^{-1}|_{\pi(\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1)}$. В силу [39] гомеоморфизм ψ продолжается до гомеоморфизма $\Psi : \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \to N_\beta$. Тогда отображение $H : Q^n \to M^n$, определенное соотношениями

$$H(x) = \begin{cases} \pi^{-1}(x) = x, x \in \pi(\operatorname{int} N'), \\ \Psi(x), x \in \pi(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1), \end{cases}$$

является искомым гомеоморфизмом. □

Пусть фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ многообразия M^n изоморфна $\mathbb{Z}$. Будем называть узел $\beta \in M^n$ *тривиальным*, если гомоморфизм $e_* : \pi_1(\beta) \to \pi_1(M^n)$, индуцированный включением, является изоморфизмом.

Из предложения 7.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 7.1. *Пусть $\beta \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ — тривиальный узел и N_β — его трубчатая окрестность. Тогда $(\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1) \setminus \operatorname{int} N_\beta$ гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

Последнее следствие в сочетании с предложением 7.4 приводит к следующему утверждению.

Следствие 7.2. *Пусть $Q_1^n, \dots, Q_{k+1}^n$, $k \geqslant 0$, — попарно-непересекающиеся многообразия, гомеоморфные $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$; $\beta_1, \dots, \beta_{2k} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k+1} Q_i$ — локально-плоские тривиальные узлы такие, что:*

1. *каждое многообразие Q_i^n содержит по крайней мере один узел из множества $\beta_1, \dots, \beta_{2k}$;*
2. *для любого $j \in \{1, \dots, k\}$ узлы β_{2j-1}, β_{2j} принадлежат различным многообразиям из множества $Q_1^n, \dots, Q_{k+1}^n$.*

Пусть $\psi_j : \partial N_{\beta_{2j-1}} \to \partial N_{\beta_{2j}}$ — обращающий естественную ориентацию гомеоморфизм, $j \in \{1, \dots, k+1\}$, и Q^n — многообразие, полученное из множества $(\bigcup\limits_{j=1}^{k+1} Q_j^n) \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{2k} \operatorname{int} N_{\beta_i})$ склеиванием компонент края по гомеоморфизмам $\psi_1, \dots, \psi_{k+1}$.

Тогда Q^n гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, и проекция каждого многообразия ∂N_β делит Q^n на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$.

7.2. Доказательство тривиальности схемы диффеоморфизма $f\in G_*(S^n)$. Пусть $f\in G_*(S^n)$. Докажем, что схема S_f тривиальна. Ввиду предложения 7.3 для этого достаточно доказать, что многообразие $\widehat{V}_f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$ и каждая компонента связности множества $\hat{L}^u_f\cup\hat{L}^s_f$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Изложим основную идею доказательства.

Положим $k_i=|\Omega^i_f|$, $i\in\{0,1,n-1,n\}$. Так как замыкания всех устойчивых (неустойчивых) сепаратрис размерности $(n-1)$ делят несущую сферу S^n на непересекающиеся множества, каждое из которых содержит в точности одну стоковую (источниковую) точку, то $k_0=k_1+1$, $k_n=k_{n-1}+1$.

Положим $\widehat{V}_\omega=(W^s_\omega\backslash\omega)/_f$, $\widehat{V}=\bigcup\limits_{\omega\in\Omega^0_f}\widehat{V}_\omega$. Из гиперболичности стоковых точек следует, что многообразие $\widehat{V}_\omega$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$. Обозначим через $\beta_1,\dots,\beta_{2k_1}$ проекции одномерных сепаратрис в многообразие $\widehat{V}$. Так как все сепаратрисы неподвижны, то их проекции являются существенным узлами. Без потери общности предположим, что нумерация на множестве узлов выбрана таким образом, что узлы β_{2j-1},β_{2j} являются проекциями одномерных сепаратрис одной и той же седловой точки $\sigma_j\in\Omega^1_f$, $j\in\{1,\dots,k_1\}$.

Из [47, теорема 2.3, с. 753] следует, что каждое многообразие $\widehat{V}^s_\omega$ содержит по крайней мере один узел из множества $\beta_1,\dots,\beta_{2k_1}$. Покажем, что для любого $j\in\{1,\dots,k_1\}$ узлы β_{2j-1},β_{2j} принадлежат различным компонентам связности множества $\widehat{V}$. Действительно, если $\beta_{2j-1},\beta_{2j}\subset\widehat{V}^s_\omega$ для некоторого j,ω, то множество $cl\,W^u_{\sigma_j}=W^u_{\sigma_j}\cup\omega$ гомеоморфно окружности. Так как $cl\,W^s_{\sigma_j}$ делит сферу S^n на две компоненты связности и пересекает окружность $cl\,W^u_{\sigma_j}$ в точке σ_j, то найдется по крайней мере одна точка в $cl\,W^s_{\sigma_j}\cap cl\,W^u_{\sigma_j}$, отличная от σ_j, что приводит к бесконечному множеству неблуждающих точек, и, следовательно, противоречит определению диффеоморфизма f.

Положим $\mathbb{U}=\{(x_1,\dots,x_n)|\ x_1^2(x_2^2+\dots+x_n^2)\leqslant 1\}$ и определим диффеоморфизм $b:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ формулой $b(x_1,x_2,\dots,x_n)=(2x_1,\dfrac{1}{2}x_2,\dots,\dfrac{1}{2}x_n)$.

Из гиперболичности точек $\sigma\in\Omega^1_f$ следует, что существуют попарно-непересекающиеся окрестности $\{N_\sigma\}_{\sigma\in\Omega^1_f}$ этих точек и гомеоморфизмы $\chi_\sigma:N_\sigma\to\mathbb{U}$ такие, что $f|_{N_\sigma}=\chi_\sigma^{-1}b\chi_\sigma$. Нетрудно увидеть, что множество $\widehat{N}^u_\sigma=N_\sigma\setminus W^s_\sigma)/_f$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{B}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, а множество $\widehat{N}^s_\sigma=N_\sigma\setminus W^u_\sigma)/_f$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1\times[-1,1]$, при этом проекция устойчивой сепаратрисы точки σ совпадает со средним слоем $\mathbb{S}^{n-2}\times\mathbb{S}^1\times\{0\}$. Обозначим через $\pi^u_\sigma:N_\sigma\setminus W^s_\sigma\to\widehat{N}^u_\sigma$, $\pi^s_\sigma:N_\sigma\setminus W^u_\sigma\to\widehat{N}^s_\sigma$ естественные проекции.

Обозначим через N_{2j-1},N_{2j} компоненты связности множества $\widehat{N}^u_{\sigma_j}$, содержащие узлы β_{2j-1},β_{2j}, соответственно, положим $K_j=\widehat{N}^s_{\sigma_j}$, $T_j=\widehat{V}^s_{\sigma_j}$, определим гомеоморфизм $\psi_j:\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}\to\partial K_j$ формулой $\psi_j=\pi^s_\sigma(\pi^u_\sigma)^{-1}$ и обозначим через $\Psi:\bigcup\limits_{j=1}^{k_1}\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}\to\bigcup\limits_{j=1}^{k_1}\partial K_j$ гомеоморфизм такой, что $\Psi|_{\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}}=\psi_j|_{\partial N_{2j-1}\cup\partial N_{2j}}$.

Так как

$$V_f=\left(\bigcup_{\omega\in\Omega^0_f}V^s_\omega\setminus\left(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}V^u_\sigma\right)\right)\bigcup\left(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}V^s_\sigma\right)=\left(V_f\setminus\left(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}N^u_\sigma\right)\right)\bigcup\left(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}N^s_\sigma\right),$$

то

$$\widehat{V}_f=\left(\widehat{V}_f\setminus\left(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}\widehat{N}^u_\sigma\right)\right)\cup_\Psi\left(\bigcup_{\sigma\in\Omega^1_f}\widehat{N}^s_\sigma\right)=\left(\widehat{V}_f\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{2k_1}N_j\right)\right)\cup_\Psi\left(\bigcup_{j=1}^{k_1}K_j\right).$$

Таким образом, многообразие $\widehat{V}_f$ получено из $\bigcup\limits_{\omega\in\Omega^0_f}\widehat{V}^s_\omega$ хирургией вдоль узлов $\beta_1,\dots,\beta_{2k_1}$. В силу следствия 7.2 $\widehat{V}_f$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{S}^1$, и проекция каждой компоненты связности множества ∂K_j делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Так как проекция устойчивой сепаратрисы точки σ_j в ∂K_j и любая компонента связности края K_j ограничивают в K_j прямое произведение $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1 \times [0,1]$, то проекция устойчивой сепаратрисы точки σ_j в $\widehat{V}_f$ также делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

С другой стороны,

$$V_f = \Big(\bigcup_{\alpha\in\Omega_f^n} V_\alpha^u \setminus \Big(\bigcup_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}} V_\sigma^s\Big)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}} V_\sigma^u\Big) = \Big(V_f \setminus \Big(\bigcup_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}} N_\sigma^s\Big)\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{\sigma\in\Omega_f^{n-1}} N_\sigma^u\Big).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получаем, что множество $\widehat{V}_f$ получено из $\bigcup\limits_{\alpha\in\Omega_f^n} \widehat{V}_\alpha^u$ хирургией вдоль проекций устойчивых одномерных сепаратрис седловых точек диффеоморфизма f, и каждая компонента множества $\hat{L}_f^u$ делит $\widehat{V}_f$ на две компоненты связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

7.3. Обсуждение условий теоремы 7.1. Нарушение любого из условий теоремы 7.1 позволяет построить контрпример к утверждению теоремы. Необходимость условий i), ii) в теореме 7.1 показана в лемме 3.1.

Условие, что несущее многообразие является сферой, не является необходимым, однако в работе [50] построен пример диффеоморфизма Морса—Смейла $f_0 : M^4 \to M^4$ на многообразии M^4, отличном от сферы S^4, удовлетворяющий условиям i)–iii), но не включающийся в топологический поток. Неблуждающее множество диффеоморфизма f_0 состоит в точности из трех неподвижных точек: источника, стока и седла, инвариантные многообразия которого имеют размерность два, и замыкание каждого из них является дикой сферой (см. [50, теорема 4, п. 2]). Если предположить, что диффеоморфизм f_0 включается в топологический поток X_0^t, тогда неблуждающее множество этого потока состоит из трех состояний равновесия, совпадающими с неподвижными точками диффеоморфизма f_0, каждое из которых имеет окрестность, в которой поток X_0^t локально топологически эквивалентен линейному потоку с собственными числами, вещественная часть которых отлична от нуля.

В [11, теорема 3] показано, что все такие потоки топологически эквивалентны, а в работе [50] построен пример потока Морса—Смейла из рассматриваемого класса, замыкания инвариантных многообразий седлового состояния равновесия которого являются ручными сферами. Таким образом, замыкания инвариантных многообразий состояния равновесия потока X_0^t, являющегося седлом диффеоморфизма f_0, являются ручными сферами. Получаем противоречие с конструкцией диффеоморфизма f_0. Из [31, теорема 1.3] следует, что если инвариантные многообразия различных седловых точек диффеоморфизма Морса—Смейла $f : S^n \to S^n$ не пересекаются, то его неблуждающее множество Ω_f состоит из точек, размерность неустойчивого многообразия каждой из которых принадлежит множеству $\{0, 1, n-1, n\}$. Это обстоятельство поясняет, в частности, почему многообразие M^4 не гомеоморфно сфере.

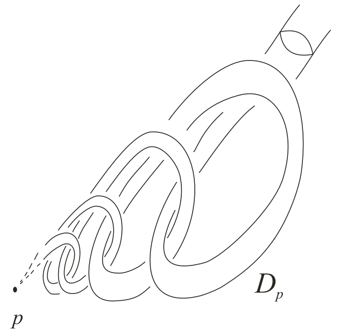

Рис. 6. Диск $D_p \subset W_p^s$

В работе [40] описывается пример диффеоморфизма Морса—Смейла $f_1 : S^4 \to S^4$, удовлетворяющего условиям i)-ii) теоремы, но не включающегося в топологический поток. Неблуждающее множество диффеоморфизма f_1 состоит из двух источников, двух стоков и двух седел p, q таких, что $\dim W_p^s = \dim W_q^u = 3$. При этом пересечение $W_q^s \cap W_q^u$ не пусто и его замыкание в W_p^s является дико вложенным открытым диском D_p с точкой дикости p. Более точно, для любого шара $B^3 \subset W_p^s$, для которого точка p является внутренней, пересечение границы этого шара с диском D_p состоит не менее чем из трех компонент связности (см. рис. 6). Диффеоморфизм f_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 7.1, кроме условия iii). Аналогично доказательству предложения 6.1 доказывается, что не существует топологического потока в W_p^s, для которого диск D_p является инвариантным, а ограничение диффеоморфизма f_1 на множество W_p^s является сдвигом на единицу времени. Отсюда следует, что f_1 не включается в топологический поток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бонатти Хр., Гринес В. З., Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях// Докл. АН СССР. — 2004. — *396*, № 4. — С. 439–442. С. 439-442
2. *Бонатти Х., Гринес В. З., Починка О. В.* Реализация диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-многообразиях// Тр. МИАН. — 2017. — *297*. — С. 46–61. 297. С. 35–49.
3. *Брин М. И.* О включении диффеоморфизма в поток// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1972. — *8*. — С. 19–25.
4. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса—Смейла на многообразиях размерности большей трех// Тр. МИАН. — 2008. — *261*. — С. 61–86. (2008), 59–83
5. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О топологической классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3// Тр. МИАН. — 2010. — *270*. — С. 62–86. 270 (2010), 57–79
6. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Починка О. В., Медведев В. С.* О включении в поток диффеоморфизмов Морса—Смейла на многообразиях размерности, большей двух// Мат. заметки. — 2012. — *91*, № 5. — С. 791–794. Notes, 91:5 (2012), 742–745
7. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса—Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — *271*. — С. 111–133. 103–124
8. *Гробман Д. М.* О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1959. — *128*, № 5. — 1959. — С. 880–881.
9. *Гробман Д. М.* Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве// Мат. сб. — 1962. *56*, № 1. — С. 77–94.
10. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1948.
11. *Жужома Е. В., Медведев В. С.* Непрерывные потоки Морса—Смейла с тремя состояниями равновесия// Мат. сб. — 2016. — *207*, № 5. — С. 69–92.
12. *Пилюгин С. Ю.* Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса—Смейла без периодических траекторий на сферах// Дифф. уравн. — 1978. — *14*, № 2. — С. 245–254.
13. *Починка О. В., Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О включении диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-многообразии в топологический поток// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 12. — С. 81–104. 1761–1784
14. *Artin E., Fox R. H.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — *49*. — С. 979–990.
15. *Blankinship W. A.* Generalization of a construction of Antoine// Ann. Math. — 1951. — *2*, № 3. — С. 276–297.
16. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// J. Dyn. Control Syst. — 2000. — *6*, № 4. — С. 579–602.
17. *Bonatti C., Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2019. — *39*, №. 9. — С. 2403–2432.
18. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pécou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. — 2004. — *43*. — С. 369–391.
19. *Bonatti C., Grines V., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Duke Math. J. — 2019. — *168*, № 13. — С. 2507–2558.
20. *Brown M.* Locally flat imbeddings of topological manifolds// Ann. Math. (2). — 1962. — *75*, № 2. — С. 331–341.
21. *Cantrell J. C.* Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n// Bull. Am. Math. Soc. — 1963. — *69*. — С. 716–718.
22. *Cantrell J. C.* Almost locally poliedral curves in Euclidean n-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1963. — *107*, № 3. — С. 451–457.

23. *Cantrell J. C.* n-frames in Euclidean k-space// Proc. Am. Math. Soc. — 1964. — *15*, № 4. — С. 574–578.
24. *Chernavskii A. V.* Piecewise linear approximation of imbeddings of manifolds in codimensions greater than two// Sb. Math. — 1970. — *11*, № 3. — С. 465–466.
25. *Daverman R. J.* Embeddings of $(n-1)$-spheres in Euclidean n-space// Bull. Am. Math. Soc. — 1978. — *84*, № 3. — С. 377–405.
26. *Debruner H., Fox R.* A mildly wild embedding of an n-frame// Duke Math. J. — 1960. — *27*, № 3. — С. 425–429.
27. *Dugundji J., Antosiewicz H. A.* Parallelizable flows and Lyapunov's second method// Ann. Math. — 1961. — *2*, № 73. — С. 543–555.
28. *Foland N. E., Utz W. R.* The embedding of discrete flows in continuous flows// В сб.: «Ergodic theory», Proc. Int. Symp., Tulane University, New Orleans, USA, October, 1961. — New York: Academic Press, 1963. — С. 121–134.
29. *Garay B. M.* Discretization and some qualitative properties of ordinary differential equations about equilibria// Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.). — 1993. — *62*, № 2. — С. 249–275.
30. *Garay B. M.* On structural stability of ordinary differential equations with respect to discretization methods// Numer. Math. — 1996. — *72*, № 4. — С. 449–479.
31. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections// J. Math. Sci. (N.Y.). — 2015. — *208*, № 1. — С. 81–90.
32. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* On embedding of multidimensional Morse–Smale diffeomorphisms in topological flows// Mosc. Math. J. — 2019. — *19*, № 4. — С. 739–760.
33. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n// ArXiv. — 2019. — 1911.10234v2 [math.DS].
34. *Hartman P.* On the local linearization of differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1963. — *14*, № 4. — С. 568–573.
35. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant Manifolds. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1977.
36. *Hudson J. F.* Concordance and isotopy of PL embeddings// Bull. Am. Math. Soc. — 1966. — *72*, № 3. — С. 534–535.
37. *Hudson J. F., Zeeman E. C.* On combinatorial isotopy// Publ. IHES. — 1964. — *19*. — С. 69–74.
38. *Kuperberg K.* 2-wild trajectories// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2005. — Suppl. Vol. — С. 518–523.
39. *Max N. L.* Homeomorphisms of $S^n \times S^1$// Bull. Am. Math. Soc. — 196. — *74*, № 6. — С. 939–942.
40. *Medvedev T., Pochinka O.* The wild Fox–Artin arc in invariant sets of dynamical systems// Dyn. Syst. — 2018. — *33*, № 4. — С. 660–666.
41. *Miller R. T.* Approximating codimension 3 embeddings// Ann. Math. (2). — 1972. — *95*, № 3. — С. 406–416.
42. *Palis J.* On Morse–Smale dynamical systems// Topology. — 1969. — *8*, № 4. — С. 385–404.
43. *Palis J.* Vector fields generate few diffeomorphisms// Bull. Am. Math. Soc. — 1974. — *80*. — С. 503–505.
44. *Palis J., Smale S.* Structural stability theorem// В сб.: «Global Analysis», Proc. Symp. Pure Math., 1970, № 14. — Providence: American Math. Soc., 1970.
45. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*, № 2. — С. 167–172.
46. *Pochinka O.* Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices// Zesz. Nauk. Uniw. Jagiell. — 2009. — *47*. — С. 149–154.
47. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*, № 6. — С. 747–817.
48. *Weller G. P.* Locally flat imbeddings of topological manifolds in codimension three// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *157*. — С. 161–178.
49. *Young G. S.* On the factors and fiberings of manifolds// Proc. Am. Math. Soc. — 1950. — *1*. — С. 215–223.
50. *Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S.* Morse–Smale systems with few non-wandering points// Topology Appl. — 2013. — *160*, № 3. — С. 498–507.

В. З. Гринес
Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

Е. Я. Гуревич
Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: `egurevich@hse.ru`

О. В. Починка
Национальный исследовательский ун-т «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия
E-mail: `opochinka@yandex.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-2-160-181 UDC 517.938

On Embedding of the Morse–Smale Diffeomorphisms in a Topological Flow

© 2020 **V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka**

Abstract. This review presents the results of recent years on solving of the Palis problem on finding necessary and sufficient conditions for the embedding of Morse–Smale cascades in topological flows. To date, the problem has been solved by Palis for Morse–Smale diffeomorphisms given on manifolds of dimension two. The result for the circle is a trivial exercise. In dimensions three and higher new effects arise related to the possibility of wild embeddings of closures of invariant manifolds of saddle periodic points that leads to additional obstacles for Morse–Smale diffeomorphisms to embed in topological flows. The progress achieved in solving of Palis's problem in dimension three is associated with the recently obtained complete topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on three-dimensional manifolds and the introduction of new invariants describing the embedding of separatrices of saddle periodic points in a supporting manifold. The transition to a higher dimension requires the latest results from the topology of manifolds. The necessary topological information, which plays key roles in the proofs, is also presented in the survey.

REFERENCES

1. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, and O. V. Pochinka, "Klassifikatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s konechnym mnozhestvom geteroklinicheskikh orbit na 3-mnogoobraziyakh" [Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 2004, **396**, No. 4, 439–442 (in Russian).
2. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, and O. V. Pochinka, "Realizatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na 3-mnogoobraziyakh" [Realization of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2017, **297**, 46–61 (in Russian).
3. M. I. Brin, "O vklyuchenii diffeomorfizma v potok" [On embedding of a diffeomorphism in a flow], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1972, **8**, 19–25 (in Russian).
4. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "Graf Peykshoto diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na mnogoobraziyakh razmernosti bol'shey trekh" [Peixoto graph of Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than three], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2008, **261**, 61–86 (in Russian).
5. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "O topologicheskoy klassifikatsii diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s odnomernym mnozhestvom neustoychivykh separatris na mnogoobraziyakh razmernosti bol'shey 3" [On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices on manifolds of dimension greater than 3], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 62–86 (in Russian).
6. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, O. V. Pochinka, and V. S. Medvedev, "O vklyuchenii v potok diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na mnogoobraziyakh razmernosti, bol'shey dvukh" [On embedding of Morse–Smale diffeomorphisms in a flow on manifolds of dimension greater than two], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **91**, No. 5, 791–794 (in Russian).
7. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, "Global'nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa—Smeyla" [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
8. D. M. Grobman, "O gomeomorfizme sistem differentsial'nykh uravneniy" [On homeomorphism of systems of differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **128**, No. 5, 880–881 (in Russian).
9. D. M. Grobman, "Topologicheskaya klassifikatsiya okrestnostey osoboy tochki v n-mernom prostranstve" [Topological classification of neighborhoods of singular points in n-dimensional space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **56**, No. 1, 77–94 (in Russian).

10. W. Hurewicz and H. Wallman, *Teoriya razmernosti* [Dimension Theory], Izd-vo inostrannoy literatury, Moscow, 1948 (Russian translation).
11. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, "Nepreryvnye potoki Morsa—Smeyla s tremya sostoyaniyami [Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium states], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2016, **207**, No. 5, 69–92 (in Russian).
12. S. Yu. Pilyugin, "Fazovye diagrammy, opredelyayushchie sistemy Morsa—Smeyla bez periodicheskikh traektoriy sferakh" [Phase diagrams defining Morse–Smale systems without periodic orbits on spheres], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1978, **14**, No. 2, 245–254 (in Russian).
13. O. V. Pochinka, V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "O vklyuchenii diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na 3-mnogoobrazii v topologicheskiy potok" [On embedding a Morse–Smale diffeomorphism on a 3-manifold in a topological flow], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 12, 81–104 (in Russian).
14. E. Artin and R. H. Fox, "Some wild cells and spheres in three-dimensional space," *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
15. W. A. Blankinship, "Generalization of a construction of Antoine," *Ann. Math.*, 1951, **2**, No. 3, 276–297.
16. Ch. Bonatti and V. Grines, "Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3," *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, No. 4, 579–602.
17. C. Bonatti, V. Grines, F. Laudenbach, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves on 3-manifolds," *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 2019, **39**, No. 9, 2403–2432.
18. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pécou, "Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds," *Topology*, 2004, **43**, 369–391.
19. C. Bonatti, V. Grines, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds," *Duke Math. J.*, 2019, **168**, No. 13, 2507–2558.
20. M. Brown, "Locally flat imbeddings of topological manifolds," *Ann. Math. (2)*, 1962, **75**, No. 2, 331–341.
21. J. C. Cantrell, "Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1963, **69**, 716–718.
22. J. C. Cantrell, "Almost locally poliedral curves in Euclidean n-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1963, **107**, No. 3, 451–457.
23. J. C. Cantrell, "n-frames in Euclidean k-space," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1964, **15**, No. 4, 574–578.
24. A. V. Chernavskii, "Piecewise linear approximation of imbeddings of manifolds in codimensions greater than two," *Sb. Math.*, 1970, **11**, No. 3, 465–466.
25. R. J. Daverman, "Embeddings of $(n-1)$-spheres in Euclidean n-space," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1978, **84**, No. 3, 377–405.
26. H. Debruner and R. Fox, "A mildly wild embedding of an n-frame," *Duke Math. J.*, 1960, **27**, No. 3, 425–429.
27. J. Dugundji and H. A. Antosiewicz, "Parallelizable flows and Lyapunov's second method," *Ann. Math.*, 1961, **2**, No. 73, 543–555.
28. N. E. Foland and W. R. Utz, "The embedding of discrete flows in continuous flows," In: *Ergodic theory*, Proc. Int. Symp., Tulane University, New Orleans, USA, October, 1961, Academic Press, New York, 1963, pp. 121–134.
29. B. M. Garay, "Discretization and some qualitative properties of ordinary differential equations about equilibria," *Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.)*, 1993, **62**, No. 2, 249–275.
30. B. M. Garay, "On structural stability of ordinary differential equations with respect to discretization methods," *Numer. Math.*, 1996, **72**, No. 4, 449–479.
31. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2015, **208**, No. 1, 81–90.
32. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "On embedding of multidimensional Morse–Smale diffeomorphisms in topological flows," *Mosc. Math. J.*, 2019, **19**, No. 4, 739–760.
33. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n," *ArXiv*, 2019, 1911.10234v2 [math.DS].
34. P. Hartman, "On the local linearization of differential equations," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1963, **14**, No. 4, 568–573.
35. M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
36. J. F. Hudson, "Concordance and isotopy of PL embeddings," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1966, **72**, No. 3, 534–535.
37. J. F. Hudson and E. C. Zeeman, "On combinatorial isotopy," *Publ. IHES*, 1964, **19**, 69–74.
38. K. Kuperberg, "2-wild trajectories," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2005, Suppl. Vol, 518–523.
39. N. L. Max, "Homeomorphisms of $S^n \times S^1$," *Bull. Am. Math. Soc.*, 196, **74**, No. 6, 939–942.

40. T. Medvedev and O. Pochinka, “The wild Fox–Artin arc in invariant sets of dynamical systems,” *Dyn. Syst.*, 2018, **33**, No. 4, 660–666.
41. R. T. Miller, “Approximating codimension 3 embeddings,” *Ann. Math. (2)*, 1972, **95**, No. 3, 406–416.
42. J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems,” *Topology*, 1969, **8**, No. 4, 385–404.
43. J. Palis, “Vector fields generate few diffeomorphisms,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1974, **80**, 503–505.
44. J. Palis and S. Smale, “Structural stability theorem,” In: *Global Analysis*, Proc. Symp. Pure Math., 1970, No. 14, American Math. Soc., Providence, 1970.
45. D. Pixton, “Wild unstable manifolds,” *Topology*, 1977, **16**, No. 2, 167–172.
46. O. Pochinka, “Diffeomorphisms with mildly wild frame of separatrices,” *Zesz. Nauk. Uniw. Jagiell.*, 2009, **47**, 149–154.
47. S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, No. 6, 747–817.
48. G. P. Weller, “Locally flat imbeddings of topological manifolds in codimension three,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1971, **157**, 161–178.
49. G. S. Young, “On the factors and fiberings of manifolds,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1950, **1**, 215–223.
50. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, “Morse–Smale systems with few non-wandering points,” *Topology Appl.*, 2013, **160**, No. 3, 498–507.

V. Z. Grines
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: vgrines@yandex.ru

E. Ya. Gurevich
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: egurevich@hse.ru

O. V. Pochinka
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: opochinka@yandex.ru