Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 1 (2020). С. 1–155

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-1-1-155 УДК 517.9

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2020 г. **В. Н. ДЕНИСОВ**

Аннотация. В работе изучаются вопросы стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка, связанные с поведением на бесконечности младших коэффициентов уравнений и с ростом начальных функций. Изучаются также вопросы стабилизации решения первой краевой задачи для параболического уравнения без младших коэффициентов в зависимости от области Q задания начальной функции при $t = 0$.

В первой главе изучены точные достаточные условия стабилизации к нулю равномерно по x на компакте K в $\mathbb{R}^N$ решения задачи Коши с дивергентным эллиптическим оператором и коэффициентами, не зависящими от t и зависящими только от x. Изучены классы начальных функций:

1. ограниченных в $\mathbb{R}^N$,
2. имеющих степенной рост на бесконечности в $\mathbb{R}^N$,
3. имеющих экспоненциальный порядок роста на бесконечности.

На примерах показано, что достаточные условия являются точными и, кроме того, не допускают равномерной в $\mathbb{R}^N$ стабилизации к нулю решения задачи Коши.

Во второй главе изучается задача Коши с эллиптическим недивергентным оператором с коэффициентами, зависящими от x и t. Получены точные достаточные условия в различных классах растущих начальных функций, которые гарантируют стабилизацию решений соответствующей задачи Коши равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Приведены примеры, показывающие точность формулируемых условий.

В третьей главе получены необходимые и достаточные условия на область $\mathbb{R}^N \setminus Q$, где Q — область задания начальной функции при $t = 0$, при выполнении которых решение первой краевой задачи без младших членов стабилизируется к нулю равномерно по x на любом компакте в Q. Установлена степенная оценка скорости стабилизации решения краевой задачи с ограниченной начальной функцией, когда $\mathbb{R}^N \setminus Q$ при $t = 0$ является конусом.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Постановка задач и обзор известных результатов

Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с нелокальным поведением (при большом времени) решений задач Коши и первой краевой задачи для параболических уравнений второго порядка.

Систематическое исследование по качественной теории уравнений параболического типа стало возможным благодаря фундаментальным работам, посвященным обоснованию вопросов разрешимости задачи Коши и смешанных задач для таких уравнений.

Из огромного числа работ по корректности постановки упомянутых выше задач отметим работы В. А. Ильина [38], А. М. Ильина, А. С. Калашникова, О. А. Олейник [36], О. А. Ладыженской, В. А. Солонникова, Н. Н. Уральцевой [46], А. К. Гущина, В. П. Михайлова, А. Л. Муравья [11], А. К. Гущина [8], Е. М. Ландиса [49]. Среди зарубежных ученых отметим фундаментальные работы Д. Аронсона [70], А. Фридмана [61], Г. Либермана [82].

В данной работе изучается поведение при больших значениях времени решения задач Коши для параболических уравнений второго порядка, как дивергентного, так и недивергентного типа, в зависимости от поведения на бесконечности младших коэффициентов уравнений и для различных классов начальных функций.

Мы изучим также необходимые и достаточные условия на неограниченную область в $\mathbb{R}^N$, при которых решение первой краевой задачи для параболического уравнения без младших членов стабилизируется к нулю для любой ограниченной начальной функции.

Приведем список применяемых далее обозначений и определений (см. [36, 46, 70]).

$$x = (x_1, \ldots x_N) \in \mathbb{R}^N, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2},$$

$$D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty) \equiv \{x, t : x \in \mathbb{R}^N, t > 0\}, \quad \overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \equiv \{x, t : x \in \mathbb{R}^N, t \geqslant 0\},$$

$$H_{[t_1, t_2]} = \{x, t : x \in \mathbb{R}^N, t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$$

— слой в $\mathbb{R}^N_+$, в частности,

$$H \equiv H_{(0,T]} \quad \forall T > 0,$$

Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$,

$$B_R^{x_0} \equiv \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| < R\}$$

— открытый шар в $\mathbb{R}^N$ с центром в точке x_0 радиуса R,

$$\overline{B}_R^{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - x_0| \leqslant R\}$$

— замкнутый шар, $B_R \equiv B_R^0$. Объем шара $B_R^{x_0}$:

$$|B_R^{x_0}| = \omega_N N^{-1} R^N,$$

где ω_N — площадь сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^N$.

$$S_{\lambda_1}^{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda_1/2 < |x - x_0| < 2\lambda_1\}$$

— открытый шаровой слой в $\mathbb{R}^N$, в частности,

$$S_{\lambda_1} \equiv S_{\lambda_1}^0 = \{x \in \mathbb{R}^N : \lambda_1/2 < |x| < 2\lambda_1\};$$

$a(x) = a_{ik}(x)$, $a(x, t) = a_{ik}(x, t)$ — квадратные матрицы размера $N \times N$ с вещественными коэффициентами,

$$(a(x)\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k, \quad (a(x, t)\xi, \xi) = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x, t)\xi_i\xi_k$$

— квадратичные формы, порожденные матрицами $a(x)$ и $a(x, t)$, соответственно. Всегда будем предполагать симметричность матриц $a(x)$ и $a(x, t)$, т. е.

$$a_{ik}(x) = a_{ki}(x), \quad a_{ik}(x, t) = a_{ki}(x, t) \quad (i, k = 1, \ldots, N).$$

$$\nabla U = (U_{x_1}, \ldots, U_{x_N}) = \operatorname{grad} U(x) \text{ — градиент скалярной функции } U(x),$$

$$U_{x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad U_{x_i x_k} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Для вектора $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_N(x))$ полагаем

$$(b(x), \nabla U(x)) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x) U_{x_i},$$

а для вектора $b(x, t) = (b_1(x, t), \ldots, b_N(x, t))$ полагаем

$$(b(x, t), \nabla U(x)) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x, t) U_{x_i}.$$

$r = |x|$ — расстояние в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ от точки x до 0, $\Gamma = \Gamma(r)$ — функция, зависящая от r,

$$\Gamma'(r) = \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r}, \quad \Gamma''(r) = \frac{\mathrm{d}^2\Gamma}{\mathrm{d}r^2}.$$

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^{N+1}$. Под пространством $W_2^{1,0}(\Omega)$ будем понимать (см. [46]) пополнение множества финитных бесконечно дифференцируемых функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ по норме

$$\|f\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \left[\int\limits_{\Omega} \left(f^2(x,t) + (\nabla f, \nabla f)\right) dxdt\right]^{1/2},$$

где как обычно $(\nabla f, \nabla f)$ — скалярный квадрат вектора $(f'_{x_1}, \ldots f'_{x_N})$, (x, y) — скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

Пусть

$$L(x) = \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \tag{1.1}$$

— дивергентный оператор второго порядка, где $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, $a_{ik}(x)$ — ограниченные и измеримые функции в $\mathbb{R}^N$. Аналогично определим оператор

$$L(x,t) = \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \tag{1.2}$$

с ограниченными и измеримыми коэффициентами в $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

При этом мы всегда предполагаем, что для (1.1) выполняются условия

$$\lambda_0^2|\xi|^2 \leqslant (a(x)\xi, \xi) \leqslant \lambda_1^2|\xi|^2, \tag{1.3}$$

или, соответственно, для (1.2), условия

$$\lambda_0^2|\xi|^2 \leqslant (a(x,t)\xi, \xi) \leqslant \lambda_1^2|\xi|^2, \tag{1.4}$$

где $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, $\forall\, t > 0$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^N$.

Будем рассматривать и недивергентные операторы вида

$$\Lambda(x) = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}, \tag{1.5}$$

$$\Lambda(x,t) = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}, \tag{1.6}$$

где для матриц $a(x) = a_{ik}(x)$, $a(x,t) = a_{ik}(x,t)$ выполнены условия (1.3) (соответственно, (1.4)).

В $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ будут рассмотрены обобщенные решения $u(x,t)$ параболического уравнения с коэффициентами, зависящими от x:

$$a_{ik}(x), \quad b(x) = (b_1(x), \ldots, b_N(x)), \quad c(x),$$

и дивергентным оператором (1.1):

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0, \tag{1.7}$$

удовлетворяющие условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.8}$$

где $u_0(x)$ — заданная функция, а точные условия на (1.7) и (1.8) даны ниже.

В $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ будут рассмотрены обобщенные решения $u(x,t)$ параболического уравнения с коэффициентами, зависящими от (x,t):

$$a_{ik}(x,t), \quad b(x,t) = (b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t)), \quad c(x,t),$$

с дивергентным оператором (1.2):

$$L(x,t)u + (b(x,t), \nabla u) + c(x,t)u - u_t = 0, \tag{1.9}$$

удовлетворяющие условию

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.10}$$

Коэффициенты (1.7) (соответственно, (1.9)) являются ограниченными и измеримыми в $\mathbb{R}^N$ (в D), функция $u_0(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет определенному условию роста на бесконечности (например, $|u_0(x)| \leqslant M$ — ограничена, или $|u_0(x)| \leqslant C(1+|x|)^m$, и т. д.), при этом решения $u(x,\,t)$ удовлетворяют аналогичному условию роста.

Под *обобщенным решением* задачи Коши (1.7), (1.8) (или (1.9), (1.10)) в D будем понимать (см. [46, 70]) функцию $u(x,\,t)$, которая при всех $R>0$, $T>0$ принадлежит пространству $W_2^{1,0}(B_R\times(0,\,T))$ и при каждом $T>0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{N+1}} [(a\nabla u,\,\nabla u\eta)-[\eta(b,\,\nabla u)+cu\eta]-\eta_t u]\,dxdt \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\eta(x,\,0)dx \tag{1.11}$$

при всех пробных функциях $\eta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, носитель которых лежит в полупространстве $\{x,\,t:\,x\in\mathbb{R}^N,\,t<T\}$. Известно (см., например, [46, 61, 70]), что если функция $u_0(x)$ является ограниченной (точнее, если $u_0(x)\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$) и если ее норму обозначить через $\|u_0\|$, то ограниченное решение задачи Коши (1.7), (1.8) (или (1.9), (1.10)) существует, единственно, принадлежит классу $C(\mathbb{R}_+^{N+1})$ и

$$\|u(\cdot,\,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

Случай неограниченных начальных функций рассмотрен, например, в [36, 61, 70].

В области $D=\mathbb{R}^N\times(0,\,\infty)$ рассмотрим классические решения параболического уравнения с недивергентным оператором (1.5):

$$\mathrm{L}u\equiv\Lambda(x)u+\sum_{i=1}^N b_i(x)u_{x_i}+c(x)u-u_t=0, \tag{1.12}$$

удовлетворяющие начальному условию

$$u(x,\,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{1.13}$$

Аналогично рассматривается решение задачи Коши с оператором (1.6)

$$\mathrm{L}u\equiv\Lambda(x,\,t)u+\sum_{i=1}^N b_i(x,\,t)u_{x_i}+c(x,\,t)u-u_t=0\quad \text{в}\ D, \tag{1.14}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,\,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{1.15}$$

Под *классическим решением* задачи (1.12), (1.13) (или (1.14), (1.15)) мы понимаем (см. [36, 61]) такую функцию $u(x,\,t)$, которая непрерывна в $\overline{D}$, имеет непрерывные производные, входящие в (1.12) (или (1.14)), удовлетворяет уравнению (1.12) (или (1.14)) и соответствующему начальному условию при $t=0$. Ради краткости рассмотрим случай (1.14), (1.15).

Будем предполагать в дальнейшем, что оператор (1.6) является равномерно параболическим, т. е. выполняются неравенства (1.4), коэффициенты уравнения (1.14) непрерывны и ограничены в $\overline{D}$, и, кроме того, удовлетворяют условиям Гельдера:

$$|a_{ik}(x,\,t)-a_{ik}(x_0,\,t_0)|\leqslant A[|x-x_0|^\gamma+|t-t_0|^{\gamma/2}], \tag{a}$$

$$|b_i(x,\,t)-b_i(x_0,\,t)|\leqslant A|x-x_0|^\gamma, \tag{b}$$

$$|c(x,\,t)-c(x_0,t)|\leqslant A|x-x_0|^\gamma, \tag{c}$$

для $(x,\,t)\in D$, $(x_0,\,t_0)\in D$ при некотором $\gamma:0<\gamma\leqslant 1$. Аналогичные условия накладываются и на коэффициенты уравнения (1.12).

Если решение $u(x,\,t)$ удовлетворяет условию роста

$$|u(x,\,t)|<C_1e^{C_2|x|^2} \tag{1.16}$$

в слое $H_{(0,\,T]}$ для любого $T>0$, т. е. $u(x,\,t)$ из тихоновского класса, то задача Коши (1.14), (1.15) имеет единственное решение (см., например, [36, 61]). Мы далее будем считать, что начальная функция $u_0(x)$ и соответствующее ей решение $u(x,\,t)$ удовлетворяют условию (1.16), а коэффициент $c(x,\,t)$ удовлетворяет неравенству

$$c(x,\,t)\leqslant 0,\quad [c(x)\leqslant 0]. \tag{1.17}$$

Определение. Пусть $u(x,\,t)$ — решение задачи Коши (1.7), (1.8) (или (1.9), (1.10), (1.12)–(1.15)). Будем говорить, что решение $u(x,\,t)$ *стабилизируется в точке* $x \in \mathbb{R}^N$, если существует предел
$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = A(x). \tag{1.18}$$
Если предел (1.18) существует равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ (равномерно по x во всем $\mathbb{R}^N$), то будем говорить, что решение *стабилизируется равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$ (равномерно по x во всем $\mathbb{R}^N$).*

В настоящей работе мы будем изучать условия на коэффициенты параболического уравнения (1.14) (или, соответственно, (1.5), (1.7), (1.12)) при которых решение соответствующей задачи Коши стабилизируется к нулю:
$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0 \tag{1.19}$$
равномерно относительно x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$ при любой начальной функции $u_0(x)$ из некоторого класса единственности решения этой задачи Коши.

Отметим, что в ряде работ других авторов (см. обзоры [11, 16, 29]) изучались условия, которые гарантируют существование равномерно во всем $\mathbb{R}^N$ предела (1.19). В настоящей работе, в отличие от упомянутых работ, мы отказываемся от равномерности во всем $\mathbb{R}^N$ предела (1.19), и это приводит, как будет видно из результатов нашей работы, к расширению классов коэффициентов и начальных функций, для которых существует предел (1.19) равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Отметим, что изучение задачи о стабилизации решения задачи Коши идет в основном по двум направлениям: изучение влияния младших коэффициентов уравнений при любой начальной функции $u_0(x)$ из заданного класса; и построение начальных функций, обеспечивающее стабилизацию решения, когда младшие коэффициенты не оказывают влияния на явление стабилизации.

В настоящей работе мы приведем обзор некоторых результатов о стабилизации, в которых изучается влияние младших коэффициентов уравнений. Обзор работ по проблемам стабилизации задачи Коши и краевых задач содержится в работах [9, 11, 16, 29].

Первой работой по стабилизации является работа А. Н. Тихонова [59]. В 1938 году А. Н. Тихонов в [59] установил следующие результаты.

Пусть Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, и пусть $D = Q \times (0,\,\infty)$ — прямой цилиндр с основанием $Q \subset \mathbb{R}^N$, $u(x,\,t)$ — непрерывная в D функция, удовлетворяющая уравнению теплопроводности:
$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{в } D \tag{1.20}$$
и условиям
$$u(x,\,t) = \varphi(x,\,t),\ x \in \partial D = \partial Q \times (0,\,\infty),\ t > 0, \tag{1.21}$$
$$u(x,\,0) = \psi(x), \quad x \in \overline{Q}, \tag{1.22}$$
где $\psi(x)$, $\varphi(x,\,t)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условию
$$\psi(x) = \varphi(x,\,0), \quad x \in \overline{Q}.$$

I. *Если функция $u(x,\,t)$ непрерывна в $\overline{D}$ и удовлетворяет в D уравнению* (1.20) *и условию*
$$u(x,\,t) = 0, \quad x \in \partial D, \quad t \geqslant t_0 > 0, \tag{1.23}$$
то
$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0 \tag{1.24}$$
равномерно по $x \in \overline{Q}$, каковы бы ни были значения $u(x,\,t)$ при $t \leqslant t_0$.

II. *Если $\varphi(x,\,t) = \varphi(x)$ (граничная функция не зависит от t), то решение, удовлетворяющее* (1.20)–(1.22)*, имеет предел*
$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = V(x) \tag{1.25}$$
равномерно по $x \in Q$, где $V(x)$ — решение задачи
$$\Delta V = 0 \quad \text{в } Q, \quad V|_{\partial Q} = \varphi(x). \tag{1.26}$$

В дальнейшем сформулированные выше результаты А. Н. Тихонова из [59] обобщались во многих работах (см., например, [73–75, 80]). А. Фридман доказал в [73, 74] теоремы о равномерном стремлении к нулю при $t \to \infty$ решений краевых задач для неоднородных параболических уравнений второго порядка вида (1.14) (содержащих «слабые» нелинейности) в полуцилиндре и в расширяющейся области при условии, что граничные функции стремятся к нулю при $t \to \infty$. Там же сформулированы и доказаны теоремы, обобщающие результаты А. Н. Тихонова на общие неоднородные линейные уравнения, заданные в полуцилиндре $D = Q \times (0, \infty)$.

Результаты работ [73, 74] и ряда других работ систематизировали в главе 6 монографии [61].

Хорошо известно (см. [80]), что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \quad u|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N$$

с начальной функцией $u_0(x)$, которая стремится к нулю при $|x| \to \infty$, само стремится к нулю.

Тот же результат имеет место и для уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{N} b_i u_{x_i} + cu - u_t = 0$$

при условии, что $c \leqslant 0$. Это легко следует из явной формулы для решения. Однако, как было установлено в работе А. М. Ильина [34], подобное утверждение о существовании предела $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0$ решения задачи Коши уже не имеет места для параболического уравнения (1.14) с переменными коэффициентами, зависящими от x и t, даже если выполнено условие $c(x,\,t) \leqslant 0$.

А. М. Ильину принадлежит следующий результат.

Теорема (см. [34, с. 117]). *Если $u(x,\,t)$ является решением уравнения* (1.14) *и выполнены условия*

1. $u(x,\,1) = u_0(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$,
2. *уравнение* (1.14) *является равномерно параболическим* (*т. е. выполнены неравенства* (1.4)),
3. *коэффициенты* $b_i(x,\,t)$ *ограничены в полосе* $H_{[1,\,T]}$, $\forall T > 1$, $|b_i(x,\,t)| \leqslant M$ *при* $|x| \leqslant r_0$, $r_0 > 0$,
4. *выполнено*
$$\sum_{i=1}^{N} (a_{ii}(x,\,t) + b_i(x,\,t)x_i) \geqslant \delta > 0$$
для любого $t > 1$ *и* $|x| \geqslant \delta_0 > 0$,
5. $c(x,\,t) \leqslant 0$, $(x,\,t) \in D$,

то $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0$ *равномерно по* x *в* $\mathbb{R}^N$.

В [34] на примерах показано, что при невыполнении хотя бы одного из условий 1–5 этой теоремы утверждение может оказаться неверным.

В [36, § 12] получен ряд результатов о стабилизации решений краевых задач и задачи Коши для параболических уравнений вида (1.14). Так как мы обобщим некоторые результаты из [36], то для удобства читателя приведем обзор ряда результатов из [36, § 12].

Предположим, если не оговорено противное, что коэффициенты уравнения (1.14) ограничены, а коэффициент $c(x,\,t)$ удовлетворяет неравенству $c(x,\,t) \leqslant 0$, и что рассматриваемые решения и $u_0(x)$ ограничены:

$$|u(x,\,t)| \leqslant M, \quad |u_0(x)| \leqslant M.$$

Теорема (см. [36, § 12, теорема 1]). *Пусть $u(x,\,t)$ является решением задачи Коши* (1.14), (1.15) *или решением уравнения* (1.14) *в цилиндре $D = Q\times(0,\,\infty)$, где Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющим начальному условию $u(x,\,0) = u_0(x)$, $x \in Q$ и одному из краевых условий*

$$u|_{\partial D} = 0, \quad t > 0$$

или

$$\ell(u) = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + au\right)\right|_{\partial D} = 0, \quad t > 0,$$

где $\partial D = \partial Q \times (0,\, \infty)$ — боковая поверхность цилиндра D, $a(x,\, t) \leqslant 0$, ν — направление в $\mathbb{R}^N$, составляющее острый угол с направлением внутренней нормали к границе области Q. Пусть

$$c(x,\, t) \leqslant -c_0 < 0, \quad (x,\, t) \in D, \tag{1.27}$$

где c_0 — постоянная. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0 \tag{1.28}$$

равномерно по $x \in Q$.

В [36, § 12, теорема 2] установлено, что условие (1.27) может быть отброшено и заменено на $c(x,\, t) \leqslant 0$ в случае первой краевой задачи. Тогда существует предел (1.28).

В [36, § 12, теорема 4] доказано, что *если $u(x,\, t)$ — решение задачи Коши* (1.14), (1.15) *с ограниченной начальной функцией $u_0(x)$, и если существует такая положительная в $\mathbb{R}^N$ функция $V(x)$, что*

$$\Lambda(x,\, t)V + (b(x,\, t), \nabla V) + c(x,\, t)V - V_t \leqslant 0 \quad \textit{в } D, \tag{1.29}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty, \tag{1.30}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0 \tag{1.31}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Теорема [36, § 12, теорема 4] носит условный характер, в том смысле, что требуется еще указать условия, гарантирующие существование функции $V(x)$, обладающей свойствами (1.29), (1.30).

Теорема (см. [36, § 12, теорема 5]). *Если*

1. *$u(x,\, t)$ — ограниченное решение задачи Коши* (1.14), (1.15) *с ограниченной начальной функцией $u_0(x)$,*
2. *коэффициент $c(x,\, t)$ удовлетворяет неравенству $c(x,\, t) \leqslant -c_0 < 0$ для $x \in Q_1$, где Q_1 — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$,*
3. *в $\mathbb{R}^N$ существует функция $V(x)$, удовлетворяющая* (1.29) *при $|x| \geqslant R$, $t > 0$, и такая, что выполнено условие* (1.30),

то решение задачи (1.14), (1.15) *имеет предел* (1.31) *равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Легко видеть, что достаточным условием существования функции $V(x)$ в теореме [36, § 12, теорема 5], обладающей свойствами (1.29), (1.30), является расходимость следующего интеграла:

$$\int_R^\infty r \exp\left(-\int_R^r \frac{q(y)}{y} dy\right) dr = +\infty, \tag{1.32}$$

где

$$q(y) = \sup_{|x|=y>0,\, t>0} \frac{\sum\limits_{i=1}^N a_{ii}(x,\, t) + b_i(x,\, t)x_i}{\sum\limits_{i,\,k=1}^N a_{ik}(x,\, t)\frac{x_i x_k}{y^2}},$$

при этом в качестве функции $V(x)$ в теореме [36, § 12, теорема 5] следует взять функцию

$$V(|x|) = \int_R^{|x|} r \exp\left(-\int_R^r \frac{q(y)}{y} dy\right) dr. \tag{1.33}$$

В работе Р. З. Хасьминского [64] дана классификация дифференциальных операторов с коэффициентами, зависящими только от x, вида

$$\Lambda_1(x) = \Lambda(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.34}$$

относительно принадлежности оператора $\Lambda_1(x)$ одному из классов (A_1), (A_2), (A_3) (определения классов (A_i), $i = 1, \ldots, 3$, мы приведем ниже), в которых устанавливается связь между стабилизацией решения задачи Коши (1.12), (1.13) и принадлежностью оператора $\Lambda_1(x)$ одному из классов (A_i), $i = 1, 2, 3$.

Пусть Q — некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с достаточно гладкой границей ∂Q.

Определение (A_1)**.** Будем говорить, что оператор (1.34) принадлежит *классу* (A_1), если в области Q существует не менее двух различных ограниченных решений внешней задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$\Lambda_1(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus Q.$$

Определение (A_2)**.** Оператор $\Lambda_1(x)$ принадлежит *классу* (A_2), если $\Lambda_1(x) \notin (A_1)$ и уравнение

$$\Lambda_1(x)u = -1, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus Q$$

не имеет положительного решения.

Определение (A_3)**.** Оператор $\Lambda_1(x)$ принадлежит *классу* (A_3), если $\Lambda_1(x) \notin (A_1)$, $\Lambda_1(x) \notin (A_2)$.

Оператор Лапласа в пространстве размерности 2 дает пример оператора класса (A_1), оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$ дает пример оператора класса (A_2). Примером оператора из класса (A_3) может служить одномерный оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \operatorname{arctg}(x)\frac{\partial}{\partial x}.$$

В работе [64] установлены следующие результаты. Пусть $u(x, 0) = u_0(x)$ и функция $u_0(x)$ финитна в $\mathbb{R}^N$. Тогда справедливы теоремы:

1. *Если* $\Lambda_1(x) \in (A_1)$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = 0$ *и* $\int\limits_0^\infty |u(x, t)|dt < \infty$.
2. *Если* $\Lambda_1(x) \in (A_2)$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t) = 0$, *но при* $c(x) \equiv 0$ *и* $u_0(x) \geqslant 0$, $\int\limits_0^\infty |u(x, t)|dt = +\infty$.
3. *Пусть начальная функция* $u_0(x)$ *ограничена (но, может быть, не является финитной). Тогда, если* $\Lambda_1(x) \in (A_3)$ *и* $c(x) \equiv 0$, *то*
$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)p(x)dx,$$
где $p(x) > 0$ — *единственное решение сопряженного уравнения* $\Lambda_1^* p(x) = 0$ *такое, что*
$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} p(x)dx = 1.$$
4. *Пусть начальная функция* $u_0(x)$ *ограничена (но, может быть, не является финитной). Тогда, если* $\Lambda_1(x) \in (A_2)$ *или* $\Lambda_1(x) \in (A_3)$ *и* $c(x) \leqslant 0$, *и* $c(x) \not\equiv 0$, *то*
$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0.$$

Если коэффициенты уравнения (1.14) зависят от x и t, то картина зависимости поведения решения задачи Коши (1.14), (1.15) от поведения коэффициентов уравнения (1.14) оказывается более сложной. Это видно из цитируемых ниже результатов работы [37].

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\Lambda_1(x, t) = \Lambda(x, t) + \sum_{i=1}^N b_i(x, t)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{1.35}$$

Будем считать, что коэффициенты уравнения (1.14) ограничены в D и выполнено условие (1.4).

В [37, §1] доказан аналог теоремы 1 для случая коэффициентов, зависящих от x и от t. В [37, теорема 1] установлено, что *если существует функция* $V = V(x) > 0$ *такая, что*

$$\Lambda_1(x, t)V(x) \leqslant 0, \quad \text{\textit{при} } |x| \geqslant R > 0,\ t > 0, \tag{1.36}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} V(|x|) = 0, \tag{1.37}$$

и

$$\lim_{|x|\to\infty} u_0(x) = 0, \tag{1.38}$$

то решение задачи (1.14), (1.15) *имеет предел*

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0 \tag{1.39}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Замечание. Достаточным условием существования функции $V(x)$, обладающей свойствами (1.36), (1.37), является сходимость следующего интеграла:

$$\int_{r_0}^{\infty} r \exp\left(-\int_{r_0}^{r} g_1(\rho)d\rho\right) dr < \infty, \tag{1.40}$$

где

$$g_1(r) = r \inf_{|x|=r,\, t>0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ii}(x, t) + b_i(x, t)x_i}{\sum\limits_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}(x, t)x_i x_k},$$

при этом в качестве функции $V(x)$ в [37, теорема 1] следует взять функцию

$$V(|x|) = \int_{|x|}^{\infty} r \exp\left(-\int_{r_0}^{r} g_1(\rho)d\rho\right) dr.$$

Предполагая, что для некоторых ограниченных областей Q и Q_1 в $\mathbb{R}^N$, $Q \subset Q_1$, справедливы соотношения

$$c(x, t) < -c_0 < 0 \quad \text{при } x \in Q,$$
$$c(x, t) \equiv 0 \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N \setminus Q_1,$$

авторы работы [37] устанавливают теорему 2, в которой утверждается, что *решение задачи* (1.14), (1.15) *имеет предел*

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) > 0,$$

если существует функция $V(|x|)$, для которой выполнены условия (1.36), (1.37) *и, кроме того,*

$$\inf_{\mathbb{R}^N} u_0(x) > 0.$$

Если же $u(x, t)$ — решение задачи Коши (1.12), (1.13), *$c(x) \leqslant 0$, и существует предел*

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x, t) = k,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = w(x),$$

где $w(x)$ — единственное решение уравнения

$$\Lambda_1(x)w + c(x)w = 0,$$

для которого существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x) = k.$$

Отметим интересные результаты работы В. В. Жикова [32], в которых были получены достаточные условия на коэффициенты уравнения (1.14) для любого начального значения $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Имеет место теорема о «равностабилизации», т. е. существует предел

$$\lim_{t\to\infty} (u(x, t) - v(x, t)) = 0, \tag{1.41}$$

где $v(x,\,t)$ — решение задачи с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik} v_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i v_{x_i} - v_t = 0, \tag{1.42}$$

$$v(x,\,0) = \rho(x) u_0(x), \tag{1.43}$$

где $\rho(x)$ — периодическая функция с периодом 1 по каждому аргументу $(x_1, \ldots, x_N)$.

Предполагая, что коэффициенты параболического уравнения (1.14) являются гладкими и периодическими функциями периода 1 по каждому аргументу $(x_1, \ldots, x_N)$, $c(x,\,t) \equiv 0$ и что вектор $b = (b_1, \ldots, b_N)$ мало отличается от постоянного вектора b^1, т. е. имеет вид $b = b^1 + \varepsilon$, где $b^1 = (b_1^1, \ldots, b_N^1)$ — постоянный вектор. Тогда найдется параболический оператор вида (1.42) с постоянными коэффициентами и гладкая периодическая функция $\rho(x)$ такая, что если $u(x,\,t)$ — решение задачи Коши

$$\Lambda_1(x,\,t)u - u_t = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

а $v(x,\,t)$ — решение задачи (1.42), (1.43), то для любой функции $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ существует предел (1.41).

Теорема о равностабилизации позволяет получить критерий стабилизации решения задачи Коши для уравнения с младшими членами, выражающийся в терминах существования соответствующих данному уравнению пределов средних от начальной функции. В самом общем случае критерий поточечной (равномерной) стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения второго порядка без младших коэффициентов в классе ограниченных начальных функций был получен в работах S. Kamin [79] и В. В. Жикова [31].

В работе [54] был впервые получен критерий стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с ограниченной начальной функцией. В [55] результаты [54] перенесены на некоторые параболические уравнения с постоянными и переменными младшими коэффициентами.

Более подробный обзор работ, в которых изучается строение начальных функций, обеспечивающее стабилизацию, когда младшие члены не оказывают влияния на явление стабилизации, можно найти в [29].

Замечание. Согласно терминологии, введенной Н. Мейерсом и Дж. Серрином [84], функцию $v(x) > 0$, удовлетворяющую условиям (1.36), (1.37), называют *барьером*, отвечающим оператору $\Lambda_1(x,\,t)$. Если функция $v(x) > 0$ удовлетворяет условиям

$$\Lambda_1(x,\,t)v \leqslant 0, \quad |x| \geqslant R,\, t > 0, \tag{1.44}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} v(x) = +\infty, \tag{1.45}$$

то функцию $v(x)$ называют *антибарьером*, отвечающим оператору $\Lambda_1(x,\,t)$ на бесконечности [84].

Хорошо известно (см. [84]), что если оператор Λ_1 имеет барьер, то он не может иметь антибарьер. Явные условия на коэффициенты, гарантирующие существования барьера или антибарьера, даны в работе [84]. В случае оператора Лапласа барьер существует при $N \geqslant 3$, а антибарьер при $N \leqslant 2$.

Используя концепцию барьера (антибарьера) для уравнения (1.14), мы можем дать другую, эквивалентную, формулировку результатов цитированных выше работ [36, 37, 64] в терминах существования антибарьера (барьера) для уравнения (1.14).

В главе 1 настоящей работы мы перенесем концепцию антибарьера с классических решений суперпараболических неравенств на случай обобщенных решений соответствующих суперпараболических неравенств с дивергентным эллиптическим оператором (1.1), имеющим независимые от t коэффициенты. На этом пути мы получим основные результаты главы 1 в классах ограниченных или степенным образом растущих на бесконечности начальных функций.

В главе 2 построим классические антибарьеры для уравнения (1.14) с точным порядком роста на бесконечности, обусловленным соответствующим поведением на бесконечности младших коэффициентов уравнения (1.14). Начальные функции при этом будем брать из классов функций, порядок роста которых согласован с порядком роста соответствующих антибарьеров. На этом пути будут получены основные результаты о стабилизации решения задачи Коши (1.14), (1.15) в классах экспоненциально растущих начальных функций.

Глава 3 посвящена вопросу о влиянии неограниченной области Q на свойство стабилизации к нулю решения первой краевой задачи для параболического уравнения

$$\begin{cases} L(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D = Q \times (0, \infty), \\ u|_{\partial D} = 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in Q, \end{cases} \tag{1.46}$$

где оператор $L(x)$ определен в (1.1), $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная в Q функция, $\partial D = \partial Q \times (0, \infty)$ — граница цилиндра D.

В работе [65] доказано, что если $u(x, t)$ — решение уравнения (1.14) в нецилиндрической области

$$Z_t = \{x, t : t \geqslant 0, |x| \leqslant \psi(t)\}, \quad \psi(t)|\psi'(t)| \leqslant \beta, \psi(t) \in C^1[0, \infty],$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{\partial Z_t} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x),$$

где $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная в Z_0 функция, то выполняется оценка

$$|u(x, t)| \leqslant C_1 \exp\left\{-C_2 \int_0^t \frac{d\tau}{\psi^2(\tau)}\right\}.$$

Отметим, что область Z_t в каждом сечении $t = t_0$ является ограниченной. Из условия $\psi(t)|\psi'(t)| \leqslant \beta$ следует, что возможно логарифмическое расширение области Z_t при $t \to \infty$. Окончательный результат получен А. М. Ильиным в [35], который доказал, что $\psi(t)$ должно расти не быстрее, чем логарифм. Точным классам единственности для параболических уравнений и систем посвящена работа [33]. Достаточные условия на область Q, при которых решение первой краевой задачи стабилизируется к нулю, посвящена работа Ф. Х. Мукминова [51]. Эта тематика получила значительное развитие в работах Л. М. Кожевниковой [41].

В главе 3 мы установим, что если область $\mathbb{R}^N \setminus Q$ имеет бесконечную емкость [50], то решение смешанной задачи (1.46) стабилизируется к нулю при $t \to \infty$. Установлена также необходимость этого условия на емкость $\mathbb{R}^N \setminus Q$.

2. Краткое содержание работы

В главе 1 изучаются условия на младшие коэффициенты уравнения

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{2.1}$$

при которых его решение, удовлетворяющее условию

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.2}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0 \tag{2.3}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Определение оператора $L(x)$ дано в (1.1) в разделе 1. Будут изучены три класса начальных функций: ограниченные в $\mathbb{R}^N$ функции

$$|u_0(x)| \leqslant M, \tag{2.4}$$

функции степенного роста на бесконечности

$$|u_0(x)| \leqslant M(1 + |x|)^m, \quad m > 0, \tag{2.5}$$

функции экспоненциального порядка роста

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\{a|x|\}, \quad a > 0. \tag{2.6}$$

Впервые будет выяснено, что условия на младшие коэффициенты, гарантирующие существование предела (2.3), зависят от размерности N пространства $\mathbb{R}^N$.

Вначале мы рассмотрим случай, когда начальная функция $u_0(x)$ является ограниченной.

Определение (B_ε)**.** Пусть $N = 1$ или $N = 2$. Будем говорить, что коэффициенты $b_i(x)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют *условию* (B_ε), если существуют $B > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ такие, что

$$\sup(1 + |x|)^{1+\varepsilon}|b_i(x)| = B. \tag{2.7}$$

Определение (C_1)**.** Пусть $N = 1$ или $N = 2$. Будем говорить, что ограниченный в $\mathbb{R}^N$ коэффициент $c(x)$ удовлетворяет *условию* (C_1), если существует $\alpha > 0$ такое, что:

$$c(x) = -\alpha^2 \max(0, \operatorname{sgn}(1 - |x|)). \tag{2.8}$$

В разделе 4 главы 1 доказан следующий основной результат.

Теорема 4.1. *Если $N = 1$ или $N = 2$ и коэффициенты $b_i(x)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условию (B_ε), коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_1), то решение задачи Коши* (2.1)*,* (2.2) *имеет предел* (2.3) *равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Отметим, что условие (C_1) на коэффициент $c(x)$ существенно, ибо если $c(x) \equiv 0$, то решением задачи Коши

$$\Delta u - u_t = 0,\ (x,\, t) \in D, \quad u(x,\, 0) = 1,$$

будет являться $u(x,\, t) \equiv 1$, и это решение не имеет нулевого предела (2.3) ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Замечание. Теорема 4.1 не имеет места при больших размерностях, т. е. при $N \geqslant 3$, ибо справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.1. *При $N \geqslant 3$ существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_1), и ограниченная функция $u_0(x)$ такие, что решение задачи Коши*

$$\Delta u + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \quad u(x,\, 0) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^N \tag{2.9}$$

не имеет предела (2.3) *ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.*

Следующие леммы устанавливают точность условий теоремы 4.1 на младшие коэффициенты уравнения (2.1).

Лемма 7.2. *При $N = 1$ или $N = 2$ существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_1), и ограниченная функция $u_0(x)$, для которых решение задачи* (2.9) *не имеет равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела* (2.3).

Итак, лемма 7.1 показывает, что утверждение теоремы 4.1 нельзя усилить, заменив в пределе (2.3) компакт K на все $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{2.10}$$

$$u(x,\, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.11}$$

Лемма 7.3. *При $N = 1$ существуют: коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_1), коэффициент $b(x)$, ограниченный в $\mathbb{R}^1$ и такой, что*

$$b(x) = \beta/x, \quad \text{при } x > 1,\ \beta > 1,$$
$$b(x) = -\beta/x, \quad \text{при } x < -1,\ \beta < -1,$$

ограниченная в $\mathbb{R}^1$ функция $u_0(x)$ — для которых решение задачи Коши (2.10), (2.11) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^1$.*

Лемма 7.4. *При $N = 2$ существуют: коэффициент $c(x_1,\, x_2)$, удовлетворяющий условию (C_1), коэффициенты $b_1(x_1,\, x_2)$, $b_2(x_1,\, x_2)$ — ограниченные в $\mathbb{R}^2$ функции такие, что при $x_1^2 + x_2^2 > 1$*

$$b_1(x_1,\, x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad b_2(x_1,\, x_2) = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

ограниченная в $\mathbb{R}^2$ функция $u_0(x)$ — для которых решение задачи Коши (2.10), (2.11) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке $(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$.*

Леммы 7.3 и 7.4 утверждают, что порядок $1+\varepsilon$ (условие (B_ε)) является точным, ибо нельзя положить $\varepsilon = 0$.

Определение (C_2). Пусть $N \geqslant 3$. Будем говорить, что ограниченный в $\mathbb{R}^N$ коэффициент $c(x)$ удовлетворяет *условию* (C_2), если существует $\alpha > 0$ такое, что

$$c(x) \leqslant -\alpha^2 |x|^{-2} \max\{0, \operatorname{sgn}(|x|-1)\}. \tag{2.12}$$

Определение (B_2). Пусть $N \geqslant 3$. Будем говорить, что коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ удовлетворяют *условию* (B_2), если

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1+|x|) \sum_{i=1}^{N} |b_i(x)| \leqslant B < \infty. \tag{2.13}$$

В разделе 6 главы 1 доказан следующий основной результат.

Теорема 6.1. *Если размерность* $N \geqslant 3$ *и коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* (B_2), *коэффициент* $c(x)$ *удовлетворяет условию* (C_2), *то решение задачи* (2.1), (2.2) *имеет предел* (2.3) *равномерно по* x *на любом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Лемма 7.5. *При* $N \geqslant 3$ *существуют коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_2), *и ограниченная в* $\mathbb{R}^N$ *начальная функция* $u_0(x)$, *для которых решение задачи* (2.9) *не имеет равномерно во всем* $\mathbb{R}^N$ *предела* (2.3).

Лемма 7.6. *Существуют: ограниченные в* $\mathbb{R}^N$ *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *такие, что*

$$b_i(x) = B \frac{x_i}{|x|^{2-\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1,\ B > 0, \tag{2.14}$$

коэффициент $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_2), *ограниченная в* $\mathbb{R}^N$ *функция* $u_0(x)$ — *для которых решение задачи* (2.10), (2.11) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке* $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 7.7. *Если* $c(x)$ *имеет вид*

$$c(x) = -\alpha^2 |x|^{-2-\varepsilon} \max\{0, \operatorname{sgn}(|x|-1)\}, \tag{2.15}$$

то существует ограниченная в $\mathbb{R}^N$ *функция* $u_0(x)$, *для которой решение задачи Коши* (2.9) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке* $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 7.5 устанавливает точность утверждения теоремы 6.1, в котором нельзя заменить компакт K на все $\mathbb{R}^N$.

Лемма 7.6 показывает, что в условии (B_2) нельзя $(1+|x|)$ заменить на $(1+|x|)^{1-\varepsilon}$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

Лемма 7.7 показывает, что условие (C_2) на $c(x)$ является точным, т. е. степень $|x|^{-2}$ в (C_2) нельзя заменить на большую $|x|^{-2-\varepsilon}$, $\forall\, \varepsilon > 0$. Лемма 7.7 устанавливает, что в степенной шкале условие (C_2) не допускает усиления. Однако, как мы покажем в главе 2, можно рассмотреть более тонкую шкалу для коэффициента $c(x)$, в терминах которой можно усилить условие убывания коэффициента $c(x)$.

Леммы 7.1–7.7 о точности условий теорем 4.1 и 6.1 доказываются в разделе 7.

Далее мы рассмотрим случай начальных функций $u_0(x)$, допускающих степенной рост (2.5) на бесконечности. В этом случае, как будет видно ниже, мы усиливаем требования на коэффициент $c(x)$, чтобы «компенсировать» рост начальной функции.

В разделе 10 главы 1 доказывается основное утверждение:

Теорема 10.1. *Если функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (2.5), *а коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* (B_2), *тогда существует постоянная* $\alpha_0 = \alpha_0(m, B, N, \lambda_1, \lambda_0) > 0$ *такая, что если коэффициент* $c(x)$ *удовлетворяет условию* (C_2) *при*

$$\alpha^2 > \alpha_0^2, \tag{2.16}$$

то решение задачи Коши (2.1), (2.2) *имеет предел* (2.3) *равномерно по* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

В случае, когда в уравнении (2.1) эллиптический оператор $L(x)$ заменяется оператором Лапласа Δ, мы находим точное значение постоянной α_0^2 в неравенстве (2.16).

В разделе 11 главы 1 будет доказана следующая теорема.

Теорема 11.1. *Если функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (2.5), *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* (B_2), *тогда если коэффициент* $c(x)$ *удовлетворяет условию* (C_2) *при*

$$\alpha^2 > \alpha_0^2 = m(m + N + B - 2), \tag{2.17}$$

то решение задачи Коши (2.10), (2.11) *имеет предел* (2.3) *равномерно относительно* x *на любом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Неравенство (2.17) является точным, как следует из следующего утверждения.

Лемма 12.1. *Для произвольных* $m > 0$, $B > 0$ *существуют: начальная функция* $u_0(x)$, *удовлетворяющая условию роста* (2.5), *ограниченные в* $\mathbb{R}^N$ *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$, *удовлетворяющие условию* (B_2) *и такие, что*

$$b_i(x) = B\frac{x_i}{|x|^2}, \quad \text{при } |x| > 1, \tag{2.18}$$

и коэффициент $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_2) *при*

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 = m(m + N + B - 2),$$

для которых решение задачи Коши (2.10), (2.11) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке* $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 12.3. *Для произвольных* $m > 0$, $B > 0$ *существует функция* $u_0(x)$, *удовлетворяющая условию роста* (2.5), *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$, *удовлетворяющие условию* (B_2), *коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_2) *для* α *из неравенства* (2.17), *такие, что решение задачи* (2.10), (2.11) *не имеет равномерного в* $\mathbb{R}^N$ *предела* (2.3).

Лемма 12.4. *Для произвольных* $m > 0$, $B > 0$ *существуют: начальная функция* $u_0(x)$, *удовлетворяющая условию роста* (2.5), *ограниченные в* $\mathbb{R}^N$ *коэффициенты* $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, b_N(x)$ *такие, что при* $|x| > 1$ *справедливы равенства* (2.14), *коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_2) *для* α *из неравенства* (2.17), *для которых решение задачи Коши* (2.10), (2.11) *не имеет предела ни в одной точке* $x \in \mathbb{R}^N$.

Леммы 12.1–12.4, устанавливающие точность условий теорем 10.1 и 11.1, будут доказаны в разделе 12 главы 1.

Рассмотрим случай, когда начальная функция удовлетворяет условию экспоненциального роста (2.8). В полупространстве $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ рассмотрим задачу Коши

$$L(x, t)u + c(x, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{2.19}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.20}$$

где оператор $L(x, t)$ определен по формуле (1.2) из введения.

Определение (C_3)**.** Будем говорить, что коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет условию (C_3), если существует $\alpha > 0$ такое, что

$$c(x, t) \leqslant -\alpha^2 \quad \text{в } D. \tag{2.21}$$

Приведем оценки Дж. Нэша [85] и Д. Аронсона [69, 70] для фундаментального решения следующей задачи Коши.

$$L(x, t)v - v_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{2.22}$$

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.23}$$

где $u_0(x)$ непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция, удовлетворяющая условию (1.16).

В работах [69, 70, 85] построено фундаментальное решение задачи Коши (2.22), (2.23) $P(x, y, t, \tau)$ такое, что

1. функция $P(x, y, t, \tau)$ непрерывна в полупространстве

$$\mathbb{R}^{2N+2}_+ = \{x, y, t, \tau : x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R}^N, t > \tau\};$$

2. существуют постоянные $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, зависящие только от λ_0^2 и N, такие, что

$$P(x,\, y,\, t,\, \tau) \leqslant \frac{k_2^2}{(t-\tau)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{(x-y)^2}{4k_1(t-\tau)}\right\}. \tag{2.24}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 13.1. *Пусть функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию роста* (2.6) *при некотором $a > 0$, тогда если коэффициент $c(x,\, t)$ удовлетворяет условию (C_3) при*

$$\alpha^2 > a^2 k_1^2, \tag{2.25}$$

где k_1 — постоянная из оценки (2.24)*, то решение задачи Коши* (2.19), (2.20) *имеет предел* (2.3) *равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Из оценки (2.25) следует, что решение задачи Коши стабилизируется к нулю, равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Условие (2.25) в теореме 13.1 является точным, о чем свидетельствует следующая лемма.

Лемма 14.1. *Для произвольного $a > 0$ существует функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию роста* (2.6)*, и коэффициент $c(x,\, t)$, удовлетворяющий условию (C_3) при $\alpha^2 = a^2$, для которых решение задачи Коши* (2.9) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.*

Теорема 13.1 будет доказана в разделе 13, а лемма 14.1 — в разделе 14 главы 1.

Замечание. Теорема 13.1 допускает обобщение на случай более общего уравнения вида

$$L(x,\, t)u + (b(x,\, t), \nabla u) + c(x,\, t)u - u_t = 0,$$

где на коэффициенты $b_i(x,\, t)$, $i = 1, \ldots, N$ следует наложить условия (см. работы [86,90]), которые гарантируют справедливость оценки (2.24) для фундаментального решения задачи Коши

$$L(x,\, t)v + (b(x,\, t), \nabla v) - v_t = 0, \quad v|_{t=0} = u_0(x). \tag{2.26}$$

В главе 2 изучаются условия на младшие коэффициенты уравнения

$$\Lambda(x,\, t)u + (b(x,\, t), \nabla u) + c(x,\, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{2.27}$$

при которых его решение, удовлетворяющее условию

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.28}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0 \tag{2.29}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Определение оператора $\Lambda(x,\, t)$ в (2.27) дано равенством (1.6).

Будут изучены четыре класса начальных функций. Ограниченные в $\mathbb{R}^N$ функции:

$$|u_0(x)| \leqslant M, \tag{2.30}$$

функции степенного роста:

$$|u_0(x)| \leqslant M(1+|x|)^m, \quad m > 0, \tag{2.31}$$

функции экспоненциального порядка роста $1-k$, где $0 < k < 1$:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left\{a|x|^{1-k}\right\}, \quad a > 0, \tag{2.32}$$

функции экспоненциального порядка роста $1+\ell$, где $0 < \ell < 1$:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left\{b|x|^{1+\ell}\right\}, \quad b > 0. \tag{2.33}$$

Замечание. Если в (2.32) положить $k = 0$, или в (2.33) положить $\ell = 0$, то получим класс начальных функций вида

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\{a|x|\}.$$

Стабилизация в таком классе функций была изучена в разделах 8 и 9 главы 1. Если в (2.32) положить $k = 1$, то получим класс ограниченных функций (2.30).

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u - b(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{2.34}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.35}$$

где функция $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$.

Будем рассматривать классическое решение задачи (2.34), (2.35), предполагая, что функция $b(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию Гельдера.

Определение (C_4)**.** Будем говорить, что коэффициент $b(x)$ удовлетворяет *условию* (C_4), если

$$b(x) = b(|x|) \geqslant 0$$

является функцией, зависящей от радиуса $r = |x|$, и такой, что расходится несобственный интеграл

$$\lim_{R\to\infty} \int_{r_0}^{R} \tau b(\tau) d\tau = +\infty. \tag{2.36}$$

Теорема 15.1. *Для того, чтобы решение задачи* (2.34), (2.35) *имело предел* (2.29) *равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$, *необходимо и достаточно, чтобы коэффициент* $b(|x|)$ *удовлетворял условию* (C_4).

Замечание. Применим теорему 15.1 для случая, когда коэффициент $b(x)$ в (1.35) удовлетворяет неравенству

$$b(x) \geqslant \alpha^2 \min\left\{\frac{1}{e^2},\ \frac{1}{|x|^2(\ln|x|)^s}\right\} \tag{2.37}$$

где $0 < s \leqslant 1$. Мы получим при этом, что решение задачи Коши (2.34), (2.35) с коэффициентом $b(x)$, удовлетворяющим (2.37), имеет предел (2.29) при любой ограниченной начальной функции $u_0(x)$.

Таким образом, мы получили усиление порядка убывания коэффициента при $u(x, t)$ по сравнению с условием (C_2) в теореме 6.1 главы 1.

Определение (B_3)**.** Будем говорить, что коэффициенты $b_i(x, t)$ уравнения удовлетворяют *условию* (B_3), если

$$\sup_D (1+|x|) \left[\sum_{i=1}^{N} (b_i(x, t))^2\right]^{1/2} = B < +\infty. \tag{2.38}$$

Определение (C_5)**.** Будем говорить, что коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет *условию* (C_5), если

$$c(x, t) \leqslant -b_1(|x|), \quad (x, t) \in D, \tag{2.39}$$

где $b_1(r) > 0$ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция такая, что расходится интеграл

$$\lim_{R\to\infty} \int_{r_0}^{R} \tau b_1(\tau) d\tau = +\infty. \tag{2.40}$$

Теорема 17.1. *Если начальная функция* $u_0(x)$ *ограничена в* $\mathbb{R}^N$, *коэффициенты* $b_i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$ *удовлетворяют условию* (B_3), *коэффициент* $c(x, t)$ *удовлетворяет условию* (C_5), *тогда решение задачи Коши* (2.27), (2.28) *имеет предел* (2.29) *равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим случай, когда начальные функции удовлетворяют условию степенного роста (2.31).

Определение (C_6)**.** Будем говорить, что коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет *условию* (C_6), если

$$c(x, t) \leqslant a_\alpha(|x|) = -\alpha^2 \min(1, |x|^{-2}). \tag{2.41}$$

Теорема 20.1. *Если функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию роста* (2.31), *коэффициенты* $b_i(x,t)$, $i=1,\ldots,N$ *удовлетворяют условию* (B_3), *коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_6) *при*

$$\alpha^2 > m(m+s-2) = \alpha_0^2, \tag{2.42}$$

где

$$s = \frac{\lambda_1^2(N-1)+\lambda_0^2+B}{\lambda_0^2}, \tag{2.43}$$

то решение задачи Коши (2.27), (2.28) *имеет предел* (2.29) *равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Как вытекает из леммы 12.1 главы 1, условие (2.42) является близким к окончательному и не может быть заменено на $\alpha^2=\alpha_0^2$ при $\Lambda(x,t)=\Delta$.

Рассмотрим начальные функции, удовлетворяющие условию (2.32) экспоненциального порядка роста $1-k$, $0<k<1$ для некоторых $0<k<1$, $a>0$.

Определение (C_7)**.** Будем говорить, что коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет *условию* (C_7), если

$$c(x,t) \leqslant -\alpha^2 \min(1, |x|^{-2k}) \tag{2.44}$$

для некоторых $\alpha>0$, $0<k<1$.

Теорема 21.1. *Если функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию роста* (2.32) *при некоторых* $a>0$, $0<k<1$, *коэффициенты* $b_i(x,t)$ *удовлетворяют условию* (B_3), *коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_7) *при*

$$\alpha > \lambda_1 a(1-k), \tag{2.45}$$

где λ_1 — *постоянная из условия параболичности* (1.4), *то решение задачи Коши* (1.27), (1.28) *имеет предел* (2.29) *равномерно относительно* x *во всем* $\mathbb{R}^N$.

Условие (2.45) является довольно точным, о чем свидетельствует следующая лемма.

Лемма 23.1. *Для фиксированных* $a>0$, $0<k<1$ *существуют: начальная функция* $u_0(x)$, *удовлетворяющая оценке* (2.32) *и коэффициент* $c(|x|)$, *удовлетворяющий условию* (C_7), $0<k<1$, $\alpha>0$, *при*

$$\alpha = a(1-k), \tag{2.46}$$

такие что решение задачи Коши (2.9) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке* $x\in\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим начальные функции, удовлетворяющие условию (2.33) экспоненциального порядка роста $1+\ell$, $0<\ell<1$, при некоторых $b>0$, $0<\ell<1$.

Определение (C_8)**.** Будем говорить, что коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет *условию* (C_8), если

$$c(x,t) \leqslant -\alpha^2 \max(1,|x|^{2l}), \tag{2.47}$$

Замечание. В случае, когда коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию (C_8), мы полагаем, что все коэффициенты уравнения (2.27) принадлежат классу Гельдера $C^\gamma(Q)$, $0<\gamma\leqslant 1$, для любой ограниченной подобласти Q в D. Существование и единственность решения задачи Коши (2.27), (2.28) в тихоновском классе следуют, например, из работы Г. Н. Смирновой [57] (см. также работы [68, 87]).

Теорема 22.1. *Пусть функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию роста* (2.33) *при*

$$b>0, \quad 0<\ell<1,$$

коэффициенты $b_i(x,t)$ *удовлетворяют условию* (B_3), *коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_8) *при*

$$\alpha > \lambda_1 b(1+\ell), \tag{2.48}$$

где λ_1 — *постоянная из условия параболичности* (1.4), $\lambda_1>0$. *Тогда решение задачи Коши* (2.27), (2.28) *имеет предел* (2.29) *равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Условие (2.48) является довольно точным, о чем свидетельствует следующая лемма.

Лемма 24.1. *Для фиксированных*

$$b > 0, \quad 0 < \ell < 1$$

существуют: начальная функция $u_0(x)$*, удовлетворяющая оценке* (2.33)*, и коэффициент* $c(|x|)$*, удовлетворяющий условию* (C_8)*,* $0 < \ell < 1$*,* $\alpha > 0$ *при*

$$\alpha = b(1 + \ell), \tag{2.49}$$

такие, что решение задачи Коши (2.9) *не имеет предела* (2.3) *ни в одной точке* $x \in \mathbb{R}^N$.

В главе 3 мы установим необходимые и достаточные условия стабилизации решения первой краевой задачи для параболического уравнения без младших коэффициентов в прямом цилиндре $Z = Q \times [0, \infty)$, которые формулируются в терминах некоторых характеристик области $\mathbb{R}^N \setminus Q$, где Q — область в гиперплоскости $t = 0$, на которой задана непрерывная и ограниченная начальная функция $u(x, 0) = u_0(x)$.

Пусть Q — произвольная (возможно, неограниченная) область N-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, $Z = Q \times [0, \infty)$ — прямой полуцилиндр с основанием Q. В цилиндре $\overline{Z}$ рассмотрим первую краевую задачу

$$L(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } Z, \tag{2.50}$$

$$u|_S = 0,\ S = \partial Q \times [0, \infty),\ \partial Q \text{ — граница } Q, \tag{2.51}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in Q, \tag{2.52}$$

где оператор $L(x)$ определен по формуле (1.1), $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная в области Q функция

$$|u_0(x)| \leqslant M, \quad x \in Q. \tag{2.53}$$

Предполагаем, как в разделе 1 введения, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ оператора $L(x)$ ограничены и измеримы в $Q \subset \mathbb{R}^N$, и выполнено условие (1.3) равномерной параболичности.

Нам потребуется несколько определений известных пространств дифференцируемых функций (см. [46, 52]).

Через Q_a^b обозначим прямое произведение $Q \times (a, b)$, где Q — область в $\mathbb{R}^N$, $a < t < b$,

$$Q_a^b(R) \equiv Q_a^b \cap B_R \equiv Q_a^b \cap (|x| < R).$$

Пространство $W_2^{1,0}(Q_a^b(R))$ определяется как пополнение множества функций из $C_0^\infty(Q_{a-1}^{b+1})$ по норме

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(Q_a^b)} = \int\limits_{Q_a^b(R)} \left[u^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2\right] dxdt. \tag{2.54}$$

Пространство $\mathring{V}_2^{1,0}(Q_a^b(R))$ определяется как пополнение множества функций из $C_0^\infty(Q_{a-1}^{b+1})$ по норме

$$\|u\|_{\mathring{V}_2^{1,0}(Q_a^b(R))} = \operatorname{vrai}\max_{a \leqslant t \leqslant b} \int\limits_{B_R} |u(x, t)|^2 dx + \int\limits_{Q_a^b} |\nabla u|^2 dxdt. \tag{2.55}$$

Определение. *Обобщенным решением в* $Q_0^T = Q \times (0, T)$ *первой смешанной задачи* (2.50)–(2.52) называется функция $u(x, t)$, принадлежащая классу $W_2^{1,0}(Q_0^T(R))$, если выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_0^T(R)} \left[-u\eta_t + \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x) u_{x_k} \eta_{x_i}\right] dxdt = \int\limits_Q \eta(x, 0) u_0(x) dx \tag{2.56}$$

для всех пробных функций $\eta(x, t) \in C_0^\infty(Q_{-1}^T)$, удовлетворяющих условию $\eta(x, T) \equiv 0$.

Функция $u(x, t)$ является *решением задачи* (2.50)–(2.52) *в* $Q \times (0, \infty)$, если при всех $T > 0$ она является решением задачи (2.50)–(2.52) в Q_0^T.

Из результатов работ [8, 52] следует, что решение задачи (2.50)–(2.52) имеет свойства:

1. принцип максимума: если $u_0(x) \leqslant M$ для п. в. $x \in Q$, то для любого $t > 0$ имеем $u(x, t) \leqslant M$ для п. в. $x \in Z$.
2. если $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в Q, то ограниченное в $Z = Q \times [0, \infty)$ решение задачи (2.50)–(2.52) существует и единственно.

Для заданной ограниченной и непрерывной в $Q \subset \mathbb{R}^N$ функции $u_0(x)$ в цилиндре $Z = Q \times [0, \infty)$ рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в } Z, \tag{2.57}$$

$$u|_S = 0, \quad S = \partial Q \times (0, \infty), \tag{2.58}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in Q \subset \mathbb{R}^N. \tag{2.59}$$

Пусть $N \geqslant 3$ и E — борелевское множество в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим на E всевозможные меры μ с носителем на E, удовлетворяющие условию

$$K(E) = \left\{ \int\limits_E \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}} \leqslant 1 \right\}.$$

Винеровской емкостью множества E называется число

$$\operatorname{cap}(E) = \sup_{\mu \in K(E)} \mu(E).$$

Превосходный обзор работ, связанных с понятием емкости, можно найти в монографии [50].

Имеет место следующее основное утверждение.

Теорема 28.1. *Для того, чтобы решение задачи* (2.57)–(2.59) *стабилизировалось, т. е. существовал предел*

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = 0 \tag{2.60}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в области Q, необходимо и достаточно, чтобы при некотором $q > 1$ расходился ряд

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=1}^{n} \operatorname{cap}\left(\overline{B_{q^m}} \setminus Q\right) q^{m(2-N)} = +\infty, \tag{2.61}$$

где $\overline{B_R}$ — замкнутый шар $\{|x| \leqslant R\}$ в $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{cap}(E)$ — винеровская емкость компакта E в $\mathbb{R}^N$.

Критерий стабилизации решения задачи (2.57)–(2.59) можно сформулировать и в интегральном виде.

Теорема 28.2. *Для того чтобы решение задачи* (2.57)–(2.59) *имело предел* (2.60) *равномерно относительно x на каждом компакте K области Q, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{r_0}^{R} \operatorname{cap}\left(\overline{B_\tau} \setminus Q\right) \frac{d\tau}{\tau^{N-1}} = +\infty, \tag{2.62}$$

где $\overline{B_R}$ — замкнутый шар $\{|x| \leqslant R\}$ в $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{cap}(E)$ — винеровская емкость компакта E в $\mathbb{R}^N$.

Имеет место основной результат главы 3.

Теорема 28.3. *Для того, чтобы решение задачи* (2.50)–(2.52) *стабилизировалось к нулю равномерно относительно x на каждом компакте K в Q, необходимо и достаточно, чтобы это свойство было справедливо для решения задачи* (2.57)–(2.59) *для уравнения теплопроводности.*

Следствие 28.1. *Если область $Q \subset \mathbb{R}^N$ такова, что расходится ряд* (2.61) (*интеграл* (2.62)), *то для решения краевой задачи* (2.50)–(2.52) *справедливо неравенство*

$$|u(x_0, t)| \leqslant C_1 \exp \left\{ -C_2 \int\limits_{a_0}^{\sqrt{t/C_3}} \frac{\operatorname{cap}\left(\overline{B_\tau} \setminus Q\right)}{\tau^{N-1}} d\tau \right\}, \tag{2.63}$$

где x_0 — произвольная точка области Q; $t \geqslant a_0^2$; $C_1, C_2, C_3 > 0$ — некоторые постоянные, зависящие от λ_1, λ_0 и N; $a_0 > 0$ — постоянная, зависящая от N, λ_1, λ_0 и $|x_0|$.

Из теоремы 28.3 следует важное свойство устойчивости решений задачи (2.50)–(2.52) по отношению к изменению коэффициентов уравнения (2.50) и начальных функций.

Пусть Q — та же область в $\mathbb{R}^N$, что и в задаче (2.50)–(2.52). Вместе с задачей (2.50)–(2.52) рассмотрим в цилиндре $Z = Q \times [0, \infty)$ другую задачу:

$$L_1(x)u_1 - u_{1t} = 0 \quad \text{в } Z, \tag{2.64}$$

$$u_1|_S = 0, \quad S = \partial Q \times (0, \infty), \tag{2.65}$$

$$u_1|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in Q, \quad |u_1(x)| \leqslant M, \tag{2.66}$$

где

$$L_1(x) = \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(b_{ik}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} \right),$$

и для ограниченных и измеримых в Q коэффициентов $b_{ik}(x) = b_{ki}(x)$ выполнено неравенство (1.3) с теми же λ_0^2 и λ_1^2, а $u_1(x)$ — непрерывная и ограниченная в Q функция.

Имеет место утверждение

Теорема 28.4.

1. *Если область $Q \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ такова, что расходится ряд* (2.61) (*интеграл* (2.62)), *то решения краевых задач* (2.50)–(2.52) *и* (2.64)–(2.66) *имеют пределы*

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{t \to \infty} u_1(x, t) = 0 \tag{2.67}$$

   равномерно относительно x на каждом компакте K в Q.
2. *Если существует один из пределов* (2.67), *то для области Q расходится ряд* (2.61) (*интеграл* (2.62)) *и тогда существует и другой предел* (2.67).

В разделе 29 главы 3 доказывается ряд вспомогательных утверждений относительно решений задачи (2.57)–(2.59), в частности, доказывается обобщение «леммы о возрастании» на случай обобщенных решений задач (2.50).

Автор выражает глубокую благодарность В. А. Кондратьеву и А. М. Ильину за поддержку и интерес к моим результатам по стабилизации. Кроме того, автор благодарит В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, И. С. Ломова, Ю. А. Алхутова, В. В. Жикова, А. Л. Скубачевского, А. Б. Муравника за внимание и плодотворные дискуссии.

Глава 1

ОБ УСЛОВИЯХ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этой главе изучаются условия на младшие коэффициенты параболического уравнения, имеющего дивергентную структуру. Начальные функции берутся в классе ограниченных в $\mathbb{R}^N$ функций, или из класса функций, имеющих степенной рост на бесконечности, или из класса функций экспоненциального порядка роста.

3. Некоторые свойства решений эллиптических уравнений в одномерном и двумерном случаях

В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим дифференциальное выражение

$$\Lambda_1 u \equiv L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u, \tag{3.1}$$

где

$$L(x)u = \sum_{i,\,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right), \quad (b(x), \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}. \tag{3.2}$$

Предполагается, что коэффициенты (3.1) ограничены и измеримы в $\mathbb{R}^N$, $a_{ik} = a_{ki}$, $i, k = 1, \ldots, N$, выполнено условие эллиптичности (1.3), младшие коэффициенты (3.1) ограничены:

$$\frac{1}{\lambda_0^4}\sum_{k=1}^{N} |b_k^2(x)| + \frac{|c(x)|^2}{\lambda_0^2} \leqslant \nu, \quad \nu > 0. \tag{3.3}$$

Определим коэффициент $c_1(x)$ по формуле

$$c_1(x) = \begin{cases} -\alpha^2, \ |x| \leqslant 1, \\ 0, \ |x| > 1. \end{cases} \tag{3.4}$$

Определение. *Обобщенным решением* из $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ уравнения (неравенства)

$$\Lambda_1 u = 0\,(\leqslant 0), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.5}$$

называется функция $u(x) \in W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega)$, где Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^N$, для которой имеет место интегральное тождество (соответственно, неравенство)

$$\int\limits_{\Omega} \left[-\sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \eta}{\partial x_i} + \eta\left(\sum_{k=1}^{N} b_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u\right)\right] dx = 0 \text{ (соответственно, } \leqslant 0), \tag{3.6}$$

при любой пробной функции $\eta(x) \in C_0^1(\Omega)$ (соответственно, для любой $\eta(x) \geqslant 0$, $\eta(x) \in C_0^1(\Omega)$), см. [7, с. 171].

В этом разделе мы докажем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* $N = 1$ *или* $N = 2$, *коэффициент* $c_1(x)$ *определен в* (3.4), *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* (B_ε). *Тогда существует функция* $\Gamma(x)$ *из* $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ *такая, что*

1. $\Gamma(x)$ *является обобщенным решением* (*из* $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$) *уравнения* (*неравенства*)

$$L_1(x)\Gamma(x) = L(x)\Gamma(x) + (b(x), \nabla\Gamma(x)) + c_1(x)\Gamma(x) = 0\,(\leqslant 0), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.7}$$

2. $\Gamma(x)$ *таково, что*

$$\Gamma(x) > 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \qquad \lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = +\infty. \tag{3.8}$$

При доказательстве леммы 3.1 нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Лемма 3.2. *Если $u(x) > 0$ является произвольным ограниченным обобщенным решением уравнения*

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) = 0 \tag{3.9}$$

в слое

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{R}{8} < |x| < 8R\right\},\ R > 8,$$

то

$$\operatorname*{osc}_{R/2 \leqslant |x| \leqslant R} u \leqslant \delta \operatorname*{osc}_{R/4 \leqslant |x| \leqslant 2R} u, \tag{3.10}$$

где $\delta < 1$.

Это утверждение является частным случаем известного результата (см. [7, с. 191]). Мы докажем лемму 3.2 ниже.

Лемма 3.3 (внешний принцип максимума). *Если $N = 1$ или $N = 2$ и ограниченное обобщенное решение $\Gamma(x)$ уравнения* (3.9) *в области $\{|x| > R\}$ удовлетворяет неравенству*

$$\Gamma|_{|x|=R} \leqslant M \quad \textit{при } |x| = R,$$

то

$$\Gamma(x) \leqslant M \quad \textit{при } |x| > R.$$

В случае, когда коэффициенты уравнения являются гладкими и решение $\Gamma(x)$ уравнения — классическое, то внешний принцип максимума (лемма 3.3) доказан в работе Д. Гилбарга, Дж. Серрина [77]. Мы докажем лемму 3.3 в конце раздела 3.

Доказательство лемм 3.2 и 3.3 основывается на одном важном утверждении:

Теорема 3.1 (неравенство Харнака, см. [7, с. 190]). *Пусть оператор $L(x)$* (3.9) *удовлетворяет условиям эллиптичности* (1.3) *и пусть функция $u \in W_2^1(\Omega)$, где Ω — область в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$, неотрицательна в Ω и удовлетворяет в Ω уравнению*

$$\Lambda_1 u \equiv L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u = 0,\ x \in \Omega.$$

Тогда для любого шара $B_{4R}(y) \subset \Omega$ имеем

$$\sup_{B_R(y)} u \leqslant C \inf_{B_R(y)} u, \tag{3.11}$$

с постоянной $C = C(N,\ \lambda_1^2/\lambda_0^2,\ \nu R)$, не зависящей от u.

Случай $N \geqslant 2$ рассмотрен в [7, с. 190]. В конце раздела 3 мы рассмотрим одномерный случай $N = 1$, указав необходимые изменения в известном из [7] доказательстве неравенства (3.11).

При доказательстве леммы 3.1 мы будем применять лишь лемму 3.2 и лемму 3.3, поэтому мы сможем ограничиться лишь случаем $N = 2$, не выделяя отдельно одномерный случай.

Доказательство леммы 3.1.

1. Установим, что существует ограниченное в $\mathbb{R}^N$ положительное решение $\Gamma(x)$ из $W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^N)$ уравнения

$$L(x)\Gamma(x) + (b(x), \nabla\Gamma(x)) + c_1(x)\Gamma(x) = 0, \tag{3.12}$$

где $c_1(x)$ определено в (3.4), а $L(x)\Gamma(x)$ — оператор (3.2).

В шаре $B_R = \{x : |x| < R\} \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2$, где $R > 1$, рассмотрим задачу

$$L(x)\Gamma_R(x) + (b(x), \nabla\Gamma_R(x)) + c_1(x)\Gamma_R(x) = 0, \quad x \in B_R, \tag{3.13}$$

$$\Gamma_R|_{|x|=R} = 1. \tag{3.14}$$

Ясно, что решение задачи (3.13), (3.14) существует и единственно (см. [7, с. 196]). Из принципа максимума [7, с. 173, 190] элементарно вытекает неравенство

$$0 < \Gamma_R(x) < 1. \tag{3.15}$$

При любом R рассмотрим семейство функций $\{\Gamma_R(x)\}$. Очевидно, что функции из $\{\Gamma_R(x)\}$ удовлетворяют неравенствам

$$\Gamma_{R_1}(x) > \Gamma_{R_2}(x) \quad \text{при } R_1 > R_2$$

в областях $|x| > 1$. Известно также (см. [7, с. 191]), что для $\Gamma_R(x)$ имеет место неравенство

$$|\Gamma_R(x_2) - \Gamma_R(x_1)| \leqslant C|x_2 - x_1|^\gamma,\ 0 < \gamma < 1 \tag{3.16}$$

равномерно по x_1, x_2 на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Следовательно, семейство функций $\{\Gamma_R(x)\}$ является компактным в смысле равномерной сходимости на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Применяя диагональный процесс, получим, что существует подпоследовательность $\{\Gamma_{Rk}(x)\}$ семейства $\{\Gamma_R(x)\}$ такая, что

$$\Gamma_{Rk}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x) \quad \text{в } L_2(B_r)$$

т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{|x|\leqslant r} \{\Gamma_{Rk}(x) - \Gamma(x)\}^2\, dx = 0 \quad \text{при каждом } r > 0. \tag{3.17}$$

В силу известной оценки Каччиополи [47, 88] имеем

$$\int\limits_{B_{r_1}} |\nabla\Gamma_{Rk}|^2 dx \leqslant c(r_1,\, r_2) \int\limits_{B_{r_2}} \Gamma_{Rk}^2(x) dx, \tag{3.18}$$

где $r_1 < r_2$.

Применяя (3.17) и (3.18), получим, что существует подпоследовательность $\{\Gamma_{Rk}(x)\}$, слабо сходящаяся к $\Gamma(x)$ в $W_2^{1,\,loc}(B_r)$, т. е.

$$\Gamma_{Rk}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x) \quad \text{слабо в } W_2^{1,\,loc}(B_r) \text{ при } \forall\, r > 0.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим, что $\Gamma(x)$ является обобщенным решением (из $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$) уравнения (3.12) в $\mathbb{R}^N$ и, кроме того, $0 \leqslant \Gamma(x) \leqslant 1$.

2. Докажем, что построенное в пункте 1 решение $\Gamma(x)$ уравнения (3.12) имеет предел

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = m \leqslant 1. \tag{3.19}$$

Рассмотрим кольцевую область $\{R/8 < |x| < 8R\}$, $R > 8$. Функция $\Gamma(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L(x)\Gamma(x) + (b(x), \nabla\Gamma(x)) = 0 \tag{3.20}$$

в кольце $\{R/8 < |x| < 8R\}$ при $R > 8$, ибо $c_1(x) \equiv 0$ при $|x| > 1$. Ясно, что любая постоянная также удовлетворяет уравнению (3.20). Применив лемму 3.2, получим

$$\operatorname*{osc}_{R/2\leqslant|x|\leqslant R} \Gamma(x) \leqslant \delta \operatorname*{osc}_{R/4\leqslant|x|\leqslant 2R} \Gamma(x) \leqslant 2M\delta, \tag{3.21}$$

где $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^N} \Gamma > 0$.

Применяя внешний принцип максимума к (3.21), получим

$$\operatorname*{osc}_{|x|\geqslant R/2} \Gamma(x) \leqslant 2M\delta. \tag{3.22}$$

Применяя лемму 3.2 к $\Gamma(x)$ и, учитывая (3.22), получим оценку

$$\operatorname*{osc}_{R\leqslant|x|\leqslant 2R} \Gamma(x) \leqslant \delta \operatorname*{osc}_{R/2\leqslant|x|\leqslant 2^2R} \Gamma(x) \leqslant 2M\delta^2.$$

Снова применяя лемму 3.3, получим неравенство

$$\operatorname*{osc}_{|x|\geqslant R} \Gamma(x) \leqslant 2M\delta^2.$$

Далее применим метод математической индукции. Предположим, что при $n = k-1$ справедливо неравенство

$$\operatorname*{osc}_{|x|\geqslant 2^{k-2}R} \Gamma(x) \leqslant 2M\delta^k, \quad 0 < \delta < 1, \tag{3.23}$$

и докажем, что (3.23) справедливо и при $n = k$.

Применим лемму 3.2, будем иметь

$$\operatorname*{osc}_{2^{k-1}R\leqslant|x|\leqslant 2^kR} \Gamma(x) \leqslant \delta \operatorname*{osc}_{2^{k-2}R\leqslant|x|\leqslant 2^{k+1}R} \Gamma(x) \leqslant 2M\delta^{k+1}.$$

Снова применим лемму 3.3 и получим

$$\operatorname*{osc}_{|x|\geqslant 2^{k-1}R}\Gamma(x)\leqslant 2M\delta^{k+1}.$$

Индукция проверена, и (3.23) доказано. Из (3.23) следует, что существует предел

$$\lim_{R\to\infty}\operatorname*{osc}_{|x|>R}\Gamma(x)=0. \tag{3.24}$$

Отсюда следует, что согласно критерию Коши (см. [39]), существует конечный предел

$$\lim_{|x|\to\infty}\Gamma(x)=m. \tag{3.25}$$

Ясно, что предел (3.25) может принимать любое значение $m\in[0,\,1]$.

3. Докажем, что в (3.25) $m=0$, т. е. что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty}\Gamma(x)=0. \tag{3.26}$$

Сначала докажем, что не существует точки $x_1\in\mathbb{R}^N$, в которой $\Gamma(x_1)>m$. Предположим противное: пусть найдется хотя бы одна точка x_1, в которой $\Gamma(x_1)>m$. Покажем, что это ведет к противоречию. Положим

$$\varepsilon_1=\frac{\Gamma(x_1)-m}{2}>0,$$

тогда в силу существования предела (3.25) для этого ε_1 найдется $R_1(\varepsilon_1)$ такое, что при $x:\ |x|\geqslant R_1$

$$-\varepsilon_1<\Gamma(x)-m<\varepsilon_1.$$

Таким образом,

$$\Gamma(x)<\frac{\Gamma(x_1)+m}{2}<\Gamma(x_1),$$

где $|x|>R_1$.

Положим

$$R_2=\max(R_1,\,|x_1|),$$

тогда при $|x|>R_2$ справедливы неравенства

$$\Gamma(x)<\Gamma(x_1)\quad \text{при } |x|>R_2,\ |x_1|\leqslant R_2. \tag{3.27}$$

Рассмотрим замкнутый шар $\overline{B}_{2R_2}=\{|x|\leqslant 2R_2\}$, тогда из теоремы Вейерштрасса [39] следует, что существует точка x_2 такая, что

$$\Gamma(x_2)=\max_{\overline{B}_{2R_2}}\Gamma(x).$$

Из неравенства (3.27) следует, что эта точка x_2 является внутренней точкой открытого шара $B_{2R_2}=\{|x|<2R_2\}$, но это противоречит принципу максимума, согласно которому при $c(x)\leqslant 0$, решение $\Gamma(x)$ уравнения (3.12) достигает максимума лишь на границе $|x_2|=2R_2$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\Gamma(x)\leqslant m.$$

Докажем, что

$$\Gamma(x)<m.$$

Пусть это не так, тогда существует точка $x_3\in B_R$ такая, что

$$\Gamma(x_3)=m.$$

Но $\Gamma(x)$ — непрерывная функция, следовательно, найдется окрестность $B_\rho^{x_3}$ точки x_3 такая, что шар

$$\overline{B}_\rho^{x_3}\subset B_R,\quad m=\sup_{B_\rho^{x_3}}\Gamma(x)=\sup_{B_R}\Gamma(x).$$

Поэтому по усиленному принципу максимума [7, с. 198]

$$\Gamma=\operatorname{const}.$$

Но постоянная $m \neq 0$ будет решением уравнения (3.12) тогда и только тогда, когда $c(x) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает, что

$$\Gamma(x) < m. \tag{3.28}$$

Рассмотрим кольцевой слой

$$n \leqslant |x| \leqslant 2n, \tag{3.29}$$

где в силу (3.28) имеем неравенство:

$$m - \Gamma(x) > 0.$$

Поэтому непрерывная функция

$$h(x) = \frac{1}{m - \Gamma(x)}$$

в замкнутом кольце (3.29) является по теореме Вейерштрасса [39] ограниченной, т. е. существует постоянная $K_1 > 0$ такая, что

$$0 < h(x) = \frac{1}{m - \Gamma(x)} \leqslant K_1$$

для всех x из (3.29). Последнее неравенство может быть записано так:

$$\Gamma(x) \leqslant m - \frac{1}{K_1} \quad \text{для всех } x \text{ из (3.29).}$$

Применяя внешний принцип максимума (лемму 3.3) к решению $\Gamma(x)$ уравнения (3.12), получим

$$\Gamma(x) \leqslant m - \frac{1}{K_1} < m, \quad \text{для } \forall\, x : |x| \geqslant 2n.$$

Получим противоречие с тем, что существует предел (3.25), равный m. Следовательно, доказано, что $m = \text{const}$, но $m = \text{const}$ может быть решением уравнения (3.12) в котором $c(x) \not\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $m = 0$. То есть существование предела (3.26) доказано.

4. Совершенно аналогично пунктам 1, 2, 3 доказывается, что существует решение задачи

$$L(x)\Gamma_R + (b(x), \nabla\Gamma_R) + c_1(x)\Gamma_R = 0, \quad |x| < R, \tag{3.30}$$

$$\Gamma_R|_{|x|=R} = H > 0. \tag{3.31}$$

Ясно, что решение задачи (3.30), (3.31) существует и единственно [7, с. 196] и, кроме того, из принципа максимума [7, с. 173] следует, что

$$0 < \Gamma_R(x) < H, \quad |x| < R. \tag{3.32}$$

Рассмотрим семейство функций

$$V_R(x) = \frac{\Gamma_R(x)}{\Gamma_R(0)}. \tag{3.33}$$

Ясно, что

$$V_R(0) = 1,$$

и функция $V_R(x)$ является решением уравнения (3.30), $|x| < R$. Применяя неравенство Харнака (3.11), получим

$$\sup_{|x| \leqslant a} V_R(x) \leqslant C \inf_{|x| \leqslant a} V_R(x), \quad a < \frac{R}{4}. \tag{3.34}$$

Учтем, что

$$\inf_{|x| \leqslant a} V_R(x) \leqslant V(0) = 1,$$

и получим

$$\sup_{|x| \leqslant a} V_R(x) \leqslant C, \tag{3.35}$$

где постоянная C зависит от a, N, λ_0^2, λ_1^2.

Таким образом, семейство функций (3.33) является ограниченным по R при $R \to \infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет (3.16). Применяя диагональный процесс, выделим из семейства функций $\{V_R(x)\}$ подпоследовательность $V_{Rk}(x)$, которая сходится при

$k \to \infty$ к некоторой функции $V(x)$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Отсюда следует, что

$$V_{Rk}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} V(x) \quad \text{в } L_2(B_r) \text{ при каждом } r > 0.$$

Из оценки Каччиополи (3.18) тогда получим, что

$$V_{Rk}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} V(x) \quad \text{слабо в } W_2^1(B_r) \text{ при каждом } r > 0.$$

Отсюда легко следует, что функция $V(x) \in W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ и является обобщенным решением уравнения (3.12). При этом, очевидно, что

$$V(0) = 1. \tag{3.36}$$

5. Докажем, что построенное в пункте 4 решение $V(x)$ уравнения (3.12) таково, что

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty. \tag{3.37}$$

Сначала докажем, что функция $V(x)$ является неограниченной в $\mathbb{R}^N$. Предположим противное, т. е. что функция $V(x)$ является ограниченной в $\mathbb{R}^N$, т. е. существует $H > 0$ такое, что

$$0 < V(x) \leqslant H, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Тогда, применив построения пунктов 1, 2, 3, получим аналогично предыдущему, что

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = 0.$$

Следовательно, из принципа максимума получим

$$V(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Получили противоречие, ибо $V(0) = 1 \neq 0$. Итак, доказано, что $V(x)$ является неограниченной, т. е. для любого $n > 0$ найдется точка $x_n \in \mathbb{R}^N$, для которой

$$V(x)|_{|x|=|x_n|} > n. \tag{3.38}$$

Докажем, что

$$\lim_{|x|\to\infty} V(x) = +\infty. \tag{3.39}$$

Предположим, что (3.39) неверно. Тогда существует $A > 0$ и последовательность $x_n \in \mathbb{R}^N$ такая, что $|x_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$ и

$$V(x)|_{|x|=|x_n|} \leqslant A. \tag{3.40}$$

Используя (3.40), неравенство Харнака (3.11) и тот факт, что при $|x| > 1$ функция $V(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L(x)V(x) + (b(x), \nabla V(x)) = 0, \tag{3.41}$$

докажем, что найдется постоянная $M_1 > 0$ такая, что

$$V(x)|_{|x|=|x_n|} \leqslant M_1 A. \tag{3.42}$$

Фиксируем любой элемент x_n последовательности $\{x_n\}$ из (3.40) и положим $\mu_n = |x_n|$. Рассмотрим в кольце $\{n < \dfrac{\mu_n}{2} < |x| < 2\mu_n\}$ уравнение (3.41) и заменим переменные в нем:

$$x_i = \frac{\mu_n}{4} y_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

При этом в кольце $2 < |y| < 8$ получим уравнение

$$\frac{4^2}{\mu_n^2}\left[\sum_{i,\,k=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\frac{\partial V}{\partial y_k}\right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\mu_n}{4} b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\right)\frac{\partial V}{\partial y_k}\right] = 0.$$

Сокращая на $4^2/\mu_n^2$, получим следующее уравнение:

$$\sum_{i,\,k=1}^N \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\frac{\partial V}{\partial y_k}\right) + \sum_{k=1}^N \left(\frac{\mu_n}{4} b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\right)\frac{\partial V}{\partial y_k} = 0 \tag{3.43}$$

в кольце $2 < |y| < 8$. В силу условия эллиптичности и условий (B_ε) получим в кольце $2 < |y| < 8$ оценки

$$|a_{ik}\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)| \leqslant 16\lambda_1^2,$$

$$\frac{\mu_n}{4}\left|b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\right| \leqslant \frac{|\mu_n||y|}{4||y}\left|b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\right| \leqslant \frac{(\mu_n|y|)^{1+\varepsilon}}{8}\left|b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{(1+\mu_n|y|)^{1+\varepsilon}}{4}\right)\left|b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\right| \leqslant \frac{B}{2} \leqslant B.$$

Таким образом, доказано, что коэффициенты уравнения (3.43) $a_{ik}\left(\frac{\mu_n}{4}|y|\right)$, $\frac{\mu_n}{4}b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)$ имеют в кольце $2 < |y| < 8$ верхние грани, не зависящие от μ_n.

Рассмотрим окружность $|y| = 4$, тогда некоторая точка y_1 этой окружности является образом точки x_n. Впишем в кольцо $2 \leqslant |y| \leqslant 8$ замкнутый круг с центром в точке y_1, $|y_1| = 4$, радиуса 1. Обозначим этот круг символом $\overline{B}_1^{y_1}$. Применяя неравенство Харнака (3.11), получим, что существует постоянная $C_2 > 0$ такая, что

$$\sup_{\overline{B}_1^{y_1}} V \leqslant C_2 \inf_{\overline{B}_1^{y_1}} \leqslant C_2 V(y_1). \tag{3.44}$$

Окружность $|y_1 - \xi| = 1$ с центром в точке y_1, $|y_1| = 4$, пересекает окружность $|y| = 4$ в двух точках y_2, y_3. Выберем одну из этих точек и впишем в слой $2 < |y| < 8$ круг с центром в точке y_2 радиуса 1. Применим неравенство Харнака (3.11) и, учитывая (3.45), получим

$$\sup_{\overline{B}_1^{y_1}} V \leqslant C_2 \inf_{\overline{B}_1^{y_1}} V \leqslant C_2^2 V(y_1).$$

Повторяя процесс построения вписанных в слой $2 < |y| < 8$ кругов с центрами, лежащими на окружности $|y| = 4$, и расстоянием 1 между последовательными центрами окружностей и применяя на каждом шаге неравенство Харнака, мы за конечное число шагов $k_0 = [8\pi] + 1$ получим неравенство

$$\sup_{|y|=4} V \leqslant C_2^{k_0} V(y_1).$$

Совершая обратный переход к переменным x_i по формулам

$$y_i = 4\frac{x_i}{\mu_n}, \quad i = 1, \ldots, N,$$

получим, что неравенство (3.42) обосновано. Легко видеть, что постоянная $M_1 = C_2^{k_0}$ в (3.42) не зависит от $\mu_n = |x_n|$. Применяя принцип внешнего максимума (лемму 3.3) к $V(x)$ получим, что

$$V(x) \leqslant M_1 A \quad \text{для } \forall\, x : \, |x| \geqslant \mu_n.$$

Получим противоречие, ибо, как доказано в (3.38), существует последовательность точек x_n : $\mu_n = |x_n| \to +\infty$, для которой $V(x_n) > n$. Итак, доказано, что имеет место (3.39). Положим $\Gamma(x) = V(x)$ и завершим доказательство. □

В шаре

$$B_{2R} = \{x : \, |x| < R\} \subset \mathbb{R}^N, \quad N \geqslant 1,$$

рассмотрим задачу на собственные значения

$$L(x)p + (b(x), \nabla p) + c(x)p + \mu p = 0, \; x \in B_{2R}, \tag{3.45}$$
$$p|_{|x|=2R} = 0, \tag{3.46}$$

где $L(x)$ определено в (3.2), $c(x) \leqslant 0$. Пусть $G(x, y)$ — функция Грина задачи (3.45), (3.46). Существование и основные свойства $G(x, y)$ изучены, например, в работе G. Stampacchia [88]. Известно, что

1. $G(x, y) > 0$ при $x, y \notin \{|x| = 2R\}$,
2. $G(x, y)$ является непрерывной функцией в $\overline{B}_{2R} \setminus y$.

Так как $G(x, y) \geqslant 0$ в замкнутой области $\overline{B}_{2R} \times \overline{B}_{2R}$ и обращается в нуль лишь на границе этой области, то из теоремы М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [44, с. 58–60], обобщающей известную теорему Р. Энтча [5, с. 321], следует, что задача (3.45), (3.46) имеет единственную положительную в шаре B_{2R} собственную функцию $p(x) > 0$, которой отвечает положительное собственное значение $\mu_0 > 0$. Этот факт доказан в работе [66].

В цилиндре $\overline{Z} = \overline{B}_R \times [0, \infty)$ рассмотрим задачу

$$L(x)p_1 + (b(x), \nabla p_1) + c(x)p - p_t = 0 \quad \text{в } Z, \tag{3.47}$$

$$p_1|_{|x|=R} = 0, \quad t > 0, \tag{3.48}$$

$$p_1|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in B_R, \tag{3.49}$$

где $u_0(x)$ — непрерывная в $\overline{B}_R$ функция.

Лемма 3.4. *Для функции $p_1(x, t)$, удовлетворяющей* (3.47)–(3.49)*, существует предел*

$$\lim_{t\to\infty} p_1(x, t) = 0 \tag{3.50}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$p_2(x, t) = M\, e^{-\mu_0 t} p(x), \tag{3.51}$$

где $p(x)$ — первая собственная функция задачи (3.45), (3.46), а $\mu_0 > 0$ — первое собственное значение,

$$M = \frac{\max\limits_{|x|\leqslant R} |u_0(x)|}{p_0},$$

где

$$p_0 = \min_{|x|\leqslant R} p(x) > 0.$$

Из принципа максимума [46] элементарно следует неравенство

$$p_2(x, t) \geqslant |p_1(x, t)| \quad \text{в } B_R \times (0, +\infty). \tag{3.52}$$

Из (3.51) и (3.52) получаем, что существует предел (3.50). Лемма 3.4 доказана. □

Доказательство леммы 3.2. Важно отметить, что постоянная $M = \mathrm{const}$ является решением уравнения (3.9), т. к. $c(x) = 0$. Пусть

$$M = \sup_{R/4\leqslant|x|\leqslant 2R} u(x), \qquad m = \inf_{R/4\leqslant|x|\leqslant 2R} u(x).$$

Рассмотрим функцию

$$M - u(x) = v(x).$$

Ясно, что $v(x) \geqslant 0$ и по неравенству Харнака [7, с. 190]

$$\sup_{R/4\leqslant|x|\leqslant 2R} v(x) \leqslant C \inf_{R/4\leqslant|x|\leqslant 2R} v(x).$$

Пусть

$$M_1 = \sup_{R/2\leqslant|x|\leqslant R} u(x), \qquad m_1 = \inf_{R/2\leqslant|x|\leqslant R} u(x).$$

Ясно, что $m_1 > m$, $M > M_1$. Тогда имеем:

$$M - m_1 \leqslant C(M - M_1),$$

где, не ограничивая общности, можно считать, что $C > 1$. Перепишем последнее неравенство в следующем виде:

$$M - m_1 \leqslant C(M - m) + Cm - CM_1.$$

Следовательно,

$$CM_1 - Cm + M - m_1 \leqslant C(M - m).$$

Вычитая и прибавляя Cm_1, получим

$$C(M_1 - m_1) + Cm_1 - Cm + M - m_1 \leqslant C(M - m).$$

Далее, слева в последнем неравенстве вычтем и добавим m:

$$C(M_1 - m_1) + C(m_1 - m) + M - m + m - m_1 \leqslant C(M - m).$$

Перенося $M - m$ в правую часть неравенства, имеем

$$C(M_1 - m_1) + (m_1 - m)(C - 1) \leqslant (C - 1)(M - m).$$

Отбросим слева положительное слагаемое $(m_1 - m)(C - 1)$ и, выполнив деление на $C > 1$, получим

$$M_1 - m_1 < \frac{C-1}{C}(M - m) = \delta(M - m),$$

где $0 < \delta < 1$. Лемма 3.2 доказана. □

Доказательство леммы 3.3. Не ограничивая общности, положим в лемме 3.3

$$M = 0,$$

т. е.

$$u\big|_{|x|=R} \leqslant 0.$$

Требуется доказать, что если $u \leqslant K$, то $u \leqslant 0$ при $|x| > R$. Пусть это не так. Тогда найдется компонента Ω множества $|x| > R$ такая, что

$$\Omega = \{x : u(x) > 0\}.$$

Ясно, что компонента Ω является неограниченной в $|x| > R$, иначе мы получили бы $u = 0$, так как на ∂D имеем равенство

$$u|_{\partial D} = 0.$$

Рассмотрим подмножество Ω_{ρ_1} точек из Ω таких, что

$$\Omega_{\rho_1} = \{x : u(x) > \sup_{|x|=\rho_1} u = M_{\rho_1}\}.$$

Ясно, что для Ω_{ρ_1} выполняется $|x| > \rho_1$. Рассмотрим

$$v = u(x) - M_{\rho_1}. \tag{3.53}$$

Ясно, что $v|_{\partial\Omega_{\rho_1}} = 0$ и $v > 0$ в Ω_{ρ_1}, при этом ρ_1 можно брать любым, большим 1. И, кроме того, функция (3.53) является решением уравнения (3.9) при $|x| > \rho_1$. Умножим (3.9) на функцию (3.53), проинтегрируем по области

$$\Omega_{\rho_1,\,R} = \Omega\rho_1 \cap B_R$$

и проинтегрируем по частям, применив теорему Остроградского—Гаусса [39]:

$$0 = \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} -v(L(x)v + (b(x), \nabla v)dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} \left(\sum_{i,\,k=1}^{2} a_{ik}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} - b(x) \cdot \nabla v \cdot v \right) dx +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_{\rho_1} \cap |x|=R} v \sum_{i,\,k=1}^{2} a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(n,\, x_i) ds + \int\limits_{|x|=\rho_1} v \sum_{i,\,k=1}^{2} a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(n,\, x_i) ds = 0. \tag{3.54}$$

Уединяя первое слагаемое формулы (3.54) справа и используя неравенство эллиптичности из введения и неравенство (3.35), учитывая, что $v|_{|x|=\rho_1} = 0$, будем иметь

$$\lambda_0^2 \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |\nabla v|^2 dx \leqslant \Big| \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} \sum_{i,\,k=1}^{2} a_{ik}(x) \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \Big| =$$

$$= \Big| \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} b(x) \cdot \nabla v \cdot v dx \Big| + \Big| \int\limits_{|x|=R \cap \Omega_{\rho_1}} v \sum_{i,\,k=1}^{2} a_{ik} \frac{\partial v}{\partial x_k} \cos(n,\, x_i) ds \Big|. \tag{3.55}$$

Учтем во втором слагаемом справа в (3.55), что $|v| \leqslant M$, применим к первому слагаемому справа в (3.55) неравенство Коши с $\varepsilon_1 > 0$, а ко второму слагаемому справа в (3.55) применим неравенство Коши—Буняковского. При этом получим:

$$\lambda_0^2 \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |\nabla v|^2 dx \leqslant M \frac{1}{2\varepsilon_1} \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} b^2(x) v^2(x) dx +$$

$$+ M \frac{\varepsilon_1}{2} \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |\nabla v|^2 dx + M \left(\int\limits_{\Omega_{\rho_1} \cap |x|=R} |\nabla v|^2 ds \right)^{1/2} (2\pi R)^{1/2}. \tag{3.56}$$

Учтем, что для $b(x)$ имеет место неравенство

$$|b(x)| \leqslant \frac{B}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}$$

и, применяя неравенство Харди [63], получим для первого слагаемого в (3.56)

$$\int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |b|^2 v^2 dx \leqslant \frac{B^2}{(1+\rho_1)^{2\varepsilon_2}} \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} \frac{v^2(x)}{(1+|x|)^{2+2\varepsilon_3}} dx \leqslant \frac{B_1^2}{(1+\rho_1)^{2\varepsilon_2}} \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |\nabla v|^2 dx.$$

Выберем теперь $\rho_1 > 1$ настолько большим, чтобы

$$\frac{M}{2\varepsilon_1} \frac{B_1^2}{(1+\rho_1)^{2\varepsilon_2}} < \frac{\lambda_0^2}{4}$$

и перенесем слагаемое

$$\frac{\lambda_0^2}{4} \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |\nabla v|^2 dx$$

в левую часть (3.56). При этом получим

$$\frac{\lambda_0^2}{2} \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |\nabla v|^2 dx \leqslant M \left[\int\limits_{\Omega_{\rho_1} \cap |x|=R} |\nabla v|^2 ds \right]^{1/2} [2\pi R]^{1/2}. \tag{3.57}$$

Введем функцию

$$Q(R) = \int\limits_{\Omega_{\rho_1,\,R}} |\nabla v|^2 dx$$

и возведем (3.57) в квадрат, при этом получим

$$\frac{\lambda_0^4}{4} Q^2(R) \leqslant M^2 2\pi R \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}R}.$$

Это неравенство перепишем в виде

$$\frac{Q'(R)}{Q^2(R)} \geqslant \frac{D}{R}, \quad D = \frac{\lambda_0^4}{4M^2 2\pi},$$

или в эквивалентном виде

$$\left(-\frac{1}{Q(R)} \right)' \geqslant \frac{D}{R}.$$

Интегрируя последнее неравенство от $\rho_2 > \rho_1$ до R, получим

$$\frac{1}{Q(\rho_2)} - \frac{1}{Q(R)} \geqslant D \ln \left(\frac{R}{\rho_2} \right).$$

Но $Q(R) > Q(\rho_2)$, поэтому

$$\frac{1}{Q(\rho_2)} \geqslant \frac{1}{Q(R)}.$$

Следовательно, при $R \to \infty$,

$$\frac{1}{Q(\rho_2)} \geqslant D \ln\left(\frac{R}{\rho_2}\right) \to \infty.$$

Получили противоречие. Следовательно, $D_{\rho_1} = \varnothing$. Поэтому $u(x) = M_{\rho_1}$ при $\rho > \rho_1$, т. е. $u(x) = \mathrm{const}$. Но $u(\rho_1) = 0$, поэтому $u(x) \equiv 0$. Поэтому $D = \varnothing$, т. е. $u \leqslant 0$. Внешний принцип максимума (лемма 3.3) доказан при $N = 2$.

Одномерный случай рассматривается еще проще.

Рассмотрим уравнение

$$(a(x)u')' + b(x)u + c(x)u = 0 \quad \text{при } |x| > 1, \tag{3.58}$$

где

$$a(x) \geqslant \lambda_0^2 > 0, \quad |b(x)| \leqslant \frac{B}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad c(x) = 0 \text{ при } |x| > 1.$$

По условию, $|u(x)| \leqslant K$ и $u|_{|x|=1} \leqslant 0$. Докажем, что $u(x) \leqslant 0$ при $|x| > 1$.

Перепишем (3.58) в виде

$$(au')' + \frac{b(x)}{a}(au') + cu = 0.$$

Введем функцию

$$V(x) = a(x)u'(x).$$

Пусть утверждение леммы 3.3 неверно. Тогда $u(x) > 0$ на полуинтервале $|x| > x_0 > 1$, и получим

$$V'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}V(x) = -c(x)u(x) \geqslant 0, \quad |x| \geqslant x_0 > 1.$$

Интегрируя последнее неравенство, получим

$$\ln\left(\frac{V(x)}{V(x_0)}\right) \geqslant \ln e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(\tau)}{a(\tau)} d\tau}. \tag{3.59}$$

Из (3.59) следует, что

$$V(x) \geqslant V(x_0) e^{-\int\limits_{x_0}^{x} \frac{b(\tau)}{a(\tau)} d\tau} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell,$$

т. е. $u'(x) > \dfrac{\ell}{2}$ при $x > x_2 > x_0$. Поэтому

$$u(x) > \frac{\ell}{2}(x - x_0) \to +\infty.$$

Получим противоречие с условием ограниченности $u(x)$. Лемма 3.3 при $N = 1$ доказана. □

О неравенстве Харнака при $N = 1$. Доказательство неравенства Харнака (3.11) при $N \geqslant 2$ приведено, например в [7, с. 190]. Это доказательство основано на применении неравенства Соболева [7, с. 154] и теоремы Джона—Ниренберга [7, с. 163]. Одномерный случай теоремы Джона—Ниренберга доказан в книге [6, с. 231], а вместо неравенства Соболева следует использовать следующее утверждение, представляющее собой «теорему вложения».

Лемма 3.5. *Если* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(-R, R)$, $R > 0$, *то для* $k > 1$ *имеет место неравенство*

$$\left(\int\limits_{-R}^{R} |u(x)|^{2k} dx\right)^{1/k} \leqslant C(R) \int\limits_{-R}^{R} (u'(x))^2 dx. \tag{3.60}$$

Доказательство. Не ограничивая общности считаем, что $u(x)$ является непрерывно дифференцируемой на $(-R, R)$ и равной нулю при $x = R$ и $x = -R$. Пусть x_0 — такая точка интервала $(-R, R)$, что

$$u(x_0) = \max_{-R \leqslant x \leqslant R} u(x) = M,$$

$$M = u(x_0) = \int\limits_{-R}^{x_0} u'(x)dx.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$M \leqslant \sqrt{2R}\|u'\|_{L^2(-R,\,R)}. \tag{3.61}$$

После возведения в квадрат (3.61) имеем

$$M^2 \leqslant 2R\|u'\|^2_{L^2(-R,\,R)}. \tag{3.62}$$

Отсюда будем иметь

$$\left[\int\limits_{-R}^{R} |u(x)|^{2k}\right]^{1/k} \leqslant M^2(2R)^{1/k} \leqslant (2R)^{1/k}2R\left[\int\limits_{-R}^{R}(u'(x))^2dx\right].$$

Неравенство (3.60) доказано. Лемма 3.5 доказана. □

Повторяя после этого схему доказательства неравенства Харнака из [7, с. 186–190], получим, что одномерный случай неравенства (3.11) Харнака обоснован.

4. Доказательство теоремы 4.1

Теорема 4.1. *Если $N = 1$ или $N = 2$ и коэффициенты $b_i(x)$ $(i = 1, 2)$ удовлетворяют условию (B_ε), коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_1), то решение задачи Коши* (2.1), (2.2) *имеет предел* (2.3) *равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Доказательство. В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\,\infty)$ при $N = 1$ или $N = 2$ рассмотрим задачу Коши

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{4.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2}$$

где оператор $L(x)$ определен формулой (1.2). Предположим, что выполняются условия, сформулированные во введении относительно коэффициентов уравнения (4.1), и $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция. Наряду с задачей Коши (4.1), (4.2) рассмотрим задачу Коши

$$L(x)w + (b(x), \nabla w) + c_1(x)w - w_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{4.3}$$

$$w|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.4}$$

где

$$u_1(x) = |u_0(x)|, \tag{4.5}$$

$$c_1(x) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } |x| < 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

Из принципа максимума (см. [46, 70]) легко вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Для решений задач Коши* (4.1), (4.2) *и* (4.3), (4.4) *справедливо неравенство*

$$|u(x,\,t)| \leqslant w(x,\,t). \tag{4.7}$$

Для доказательства теоремы 4.1 достаточно доказать, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} w(x,\,t) = 0 \tag{4.8}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для решения задачи (4.3), (4.4).

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем число $r_1 > 0$ так, чтобы $K \subset \overline{B}_{r_1}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\delta\Gamma(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{при } x \in \overline{B}_{r_1}, \tag{4.9}$$

где $\Gamma(x)$ — функция из леммы 3.1 такая, что $\Gamma(x)$ является решением уравнения (3.7) и выполняются свойства (3.8).

Рассмотрим функцию

$$q(x,\,t) = \delta\Gamma(x) - w(x,\,t), \tag{4.10}$$

где $\Gamma(x)$ — функция из леммы 3.1, а $w(x,\,t)$ — решение задачи (4.3), (4.4). Так как очевидно, что

$$0 \leqslant w(x,\,t) \leqslant M,$$

а функция $\Gamma(x)$, согласно (3.8), такова, что

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = +\infty,$$

то существует $R > r_1$, для которого

$$q(x,\,t)|_{|x|=R} \geqslant 0 \quad \forall\, t > 0. \tag{4.11}$$

Кроме того, очевидно, что функция (4.10) удовлетворяет соотношениям

$$L(x)q + (b(x), \nabla q) + c_1(x)q - q_t = 0 \quad \text{при } |x| < R,\, t > 0, \tag{4.12}$$

$$q|_{t=0} = \delta\Gamma(x) - |u_0(x)|, \quad |x| < R. \tag{4.13}$$

Введем обозначения

$$\varphi(x) = \delta\Gamma(x) - |u_0(x)|, \tag{4.14}$$

$$\varphi^+(x) = \max(\varphi(x),\, 0), \quad \varphi^-(x) = \min(\varphi(x),\, 0).$$

Рассмотрим в цилиндре $Z = \{|x| < R,\, t > 0\}$ соотношения

$$L(x)p_3 + (b(x), \nabla p_3) + c_1(x)p_3 - p_{3t} = 0, \quad |x| < R,\, t > 0, \tag{4.15}$$

$$p_3|_{|x|=R} = 0, \quad t > 0, \tag{4.16}$$

$$p_3|_{t=0} = \varphi^-(x), \quad |x| < R. \tag{4.17}$$

Из принципа максимума [46] следует, что $p_3(x,\,t) \leqslant 0$ при $|x| < R,\, t > 0$. Ясно также, что $\varphi^-(x)$ непрерывна и ограничена при $|x| \leqslant R$. В силу леммы 3.4 существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p_3(x,\,t) = 0 \tag{4.18}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим функцию

$$r(x,\,t) = q(x,\,t) - p_3(x,\,t), \tag{4.19}$$

где $q(x,\,t)$ определена в (4.10), а $p_3(x,\,t)$ удовлетворяет соотношениям (4.15)–(4.17). Функция (4.19) в силу (4.11)–(4.13) и (4.15)–(4.17) удовлетворяет соотношениям

$$L(x)r + (b(x), \nabla r) + c_1(x)r - r_t = 0, \quad |x| < R,\, t > 0, \tag{4.20}$$

$$r|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t \geqslant 0, \tag{4.21}$$

$$p|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi^-(x) = \varphi^+(x) \geqslant 0, \quad |x| < R. \tag{4.22}$$

Применяя принцип максимума [46], получим, что

$$r(x,\,t) = \delta\Gamma(x) - w(x,\,t) - p_3(x,\,t) \geqslant 0, \tag{4.23}$$

для $|x| < R,\, t > 0$.

Неравенство (4.23) преобразуем к виду

$$0 \leqslant w(x,\,t) \leqslant \delta\Gamma(x) - p_3(x,\,t), \quad |x| < R,\, t > 0. \tag{4.24}$$

Согласно (4.18), $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists T(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\, t \geqslant T(\varepsilon)$ и $\forall\, x \in \{|x| < R\}$ справедливо неравенство

$$p_3(x,\,t) > -\frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.25}$$

Рассмотрим теперь x из замкнутого круга $\overline{B}_{r_1}$, тогда для $\delta\Gamma(x)$ имеет место неравенство (4.9). Учитывая в (4.24) неравенства (4.9) и (4.25), получим, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists T = T(\varepsilon)$ такое, что для всех $t \geqslant T(\varepsilon)$ и для всех $x : |x| \leqslant r_1$ справедливо

$$0 \leqslant w(x,\,t) < \varepsilon.$$

Таким образом доказано, что существует предел (4.8) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, что в силу леммы 3.1 доказывает теорему 4.1. Теорема 4.1 доказана. $\square$

5. Некоторые свойства решений эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$

В $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ рассмотрим эллиптическое уравнение

$$L(x)\Gamma + (b(x), \nabla\Gamma) + c(x)\Gamma = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.1}$$

где

$$L(x)\Gamma = \sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_k}\right), \quad (b(x), \nabla\Gamma) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}. \tag{5.2}$$

Предполагается, что коэффициенты (5.1) ограничены и измеримы в $\mathbb{R}^N$,

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad i, k = 1, \ldots, N,$$

выполнено условие эллиптичности (1.3), коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ удовлетворяют условию (B_2):

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1 + |x|)\sum_{i=1}^{N}|b_i(x)| = B < \infty, \tag{5.3}$$

коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_2):

$$c(x) \leqslant c_\alpha(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{|x|^2}, & |x| > 1, \\ 0, & |x| \leqslant 1. \end{cases} \tag{5.4}$$

1. Сначала докажем, что существует положительное, ограниченное в $\mathbb{R}^N$ решение (из $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$) уравнения

$$L(x)\Gamma + (b(x), \nabla\Gamma) + c_\alpha(x)\Gamma = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.5}$$

В шаре B_R при $R > 1$ рассмотрим задачу

$$L(x)\Gamma_R + (b(x), \nabla\Gamma_R) + c_\alpha(x)\Gamma_R = 0, \quad |x| < R, \tag{5.6}$$

$$\Gamma_R|_{|x|=R} = M > 0, \tag{5.7}$$

где $L(x)\Gamma$ определено в (5.2). Решение задачи (5.6), (5.7) существует и единственно [7, с. 196] и, как легко видеть из принципа максимума [7], удовлетворяет неравенству

$$0 < \Gamma_R < M.$$

Рассмотрим семейство функций $\{\Gamma_R(x)\}$ при различных $R > 1$. Ясно, что

$$\Gamma_{R_1}(x) > \Gamma_{R_2}(x). \tag{5.8}$$

Из оценок Нэша—Де Джорджи [78, 85] решений эллиптических уравнений следует, что $\Gamma_R(x)$ удовлетворяет условию

$$|\Gamma_R(x_1) - \Gamma_R(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|^\gamma,\ 0 < \gamma < 1$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Применяя диагональный процесс, можно выделить последовательность $\{\Gamma_{Rk}(x)\}$, $R_k \to \infty$ семейства функций $\{\Gamma_R(x)\}$, которая сходится к некоторой функции $\Gamma(x)$ равномерно по x на каждом компакте K в B_R. Отсюда следует, что

$$\Gamma_{Rk}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x) \quad \text{в } L_2(B_r) \text{ при каждом } r > 0.$$

В силу оценки Каччиополи (3.18) получим, что существует подпоследовательность $\{\Gamma_{Rn_k}(x)\}$ последовательности $\{\Gamma_{Rk}(x)\}$, которая слабо в $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ сходится к $\Gamma(x)$, т. е.

$$\Gamma_{Rn_k}(x) \underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x) \quad \text{в } L_2(B_r),\ \forall\, r > 0,$$

$$\Gamma_{Rn_k}(x) \underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x) \quad \text{в } W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N).$$

Отсюда ясно, что функция $\Gamma(x)$ является обобщенным решением (из $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$) уравнения (5.5) и, кроме того, из принципа максимума следует (см. [7]) оценка

$$0 < \Gamma(x) < M.$$

2. Рассмотрим слой $\dfrac{\lambda}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\lambda$, где $\lambda > 1$, и введем обозначение

$$M_1 = \max\left\{ \sup_{|x|=\lambda/2} \Gamma(x),\ \sup_{|x|=2\lambda} \Gamma(x) \right\}, \tag{5.9}$$

где $\Gamma(x)$ — решение уравнения (5.5), удовлетворяющее оценкам $0 < \Gamma(x) < M_1$.

Лемма 5.1. *Для любого положительного, ограниченного в $\mathbb{R}^N$ решения уравнения* (5.5) *существует δ: $0 < \delta < 1$ такое, что*

$$\Gamma(x)|_{|x|=\lambda} < \delta M_1. \tag{5.10}$$

Доказательство леммы 5.1 мы проведем в этом разделе несколько позднее.

Считая, что лемма 5.1 доказана, установим, что ограниченное решение $\Gamma(x)$ уравнения (5.5), построенное в предыдущем пункте, имеет предел

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = 0. \tag{5.11}$$

Предположим противное, т. е. что

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) \neq 0,$$

и, так как $\Gamma(x) > 0$, то $\Gamma(x) > \alpha > 0$. Обозначим

$$\beta = \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\, \Gamma(x).$$

Ясно, что этот предел существует и $\beta \leqslant M$. По определению верхнего предела имеем $\Gamma(x) \leqslant \beta$, следовательно, и

$$\Gamma|_{|x|=\lambda/2} \leqslant \beta, \quad \Gamma|_{|x|=\lambda} \leqslant \beta.$$

Применяя лемму 5.1, получим, что

$$\beta = \overline{\lim_{|x|\to\infty}}\, \Gamma(x) \leqslant \delta\beta < \beta.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\beta = 0$, т. е. доказано, что существует предел (5.11). Из принципа максимума (см. [7]) и (5.11) получаем, что

$$\Gamma(x) \equiv 0,\ x \in \mathbb{R}^N.$$

3. В шаре B_R рассмотрим задачу (5.6), (5.7) и семейство функций

$$\overline{\Gamma}_R(x) = \frac{\Gamma_R(x)}{\Gamma_R(0)}, \tag{5.12}$$

где $\Gamma_R(x)$ — решение задачи (5.6), (5.7). Очевидно, что $\overline{\Gamma}_R(0) = 1$ и что $\overline{\Gamma}_R(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L(x)\overline{\Gamma}_R + (b(x), \nabla\overline{\Gamma}_R) + c_\alpha(x)\overline{\Gamma}_R = 0,\ x \in B_R, \tag{5.13}$$

с теми же коэффициентами, что и (5.6).

Применяя неравенство Харнака (3.11), будем иметь

$$\sup_{|x|<a} \overline{\Gamma}_R \leqslant C \inf_{|x|<a} \overline{\Gamma}_R \leqslant C\overline{\Gamma}_R(0) = C. \tag{5.14}$$

Следовательно, семейство функций $\{\overline{\Gamma}_R(x)\}$ является ограниченным по R на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Применяя диагональный процесс, выделим подпоследовательность $\{\overline{\Gamma}_{R_k}(x)\}$ семейства $\{\overline{\Gamma}_R(x)\}$, которая сходится к некоторой функции $\Gamma_1(x)$ равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Отсюда следует, что

$$\overline{\Gamma}_{R_k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_1(x) \quad \text{в } L_2(B_r) \text{ при каждом } r > 0.$$

Из оценки Каччиополи (3.18) получим, что подпоследовательность $\{\overline{\Gamma}_{R_nk}(x)\}$ семейства $\{\overline{\Gamma}_R(x)\}$ слабо сходится в $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ к функции $\Gamma_1(x)$. Таким образом, мы получили

$$\overline{\Gamma}_{R_{nk}}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_1(x) \quad \text{в } L_2(B_r),$$
$$\overline{\Gamma}_{R_{nk}}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_1(x) \quad \text{слабо } W_2^{1,\,loc}(B_r),$$

при каждом $r > 0$.

Отсюда легко следует, что предельная функция $\Gamma_1(x)$ является обобщенным решением (из $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$) уравнения (5.5), и

$$\Gamma_1(0) = 1. \tag{5.15}$$

4. Докажем, что построенное решение $\Gamma_1(x)$ уравнения (5.5), удовлетворяющее (5.15), является неограниченным в $\mathbb{R}^N$. Предположим противное, тогда $\exists\, H > 0$ такое, что

$$0 < \Gamma_1(x) < H, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.16}$$

Тогда применим к $\Gamma_1(x)$ рассуждения пункта 2 и получим, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma_1(x) = 0.$$

Из принципа максимума [7] после этого следует, что

$$\Gamma_1(x) \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Получим противоречие, ибо для $\Gamma_1(x)$ справедливо (5.15). Следовательно, функция $\Gamma_1(x)$ является неограниченной в $\mathbb{R}^N$, т. е. для каждого натурального n существует точка x_n такая, что

$$\Gamma_1(x)|_{x=x_n} > n, \tag{5.17}$$

при этом $|x_n| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Докажем, что $\Gamma_1(x)$ является бесконечно большой функцией при $n \to \infty$, т. е.

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma_1(x) = +\infty. \tag{5.18}$$

Предположим противное, тогда найдется $A > 0$ и последовательность x_n: $|x_n| \to \infty$ такая, что

$$\Gamma_1(x)|_{x=x_n} \leqslant A. \tag{5.19}$$

Обозначим $\mu_n = |x_n|$ и, применяя к $\Gamma_1(x)$ неравенство Харнака вида

$$\sup_{\mu_n/2\leqslant|x|\leqslant2\mu_n} \Gamma_1(x) \leqslant C_2 \inf_{\mu_n/2\leqslant|x|\leqslant2\mu_n} \Gamma_1(x), \tag{5.20}$$

где C_2 не зависит от n, докажем, что

$$\Gamma_1(x)|_{|x|=\mu_n} \leqslant C_2 A \tag{5.21}$$

с постоянной C_2, не зависящей от n.

Фиксируем произвольный элемент x_n последовательности $\{x_n\}$, рассмотрим уравнение (5.5) в слое

$$1 < \frac{\mu_n}{2} < |x| < 2\mu_n$$

и заменим переменные в (5.5) по формулам

$$x_i = \frac{\mu_n}{4} y_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Тогда уравнение (5.5) перейдет в уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\frac{\partial \Gamma_1}{\partial y_k}\right) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\mu_n}{4} b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\cdot\nabla\Gamma_1 + \frac{\mu_n^2}{4^2} c_\alpha\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\Gamma_1 = 0, \tag{5.22}$$

которое выполняется в слое $2 < |y| < 8$. Учтем, что в силу условий эллиптичности (1.3), условий (B_2) на $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ и того, что $c_\alpha(x)$ определен по формуле (5.4), коэффициенты уравнения (5.22) имеют верхние пределы, не зависящие от μ_n,

$$\lambda_0^2|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\xi_i\xi_k \leqslant \lambda_1^2|\xi|^2,$$

$$\mu_n\left|b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\right| = \frac{\mu_n|y|}{4}b_k\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)\frac{4}{|y|} \leqslant B\frac{4}{|y|} \leqslant 2B,$$

$$\frac{\mu^2}{4^2}c_\alpha\left(\frac{\mu_n}{4}y\right) = -\frac{\alpha^2}{|y|^2} \leqslant -\frac{\alpha^2}{8^2}.$$

Учтем, что сфера $|x| = \mu_n$ при преобразовании подобия $y = x\dfrac{4}{\mu_n}$ переходит в сферу $|y| = 4$, и что одна из точек сферы $|x_n| = \mu_n$ совпадает с x_n и переходит в точку $y^1 = x_n\dfrac{4}{\mu_n}$. Впишем в шаровой слой $2 \leqslant |y| \leqslant 8$ шар $B_1^{y^1}$ радиуса 1 с центром в точке y^1 и применим неравенство Харнака (5.20) к решению

$$\Gamma_2(y) = \Gamma_1\left(\frac{\mu_n}{4}y\right)$$

уравнения (5.22). При этом получим

$$\sup_{B_1^{y^1}}\Gamma_2(y) \leqslant C_1\inf_{B_1^{y^1}}\Gamma_2(y) \leqslant C_1\Gamma(y_1). \tag{5.23}$$

Шар $B_1^{y^1}$ пересекается со сферой $|y| = 4$ по сферической поверхности

$$\sigma_1 = \left(B_1^{y^1} \cap |y| = 4\right).$$

Впишем в слой $\{2 \leqslant |y| \leqslant 8\}$ шар $B_1^{y^2}$ с центром в некоторой точке $y^2 \in \sigma_1$, которая находится на расстоянии 1 от точки y^1 и $|y^2| = 4$, и применим неравенство Харнака (5.20). Получим, с учетом (5.23)

$$\sup_{B_1^{y^2}}\Gamma_2(y) \leqslant C_1\inf_{B_1^{y^2}}\Gamma_2(y) \leqslant C_1^2\Gamma(y_1).$$

Продолжая аналогичные построения, мы за конечное число k_0 шагов покроем сферу $|y| = 4$ объединением k_0 вписанных шаров радиуса 1 с центрами, лежащими на этой сфере. После k_0-кратного применения неравенства Харнака (5.20) получим

$$\sup_{|y|=4}\Gamma_2(y) \leqslant C_1^{k_0}\Gamma_2(y_1). \tag{5.24}$$

Совершая обратный переход к переменным x по формулам

$$y_i = \frac{4}{\mu_n}x_i, \quad i = 1, \ldots, N$$

и учитывая (5.24), получим, что неравенство (5.21) обосновано.

На основании (5.21) получим из (5.20) неравенство

$$\sup_{|x| \geqslant \frac{\mu_1}{2}}\Gamma_1(x) \leqslant AC_2. \tag{5.25}$$

Это неравенство ведет к противоречию с тем, что в силу (5.17) функция $\Gamma_1(x)$ является неограниченной.

Итак, нами в пунктах 1–4 установлен следующий результат.

Лемма 5.2. *Пусть* $N \geqslant 3$, *коэффициент* $c_\alpha(x)$ *определен по формуле* (5.4), *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* (B_2), *тогда существует функция* $\Gamma_1(x)$ *такая, что* $\Gamma_1(x)$ *является решением* (*из* $W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^N)$) *уравнения* (5.5) *таким, что*

1. $\Gamma_1(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

2. $\lim\limits_{|x|\to\infty} \Gamma_1(x) = +\infty$.

Для доказательства леммы 5.1 нам потребуется в дальнейшем следующее утверждение.

Лемма 5.3. *Если $u(x)$ — обобщенное решение (из $W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^N)$) задачи*

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c_3(x)u = 0,\ |x| < 1, \tag{5.26}$$

$$u|_{|x|=1} = M, \tag{5.27}$$

где $c_3(x) \leqslant -q_0 < 0$, $x \in B_1$, то существует $\delta:\ 0 < \delta < 1$ такое, что

$$u(0) < \delta M. \tag{5.28}$$

Доказательство. В силу линейности задачи (5.26), (5.27) можно считать, не ограничивая общности, что $M = 1$, т. е. рассмотрим задачу

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c_3(x)u = 0,\ |x| < 1, \tag{5.29}$$

$$u|_{|x|=1} = 1. \tag{5.30}$$

В уравнении (5.29) сделаем замену

$$v(x) = 1 - u(x)$$

и получим для функции $v(x)$ задачу

$$L(x)v + (b(x), \nabla v) + c_3(x)v = 0,\ |x| < 1, \tag{5.31}$$

$$v|_{|x|=1} = 0. \tag{5.32}$$

Рассмотрим уравнение

$$L(x)w + (b(x), \nabla w) + c_3(x)w = f(x),\ |x| < 1, \tag{5.33}$$

и его решение $w(x)$, удовлетворяющее условию

$$w|_{|x|=1} = 0, \tag{5.34}$$

где

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } |x| < \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \varepsilon < |x| < 1. \end{cases}$$

Постоянную $\varepsilon > 0$ выберем ниже.

Из принципа максимума [7] следует неравенство

$$v(x) \geqslant q_0 w(x) \quad \text{при } |x| < 1, \tag{5.35}$$

где q_0 — постоянная такая, что $c_3(x) \leqslant -q_0 < 0$.

Докажем, что

$$w(0) \geqslant \delta_1 > 0 \quad \text{при} \quad |x| < \varepsilon,$$

где δ_1 зависит от λ_0^2 и N.

Решение задачи (5.33), (5.34) имеет вид

$$w(x) = \int\limits_{|\xi|<1} G(x, \xi) f(\xi) d\xi = -\int\limits_{|x|<\varepsilon} G(x, \xi) d\xi, \tag{5.36}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи (5.33), (5.34) в шаре B_1 единичного радиуса.

Напомним некоторые свойства функции $G(x, \xi)$ (см. [7, 88]):

1. $G(x, \xi) = 0$ при $|x| = 1$,
2. $G(x, \xi) < 0$ при $|x| < 1$, $|\xi| < 1$,
3. $G(x, \xi) = g(x, \xi) - \Gamma(x, \xi)$, где $\Gamma(x, \xi)$ — фундаментальное решение уравнения (5.33), а $g(x, \xi)$ — регулярное решение уравнения (5.33) по x.

Из работы Стампаккья [88] известно, что $\Gamma(x,\,\xi)$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$C_2|x-\xi|^{2-N} \leqslant \Gamma(x,\,\xi) \leqslant C_1|x-\xi|^{2-N},\ N>2, \tag{5.37}$$

где $C_1>0$ и $C_2>0$ зависят от N и $\lambda_0^2,\,\lambda_1^2$.

Пусть $|x|<\varepsilon$, $|\xi|<\varepsilon$, тогда из левого неравенства (5.37) следует

$$\Gamma(x) \geqslant C_2|x-\xi|^{2-N} \geqslant \frac{C_2}{(|x|+|\xi|)^{N-2}} > \frac{C_2}{(2\varepsilon)^{N-2}}. \tag{5.38}$$

Из краевого условия (5.34) $G(x,\,\xi)|_{|x|=1}=0$ следует, что

$$g(x,\,\xi)=\Gamma(x,\,\xi) \quad \text{при } |x|=1.$$

Применяя принцип максимума [7] и правое неравенство (5.37), получим

$$\max_{|x|\leqslant 1} g(x,\,\xi) \leqslant \max_{|x|=1} g(x,\,\xi) \leqslant \max_{|x|=1}\frac{C_1}{|x-\xi|^{N-2}}.$$

Пусть $|\xi|\leqslant 1/2$, тогда из полученного неравенства получим

$$\max_{|x|\leqslant 1} g(x,\,\xi) \leqslant \max_{|x|=1}\frac{C_1}{|x-\xi|^{2-N}} \leqslant \frac{C_1}{(1-|\xi|)^{N-2}} \leqslant C_1 2^{N-2}. \tag{5.39}$$

Объединяя неравенства (5.37), (5.38) и выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$-G(x,\,\xi)=\Gamma(x,\,\xi)-g(x,\,\xi) \geqslant \frac{C_2}{(2\varepsilon)^{N-2}} - C_1 2^{N-2} > 2C_1$$

при $|x|<\varepsilon$, $|y|<\varepsilon$. Следовательно, из (5.35) при $|x|<\varepsilon$ и (5.39) получим, что

$$w(x)=-\int\limits_{|\xi|<\varepsilon} G(x,\,\xi)d\xi > 2C_2\int\limits_{|x|<\varepsilon} d\xi=\delta_1>0.$$

Отметим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_1(\varepsilon,M,\lambda_0^2)=0.$$

В частности, $w(0)>\delta_1>0$, поэтому, используя (5.35), получим

$$v(0)>q_0 w(0)=\delta_2>0.$$

Таким образом, установлено, что

$$u(0)=1-v(0)<1-\delta_2=\delta<1.$$

Лемма 5.3 доказана. □

Доказательство леммы 5.1. В слое $1<\dfrac{\lambda}{2}<|x|<2\lambda$ рассмотрим решение $\Gamma(x)$ уравнения (5.5) и совершим в нем замену переменных

$$x_i=\frac{\lambda}{2}y_i, \quad i=1,\ldots,N.$$

После сокращения на $\dfrac{\lambda^2}{4}$ получим, что уравнение (5.5) переходит в уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\left(\frac{\lambda}{2}y\right)\frac{\partial\Gamma_1}{\partial y_k}\right)+\sum_{k=1}^{N}\frac{\lambda}{2}b_k\left(\frac{\lambda}{2}y\right)\frac{\partial\Gamma_1}{\partial y_k}+\frac{\lambda^2}{2^2}c_\alpha\left(\frac{\lambda}{2}y\right) \tag{5.40}$$

в кольце $1<|y|<4$, $\Gamma_1(y)=\Gamma\left(\dfrac{\lambda}{2}y\right)$.

Учтем, что в силу условий равномерной эллиптичности (1.3), условий (B_2) на коэффициенты $b_1(x),\dots,b_N(x)$ и того, что коэффициент $c_\alpha(x)$ определен по формуле (5.4), получим, что в кольце $1 \leqslant |y| \leqslant 4$ имеют место оценки

$$\lambda_0^2|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}\left(\frac{\lambda}{2}y\right)\xi_i\xi_k \leqslant \lambda_1^2|\xi|,$$
$$\frac{\lambda}{2}\left|b_k\left(\frac{\lambda}{2}y\right)\right| \leqslant \frac{\lambda|y|}{2}\left|b_k\left(\frac{\lambda}{2}y\right)\right|\frac{1}{|y|} \leqslant 2B,$$
$$\frac{\lambda^2}{2^2}c_\alpha\left(\frac{\lambda}{2}y\right) = -\frac{\alpha^2}{|y|^2} \leqslant -\frac{\alpha^2}{16}.$$

Далее заметим, что для $\Gamma_1(y) = \Gamma\left(\frac{\lambda}{2}y\right)$ справедливы неравенства

$$\Gamma(y) \leqslant M_1 \quad \text{на сферах } |y|=1 \text{ и } |y|=4,$$

где M_1 определено равенством (5.9). Применим лемму 5.3 в шаре B_1^y с центром в произвольной точке сферы $|y| = 2$ и радиуса 1. Согласно лемме 5.3 при $q_0 = 2^2/16$ имеем

$$\Gamma_1(y) \leqslant \delta M_1, \quad 0 < \delta < 1.$$

Из произвольности точки $y: \ |y| = 2$ следует, что

$$\sup_{|y|=2}\Gamma_1(y) \leqslant \delta M_1, \quad 0 < \delta < 1.$$

Возвращаясь к старым переменным

$$y_i = \frac{2}{\lambda}x_i, \quad i = 1,\dots,N,$$

получим, что лемма 5.1 доказана. □

6. Доказательство теоремы 6.1

Теорема 6.1. *Если размерность $N \geqslant 3$ и коэффициенты $b_1(x),\dots,b_N(x)$ удовлетворяют условию (B_2), коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_2), то решение задачи* (2.1), (2.2) *имеет предел* (2.3) *равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Доказательство. При $N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$L(x)u + (b(x),\nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{6.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{6.2}$$

где оператор $L(x)$ определен в (3.2). Предположим, что выполнены все условия, сформулированные во введении для теоремы 6.1, $u_0(x)$ — ограниченная и непрерывная функция в $\mathbb{R}^N$.

Наряду с задачей Коши (6.1), (6.2) рассмотрим задачу Коши

$$L(x)w + (b(x),\nabla w) + c_\alpha(x)w - w_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{6.3}$$

$$w|_{t=0} = u_1(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{6.4}$$

где

$$u_1(x) = |u_0(x)|, \tag{6.5}$$

$$c_\alpha \leqslant \begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при } |x| \geqslant 1,\\ 0 & \text{при } |x| < 1. \end{cases} \tag{6.6}$$

Из принципа максимума [46] легко получаем

$$|u(x,t)| \leqslant w(x,t) \quad \text{в } D.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} w(x,t) = 0 \tag{6.7}$$

равномерно по x на каждом компакте K в R.

Фиксируем произвольный компакт $K \subset \mathbb{R}^N$ и выберем число $r_1 > 0$ так, чтобы $K \subset \overline{B}_{r_1}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что в замкнутом шаре $\overline{B}_{r_1}$ справедлива оценка

$$\delta\Gamma(x) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad x \in \overline{B}_{r_1}, \tag{6.8}$$

где $\Gamma(x)$ — функция из леммы 5.2 такая, что $\Gamma(x)$ является решением уравнения (5.5) и

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = \infty.$$

Рассмотрим функцию

$$V(x,\, t) = \delta\Gamma(x) - w(x,\, t), \tag{6.9}$$

где $\Gamma(x)$ — функция из леммы 5.2, $w(x,\, t)$ — решение задачи Коши (6.3), (6.4). Так как очевидно, что $0 \leqslant w(x,\, t) \leqslant M$, а функция $\Gamma(x)$ имеет предел

$$\lim_{|x|\to\infty} \Gamma(x) = \infty,$$

то существует число $R > r_1$ такое, что

$$V(x,\, t)|_{|x|=R} \geqslant 0,\; t > 0. \tag{6.10}$$

Кроме того, очевидно, что функция (6.9) удовлетворяет соотношениям

$$L(x)V + (b(x), \nabla V) + c(x)V - V_t = 0, \quad |x| < R,\; t > 0, \tag{6.11}$$

$$V|_{t=0} = \delta\Gamma(x) - u_1(x),\; |x| < R. \tag{6.12}$$

Введем обозначение

$$f(x) = \delta\Gamma(x) - u_1(x), \tag{6.13}$$

$$f^+(x) = \max(f(x),\, 0) \quad f^-(x) = \min(f(x),\, 0).$$

Рассмотрим в цилиндре $Z = \{|x| < R,\; t > 0\}$ следующие соотношения:

$$L(x)p + (b(x), \nabla p) + c_\alpha(x)p - p_t = 0,\; |x| < R,\; t > 0, \tag{6.14}$$

$$p|_{|x|=R} = 0,\; t > 0, \tag{6.15}$$

$$p|_{t=0} = f^-(x),\; |x| < R, \tag{6.16}$$

где $f(x)$ определена в (6.13).

Из принципа максимума следует, что $p(x,\, t) \leqslant 0$ при $|x| < R$, $t > 0$. Ясно также, что функция $f^-(x)$ непрерывна и ограничена при $|x| \leqslant R$.

В силу леммы 3.4 существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p(x,\, t) = 0 \tag{6.17}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим функцию

$$w_1(x,\, t) = V(x,\, t) - p(x,\, t), \tag{6.18}$$

где $V(x,\, t)$ — функция (6.9), а $p(x,\, t)$ удовлетворяет (6.14)–(6.17). Функция (6.18) в силу (6.12), (6.10), (6.13) и (6.14), (6.15), (6.16) удовлетворяет соотношениям

$$L(x)w_1 + b(x) \cdot \nabla w_1 + c_\alpha(x)w_1 - w_{pt} = 0,\; |x| < R,\; t > 0, \tag{6.19}$$

$$w_1|_{|x|=R} \geqslant 0,\; t > 0, \tag{6.20}$$

$$w_1|_{t=0} = f(x) - f^-(x) = f^+(x) \geqslant 0. \tag{6.21}$$

Из принципа максимума и (6.19)–(6.21) следует, что

$$w_1(x,\, t) \geqslant 0 \quad \text{при } |x| < R,\; t > 0. \tag{6.22}$$

Неравенство (6.22) преобразуется к виду

$$0 \leqslant w_1(x,\, t) = \delta\Gamma(x) - w(x,\, t) - p(x,\, t). \tag{6.23}$$

В силу (6.17) для $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists T = T(\varepsilon)$: $t \geqslant T(\varepsilon)$ и $\forall\, x:\ \{|x| < R\}$ справедливо

$$p(x,\, t) > -\frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.24}$$

Пусть $x \in \overline{B}_{r_1}$, тогда для $\delta\Gamma(x)$ справедлива оценка (6.8). Учитывая (6.23), (6.24), (6.8), получим: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists T = T(\varepsilon)$: $\forall\, t \geqslant T(\varepsilon)$, $\forall\, x : |x| \leqslant r_1$

$$w(x,\, t) < \varepsilon.$$

Таким образом, существует предел (6.7) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Теорема 6.1 доказана. □

7. О неулучшаемости условий теорем 4.1 и 6.1

В этом разделе мы покажем на примерах, что все условия теорем 4.1 и 6.1 являются точными и не могут быть существенно ослаблены.

В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\, \infty)$ рассмотрим задачу

$$\Delta u + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{7.1}$$

$$u(x,\, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.2}$$

Лемма 7.1. *При $N \geqslant 3$ существуют коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_1) теоремы* 4.1, *и ограниченная непрерывная функция $u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, для которых решение задачи Коши* (7.1), (7.2) *не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.*

Доказательство. Определим коэффициент $c(x)$ по формуле

$$c(x) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \tag{7.3}$$

При $0 \leqslant r < 1$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_1'' + \frac{N-1}{r}\Gamma_1' - \alpha^2\Gamma_1 = 0,\ r > 0, \tag{7.4}$$

$$\Gamma_1(0) = 1,\ \Gamma_1'(0) = 0. \tag{7.5}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\Gamma_1(r) = C_N I_{\frac{N-2}{2}}(\alpha r)\,(\alpha r)^{-\frac{2-N}{2}}),\ C_N = 2^{\frac{N-2}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right), \tag{7.6}$$

где $\Gamma(\nu)$ — функция Эйлера, $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν (см. [4]), $x > 0$.

При $r \geqslant 1$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_2'' + \frac{N-1}{r}\Gamma_2' = 0,\ r > 1, \tag{7.7}$$

$$\Gamma_2(1) = \Gamma_1(1),\ \Gamma_2'(1) = \Gamma_1'(1), \tag{7.8}$$

где $\Gamma_1(1)$ и $\Gamma_1'(1)$ — значения функции (7.6) и ее производной по r при $r = 1$.

Решением этой задачи является функция

$$\Gamma_2(r) = C_1 r^{2-N} + C_2, \tag{7.9}$$

где постоянные определяются из «условий склейки» (7.8)

$$C_1 = \frac{\Gamma_1'(1)}{2-N} < 0, \quad C_2 = \Gamma_1(1) + \frac{\Gamma_1'(1)}{N-2} > 0.$$

Из формулы (7.9) следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \Gamma_2(r) = C_2. \tag{7.10}$$

Теперь рассмотрим задачу Коши, в которой коэффициент $c(x)$ определен по формуле (7.3), а начальную функцию определим формулой

$$u_0(x) = \begin{cases} \Gamma_1(|x|) & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ \Gamma_2(|x|) & \text{при } |x| \geqslant 1, \end{cases} \tag{7.11}$$

где $\Gamma_1(r)$ — решение задачи (7.4), (7.5), определенное в (7.6), а $\Gamma_2(r)$ — решение задачи (7.7), (7.8), определенное в (7.9). Из (7.6), (7.9) и «условий склейки» (7.8) следует, что $u_0 \in W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ и что $u_0(x)$ является обобщенным решением из $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ уравнения

$$\Delta u_0 + c(x)u_0 = 0, \tag{7.12}$$

где $c(x)$ определен по формуле (7.3). Следовательно, функция (7.12) удовлетворяет и параболическому уравнению (7.1) в соответствующем обобщенном смысле, и для $t > 0$ справедливо равенство

$$u(x,\,t) = u_0(x) > 0,\; x \in \mathbb{R}^N.$$

Следовательно, мы построили решение задачи Коши (7.1), (7.2), которое не имеет нулевого предела, т. е.

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = u_0(x) > 0,\; x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.13}$$

Лемма 7.1 доказана. □

Доказанная лемма 7.1 показывает, что теорема 4.1 не переносится на случай $N \geqslant 3$.

Лемма 7.2. *Пусть* $N = 1$ *или* $N = 2$, *тогда существуют коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_1), *и ограниченная, непрерывная в* $\mathbb{R}^N$ *функция* $u_0(x)$, *для которых решение задачи Коши* (5.1), (5.2) *не имеет равномерного в* $\mathbb{R}^N$ *предела*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0. \tag{7.14}$$

Доказательство. Пусть $N = 1$. Рассмотрим задачу Коши (7.1), (7.2), в которой определим $c(x)$ по формуле (7.3), а начальную функцию положим равной

$$u_0(x) = 1,\; x \in \mathbb{R}^1,$$

и докажем, что решение этой задачи Коши не имеет равномерного в $\mathbb{R}^1$ предела (7.14).

Рассмотрим функцию

$$v(x,\,t) = 1 - u(x,\,t), \tag{7.15}$$

где $u(x,\,t)$ — решение задачи Коши (7.1), (7.2). Ясно, что функция $v(x,\,t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_{xx} + c(x)v - v_t = c(x),\; (x,\,t) \in D, \tag{7.16}$$

и начальному условию

$$v|_{t=0} = 0,\; x \in \mathbb{R}^1. \tag{7.17}$$

При $x > 1$ в силу (7.3) имеем $c(x) = 0$, и решение задачи (7.16), (7.17) имеет вид

$$v(x,\,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{x-1}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{4(t-\tau)}\right\} v_1(1,\,\tau)d\tau, \tag{7.18}$$

где $v_1(x,\,t)$ — решение задачи

$$v_{1xx} - \alpha^2 v_1 - v_{1t} = -\alpha^2 \quad \text{при } |x| \leqslant 1, \tag{7.19}$$

$$v_1|_{t=0} = 0, \quad |x| < 1. \tag{7.20}$$

Учитывая, что функция $v_1(x,\,t)$ ограничена:

$$|v_1(x,\,t)| \leqslant M_1, \quad |x| \leqslant 1, \quad t > 0,$$

получим неравенство

$$|v(x,\,t)| \leqslant \frac{M_1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{x-1}{(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{4(t-\tau)}\right\} d\tau,\; x > 1.$$

Под знаком интеграла заменим переменную интегрирования $\sigma = \dfrac{x-1}{4(t-\tau)}$ и получим

$$|v(x,\,t)| \leqslant \frac{M_1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{(x-1)^2/4t}^{\infty} e^{-\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}. \tag{7.21}$$

Фиксируем $t > 0$ и устремим $x \to +\infty$, тогда в силу сходимости интеграла в правой части (7.21) получим, что существует предел

$$\lim_{x\to\infty} v(x,\, t) = 0 \tag{7.22}$$

задачи (7.16), (7.17). Так как

$$u(x,\, t) = 1 - v(x,\, t),$$

то предел (7.22) эквивалентен существованию предела

$$\lim_{x\to+\infty} u(x,\, t) = 1 \tag{7.23}$$

для каждого $t > 0$. К функции $u(x,\, t)$ применима теорема 4.1, согласно которой существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0 \tag{7.24}$$

равномерно по x на любом отрезке $K \subset \mathbb{R}^1$.

Существование пределов (7.23), (7.24) противоречит существованию равномерного по $x \in \mathbb{R}^1$ предела (7.24). В самом деле, из существования (7.23) следует, что для фиксированного $t_0 > 0$ и $\varepsilon = 1/2$ существует $A = A(\varepsilon,\, t_0) > 0$ такое, что $u(x,\, t_0) > 1/2$ при всех $x > A$. Отсюда следует, что не существует равномерно во всем $\mathbb{R}^1$ предела (7.24). Лемма 7.2 при $N = 1$ доказана.

Докажем лемму 7.2 при $N = 2$. Рассмотрим задачу Коши (7.1), (7.2), в которой определим $c(x)$ по формуле (7.3), а

$$u|_{t=0} = u_0(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Докажем, что решение указанной задачи не имеет равномерного во всем $\mathbb{R}^2$ предела (7.14).

Рассмотрим функцию

$$v(x,\, t) = 1 - u(x,\, t), \tag{7.25}$$

для которой получим задачу

$$\Delta v + c(x)v - v_t = c(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^2, \tag{7.26}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad |x| < 1. \tag{7.27}$$

Рассмотрим функцию [13]

$$w(x,\, t) = \frac{\alpha^2}{4\pi} \int\limits_0^{t+1} \frac{d\sigma}{\sigma} \left(\int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|}{4\sigma}\right\} d\xi \right). \tag{7.28}$$

Легко видеть, что функция (7.28) удовлетворяет задаче

$$\Delta w - w_t = c(x),\ (x,\, t) \in D, \tag{7.29}$$

$$w|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{7.30}$$

где

$$\psi(x) = \frac{\alpha^2}{4\pi} \int\limits_0^{1} \frac{d\sigma}{\sigma} \left(\int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|}{4\sigma}\right\} d\xi \right). \tag{7.31}$$

Из (7.28) следует, что $w(x,\, t) > 0$ и что функция $w(x,\, t)$ возрастает по t. Поэтому при $t > 0$

$$w(x,\, t) > \psi(x). \tag{7.32}$$

Оценим снизу функцию (7.28), использовав при этом неравенства: при $|x| = 1$, $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1$

$$|\xi| < 1, \quad |x-\xi|^2 \leqslant (|x| + |\xi^2|) \leqslant 4,$$

$$\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4\sigma}\right\} \geqslant e^{-2}.$$

Поэтому

$$\frac{4\pi}{\alpha^2} > \int\limits_{1/2}^{1} \frac{d\sigma}{\sigma} \int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|}{4\sigma}\right\} d\xi \geqslant \frac{\pi}{2} e^{-2}, \tag{7.33}$$

т. е.

$$\psi(x) > \frac{\alpha^2 e^{-2}}{2}.$$

Из (7.33) и (7.31) следует, что при $|x| = 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ справедлива оценка

$$\min_{|x|=1,\, 0\leqslant t\leqslant T} w(x,\, t) \geqslant C_1 > 0.$$

Поэтому при $|x| = 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$ для решения задачи (7.26), (7.27) имеет место оценка

$$v(x,\, t) \leqslant C_2 w(x,\, t), \tag{7.34}$$

где $w(x,\, t)$ — решение (7.29), (7.30),

$$C_2 = \max_{|x|=1,\, 0\leqslant t\leqslant T} v(x,\, t) \left[\min_{|x|=1,\, 0\leqslant t\leqslant T} w(x,\, t) \right]. \tag{7.35}$$

При $|x| \leqslant 1$, $t \geqslant 0$ задача (7.26), (7.27) имеет вид

$$\Delta v_1 - \alpha^2 v_1 - v_{1t} = -\alpha^2, \tag{7.36}$$

$$v_1|_{t=0} = 0. \tag{7.37}$$

Ясно, что $v_1(x,\, t)$ — непрерывная и ограниченная функция, $|v_1(x,\, t)| \leqslant 1$.

При $|x| \geqslant 1$, $t > 0$ задача (7.26), (7.27) имеет вид

$$\Delta v_2 - v_{2t} = 0,\ |x| > 1,\ t > 0, \tag{7.38}$$

$$v_2|_{|x|=1} = v_1(x,\, t)|_{|x|=1}, \tag{7.39}$$

$$v_2|_{t=0} = 0. \tag{7.40}$$

Рассмотрим функцию

$$z(x,\, t) = v_2(x,\, t) - C_2 w(x,\, t), \tag{7.41}$$

где C_2 — постоянная из неравенства (7.34) и определена в (7.35). Ясно, что при $|x| > 1$, $t > 0$ функция (7.41) удовлетворяет уравнению

$$\Delta z - z_t = 0,\ |x| > 1,\ t > 0.$$

При $|x| = 1$, $0 < t \leqslant T$ справедливо (7.34), что эквивалентно, в силу определения (7.41) функции $z(x,\, t)$, неравенству

$$z(x,\, t) \leqslant 0 \quad \text{при } |x| = 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T.$$

При $t = 0$ и $|x| > 1$ имеет место неравенство

$$z|_{t=0} = -C_2\psi(x) < 0.$$

Стало быть, применяя принцип максимума [46], получим при $|x| \geqslant 1$ и $0 < t \leqslant T$ неравенство

$$z(x,\, t) \leqslant 0.$$

Таким образом, доказано, что при $|x| \geqslant 1$ и $0 < t \leqslant T$ имеет место неравенство

$$0 \leqslant v_2(x,\, t) \leqslant C_2 w(x,\, t). \tag{7.42}$$

Устремляя $|x| \to \infty$, легко получим из (7.28), что для каждого t: $0 < t \leqslant T$ существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} w(x,\, t) = 0. \tag{7.43}$$

Тогда из (7.42) и (7.43) следует, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} v_2(x,\, t) = 0, \tag{7.44}$$

для каждого t: $0 < t \leqslant T$ при любом $T > 0$.

К функции $u(x,\, t)$ применима теорема 4.1, поэтому существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0 \tag{7.45}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^2$.

Из (7.44) следует, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,\,t) = 1, \tag{7.46}$$

для каждого t: $0 < t \leqslant T$ при $\forall T > 0$.

Как и в случае $N = 1$, из (7.45), (7.46) элементарно следует, что предел (7.45) не может существовать равномерно по x во всем $\mathbb{R}^2$. Лемма 7.2 доказана. □

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{7.47}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x),\; x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.48}$$

Лемма 7.3. *При $N = 1$ существуют: коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_1), коэффициент $b(x)$, ограниченный в $\mathbb{R}^1$ и такой, что*

$$b(x) = \begin{cases} \beta/x, & \text{при } x > 1,\ \beta > 1, \\ -\beta/x, & \text{при } x < -1,\ \beta < -1, \end{cases} \tag{7.49}$$

непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^1$ начальная функция $u_0(x)$, для которых решение задачи Коши (7.47), (7.48) *не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^1$.*

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\Gamma''(x) + b(x)\Gamma'(x) + c(x)\Gamma(x) = 0,\; |x| > 0, \tag{7.50}$$

$$\Gamma(0) = 1,\; \Gamma'(0) = 0, \tag{7.51}$$

где $c(x)$ — определено по формуле (7.3), а $b(x)$ удовлетворяет (7.49), и докажем, что существует функция $\Gamma(x)$ такая, что $\Gamma(x)$ удовлетворяет (7.50), (7.51),

$$\lim_{x\to+\infty} \Gamma(x) = \ell_1 < \infty, \tag{7.52}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \Gamma(x) = \ell_2 < \infty. \tag{7.53}$$

Пусть $0 \leqslant x < 1$, тогда уравнение (7.50) имеет вид:

$$\Gamma_1''(x) + b(x)\Gamma_1'(x) + \alpha^2\Gamma_1 = 0. \tag{7.54}$$

Умножив уравнение (7.54) на множитель

$$B(x) = \exp\left\{\int_0^x b(\tau)d\tau\right\}, \quad 0 < x < 1,$$

запишем (7.54) в самосопряженном виде

$$(B(x)\Gamma_1'(x))' = \alpha^2 B(x)\Gamma_1(x) > 0,\; 0 < x < 1. \tag{7.55}$$

Интегрируя (7.55) и учитывая условие (7.51), получим

$$B(x)\Gamma_1'(x) = \alpha^2 \int_0^x B(\tau)\Gamma_1(\tau)d\tau, \tag{7.56}$$

$$\Gamma_1(x) - \Gamma_1(0) = \int_0^x \frac{d\sigma}{B(\sigma)} \int_0^\sigma B(\tau)\Gamma(\tau)d\tau,\; 0 < x \leqslant 1. \tag{7.57}$$

Докажем, что

$$\Gamma_1(x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1.$$

Предположим, что это не так. Тогда существует точка x_1: $0 < x_1 < 1$, в которой

$$\Gamma_1(x) = 0 = 1 + \int_0^{x_1} \frac{d\sigma}{B(\sigma)} \int_0^\sigma B(\tau)\Gamma_1(\tau)d\tau. \tag{7.58}$$

Но $B(\tau) > 0$, $\Gamma_1(\tau) > 0$ при $0 < \tau < x_1$. Поэтому правая часть (7.58) больше нуля. Полученное противоречие доказывает, что

$$\Gamma_1(x) > 0 \quad \text{при } 0 < x \leqslant 1. \tag{7.59}$$

Поэтому из (7.58) и (7.59) получаем

$$\Gamma_1(x) \geqslant 1, \quad \Gamma_1(x) > 0, \quad 0 < x < 1.$$

Следовательно, по непрерывности и

$$\Gamma_1(1) = y_0 > 0, \quad \Gamma_1'(1) = y_1 > 0. \tag{7.60}$$

При $x \geqslant 1$ рассмотрим задачу

$$\Gamma'' + \frac{\beta}{x}\Gamma' = 0, \quad x > 1, \tag{7.61}$$

$$\Gamma|_{x=1+0} = y_0, \quad \Gamma'|_{x=1+0} = y_1, \tag{7.62}$$

где y_0 и y_1 определены в (7.60).

Разделяя переменные в (7.61) и выполняя интегрирование, с учетом (7.62), получим

$$\Gamma(x) = y_1 + y_0\frac{1}{1-\beta}\left[x^{1-\beta} - 1\right], \quad x > 1. \tag{7.63}$$

Так как по условию леммы $\beta > 1$, то из (7.63) следует, что существует предел

$$\lim_{x\to\infty} \Gamma(x) = y_1 + \frac{y_0}{\beta - 1} = \ell_1 > 0. \tag{7.64}$$

Аналогично рассматривается случай $x < 0$.

$$\Gamma_2''(x) + b(x)\Gamma_2'(x) - \alpha^2\Gamma(x) = 0, \quad -1 < x < 0, \tag{7.65}$$

$$\Gamma_2(0) = 1, \quad \Gamma_2'(0) = 0. \tag{7.66}$$

Умножив уравнение на

$$B(x) = \exp\left\{-\int\limits_x^0 b(\tau)d\tau\right\} > 0,$$

запишем (7.65) в самосопряженном виде

$$(B(x)\Gamma_2'(x))' = \alpha^2 B(x)\Gamma_2(x), \quad -1 < x < 0. \tag{7.67}$$

Интегрируя (7.67) на $(-1, 0)$ с учетом (7.66), получим

$$B(x)\Gamma_2'(x) = -\alpha^2\int\limits_x^0 B(\tau)\Gamma_2(\tau)d\tau, \quad -1 < x < 0, \tag{7.68}$$

$$\Gamma_2(1) - \Gamma_2(x) = -\alpha^2\int\limits_x^0 \frac{d\sigma}{B(\sigma)}\int\limits_\sigma^0 B(\tau)\Gamma_2(\tau)d\tau. \tag{7.69}$$

Запишем (7.69) в следующем виде:

$$\Gamma_2(x) = 1 + \alpha^2\int\limits_x^0 \frac{x}{B(\sigma)}\int\limits_\sigma^0 B(\tau)\Gamma_2(\tau)d\tau, \tag{7.70}$$

и точно также, как и выше, легко докажем, что $\Gamma_2(x) > 0$ при $-1 < x < 0$. Поэтому из (7.68) следует, что $\Gamma_2'(x) < 0$ при $-1 < x < 0$. Следовательно, по непрерывности, из (7.68) и (7.70) следует, что

$$\Gamma_2(-1) = y_2 > 0, \quad \Gamma_2'(x) = y_3 < 0. \tag{7.71}$$

При $x \leqslant -1$ рассмотрим задачу

$$\Gamma'' - \frac{\beta}{x}\Gamma' = 0, \quad x < -1, \tag{7.72}$$

$$\Gamma_{x=1-0} = y_2, \quad \Gamma'_{x=1-0} = y_3. \tag{7.73}$$

Разделяя переменные в (7.72) и интегрируя, с учетом (7.73), получим

$$\Gamma(x) = y_2 + \frac{y_3}{\beta+1} - \frac{y_3}{\beta+1}(-x)^{\beta+1} \quad \text{при } x \leqslant -1. \tag{7.74}$$

Так как по условию леммы $\beta < -1$ при $x < -1$, то из (7.74) следует, что существует предел

$$\lim_{x\to-\infty} \Gamma(x) = y_2 + \frac{y_3}{1+\beta} = \ell_2 > 0. \tag{7.75}$$

Определим теперь начальную функцию $u_0(x)$ в задаче (7.47), (7.48), полагая

$$u_0(x) = \Gamma(x), \tag{7.76}$$

где $\Gamma(x)$ — решение задачи (7.50), (7.51), которая имеет пределы (7.52), (7.75). Из доказанного выше легко следует, что

1. $u_0(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$,
2. $u_0(x) \in W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^1)$,
3. $u_0(x)$ — ограниченная в $\mathbb{R}^1$.

Кроме того, из (7.50) мы получим, что $u_0(x)$ является обобщенным решением (из $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^1)$) уравнения

$$\Gamma'' + b(x)\Gamma' + c(x)\Gamma = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

где $c(x)$ определена в (7.3), а $b(x)$ удовлетворяет (7.49).

Рассмотрим задачу Коши (7.47), (7.48) с начальной функцией (7.76) и коэффициентом $c(x)$ из (7.3) и $b(x)$, удовлетворяющим (7.49). Тогда легко получим, что решение указанной задачи Коши имеет вид

$$u(x,\,t) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{7.77}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = u_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^1.$$

Лемма 7.3 доказана. □

Лемма 7.4. *Пусть* $N = 2$, *тогда существуют*: *коэффициент* $c(x_1,\,x_2)$, *удовлетворяющий условию* (C_1); *ограниченные в* $\mathbb{R}^2$ *коэффициенты* $b_1(x_1,\,x_2)$, $b_2(x_1,\,x_2)$ *такие, что при* $x_1^2+x_2^2 > 1$

$$b_1(x_1,\,x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \quad b_2(x_1,\,x_2) = \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}; \tag{7.78}$$

функция $u_0(x)$, *ограниченная в* $\mathbb{R}^2$ — *для которых решение задачи Коши* (7.47), (7.48) *не стабилизируется ни в одной точке* $(x_1,\,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Рассмотрим в D уравнение (7.47), в котором коэффициент $c(x)$ определен по формуле (7.3), а $b_k(x)$, $k = 1,\,2$ определены при $|x| > 1$ по формуле (7.78), а при $|x| \leqslant 1$ выполнено $b_k(x) = 0$, $x = (x_1, x_2)$.

Будем искать решение уравнения

$$\Delta\Gamma + b_1(x)\Gamma'_{x_1} + b_2(x)\Gamma'_{x_2} + c(x)\Gamma = 0 \tag{7.79}$$

в виде функции

$$\Gamma = \Gamma(r), \quad r = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

такой, что

$$\Gamma(r) > 0, \quad \Gamma' \geqslant 1.$$

При $0 \leqslant r < 1$ рассмотрим задачу

$$\Gamma_1'' + \frac{1}{r}\Gamma_1' - \alpha^2\Gamma_1 = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{7.80}$$

$$\Gamma_1(0) = 1, \quad \Gamma_1'(0) = 0. \tag{7.81}$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\Gamma_1(r) = I_0(\alpha r), \quad 0 < r < 1, \tag{7.82}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 0 (см. [4]). Так как $c(x) = 0$ при $r > 1$, и при этом

$$b_k(x) = \frac{x_k}{r^2}, \quad k = 1,\, 2,$$

$$b_k \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} = \frac{x_k^2}{r^2} \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r},$$

то уравнение (7.79) приобретает вид

$$\Gamma_2'' + \frac{2}{r}\Gamma_2' = 0 \quad \text{при } r > 1. \tag{7.83}$$

При $r = 1$ потребуем выполнения «условий склейки»

$$\Gamma_2|_{r=1} = \Gamma_1(1), \quad \Gamma_2'|_{r=1} = \Gamma_1(1), \tag{7.84}$$

где $\Gamma_1(r)$ — функция (7.82).

Решение уравнения (7.83) имеет вид

$$\Gamma_2(r) = \frac{C_1}{r} + C_2, \tag{7.85}$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из «условий склейки» (7.84). Вычисляя C_1 и C_2, получим

$$\Gamma_2(r) = -\alpha I_1(\alpha)\frac{1}{r} + \alpha I_1(\alpha) + I_0(\alpha). \tag{7.86}$$

Оценим начальную функцию $u_0(x)$ в задаче Коши (7.47), (7.48) по формулам

$$u_0(x) = \begin{cases} \Gamma_1(|x|) & \text{при } |x| \leqslant 1, \text{ где } \Gamma_1(|x|) \text{ — функция (7.82)}, \\ \Gamma_2(|x|) & \text{при } |x| \geqslant 1, \text{ где } \Gamma_2(|x|) \text{ — функция (7.86)}. \end{cases} \tag{7.87}$$

Очевидно, что функция (7.87) является ограниченной в $\mathbb{R}^2$, принадлежит классу $W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^2)$ и является обобщенным решением из $W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^2)$ уравнения (7.79). Тогда решение задачи Коши (7.47), (7.48) с соответствующими коэффициентами $c(x_1,\, x_2)$, $b_1(x_1,\, x_2)$, $b_2(x_1,\, x_2)$ имеет вид

$$u(x_1,\, x_2,\, t) = u_0(x_1,\, x_2) > 0, \quad t > 0.$$

Поэтому

$$\lim_{t\to\infty} u(x_1,\, x_2,\, t) = u_0(x_1,\, x_2) \neq 0.$$

Лемма 7.4 доказана. □

Лемма 7.5. *При* $N \geqslant 3$ *существуют коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_2) *теоремы* 6.1, *и ограниченная в* $\mathbb{R}^N$ *начальная функция* $u_0(x)$, *для которых решение задачи* (7.1), (7.2) *не имеет равномерно во всем* $\mathbb{R}^N$ *предела* (7.14).

Доказательство. В полупространстве $\overline{D}$ рассмотрим задачу (7.1), (7.2), где $c(x)$ определен по формуле

$$c(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при } |x| > 1, \\ 0 & \text{при } |x| \leqslant 1, \end{cases} \tag{7.88}$$

а начальную функцию $u_0(x)$ определим равенством

$$u_0(x) \equiv 1.$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,\, t) = 1 - u(x,\, t). \tag{7.89}$$

Для $v(x,\, t)$ получим

$$\Delta v - c(x)u = \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{в } D, \tag{7.90}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.91}$$

Решение задачи (7.90), (7.91) имеет вид [66, с. 264]

$$v(x,\,t) = -\int\limits_0^t \frac{d\tau}{[4\pi(t-\tau)]^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} c(\xi)u(\xi,\,\tau)\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}d\xi =$$

$$= \alpha^2 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{[4\pi(t-\tau)]^{N/2}} \int\limits_{|\xi|\geqslant 1} \frac{u(\xi,\,\tau)}{|\xi|^2}\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}d\xi. \tag{7.92}$$

Докажем, что при каждом $t > 0$ существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} v(x,\,t) = 0. \tag{7.93}$$

Фиксируем $\forall T > 0$, и пусть $0 < t \leqslant T$. Разобъем интеграл (7.92) на два интеграла

$$v(x,\,t) = \frac{\alpha^2}{(2\sqrt{\pi})^N}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{[4\pi(t-\tau)]^{N/2}} \int\limits_{1\leqslant|\xi|\leqslant R} \frac{u(\xi,\,\tau)}{|\xi|^2}\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}d\xi +$$

$$+\frac{\alpha^2}{(2\sqrt{\pi})^N}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{[4\pi(t-\tau)]^{N/2}} \int\limits_{|\xi|\geqslant R} \frac{u(\xi,\,\tau)}{|\xi|^2}\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}d\xi = V_1 + V_2. \tag{7.94}$$

В V_2 применим оценки

$$|\xi|^2 \geqslant R^2, \quad |u(x,\,t)| \leqslant M, \quad x\in\mathbb{R}^N, \quad 0\leqslant t\leqslant T,$$

при этом получим

$$|V_2| \leqslant \frac{C}{R^2}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{N/2}} \int\limits_{|\xi|\geqslant R} \exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}d\xi = \frac{C}{R^2}\int\limits_0^t d\tau = \frac{Ct}{R^2} \leqslant \frac{CT}{R^2}. \tag{7.95}$$

Для $\forall T > 0$ выберем $R > 0$ так, чтобы

$$|V_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7.96}$$

Для этого достаточно зафиксировать

$$R = \sqrt{\frac{2CT}{\varepsilon}}.$$

Устремим $|x|\to\infty$ в $V_1(x,\,t)$ и учтем, что при $1 < |\xi| < R$

$$\lim_{|x|\to\infty}\exp\left\{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\} = 0, \quad 1\leqslant|\xi|\leqslant R,$$

и получим, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} V_1(x,\,t) = 0 \tag{7.97}$$

при каждом t: $0 < t \leqslant T$.

Из (7.96) и (7.97) вытекает, что существует предел (7.93) при каждом t: $0 < t \leqslant T$, $T > 0$. Следовательно, из (7.83) и (7.89) получим, что существует предел

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,\,t) = 1. \tag{7.98}$$

К функции $u(x,\,t)$ применим теорему 6.1 и получим, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0 \tag{7.99}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Как и выше, отсюда вытекает, что предел (7.99) не может быть равномерным по x во всем $\mathbb{R}^N$. Лемма 7.5 доказана. □

Лемма 7.6. *При $N \geqslant 3$ существуют: ограниченные в $\mathbb{R}^N$ коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ такие, что*

$$b_i(x) = B\frac{x_i}{|x|^{2-\varepsilon}}, \quad 0 < \varepsilon < 1,\ B > 0,\ |x| \geqslant 1; \tag{7.100}$$

коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_2); ограниченная в $\mathbb{R}^N$ функция $u_0(x)$ — для которых решение соответствующей задачи Коши (7.47), (7.48) *не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.*

Доказательство. В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим уравнение

$$\Delta\Gamma + b(x)\nabla\Gamma + c(x)\Gamma = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{7.101}$$

в котором $c(x)$ определен по формуле (7.88), а коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ определены по формулам (7.100) при $|x| > 1$, и положим

$$b_k(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant 1, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Учитывая формулы (7.100) и то, что

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r}\Gamma',$$

$$\sum_{k=1}^{N} b_k(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_k} = B\sum_{k=1}^{N}\frac{x_k^2}{r^{3-\varepsilon}}\Gamma' = \frac{B}{r^{1-\varepsilon}},$$

перепишем уравнение (7.101) в следующем виде:

$$\Gamma'' + \left(\frac{N-1}{r} + \frac{B}{r^{1-\varepsilon}}\right)\Gamma' - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma = 0, \quad r > 1. \tag{7.102}$$

Будем искать решение уравнения (7.102), удовлетворяющее условиям

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma'(1) = 0. \tag{7.103}$$

В уравнении (7.102) сделаем замену

$$\Gamma(r) = v(r)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_1^r p(\tau)d\tau\right\}, \tag{7.104}$$

где

$$p(\tau) = \frac{N-1}{\tau} + \frac{B}{\tau^{1-\varepsilon}}.$$

При этом для функции $v(r)$ получим уравнение

$$v'' - v\left(\frac{\alpha^2}{r^2} + \frac{p'(r)}{2} + \frac{p^2(r)}{4}\right) = 0, \quad r > 1,$$

и условия

$$v|_{r=1} = 1, \quad v'(1) = \frac{p(1)}{2} = \frac{1}{2}(N - 1 + B).$$

Проводя вычисления, окончательно получим

$$v'' - \frac{v}{r^{2-\varepsilon}}\left[\frac{m^2}{4} + \frac{q}{r^\varepsilon} + \frac{C_2}{r^{2\varepsilon}}\right] = 0, \quad r > 1 \tag{7.105}$$

$$v(1) = 1, \quad v'(1) = \frac{N-1+B}{2}, \tag{7.106}$$

где

$$q = \frac{m}{2}(N + \varepsilon - 2), \quad C_2 = \alpha^2 - \frac{N-1}{2} + \frac{(N-1)^2}{4}.$$

Введем обозначение

$$Q(r) = \left(\frac{m^2}{4} + \frac{q}{r^\varepsilon} + \frac{C_2}{r^{2\varepsilon}}\right)r^{-2+2\varepsilon} \tag{7.107}$$

и перепишем (7.105), (7.106) в следующем виде:

$$v''(r) - v(r)Q(r) = 0, \quad r > 1, \tag{7.108}$$

$$v|_{r=1} = 1, \quad v'|_{r=1} = \frac{p(1)}{2}. \tag{7.109}$$

Рассмотрим функцию

$$\beta(r) = \frac{1}{8}\frac{Q''(r)}{Q^{3/2}(r)} - \frac{5}{32}\frac{(Q'(r))^2}{Q^{5/2}(r)}. \tag{7.110}$$

Легко видеть, что

1. $\int\limits_1^\infty |\beta(r)|dr < \infty$;
2. $Q(r) > 0$ при $r > 1$;
3. $Q''(r)$ непрерывна при $r > 1$;
4. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{Q'(r)}{Q^{3/2}(r)} = 0$.

Тогда, в силу известной теоремы [60] об асимптотике Грина—Лиувилля решений уравнения (7.108), уравнение (7.108) имеет два линейно независимых решения $y_1(r)$ и $y_2(r)$, имеющих при $r \to \infty$ асимптотику

$$y_1(r) \sim [Q(r)]^{-1/4} \exp\left\{\int\limits_1^r \sqrt{Q(\tau)}d\tau\right\}[1 + \varepsilon_1(r)], \tag{7.111}$$

$$y_2(r) \sim [Q(r)]^{-1/2} \exp\left\{-\int\limits_1^r \sqrt{Q(\tau)}d\tau\right\}[1 + \varepsilon_2(r)], \tag{7.112}$$

где

$$\lim_{r\to\infty} \varepsilon_i(r) = 0, \quad i = 1,\, 2.$$

Эту асимптотику можно дифференцировать:

$$y'_{1,\,2}(r) \sim \pm\,[Q(r)]^{-1/4} \exp\left\{\pm\int\limits_1^r \sqrt{Q(\tau)}d\tau\right\}[1 + \varepsilon_{3,\,4}(r)], \tag{7.113}$$

и, кроме того, решение $y_1(r)$ монотонно возрастает при $r \to \infty$ и

$$\lim_{r\to\infty} y_1(r) = +\infty, \tag{7.114}$$

а решение $y_2(r)$ монотонно убывает и

$$\lim_{r\to\infty} y_2(r) = 0. \tag{7.115}$$

С помощью линейно независимых решений $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения (7.108) построим решение задачи (7.108), (7.109) по формулам

$$v(r) = C_1 y_1(r) + C_2 y_2(r), \tag{7.116}$$

где постоянные C_1, C_2 определяются из условий (7.109)

$$C_1 y_1(1) + C_2 y_2(1) = 1, \tag{7.117}$$

$$C_1 y'_1(1) + C_2 y'_2(1) = \frac{p(1)}{2}. \tag{7.118}$$

Учитывая формулы (7.111)–(7.113), найдем определитель Вронского:

$$W(r) = W(1) = -2,$$

и получим, что решение задачи (7.108), (7.109) имеет вид (7.116), где

$$C_1 = \frac{y'_1(1) - y'_2(1)\frac{p(1)}{2}}{-2} > 0,$$

ибо $y_2(1) > 0$, $y_2'(1) < 0$, $p(1) > 0$. Следовательно,

$$v(r) \sim C_1 \sqrt{\frac{2}{B}}\, r^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \exp\left\{\frac{B}{2\varepsilon}\,(r^{\varepsilon} - 1)\right\} (1 + \varepsilon_5(r)).$$

Учитывая формулу (7.104), получим, что решение задачи (7.102), (7.103) имеет асимптотику

$$\Gamma(r) = v(r) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^r \left(\frac{N-1}{\tau} + \frac{B}{\tau^{1-\varepsilon}}\right) d\tau\right\} =$$

$$= v(r)\frac{1}{r^{(N-1)/2}} \exp\left\{-\frac{m}{2\varepsilon}[r^{\varepsilon} - 1]\right\} = \frac{C}{r^{(N+\varepsilon-2)/2}}(1 + \overline{O}(1)). \tag{7.119}$$

Следовательно, решение задачи (7.102), (7.103) ограничено при $r \geqslant 1$.

Определим начальную функцию $u_0(x)$ в задаче Коши (7.47), (7.48), полагая

$$u_0(x) = \begin{cases} \Gamma(|x|) & \text{при } |x| > 1, \\ 1 & \text{при } |x| \leqslant 1, \end{cases} \tag{7.120}$$

где $\Gamma(x)$ — обобщенное решение уравнения (7.101) с асимптотикой (7.119). Ясно, что $u_0 = 1$ является решением уравнения (7.47) при $|x| < 1$, ибо $c(x) = 1$ в этом случае. Учитывая, что решение задачи Коши (7.47), (7.48) в этом случае имеет вид

$$u(x,\, t) = u_0(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.121}$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = u_0(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Лемма 7.6 доказана. □

Лемма 7.7. *Пусть $N \geqslant 3$ и коэффициент $c(x)$ имеет вид*

$$c(x) = \begin{cases} -\alpha^2/|x|^{2+\varepsilon} & \textit{при } |x| > 1,\ 0 < \varepsilon \\ 0 & \textit{при } |x| \leqslant 1, \end{cases} \tag{7.122}$$

то существует ограниченная и непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция $u_0(x)$, для которой решение соответствующей задачи Коши (7.1), (7.2) *не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.*

Доказательство. В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим уравнение

$$\Delta u + c_1(x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{7.123}$$

где $c_1(x)$ определено в (7.122). При $|x| = r > 1$ рассмотрим задачу

$$\Gamma'' + \frac{N-1}{r}\Gamma' - \frac{\alpha^2}{r^{2+\varepsilon}}\Gamma = 0, \quad r > 1, \tag{7.124}$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma'(1) = 0. \tag{7.125}$$

В уравнении (7.124) сделаем замену переменной

$$r = t^{1/(N-2)}$$

и для функции

$$\Gamma_1(t) = \Gamma(t^{1/(N-2)})$$

получим задачу

$$\Gamma_1'' + \frac{2\Gamma_1}{2} - \frac{\alpha^2}{(N-2)t^{2+\varepsilon/(N-2)}}\Gamma_1 = 0, \quad t > 1, \tag{7.126}$$

$$\Gamma_1|_{t=1} = 1, \quad \Gamma_1'|_{t=1} = 0. \tag{7.127}$$

После замены функции $\Gamma_1(t)$ по формуле

$$\Gamma_1(t) = \frac{W(t)}{t}$$

получим для $W(t)$ задачу

$$W'' - \frac{\alpha^2}{t^{2+\varepsilon/(N-2)}} W = 0, \quad t > 0,$$
$$W|_{t=1} = 1, \quad W'|_{t=1} = 1.$$

Очевидно, что

$$\int\limits_1^\infty \frac{tdt}{t^{2+\varepsilon/(N-2)}} < \infty.$$

Следовательно, выполнены условия известной теоремы [3, с. 135]:

Теорема 7.1. *Если для коэффициента $Q(t)$ уравнения*

$$W''(t) - Q(t)W(t) = 0,\ t \geqslant t_0$$

справедливо

$$\int\limits_{t_0}^\infty t|Q(t)|dt < \infty,$$

то для произвольного нетривиального его решения существует предел

$$W(t) \to d_0 + d_1 t \quad \textit{при} \quad t \to \infty,$$

где $d_0^2 + d_1^2 \neq 0$.

Следовательно, имеем

$$\Gamma(r) \sim d_1 + \frac{d_0}{r^{N-2}}, \quad r \to \infty,$$

и потому существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \Gamma(r) = d_1.$$

Рассмотрим задачу Коши (7.1), (7.2), где $c(x)$ определен по формуле (7.122), а начальную функцию $u_0(x)$ определим равенством

$$u_0(x) = \begin{cases} \Gamma(|x|) & \text{при } |x| > 1, \\ 1 & \text{при } |x| \leqslant 1, \end{cases} \tag{7.128}$$

где $\Gamma(|x|)$ — решение задачи (7.124), (7.125).

Так как $c(x) = 0$ при $|x| \leqslant 1$, то $u_0(x)$ является решением уравнения (7.1), кроме того, функция (7.128) очевидно является непрерывной, ограниченной в $\mathbb{R}^N$, $u_0(x) \in W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$, и $u_0(x)$ является обобщенным решением уравнения (7.123).

Следовательно, решение соответствующей задачи Коши (7.1), (7.2) имеет вид

$$u(x,\,t) = u_0(x),$$

и существует ненулевой предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Лемма 7.7 доказана. □

8. О решениях эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^N$ со степенным ростом на бесконечности

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$L(x)\Gamma + (b(x), \nabla\Gamma) + c(x)\Gamma = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{8.1}$$

где

$$L(x)\Gamma = \sum_{i,\,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_k}\right), \quad b(x)\cdot\nabla\Gamma = \sum_{i=1}^N b_i(x)\frac{\partial\Gamma}{\partial x_i}. \tag{8.2}$$

Будем предполагать, что коэффициенты (8.1) ограничены и измеримы в $\mathbb{R}^N$,

$$a_{ik} = a_{ki}, \quad i = 1,\ldots,N,$$

выполнено условие равномерной эллиптичности (1.3) и условия (B_2) для $b_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Будем считать, что

$$c(x) \leqslant c_\alpha(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| \leqslant 1. \end{cases} \tag{8.3}$$

Под решением уравнения (8.1) будем понимать обобщенное решение в стандартном определении [7].

Определение. Функция $\Gamma(x)$ называется *обобщенным решением уравнения* (8.1), если $\Gamma(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^N) \cap L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — произвольная ограничивающая подобласть в $\mathbb{R}^N$, и имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[-\sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varphi \left(\sum_{k=1}^{N} b_k(x) \frac{\partial \Gamma}{\partial x_k} + c(x)\Gamma \right) \right] dx = 0 \tag{8.4}$$

для любой пробной функции $\varphi(x) \in W_2^1(\Omega)$, имеющей компактный носитель в $\mathbb{R}^N$.

Из теоремы о регулярности решений эллиптических уравнений второго порядка [7, 47] следует, что обобщенное решение $\Gamma(x) \in W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ уравнения (8.1) является непрерывной функцией, более того, $\Gamma(x)$ удовлетворяет условию Гельдера равномерно в каждой ограниченной подобласти Ω в $\mathbb{R}^N$.

Мы докажем, что при $\alpha > 0$ существует положительное решение $\Gamma_\alpha(x)$ уравнения

$$L(x)\Gamma_\alpha + (b(x), \nabla\Gamma_\alpha) + c_\alpha(x)\Gamma_\alpha = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{8.5}$$

где $c_\alpha(x)$ — функция из (8.3), и что любое положительное решение этого уравнения растет на бесконечности не быстрее некоторой степени $|x|^\lambda$, где

$$\lambda = \lambda(N,\, \lambda_0^2,\, \lambda_1^2,\, \alpha) > 0. \tag{8.6}$$

Лемма 8.1.

1. *Для каждого* $\alpha > 0$ *существует положительное решение* $\Gamma_\alpha(x)$ *уравнения* (8.5).
2. *Для любого положительного решения* $\Gamma_\alpha(x)$ *уравнения* (8.5) *существует постоянная* $\lambda = \lambda(N,\, \lambda_0^2,\, \lambda_1^2,\, \alpha) > 0$ *такая, что*

$$\Gamma_\alpha(x) < C(1 + |x|)^\lambda, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{8.7}$$

Доказательство. В шаре $\overline{B}_R = \{|x| \leqslant R\}$, $R > 1$ рассмотрим задачу

$$L(x)\Gamma_R + (b(x), \nabla\Gamma_R) + c_\alpha(x)\Gamma_R = 0 \quad \text{в } B_R, \tag{8.8}$$

$$\Gamma_R\big|_{|x|=R} = 1. \tag{8.9}$$

Как следует из [7, с. 196], задача (8.8), (8.9) имеет единственное решение

$$\Gamma(x) \in W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N) \cap C^0(\overline{B}_R), \quad \Gamma_R(x) - 1 \in \mathring{W}_2^1(B_R).$$

Докажем, что $\Gamma_R(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \Gamma_R(x) < 1. \tag{8.10}$$

Сначала установим, что $\Gamma_R(x) \leqslant 1$ в $\overline{B}_R$. По условию $\Gamma_R(x) - 1 \in \mathring{W}_2^1(B_R)$, поэтому

$$(\Gamma_R - 1)^+ = \max(\Gamma_R,\, 0) \in \mathring{W}_2^1(B_R).$$

В силу слабого принципа максимума [7, с. 173]

$$\sup_{\partial B_R} \Gamma_R = 1 \geqslant \sup_{B_R} \Gamma_R \geqslant \Gamma_R(x),$$

т. е. $\Gamma_R(x) \leqslant 1$ в B_R.

Докажем, что $\Gamma_R < 1$. Пусть это не так, тогда найдется такая точка $x_0 \in B_R$, что $\Gamma_R(x_0) = 1$. Но $\Gamma_R(x)$ — непрерывная функция, следовательно, найдется окрестность $B_\rho^{x_0}$ точки x_0 такая, что $\overline{B_\rho^{x_0}} \subset B_R$ и

$$1 = \sup_{B_\rho^{x_0}} \Gamma_R(x) \leqslant \sup_{B_R} \Gamma_R(x) \leqslant 1,$$

поэтому

$$\sup_{B_\rho^{x_0}} \Gamma_R(x) = \sup_{B_R} \Gamma_R(x).$$

Тогда по усиленному принципу максимума [7, с. 190] $\Gamma_R(x) = \mathrm{const}$ в B_R. Но $\Gamma_R(x)$ — решение уравнения (8.8), следовательно, $c_\alpha(x) = 0$. Получили противоречие. Итак, доказано, что

$$\Gamma_R(x) < 1 \quad \text{в } B_R.$$

Докажем, что $\Gamma_R(x) \geqslant 0$. По условию

$$\Gamma_R(x) - 1 \in \mathring{W}_2^1(B_R),$$
$$\Gamma_R^+(x)|_{\partial B_R} = 1, \quad \Gamma_R^-(x)|_{\partial B_R} = 0.$$

Поэтому по слабому принципу максимума [7, с. 199]

$$\Gamma_R(x) \geqslant \inf_{\partial B_R} \Gamma_R,$$

и так как $\Gamma_R(x)$ — решение (8.8), (8.9), то

$$\inf_{B_R} \Gamma_R \geqslant \Gamma_R^-|_{\partial B_R} = 0,$$

поэтому $\Gamma_R(x) \geqslant 0$.

Докажем, что $\Gamma_R(x) > 0$ в B_R. Пусть это не так, тогда найдется точка $x_0 \in B_R$ такая, что $\Gamma_R(x_0) = 0$. Рассмотрим шар $B_\rho^{x_0}$ с центром в этой точке, целиком содержащийся в B_R: $\overline{B_\rho^{x_0}} \subset B_R$. Тогда по неравенству Харнака [7, с. 190]

$$0 = \inf_{B_{\rho/2}^{x_0}} \Gamma_R(x) \geqslant C \sup_{B_{\rho/2}^{x_0}} \Gamma_R(x), \tag{8.11}$$

с постоянной C, не зависящей от $\Gamma_R(x)$. Следовательно,

$$\sup_{B_{\rho/2}^{x_0}} \Gamma_R(x) = 0,$$

поэтому $\Gamma_R(x) = 0$ всюду в шаре $B_{\rho/2}^{x_0}$. Докажем, что $\Gamma_R(x) \equiv 0$ в B_R. Любую точку $x_1 \in B_R$ такую, что $x_1 \neq x_0$, соединим конечной цепью пересекающихся шаров, вписанных в B_R. После применения (8.11) получим, что $\Gamma_R(x) = 0$. По условию, $\Gamma_R(x) = 1$ на ∂B_R и, как отмечено выше, $\Gamma_R(x)$ непрерывна, следовательно, граничное условие (8.9) не может выполняться для решения $\Gamma_R(x)$. Полученное противоречие доказывает, что $\Gamma_R(x) > 0$ в B_R.

Рассмотрим при $R > 1$ семейство функций

$$\tilde{\Gamma}_R(x) = \frac{\Gamma_R(x)}{\Gamma_R(x_0)}, \tag{8.12}$$

где x_0 — некоторая точка: $|x| < 1$. При этом мы очевидно имеем, что

$$\tilde{\Gamma}_R(x_0) = 1, \quad |x_0| < 1. \tag{8.13}$$

Далее мы напомним, а затем уточним неравенство Харнака [7, с. 190].

Теорема 8.1 (Неравенство Харнака). *Пусть $u(x) \geqslant 0$ — решение уравнения*

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u = 0, \quad x \in \Omega, \tag{8.14}$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, $b_1(x), \ldots, b_N(x)$, $c(x)$ — ограниченные измеримые функции. Пусть выполнено условие эллиптичности (1.3)*, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^N$. Тогда*

$$u(x) \leqslant Cu(y), \tag{8.15}$$

для любых точек $x, y \in \Omega^1$, *где* $\overline{\Omega^1} \subset \Omega$. *Постоянная* C *в* (8.15) *не зависит от* $u(x)$, *а зависит от* Ω, Ω^1, λ_0^2, λ_1^2 *и от* $\max\limits_{\overline{\Omega}} \left(\sum\limits_{i,k=1}^{N} |a_{ik}(x)| + \sum\limits_{k=1}^{N} |b_k(x)| + |c(x)| \right)$.

Уточним неравенство (8.15) для решений уравнения (8.5). Рассмотрим область

$$\Omega_R = \left\{ \frac{R}{4} < |x| < 4R \right\}.$$

Теорема 8.2 (послойное неравенство Харнака). *Для неотрицательных* $\Gamma(x)$ *решений уравнения* (8.5) *имеет место неравенство*

$$\Gamma(x) \leqslant C\Gamma(y), \quad \text{где } R/2 \leqslant |x| \leqslant 2R,\ R/2 \leqslant |y| \leqslant 2R, \tag{8.16}$$

с постоянной C, *не зависящей от* R.

Доказательство. Сделаем в (8.5) замену переменной $x_i = R\xi_i$, $i = 1, \ldots, N$ и получим в слое $\Omega_1 = \{1/4 < |\xi| < 4\}$ уравнение:

$$\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(a_{ik}(R\xi) \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_k} \right) + \sum_{k=1}^{N} R b_k(R\xi) \cdot \nabla\Gamma + R^2 c_\alpha(R\xi)\Gamma = 0. \tag{8.17}$$

Учитывая условие (B_2) и формулу (8.3), получим

$$R^2 c_\alpha(R\xi) = -\frac{\alpha^2}{|x|^2} \leqslant -\frac{\alpha^2}{16^2},$$
$$|Rb_k(R\xi)| = |R(\xi)||b_k(R\xi)|\frac{1}{|\xi|} \leqslant \frac{B}{|\xi|} \leqslant 4B,$$
$$\lambda_0^2|y|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(R\xi) y_i y_k \leqslant \lambda_1^2 |y|^2,$$

и что максимум модулей коэффициентов уравнения (8.17) не зависит от R в кольце $1/4 \leqslant |y| \leqslant 4$. В силу неравенства (8.15) имеем

$$\Gamma(\xi) \leqslant C\Gamma(\eta), \quad 1/2 \leqslant |\xi| \leqslant 2,\ 1/2 \leqslant |\eta| \leqslant 2.$$

Переходя к переменным x, y получим (8.16) с постоянной C, не зависящей от R. Теорема 8.2 доказана. □

Докажем, что семейство функций (8.12) является компактным по отношению к равномерной сходимости в шаре $\overline{B}_\rho$, где $\rho \leqslant R/4$. Сначала проверим условие теоремы Арцела [39]. Так как $\tilde{\Gamma}_R(x) > 0$, то воспользуемся неравенством Харнака (8.15)

$$\sup_{B_{2\rho}} \tilde{\Gamma}_R(x) \leqslant C(\rho, N, \lambda_0^2, \lambda_1^2) \inf_{B_{2\rho}} \tilde{\Gamma}_R(x) \leqslant C(\rho, N, \lambda_0^2, \lambda_1^2),$$

т. е. семейство $\{\tilde{\Gamma}_R(x)\}$ равномерно по R ограничено в любом шаре $\overline{B}_{2\rho} \subset B_R$. Далее, согласно априорной оценке нормы Гельдера [78, 85]

$$\left|\tilde{\Gamma}_R(x) - \tilde{\Gamma}_R(y)\right| \leqslant C(N, \lambda_0^2, \lambda_1^2) \max_{B_R} \left|\tilde{\Gamma}_R(x)\right| |x-y|^\gamma,$$

для любых $x, y \in \overline{B}_{2\rho} \subset B_R$, $0 < \gamma < 1$. Следовательно, по теореме Арцела [39] существует подпоследовательность $\tilde{\Gamma}_{Rk}(x)$ равномерно по $x \in B_{2\rho}$ сходящаяся к $\Gamma_\rho(x)$, т. е.

$$\tilde{\Gamma}_{Rk} \underset{R_k \to \infty}{\overset{B_{2\rho}}{\rightrightarrows}} \Gamma_\rho(x). \tag{8.18}$$

Покажем, что эта же подпоследовательность сходится к некоторой функции $\Gamma_\rho(x)$ в норме $W_2^1(B_\rho)$.

Выполнено неравенство Каччиополи [45]

$$\int\limits_{B_\rho} |\nabla\tilde{\Gamma}_{Rk}(x)|^2 dx \leqslant c(N, \rho) \int\limits_{B_{2\rho}} \tilde{\Gamma}_{Rk}^2(x) dx. \tag{8.19}$$

Из этого неравенства следует, что выделенная нами подпоследовательность $\Gamma_{Rk}(x)$, фундаментальная в $L_2(B_{2\rho})$, является фундаментальной и в норме $W_2^1(B_{2\rho})$. Очевидно, что предельная функция $\tilde\Gamma_\rho(x)$ удовлетворяет уравнению

$$L(x)\tilde\Gamma_\rho + b(x)\cdot\nabla\tilde\Gamma_\rho + c_\alpha(x)\tilde\Gamma_\rho = 0, \quad x \in B_\rho, \tag{8.20}$$

в смысле $W_2^1(B_\rho)$ для любой $\varphi(x) \in \mathring{W}_2^1(B_\rho)$.

Рассмотрим монотонно возрастающую последовательность

$$a_n \to \infty, \quad n \to \infty, \quad a_{n+1} > a_n.$$

Фиксируем $a_1 > 0$ и рассмотрим семейство $\tilde\Gamma_{Rk}(x)$ для $R_k > 4a_1$.

Выделим из $\{\tilde\Gamma_{Rk}(x)\}$ подпоследовательность $\{\tilde\Gamma_{Rk_n^1}(x)\}$, которая сходится в метрике $W_2^1(B_{a_1})$ к функции $\tilde\Gamma_{a_1}(x)$ в шаре B_{a_1}. Далее рассмотрим последовательность $\tilde\Gamma_{Rk_n^1}(x)$ на шаре B_{a_2}, где

$$R_{k_n^1} > 4a_2, \quad a_2 > a_1.$$

Из этой последовательности выделим подпоследовательность $\tilde\Gamma_{Rk_n^2}(x)$, сходящуюся к функции $\tilde\Gamma_{a_2}(x)$ в шаре B_{a_2}, $a_2 > a_1$ по норме $W_2^1(B_{a_2})$, и т. д.

Рассмотрим последовательность $\tilde\Gamma_{Rk_n^{m-1}}$ на шаре B_{a_m}, где

$$R_{k_n^{m-1}} > 4a_m.$$

Из этой последовательности выделим подпоследовательность $\tilde\Gamma_{Rk_n^m}$, сходящуюся к $\tilde\Gamma_{a_m}(x)$ по норме $W_2^1(B_{a_m})$. Рассмотрим диагональную последовательность $\tilde\Gamma_{Rk_n^n}(x)$. Она является сходящейся к функции $\tilde\Gamma(x)$ в норме $W_2^1(B_s)$ при $\forall\, s > 0$,

$$R_{k_n^n} > 4s.$$

Ясно, что функция $\tilde\Gamma(x)$ совпадает с $\tilde\Gamma_{a_1}(x), \ldots, \tilde\Gamma_{a_n}(x)$ в соответствующих шарах

$$B_{a_1}, B_{a_1}, \ldots, B_{a_{m_j}}, \ldots$$

И, кроме того, предельная функция $\tilde\Gamma(x)$ удовлетворяет (в смысле $W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^N)$) уравнению (8.5) на пробных функциях с компактным носителем в $\mathbb{R}^N$.

Докажем утверждение 2 леммы (8.1). Рассмотрим последовательность колец

$$S_k = \left\{x : \, 2^k \leqslant |x| \leqslant 2^{k+1}, \, k = 1, \, 2, \, \ldots\right\}.$$

Пусть

$$M_k = \sup_{S_k} \tilde\Gamma_\alpha(x),$$

где $\tilde\Gamma_\alpha(x)$ — решение уравнения (8.5), с условием $\Gamma_\alpha(x_0) = 1$, $|x_0| < 1$. Докажем, что найдется постоянная $B_1 > 0$, не зависящая от k, такая, что

$$M_{k+1} \leqslant B_1 M_k. \tag{8.21}$$

Рассмотрим кольцевую область

$$\Omega_k = \left\{x : \, 2^{k-1} \leqslant |x| \leqslant 2^{k+3}\right\},$$

которая включает в себя области S_k и S_{k+1}. В этой области найдутся точки x_0, y_0 такие, что в силу неравенства Харнака (8.15):

$$M_{k+1} = \tilde\Gamma_\alpha(x_0) \leqslant B_1 \tilde\Gamma_\alpha(y_0) = B_1 \inf_{S_k} \tilde\Gamma_\alpha(x) \leqslant B_1 \sup_{S_k} \tilde\Gamma_\alpha = B_1 M_k. \tag{8.22}$$

Постоянная B_1 в (8.22) от номера k не зависит. Это свойство постоянной B_1 вытекает из послойного неравенства Харнака (8.16).

Пусть $\tilde\Gamma_\alpha(x)$ — любое положительное решение уравнения (8.5), удовлетворяющее (8.12). Тогда, итерируя неравенство (8.21), через k шагов получим неравенство

$$M_{k+1} \leqslant B_1 M_1. \tag{8.23}$$

Для любого $x \in \mathbb{R}^N : |x| \geqslant 1$ существует k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ для которого
$$2^k \leqslant |x| \leqslant 2^{k+1}.$$
Так как
$$k \leqslant \log_2 |x| \leqslant k+1,$$
то после элементарных преобразований получим
$$\Gamma(x) \leqslant M_{k+1} \leqslant B_1^k M_1 = 2^{k \log_2 B_1} M_1 \leqslant$$
$$\leqslant 2^{\log_2 |x| \cdot \log_2 B_1} M_1 = 2^{\log_2 |x|^{\log_2 B_1}} M_1 = M_1(1+|x|)^\lambda, \tag{8.24}$$
где $\lambda = \log_2 B_1 > 0$. Лемма 8.1 доказана. □

Лемма 8.2. *Рассмотрим задачу*
$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + \alpha^2 q_1(x) u = 0, \quad |x| < 1, \tag{8.25}$$
$$u|_{|x|=1} = M > 0, \tag{8.26}$$
где $L(x)$ определено в (8.2),
$$q_1(x) \leqslant c_0 < 0, \tag{8.27}$$
$\alpha \geqslant n_0 > 2$. *Тогда существует постоянная $k = k(N, \lambda_1^2, \lambda_0^2, c_0) > 0$ такая, что*
$$u(0) < M e^{-\alpha k}. \tag{8.28}$$

Доказательство. В уравнении (8.25) сделаем замену переменной
$$x_i = \frac{y_i}{2\alpha}, \quad i = 1, \ldots, N,$$
и получим, после сокращения на α^2, в шаре $B_{2\alpha} = \{|y| \leqslant 2\alpha\}$ задачу
$$\sum_{i,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\left(\frac{y}{2\alpha}\right)\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i}\right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\alpha} b_i\left(\frac{y}{2\alpha}\right)\frac{\partial \Gamma}{\partial y_i} + q\left(\frac{y}{2\alpha}\right)\Gamma = 0, \quad |y| < 2\alpha, \tag{8.29}$$
$$\Gamma|_{|y|=2\alpha} = M, \tag{8.30}$$
где
$$\Gamma = \Gamma(y) = u\left(\frac{y}{2\alpha}\right).$$

В силу условий эллиптичности (1.3), имеем при $|y| < 2\alpha$ неравенства
$$\left|a_{ik}\left(\frac{y}{2\alpha}\right)\right| \leqslant \lambda_1^2,$$
$$\left|\frac{1}{2\alpha} b_i\left(\frac{y}{\alpha}\right)\right| \leqslant \frac{B}{2\alpha} \leqslant \frac{B}{2n_0} \leqslant B, \quad q\left(\frac{y}{2\alpha}\right) \leqslant c_0 < 0.$$
Таким образом, верхние грани коэффициентов уравнения (8.29) не зависят от α.

Рассмотрим сферу
$$|y| = 2\alpha - 1$$
и впишем в $B_{2\alpha}$ шар B_1^y радиуса 1 с центром в любой точке y сферы $|y| = 2\alpha - 1$. В силу леммы 5.1 получим, что существует постоянная δ, $0 < \delta < 1$, для которой в центре y шара B_1^y справедливо неравенство
$$\Gamma|_{|y|=2\alpha-1} < M(1-\delta). \tag{8.31}$$
Из произвольности y следует, что (8.31) имеет место для всех точек сферы $|y| = 2\alpha - 1$. Применим принцип максимума [7] и получим
$$\Gamma(y)|_{|y| \leqslant 2\alpha-1} < M(1-\delta). \tag{8.32}$$

На поверхности сферы
$$|y| = 2\alpha - 2$$

возьмем произвольную точку y и впишем в $B_{2\alpha-1}$ шар B_1^y радиуса 1 с центром в точке y. В силу леммы 5.1 получим тогда неравенство

$$\Gamma(y)\big|_{|y|=2\alpha-2} < M(1-\delta)^2. \tag{8.33}$$

Из произвольности точки y: $|y| = 2\alpha - 2$ следует, что (8.33) справедливо для всех точек сферы $|y| = 2\alpha - 2$. Применяя принцип максимума [7], получим

$$\Gamma(y)\big|_{|y|=2\alpha-2} < M(1-\delta)^2. \tag{8.34}$$

Продолжая аналогичные построения, за $[\alpha]+1$ шагов мы получим, что решение $\Gamma(y)$ уравнения (8.29) удовлетворяет неравенству

$$\Gamma(y)\big|_{|t|\leqslant 2\alpha-[\alpha]-1} \leqslant M(1-\delta)^{[\alpha]+1} < Me^{\alpha\ln(1-\delta)} = Me^{-\alpha\ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right)} = Me^{-\alpha k}, \tag{8.35}$$

где

$$k = \ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right) > 0.$$

Так как y — любая точка шара $B_{2\alpha-[\alpha]-1}$, то

$$\Gamma(0) \leqslant Me^{-\alpha k}.$$

Лемма 8.2 доказана. □

Следствие 8.1. *Если для $u(x)$ выполнены условия леммы 8.2, то*

$$u(0) < e^{-k\alpha}\sup_{B_1} u, \quad k = \ln\left(\frac{1}{1-\delta}\right) > 0. \tag{8.36}$$

Доказательство следствия вытекает из принципа максимума и оценки (8.28).

Лемма 8.3. *Для $m > 0$ найдется постоянная*

$$\alpha_0 = \alpha_0(N,\, \lambda_0^2,\, \lambda_1^2,\, m) > 0$$

такая, что при $\alpha > \alpha_0$ положительное решение $\Gamma_\alpha(x)$ уравнения (8.5) удовлетворяет оценки

$$\Gamma_\alpha(x) \geqslant C|x|^m, \quad C > 0. \tag{8.37}$$

Доказательство. Для каждого $\alpha > 0$ лемма 8.1 гарантирует существование решения $\Gamma_\alpha(x)$ уравнения (8.5) с оценкой (8.7). Докажем, что для любого $m > 0$ найдется столь большое α, что решение $\Gamma_\alpha(x)$ уравнения (8.5) удовлетворяет оценке (8.37).

Рассмотрим решение $\Gamma_\alpha(x) > 0$ уравнения (8.5) в кольцевой области

$$1 < \frac{R}{4} < |x| < R$$

и сделаем в уравнении (8.5) замену переменной:

$$x_i = \frac{R}{4}y_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Уравнение (8.5) переходит при этом в уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ik}\left(\frac{R}{4}\right)\frac{\partial V}{\partial y_i}\right) + \sum_{i=1}^{N}\frac{R}{4}b_i\left(\frac{R}{4}\right)\frac{\partial V}{\partial y_i} + R^2 c_\alpha\left(\frac{R}{4}\right)V = 0 \tag{8.38}$$

в кольце $1 < |y| < 4$, где

$$V(y) = \Gamma_\alpha\left(\frac{R}{4}y\right).$$

Коэффициенты уравнения (8.38) имеют верхние грани, не зависящие от R, поскольку

$$-\alpha^2 \leqslant -\frac{\alpha^2}{|y|^2} \leqslant -\frac{\alpha^2}{16},$$
$$\left|\frac{R}{4} b_i\left(\frac{R}{4}y\right)\right| = \frac{R|y|}{4}\left|b_i\left(\frac{R}{4}y\right)\right|\frac{1}{|y|} \leqslant B,$$
$$\lambda_0^2 \leqslant \left|a_{ij}\left(\frac{R}{4}y\right)\right| \leqslant \lambda_1^2.$$

Поэтому в кольце $1 < |y| < 4$ мы можем применить лемму 8.2. Рассмотрим сферу $|y| = 2$ и впишем в кольцо $1 < |y| < 4$ шар B_1^y радиуса 1 с центром в произвольной точке сферы $|y| = 2$. Тогда применим оценку (3.35) и в силу принципа максимума получим

$$V|_{|y|=2} \leqslant e^{-\alpha k} \max_{1\leqslant |y| \leqslant 3} V(y) \leqslant e^{-\alpha k} \max_{|y|=4} V(y).$$

Отсюда по принципу максимума имеем

$$\max_{|y|=2} V(y) \leqslant e^{-\alpha k} \max_{|y|=4} V(y).$$

Используя обозначение

$$M_R = \max_{|x|=R} \Gamma_\alpha(x)$$

и возвращаясь к переменным x по формулам

$$y_i = \frac{4x_i}{R},$$

получим оценку

$$M_{R/2} \leqslant e^{-\alpha k} M_R. \tag{8.39}$$

Итерируя неравенство (8.39), получим

$$M_{R/(2^2)} \leqslant M_{R/2} e^{-\alpha k} \leqslant e^{-2\alpha k} M_R,$$

и, после n шагов итерации, будем иметь

$$M_{R/(2^n)} \leqslant e^{-n\alpha k} M_R. \tag{8.40}$$

Выберем число n из условия

$$1 \leqslant \frac{R}{2^n} \leqslant 2.$$

Тогда $2^n \leqslant R \leqslant 2^{n+1}$. Поэтому

$$n \leqslant \log_2 R \leqslant n + 1.$$

Учитывая (8.40), $\Gamma_\alpha(0) = 1$, неравенство $n \geqslant \log_2 \dfrac{R}{2}$, будем иметь

$$M_R \geqslant e^{n\alpha k} M_1 \geqslant M_1 e^{\log_2 \frac{R}{2} \alpha k} = M_1 e^{\alpha \ln \frac{R}{2} \frac{k}{\ln 2}} \geqslant M_1 \left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{\alpha k}{\ln 2}} \geqslant C_2 |x|^b, \tag{8.41}$$

где

$$C_2 = 2^{-\alpha k \ln 2} M_1, \quad b = \alpha k \log_2 e.$$

Применим неравенство Харнака (8.16), неравенство (8.41) и получим

$$m_R = \min_{|x|=R} \Gamma_\alpha(x) \geqslant \frac{M_1}{C_1} R \geqslant \frac{C_2}{C_1}|x|^b.$$

Так как $\Gamma_\alpha(x) \geqslant m_R$, то доказано, что

$$\Gamma_\alpha(x) \geqslant \frac{C_2}{C_1}|x|^b,$$

где $b = \alpha k \log_2 e$. Для любого $m > 0$ выберем α из условия

$$\alpha k \log_2 e > m \tag{8.42}$$

и рассмотрим затем положительное решение $\Gamma_\alpha(x)$ уравнения (8.5) с этим α. Применяя (8.42), получим, что лемма доказана. Лемма 8.3 доказана. $\square$

Следствие 8.2. *Для решения* $\Gamma_{\alpha_1}(x)$, $\alpha_1 > 0$ *уравнения* (8.5) *найдется* α_2: $\alpha_2 > \alpha_1$ *и* $x_0 = x_0(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1^2, \lambda_0^2)$ *такие, что при* $|x| \geqslant |x_0|$ *справедливо неравенство*

$$\Gamma_{\alpha_2}(x) > \Gamma_{\alpha_1}(x). \tag{8.43}$$

Доказательство. Доказательство вытекает из оценки (8.37), установленной в лемме 8.3, и оценки (8.7) леммы 8.1. Действительно, для любого $\alpha_1 > 0$ решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ уравнения (8.5) удовлетворяет оценке

$$\Gamma_{\alpha_1}(x) \leqslant C_3 |x|^{\lambda(\alpha_1)}. \tag{8.44}$$

Для $\alpha_1 > 0$ выберем α_2 так, чтобы

$$\alpha_2 k \log_2 e > \lambda(\alpha_1).$$

По лемме 8.3 решение $\Gamma_{\alpha_2}(x)$ уравнения (8.5) удовлетворяет оценке

$$\Gamma_{\alpha_2}(x) > C|x|^{\alpha_2 k \log_2 e}, \quad C = C_2/C_1. \tag{8.45}$$

Тогда, в силу (8.45), (8.44) получим неравенство

$$\Gamma_{\alpha_2}(x) - \Gamma_{\alpha_1}(x) > C|x|^{\alpha_2 k \log_2 e} - C_3|x|^{\lambda(\alpha_1)} = C|x|^{\alpha_2 k \log_2 e}\left(1 - \frac{C_3}{C}|x|^{\lambda(\alpha_1) - \alpha_2 k \log_2 e}\right) > 0$$

при

$$|x| > |x_0| = \left(\frac{C}{C_3}\right)^{\frac{1}{\alpha_2 k \log_2 e - \lambda(\alpha_1)}} > 0.$$

Неравенство (8.43) доказано. Следствие 8.2 доказано. □

9. Принцип максимума для обобщенных решений задачи Коши в классах растущих функций

При $N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{9.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{9.2}$$

где оператор $L(x)$ определен формулой (1.1). Пусть выполняются условия теоремы 6.1. Предположим, что $u_0(x)$ — непрерывная в $\mathbb{R}^N$ функция, удовлетворяющая на бесконечности условию

$$|u_0(x)| \leqslant C(1 + |x|^m), \quad m > 0 \tag{9.3}$$

или условию

$$|u_0(x)| \leqslant M e^{a|x|}, \quad a > 0, \tag{9.4}$$

и пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши (9.1), (9.2) удовлетворяет условию

$$|u(x, t)| \leqslant C_T(1 + |x|)^m \quad \text{в } D_T = \mathbb{R}^N \times [0, T], \forall T \tag{9.5}$$

или, соответственно, условию

$$|u(x, t)| \leqslant M_T e^{a|x|}, \quad a > 0. \tag{9.6}$$

Существование и единственность решения задачи (9.1), (9.2) доказаны, например, в [70].

Теорема 9.1 (принцип максимума). *Если* $u(x, t)$ — *обобщенное решение задачи* (9.1), (9.2) *удовлетворяет условию* (9.5) *(или* (9.6)*), и* $u(x, 0) \leqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, *то тогда*

$$u(x, t) \leqslant 0 \quad \text{в } D_T = \{x \in \mathbb{R}^N, 0 < t \leqslant T\}, \forall T.$$

Доказательство. Рассмотрим множество точек

$$Q = \{x, t \in D_T : u(x, t) > 0\}$$

и покажем, что $Q = \varnothing$. Предположим, что это не так, т. е. $Q \neq \varnothing$. Тогда существует связная компонента Q_1 множества Q, $Q_1 \subset Q$, такая, что $u(x, t) > 0$ на Q_1 и, следовательно,

$$u^+ = \max(u(x, t), 0) > 0 \quad \text{на } Q_1.$$

Отметим, что на параболической границе ∂Q_1 имеем $u(x, t) = 0$. Ясно, что множество Q_1 по переменной x является неограниченным, ибо в противном случае мы получили бы $u \equiv 0$ и тогда $Q_1 = \varnothing$.

В интегральном тождестве

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{i,\,k=1}^N a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - \eta\Big(b(x)\cdot\nabla u + c(x)u + u_\tau\Big) \right] dx = 0 \tag{9.7}$$

положим

$$\eta(x,\,t) = u^+(x,\,t)\xi^2(x),$$

где пробная функция $\xi(x) \geqslant 0$, имеющая компактный носитель в $\mathbb{R}^N$, будет выбрана ниже. Также заменим $u(x,\,t)$ на $u^+(x,\,t)$ всюду в (9.7), кроме слагаемого $c(x)u$. При этом получим

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big((\nabla u^+,\, a(x)\nabla u^+)\xi^2(x) + 2\xi(x)(\nabla\xi(x)\cdot\nabla u^+)u^+ \Big) dx +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \Big((b(x)\cdot\nabla u^+) + c(x)u \Big) u^+\xi(x)dx + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^+u^+_\tau\xi^2(x)dx. \tag{9.8}$$

Последнее слагаемое (9.8) преобразуем, выполнив интегрирование по τ от 0 до t, по формулам

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi^2(x)dx \int\limits_0^t u^+u^+_\tau d\tau = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi^2(x)dx \int\limits_0^t d(u_t^{+2}) = \frac{1}{2}\int\limits_R u^+(x,\,t)\xi^2(x)dx, \tag{9.9}$$

ибо $u(x,\,0) = 0$.

Учитывая (9.9), перепишем (9.8) в следующем виде, применив при этом неравенство эллиптичности (1.3):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} (u^+)^2\xi^2(x)dx + \lambda_0^2 \int\limits_0^t (\nabla u^+)^2\xi^2(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} 2\xi(x)|(\nabla\xi(x)\cdot\nabla u^+)|u^+dx + \int\limits_0^t |(b(x)\cdot\nabla u^+)|u^+\xi^2(x)dx + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} c(x)uu^+\xi^2dx. \tag{9.10}$$

Отбросим в (9.10) последнее слагаемое (так как $c(x) \leqslant 0$) и затем, применив следующие очевидные неравенства

$$|\nabla\xi(x)\cdot\nabla u^+| \leqslant |\nabla\xi(x)||\nabla u^+|, \quad |b(x)\cdot\nabla u^+| \leqslant B|\nabla u^+|,$$

будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} (u^+)^2\xi^2(x)dx + 2\lambda_0^2 \int\limits_0^t (\nabla u^+)^2\xi^2(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant 4\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi(x)|\nabla\xi(x)||\nabla u^+|u^+dx + 2B\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi^2(x)|\nabla u^+|u^+dx = 4J + 2K. \tag{9.11}$$

Применим к J и K в правой части (9.11) неравенство Коши с $\varepsilon > 0$:

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon},$$

полагая

$$a = \xi(x)|\nabla u^+|, \quad b = |\nabla\xi|u^+ \quad \text{в } J,$$
$$a = |\nabla u^+|\xi(x), \quad b = \xi u^+ \quad \text{в } K.$$

Получим оценку

$$4J + 2K \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi^2(x)|\nabla u^+|^2dx + B\varepsilon_2 \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^N} \xi^2(x)|\nabla u^+|^2dx +$$

$$+\frac{2}{\varepsilon_1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\xi(x)|^2(u^+)^2dx+\frac{B}{\varepsilon_2}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}\xi^2(x)(u^+)^2dx. \tag{9.12}$$

Выберем в (9.12)

$$\varepsilon_1=\frac{\lambda_0^2}{4},\quad \varepsilon_2=\frac{\lambda_0^2}{2B}$$

и перенесем первые два слагаемых в (9.12) в левую часть (9.11). Будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u^+)^2\xi^2(x)dx+\lambda_0^2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}(\nabla u^+)^2\xi^2(x)dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8}{\lambda_0^2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\xi(x)|^2(u^+)^2dx+\frac{2B^2}{\lambda_0^2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}\xi^2(x)(u^+)^2dx. \tag{9.13}$$

Отбросим второе слагаемое в левой части (9.13) и получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}(u^+)^2\xi^2(x)dx\leqslant C_1\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}|\nabla\xi(x)|^2(u^+)^2dx+C_2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^N}\xi^2(x)(u^+)^2dx, \tag{9.14}$$

где

$$C_1=\frac{8}{\lambda_0^2},\quad C_2=\frac{2B^2}{\lambda_0^2}.$$

Выберем в (9.14) функцию

$$\xi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x>\rho+\sigma,\\ \dfrac{\rho+\sigma-|x|}{\sigma} & \text{при } \rho\leqslant|x|\leqslant\rho+\sigma,\\ 1 & \text{при } |x|\leqslant\rho.\end{cases} \tag{9.15}$$

При этом слева в (9.14) уменьшим носитель до $|x|\leqslant\rho$, где $\xi(x)=1$, а справа в (9.14) в первом слагаемом увеличим носитель до множества $|x|\leqslant\rho+\sigma$, а во втором слагаемом справа в (9.14) учтем, что $\xi(x)\leqslant 1$. При этом будем иметь

$$\int\limits_{B_\rho}u^{+2}(x,t)dx\leqslant\frac{C_1}{|\sigma|^2}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{B_{\rho+\sigma}}(u^+(x,\tau))^2dx+C_2\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{B_{\rho+\sigma}}(u^+(x,\tau))^2dx. \tag{9.16}$$

Возьмем в (9.16) любое $R\geqslant\rho+\sigma$ и произвольное $r\in(0,R)$ и будем доказывать неравенство

$$\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{B_\rho}(u^+(x,\tau))^2dx\leqslant C_3e^{-m(R-r)^2}\int\limits_0^1 d\tau\int\limits_{B_R}(u^+(x,\tau))^2dx. \tag{9.17}$$

Вводя обозначения

$$E(\rho,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{B_\rho}(u^+(x,\tau))^2dx,\ H(\rho,t)=\int\limits_0^t E(\rho,\tau)d\tau,$$

запишем (9.16) виде

$$E(\rho,t)\leqslant\left(\frac{C_1}{|\sigma|^2}+C_2\right)H(\rho+\sigma,t). \tag{9.18}$$

Проинтегрировав (9.18), будем иметь

$$H(\rho,1)\leqslant\left(\frac{C_1}{|\sigma|^2}+C_2\right)H(\rho+\sigma,t). \tag{9.19}$$

Возьмем в (9.19) $t=1$ и произвольное $\rho=r\in(0,\,R)$. Прежде всего заметим, что если $(R-r)^2$ в (9.17) относительно мало, т. е.

$$(R-r)^2<C_1e^2,$$

то оценка (9.17) очевидно имеет место с $C_3=e$, $m=\dfrac{11}{e^2C_1}$, ибо

$$e^{1-m(R-r)^2}\leqslant e^{1-\frac{C_1e^2}{C_1e^2}}=e^0=1.$$

Поэтому будем считать, что

$$(R-r)^2>C_1e^2.$$

Положим

$$\sigma=\frac{R-r}{m},\quad z_m=\frac{(R-r)^2}{C_1em}=\frac{z_1}{m},$$

при этом

$$z_1=\frac{(R-r)^2}{C_1e}>e.$$

Выберем теперь $m\in\mathbb{N}$ таким большим, чтобы $e\leqslant z_m$, $z_{m+1}<e$. Тогда

$$e\leqslant z_m\leqslant\frac{m+1}{m}z_{m+1}<2e, \tag{9.20}$$

кроме того, в силу (9.20) σ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{m}{2e^2C_1}\leqslant\frac{1}{|\sigma|^2}\leqslant\frac{m}{e^2C_1}. \tag{9.21}$$

Выберем m из (9.21) удовлетворяющим еще условию

$$\frac{C_1}{|\sigma|^2}\geqslant\frac{m}{2e^2}>C_2,\quad\text{т. е.}\quad m>2e^2C_1. \tag{9.22}$$

Тогда запишем (9.19) в виде

$$H(\rho,\,t)\leqslant\frac{2C_1}{|\sigma|^2}H(\rho+\sigma,\,t). \tag{9.23}$$

Итерируя неравенство (9.23), получим:

$$\begin{gathered}H(r,\,t)\leqslant\frac{2C_1}{|\sigma|^2}\int\limits_0^t H(\rho+\sigma,\,\tau)d\tau\leqslant\left(\frac{2C_1}{|\sigma|^2}\right)^2\int\limits_0^t(t-\tau)H(r+2\sigma,\,\tau)d\tau\leqslant\\ \leqslant\left(\frac{2C_1}{|\sigma|^2}\right)^m\int\limits_0^t\frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}H(r+m\sigma,\,\tau)d\tau\leqslant\left(\frac{2C_1}{|\sigma|^2}\right)^m\frac{t^m}{m!}H(t,\,R).\end{gathered} \tag{9.24}$$

Полагая в (9.24) $t=1$, получим

$$\begin{gathered}H(r,\,1)\leqslant\frac{(2C_1)^{2m}}{\sigma^{2m}}\frac{1}{m!}H(R,\,1)\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi m}}\left(\frac{2C_1em}{(R-r)^2}\right)^mH(R,\,1)\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-m\ln\frac{(R-r)^2}{C_1em}\right\}<\exp\left\{-\frac{(R-r)^2}{C_1e}\frac{\ln z_m}{z_m}\right\}H(R,\,1).\end{gathered} \tag{9.25}$$

Так как функция

$$f(x)=\frac{\ln z}{z}$$

убывает при $z\geqslant e$, то из (9.20) имеем оценку

$$\frac{\ln z_m}{z_m}\geqslant\frac{\ln 2e}{2e}.$$

Из неравенства (9.25) тогда имеем оценку (9.24) при $m=\dfrac{1}{e^2C_1}$.

Устремим $R \to \infty$ в оценке (9.17), учтем (9.5) (или (9.6)) и получим неравенство

$$\int\limits_0^1 d\tau \int\limits_{B_r} (u^+(x,\,\tau))^2 d\tau \leqslant 0. \tag{9.26}$$

Устремляя $r \to \infty$ в (9.26), будем иметь $u(x,\,t) = 0$ п. в. в $\{x \in \mathbb{R}^N,\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Далее применяем метод математической индукции. Пусть при $n-1 \leqslant t \leqslant n$ доказано неравенство

$$\int\limits_{n-1}^{n} d\tau \int\limits_{B_r} (u^+(x,\,\tau))^2 dx \leqslant C_3 e^{-m(R-r)^2} \int\limits_{n-1}^{n} d\tau \int\limits_{B_R} (u^+(x,\,\tau))^2 dx. \tag{9.27}$$

Переходя к пределу в (9.27) сначала по $R \to \infty$, а затем по $r \to \infty$ и используя (9.5) (или (9.6)), получим, что $u(x,\,t) = 0$ п. в. в $\{x \in \mathbb{R}^N,\, n-1 \leqslant t \leqslant n\}$. Далее, как и выше, доказываем неравенство (аналогичное (9.24), (9.25)):

$$H(r,\,n+1) \leqslant \left(\frac{2C_1}{\sigma^2}\right)^m \frac{(n+1-n)^m}{m!} H(R,\,n+1) =$$

$$= \frac{(2C_1)^m}{\sigma^{2m}} \frac{1}{m!} H(R,\,n+1) < C_2 e^{-m(R-r)^2} H(R,\,n+1).$$

Проводя дальнейшие рассуждения совершенно аналогично предыдущему, получим

$$\int\limits_{n}^{n+1} d\tau \int\limits_{B_r} (u^+(x,\,\tau))^2 dx \leqslant C_3 e^{-m(R-r)^2} \int\limits_{n}^{n+1} d\tau \int\limits_{B_R} (u^+(x,\,\tau))^2 dx. \tag{9.28}$$

После этого, переходя к пределу в (9.28) сначала по $R \to \infty$, а затем по $r \to \infty$, получим, что $u(x,\,t) = 0$, $\{x \in \mathbb{R}^N,\, n \leqslant t \leqslant n+1\}$.

То есть мы обосновали, что $Q_1 = \{x,\,t : u(x,\,t) > 0\} = \varnothing$. Таким образом мы доказали, что $u(x,\,t) \leqslant 0$ в D. Теорема 9.1 доказана. □

Следствие. *Приведенное выше доказательство принципа максимума автоматически проходит для случая, когда* $u(x,t)$ *— решение задачи* (9.1), (9.2) *— является ограниченным:* $|u(x,\,t)| \leqslant M$.

10. Доказательство теоремы 10.1

При $N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$L(x)u + (b(x), \nabla u) + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{10.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{10.2}$$

где оператор $L(x)$ определен формулой (1.1).

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 10.1. *Если функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию*

$$|u_0(x)| \leqslant u_1(x) = C(1+|x|)^m, \tag{10.3}$$

коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* (B_2), *тогда существует постоянная* $\alpha_0 = \alpha_0(m,\,B,\,\lambda_0^2,\,\lambda_1^2) > 0$ *такая, что если коэффициент* $c(x)$ *удовлетворяет условию* (C_2) *(выполнено* (2.12)*) при* $\alpha^2 > \alpha_0^2$, *то решение задачи Коши* (10.1), (10.2) *стабилизируется к нулю*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0$$

равномерно относительно x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Наряду с задачей (10.1), (10.2) рассмотрим задачу Коши

$$L(x)w_\alpha + (b(x), \nabla w_\alpha) + c_\alpha(x)w_\alpha - w_{\alpha t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{10.4}$$

$$w_\alpha|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{10.5}$$

где $u_1(x)$ определена в (10.3), а $c_\alpha(x)$ определена по формуле (8.2).

Из принципа максимума раздела 9 получим

$$|u(x, t)| \leqslant w_\alpha(x, t), \ (x, t) \in D. \tag{10.6}$$

Для доказательства теоремы 10.1 достаточно доказать, что существует предел решения задачи Коши (10.4), (10.6)

$$\lim_{t\to\infty} w_\alpha(x, t) = 0 \tag{10.7}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Рассмотрим две задачи Коши

$$L(x)v_{\alpha_1} + (b(x), \nabla v_{\alpha_1}) + c_{\alpha_1}(x)v_{\alpha_1} - v_{\alpha_1 t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{10.8}$$

$$v_{\alpha_1}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{10.9}$$

$$L(x)v_{\alpha_2} + (b(x), \nabla v_{\alpha_2}) + c_{\alpha_2}(x)v_{\alpha_2} - v_{\alpha_2 t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{10.10}$$

$$v_{\alpha_2}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{10.11}$$

где

$$c_{\alpha_1}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha_1^2}{r^2} & \text{при } r \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } r < 1, \end{cases} \qquad c_{\alpha_2}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha_2^2}{r^2} & \text{при } r \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } r < 1, \end{cases} \tag{10.12}$$

функция $u_1(x)$ определена в (10.3).

Лемма 10.1. *Если $\alpha_2 > \alpha_1$, то для решений задач Коши* (10.8), (10.9) *и* (10.10), (10.11) *справедливо неравенство*

$$v_{\alpha_2}(x, t) \leqslant v_{\alpha_1}(x, t) \quad \text{в } D. \tag{10.13}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$Z(x, t) = v_{\alpha_2}(x, t) - v_{\alpha_1}(x, t)$$

и получим для $Z(x, t)$ задачу

$$L(x)Z + b(x) \cdot \nabla Z + c_{\alpha_2}(x)Z - Z_t = v_{\alpha_1}(x, t)(c_{\alpha_1}(x) - c_{\alpha_2}(x)) \quad \text{в } D, \tag{10.14}$$

$$Z|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.15}$$

Так как

$$v_{\alpha_1}(x, t) > 0, \quad c_{\alpha_1}(x) - c_{\alpha_2}(x) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha_2 > \alpha_1,$$

то из принципа максимума раздела 9 и из (10.14), (10.15) получим, что $Z(x, t) \leqslant 0$ в D. Лемма 10.1 доказана. □

Пусть выполнено условие (10.3), тогда для $m > 0$ мы находим по лемме 8.3 число $\alpha_0 > 0$ такое, что решение $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ уравнения (8.1) удовлетворяет оценке

$$\Gamma_{\alpha_0}(x) \geqslant C_0|x|^m.$$

Лемма 10.2.

1. *Для $m_1 > m$ найдется $\alpha_1 > \alpha_0$ такое, что решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ уравнения* (8.1) *удовлетворяет неравенству*

$$\Gamma_{\alpha_1}(x) \geqslant C|x|^m. \tag{10.16}$$

2. *Для решения задачи Коши* (10.4), (10.5) *при $\alpha = \alpha_1$ справедливо неравенство*

$$v_{\alpha_1}(x, t) \leqslant 2C\Gamma_{\alpha_1}(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.17}$$

Доказательство. Для $m > m_1$ в силу леммы 8.3 выберем α_1 из условия

$$\alpha_1 k_0 \log_2 e > m_1, \tag{10.18}$$

и получим, что существует решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ уравнения (8.1), удовлетворяющее оценке (10.16).

Рассмотрим функцию

$$Z(x,\,t) = 2C\Gamma_{\alpha_1}(x) - v_{\alpha_1}(x,\,t),$$

где $v_{\alpha_1}(x,\,t)$ — решение задачи (10.4), (10.5) при $\alpha = \alpha_1$ из условия (10.18). Ясно, что функция $Z(x,\,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$L(x)Z + (b(x), \nabla Z) + c_{\alpha_2}(x)Z - Z_t = 0 \quad \text{в } D,$$
$$Z|_{t=0} = 2\Gamma_{\alpha_1}(x) - u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Так как для $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ имеет место неравенство (10.16), то

$$Z|_{t=0} \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Применяя принцип максимума раздела 9, получим, что $Z(x,\,t) \geqslant 0$ внутри полосы

$$H = \{x \in \mathbb{R}^N,\, 0 < t \leqslant T\}$$

при любом $T > 0$. Из произвольности $T > 0$ вытекает, что неравенство (10.17) доказано. Лемма 10.2 доказана. □

Теорема 10.2. *Пусть начальная функция* $u_1(x)$ *удовлетворяет неравенству* (10.3), *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ *удовлетворяют условию* (B_2), *тогда существует постоянная* $\alpha_0 = \alpha_0(m,\, B,\, \lambda_1^2,\, \lambda_0^2,\, N) > 0$ *такая, что если* $c(x)$ *удовлетворяет условию* (C_2) *при* $\alpha^2 > \alpha_0^2$, *то решение задачи Коши* (10.4), (10.5) *стабилизируется равномерно по* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем $r_1 > 0$ так, чтобы $K \subset \overline{B}_{r_1}$. Для $m_1 > m$ в силу леммы 10.2 существует $\alpha_1 > \alpha_0$ такое, что решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ удовлетворяет неравенству (10.16). Для выбранного $\alpha_0 > 0$ найдется $\alpha_1 > \alpha_0$ (в силу леммы 8.3) такое, что решение $\Gamma_{\alpha_1}(x)$ уравнения (8.1) удовлетворяет неравенству

$$\Gamma_{\alpha_1}(x) > \Gamma_{\alpha_0} \quad \text{при } |x| \geqslant |x_0|. \tag{10.19}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое, чтобы

$$\delta\Gamma_{\alpha_1}(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } \forall\, x \in \overline{B}_{r_1}. \tag{10.20}$$

Рассмотрим функцию

$$G(x,\,t) = \delta\Gamma_{\alpha_1}(x) - w_{\alpha_1}(x,\,t), \tag{10.21}$$

где $w_{\alpha_1}(x,\,t)$ — решение задачи (10.4), (10.5) при $\alpha_1 > \alpha_0$.

Так как $\alpha_1^2 > \alpha_0^2$, то в силу лемм 10.1 и 10.2 получим оценку

$$w_{\alpha_1}(x,\,t) \leqslant 2C\Gamma_{\alpha_1}(x,\,t),\, \forall\, t > 0.$$

Из оценки (8.44) и неравенства (10.13), а также из лемм 10.1, 10.2 и оценки (10.17) получим

$$\begin{aligned} G(x,\,t) = \delta\Gamma_{\alpha_1} - w_{\alpha_1} \geqslant \delta\Gamma_{\alpha_1} - w_{\alpha_2}(x,\,t) \geqslant \delta\Gamma_{\alpha_1}(x) - 2C\Gamma_{\alpha_2}(x) \geqslant \\ \geqslant \delta C|x|^{\alpha_1 k \log_2 e} - 2C|x|^{\lambda(\alpha_2)} = |x|^{\alpha_1 k}\left(\delta C - 2C|x|^{\lambda(\alpha_2) - \alpha_1 k \log_2 e}\right). \end{aligned} \tag{10.22}$$

Далее α_1 выберем таким большим, чтобы

$$\alpha_1 k \log_2 e > \lambda(\alpha_2).$$

Тогда в силу (10.22) найдется $R > 0$ такое, что

$$G|_{|x|=R} \geqslant 0 \quad \text{для } \forall\, t > 0. \tag{10.23}$$

Для функции (10.21) справедливы соотношения

$$L(x)G + (b(x), \nabla G) + c_{\alpha_1}(x)G - G_t = 0, \quad |x| < R,\, t > 0, \tag{10.24}$$
$$G|_{|x|=R} \geqslant 0,\, t > 0, \tag{10.25}$$
$$G|_{t=0} = \delta\Gamma_{\alpha_1} - u_1(x), \quad |x| < R. \tag{10.26}$$

Обозначим

$$\varphi(x) = \delta\Gamma_{\alpha_1} - u_1(x).$$

Рассмотрим задачу

$$L(x)p + (b(x), \nabla p) + c_{\alpha_1}(x)p - p_t = 0, \quad |x| < R,\, t > 0, \tag{10.27}$$

$$p|_{|x|=R} = 0, \quad t > 0, \tag{10.28}$$

$$p|_{t=0} = \varphi^-(x), \quad |x| < R, \tag{10.29}$$

где

$$\varphi^- = \min(0,\, \varphi(x)) \leqslant 0.$$

В лемме 3.4 доказано, что функция $p(x,\, t)$ из (10.27)–(10.29) имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} p(x,\, t) = 0, \quad |x| < R. \tag{10.30}$$

Рассмотрим функцию

$$q(x,\, t) = G(x,\, t) - p(x,\, t), \tag{10.31}$$

где $G(x,\, t)$ — функция (10.21), а $p(x,\, t)$ удовлетворяет (10.27)–(10.30).

Ясно, что функция (10.31) удовлетворяет в цилиндре $\{x,\, t : |x| \leqslant R,\, t \geqslant 0\}$ следующим соотношениям:

$$L(x)q + (b(x), \nabla q) + c_{\alpha_1}q - q_t = 0, \quad |x| < R,\, t > 0, \tag{10.32}$$

$$q|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0, \tag{10.33}$$

$$q|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi^-(x) = \varphi^+(x) \geqslant 0, \tag{10.34}$$

где

$$\varphi^+(x) = \max(0,\, \varphi(x)) \geqslant 0.$$

Из (10.32)–(10.34) и принципа максимума [70] следует, что

$$q(x,\, t) \geqslant 0 \quad \text{при } |x| \leqslant R,\, t \geqslant 0. \tag{10.35}$$

Таким образом

$$G(x,\, t) = \delta\Gamma_{\alpha_1}(x) - w_{\alpha_1}(x,\, t) \geqslant p(x,\, t), \quad |x| < R,\, t > 0. \tag{10.36}$$

В силу существования предела (10.30), для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t \geqslant T(\varepsilon)$ и всех $x : |x| \leqslant R$

$$p(x,\, t) > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.37}$$

Рассмотрим шар $\overline{B}_{r_1} \subset B_R$, тогда в силу (10.36), (10.37) и (10.20) будем иметь

$$0 \leqslant w_{\alpha_1}(x,\, t) < \frac{\varepsilon}{2} + \delta\Gamma_{\alpha_1}(x) < \varepsilon$$

при $t \geqslant T(\varepsilon)$ и всех $x : |x| \leqslant r_1$. Теорема 10.2 доказана. □

В силу неравенства (10.7) теорема 10.1 доказана.

11. Доказательство теоремы 11.1

Теорема 11.1. *Пусть функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию* (2.5)*, а коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ удовлетворяют условию (B_2). Тогда если коэффициент $c(x)$ удовлетворяет условию (C_2) при*

$$\alpha^2 > \alpha_0^2 = m(m + N + B - 2),$$

то решение задачи Коши (2.10), (2.11) *имеет предел* (2.3) *равномерно относительно x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$.*

Рассмотрим две задачи Коши: задачу (2.10), (2.11) и задачу

$$\Delta w_\alpha + (b(x), \nabla w_\alpha) + c_\alpha(x) w_\alpha - w_{\alpha t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{11.1}$$

$$w_\alpha|_{t=0} = u_1(x), \tag{11.2}$$

где

$$u_1(x) = c(1+|x|)^m, \tag{11.3}$$

$$c_\alpha(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } |x| \leqslant 1. \end{cases} \tag{11.4}$$

Из принципа максимума раздела 9 получим следующее утверждение.

Лемма 11.1.

$$|u(x,\,t)| \leqslant w_\alpha(x,\,t) \quad \textit{в } D. \tag{11.5}$$

Для решений задачи Коши (2.10), (2.11) и (11.1), (11.2) имеет место аналог соответствующих лемм 10.1, 10.2. Мы приведем лишь формулировки.

Рассмотрим две задачи Коши:

$$\Delta v_{\alpha_1} + (b(x), \nabla w_{\alpha_1}) + c_{\alpha_1}(x) w_{\alpha_1} - w_{\alpha_1 t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{11.6}$$

$$v_{\alpha_1}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{11.7}$$

$$\Delta v_{\alpha_2} + (b(x), \nabla w_{\alpha_2}) + c_{\alpha_2}(x) w_{\alpha_2} - w_{\alpha_2 t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{11.8}$$

$$v_{\alpha_2}|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{11.9}$$

где $c_{\alpha_1}(x)$ и $c_{\alpha_2}(x)$ определены формулами (10.12).

Лемма 11.2. *Если* $\alpha_1 > \alpha_2$, *то для решений задач* (11.6), (11.7) *и* (11.8), (11.9) *справедливо неравенство*

$$v_{\alpha_2}(x,\,t) \leqslant v_{\alpha_1}(x,\,t) \quad \textit{в } D. \tag{11.10}$$

При $\alpha > 0$, $B > 0$ рассмотрим в $\mathbb{R}^N$ неравенство

$$\mathcal{L}\Gamma_\alpha = \Delta\Gamma_\alpha + b(x)\nabla\Gamma_\alpha + c_\alpha(x)\Gamma_\alpha \leqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{11.11}$$

где $c_\alpha(x)$ определена по формуле (11.4), а коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ удовлетворяют условию (B_2). Будем искать решение (11.11) $\Gamma_\alpha(r)$ такое, что $\Gamma_\alpha(r) > 0$, $\Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0$. Учитывая условие (B_2) и переходя к сферическим координатам в $\mathbb{R}^N$, получим

$$\mathcal{L}\Gamma_\alpha = \Delta\Gamma_\alpha + (b(x), \nabla\Gamma_\alpha) + c_\alpha(r)\Gamma_\alpha = \Gamma''_\alpha + \frac{N-1}{r}\Gamma'_\alpha + \sum_{i=1}^N b_i(x)\frac{x_i}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma_\alpha \leqslant$$

$$\leqslant \Gamma''_\alpha + \frac{N-1+B}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma_\alpha, \quad r > 1. \tag{11.12}$$

При $r \geqslant 1$ рассмотрим решение $\Gamma_\alpha(r)$ уравнения

$$\Gamma''_\alpha + \frac{N-1+B}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2}{r^2}\Gamma_\alpha = 0, \quad r \geqslant 1, \tag{11.13}$$

удовлетворяющее условиям

$$\Gamma_\alpha(1) = 1, \quad \Gamma'_\alpha(1) = 0. \tag{11.14}$$

Решение $\Gamma_\alpha(r)$ задачи (11.13), (11.14) существует и единственно. Это мы докажем ниже. Если теперь в (11.12) положить

$$\Gamma = \Gamma_\alpha(r),$$

где $\Gamma_\alpha(r)$ — решение (11.13), (11.14), то получим

$$\mathcal{L}\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r > 1. \tag{11.15}$$

Будем искать $\Gamma_\alpha(r)$ уравнения (11.13) в виде

$$\Gamma_\alpha(r) = r^\lambda.$$

Подставляя $\Gamma_\alpha = r^\lambda$, получим определяющее уравнение

$$\lambda^2 + (N-2+B)\lambda - \alpha^2 = 0, \tag{11.16}$$

которое имеет корни

$$\mu_1 = \frac{-(N-2+B)+\sqrt{D}}{2} > 0, \quad \mu_2 = \frac{-(N-2+B)-\sqrt{D}}{2} < 0, \tag{11.17}$$

где $D = (N-2+B)^2 + 4\alpha^2 > 0$.

Решение (11.13), (11.14) однозначно определяется из формулы

$$\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{\mu_1} + C_2 r^{\mu_2}, \tag{11.18}$$

где постоянные C_1 и C_2 найдем из условий (11.14)

$$C_1 = \frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1} > 0, \quad C_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}. \tag{11.19}$$

Полагая $s = N + B$, перепишем задачу (11.13), (11.14) в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{s-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma_\alpha(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \alpha^2 r^{s-3}\Gamma_\alpha(r), \quad r>1,\\ &\Gamma_\alpha(r) \geqslant 1, \quad \Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0 \quad \text{при } r \geqslant 1. \end{aligned}$$

Определим обобщенное решение $\Gamma_\alpha(r)$ неравенства (11.11), полагая

$$\Gamma_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leqslant 1,\\ \Gamma_\alpha(r) & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{11.20}$$

где $\Gamma_\alpha(r)$ — решение задачи (11.13), (11.14). При этом мы учитываем, что $\Gamma_\alpha \equiv 1$ является *суперрешением* для (11.11): очевидно, что в силу условий «склейки» (11.14) функция (11.20) принадлежит классу $W_2^{1,\,loc}(\mathbb{R}^N)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left[-\sum_{i,\,j=1}^{N}\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\eta}{\partial x_j} + \left(\sum_{i=1}^{N} b_i\frac{\partial\Gamma_\alpha}{\partial x_i} + c_\alpha(x)\right)\eta\right]dx \leqslant 0 \tag{11.21}$$

для любой пробной функции $\eta(x) \geqslant 0$, $\eta(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Ясно также, что функция (11.20) по построению обладает следующими свойствами:

$$\Gamma_\alpha(x) > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \quad \lim_{r\to\infty} r^{-\mu_1}\Gamma_\alpha(x) = C_1 > 0. \tag{11.22}$$

Лемма 11.3. *Для* $m > 0$, $B > 0$ *и*

$$\alpha_0^2 = m(m+N-2+B) \tag{11.23}$$

существует постоянная $\ell > 0$ *такая, что решение* $w_\alpha(x,\,t)$ *задачи Коши* (11.1), (11.2) *удовлетворяет неравенству*

$$w_{\alpha_0} \leqslant \ell\Gamma_{\alpha_0}(x), \tag{11.24}$$

где $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ — *функция* (11.20) *при* $\alpha = \alpha_0$.

Доказательство. Пусть

$$c_{\alpha_0}(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha_0^2}{|x|^2} & \text{при } |x| \geqslant 1,\\ 0 & \text{при } |x| \leqslant 1, \end{cases}$$

где α_0 взято из (11.23). Тогда решение уравнения (11.16) имеет вид

$$\lambda_1 = m > 0, \quad \lambda_2 = 2-N-B-m < 0,$$

а функция $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ имеет вид

$$\Gamma_{\alpha_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leqslant 1,\\ n_1 r^m + n_2 r^{2-N-B-m} & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{11.25}$$

где
$$n_1 = \frac{N+B+m-2}{N+B+2m-2}, \quad n_2 = \frac{m}{N+B+2m-2}.$$

Рассмотрим функцию
$$Z(x,\,t) = \ell\Gamma_{\alpha_0}(x) - v_{\alpha_0}(x,\,t), \tag{11.26}$$
где $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ — функция (11.25), а $v_{\alpha_0}(x,\,t)$ — решение задачи (11.1), (11.2) при $\alpha^2 = \alpha_0^2$, ℓ — постоянная, которую мы выберем ниже. Ясно, что функция (11.26) удовлетворяет при $\alpha^2 = \alpha_0^2$ неравенству
$$\Delta Z + (b(x), \nabla Z) + c_\alpha(x)Z - Z_t \leqslant 0 \quad \text{в } D, \tag{11.27}$$
и условию
$$Z(x,\,t)|_{t=0} = \ell\Gamma_{\alpha_0} - C(1+|x|)^m. \tag{11.28}$$
Выберем теперь $\ell > 0$ настолько большим, чтобы
$$\ell\Gamma_{\alpha_0}(x) \geqslant C(1+|x|)^m \ \forall\, x \in \mathbb{R}^N. \tag{11.29}$$
Такой выбор $\ell > 0$ возможен, ибо $n_1 > 0$, поэтому достаточно положить
$$\ell = \frac{2C}{n_1}, \text{ где } C_1 > 0 \text{ — постоянная из (11.29).}$$
Применим к функции (11.26) принцип максимума раздела 9 и получим, что
$$Z(x,\,t) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \ \forall\, T > 0. \tag{11.30}$$
Из произвольности $T > 0$ и из (11.30) следует, что неравенство (11.24) обосновано. Лемма 11.3 доказана. □

Замечание. Так как $\Gamma_\alpha(x) \leqslant n_1 r^m$ при $r \geqslant 1$, то неравенство (11.24) из леммы (11.3) можно записать в более простом виде:
$$w_\alpha(x,\,t) \leqslant n_1(r^m+1). \tag{11.31}$$

Лемма 11.4. *Пусть функция* $u_1(x)$ *определена по формуле* (11.3) *и* $c(x)$ *удовлетворяет условию* (C_2) *при*
$$\alpha_2 > \alpha_0^2 = m(m+N-2+B), \tag{11.32}$$
тогда решение задачи Коши (11.1), (11.2) *удовлетворяет неравенству*
$$w_\alpha(x,\,t) < C\Gamma_\alpha(x),\, t > 0,\, C > 0. \tag{11.33}$$

Доказательство. Применяя лемму 11.2 к функциям $w_{\alpha_0}(x,\,t)$ и $w_\alpha(x,\,t)$ и учитывая лемму 11.3, получим неравенство (11.33). Лемма 11.4 доказана. □

Доказательство теоремы 11.1. В силу неравенства (11.5) достаточно доказать, что при выполнении условий теоремы 11.1 решение задачи Коши (11.1), (11.2) стабилизируется к нулю равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$
$$\lim_{t\to\infty} w_\alpha(x,\,t) = 0.$$
Пусть заданы $\alpha > 0$, $B > 0$, и пусть α^2 удовлетворяет неравенству (11.32). Тогда $\lambda_1 > m$, где $\lambda_1 > 0$ — положительный корень уравнения (11.16). Рассмотрим решение $\Gamma_\alpha(x) > 0$ неравенства (11.11), определенное формулой (11.18) при $\alpha^2 > \alpha_0^2$. В силу предельного равенства (11.22), получим, что функция $\Gamma_\alpha(x)$ монотонно возрастает (ибо $\Gamma' \geqslant 0$) и $\Gamma_\alpha(x)$ имеет больший порядок роста при $|x| \to \infty$ по сравнению с функцией $\Gamma_{\alpha_0}(x)$, определенной формулой (11.25).

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем $r_1 > 0$ столь большим, чтобы $K \subset \overline{B}_{r_1}$. Для фиксированных $m > 0$, $B > 0$ найдем $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ по формуле (11.25). Для $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ имеет место неравенство (11.24) в силу леммы 11.4.

При $\alpha^2 > \alpha_0^2$ в силу леммы 11.4 имеем
$$w_\alpha(x,\,t) \leqslant w_{\alpha_0}(x,\,t), \tag{11.34}$$
где $w_\alpha(x,\,t)$ — решение задачи (11.1), (11.2) при $\alpha > \alpha_0$.

Рассмотрим функцию
$$Z(x,\,t) = \delta\Gamma_\alpha(x) - w_\alpha(x,\,t). \tag{11.35}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta\Gamma_\alpha(x) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при } \overline{B}_{r_1}. \tag{11.36}$$

В силу неравенств (11.24), (11.34) получим

$$Z(x, t) \geqslant \delta\Gamma_\alpha(x) - w_{\alpha_0}(x, t) \geqslant \delta\Gamma_\alpha(x) - \ell\Gamma_{\alpha_0}(x).$$

Так как по условию $\lambda_1 > m$, то функция $\delta\Gamma_\alpha(x)$ растет на бесконечности как $C\delta|x|^{\lambda_1}$, а функция $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ из (11.25) имеет меньший порядок роста $\ell|x|^m$. Следовательно, существует R такое, что

$$R \geqslant \max(r_1, |x_0|), \quad \text{где } x_0 = x_0(\lambda_1, \lambda_2, B, N),$$

и для которого

$$Z(x, t)|_{|x|=R} \geqslant 0 \; \forall\, t > 0.$$

Функция (11.35) очевидно удовлетворяет соотношениям

$$\Delta Z + (b(x), \nabla Z) + c_\alpha(x)Z - Z_t \leqslant 0 \quad \text{при } |x| < R,\ t > 0, \tag{11.37}$$

$$Z|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0 \tag{11.38}$$

$$Z|_{t=0} = \delta\Gamma_\alpha(x) - C(1 + |x|^m) \equiv \varphi(x), \quad |x| < R. \tag{11.39}$$

Рассмотрим функцию $p(x, t)$ такую, что

$$\Delta p + (b(x), \nabla p) + c_\alpha(x)p - p_t = 0 \quad \text{при } |x| < R,\ t > 0, \tag{11.40}$$

$$p|_{|x|=R} = 0, \quad t > 0 \tag{11.41}$$

$$p|_{t=0} = \varphi^-(x) = \min(0, \varphi(x)) \leqslant 0, \quad |x| < R, \tag{11.42}$$

где функция $\varphi(x)$ определена в (11.39).

Из леммы 3.4 следует, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p(x, t) = 0, \quad |x| \leqslant R. \tag{11.43}$$

Очевидно, что $p(x, t) \leqslant 0$, поэтому из (11.43) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t \geqslant T(\varepsilon)$ и $\forall\, x : x \in B_R$

$$p(x, t) > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{11.44}$$

Рассмотрим функцию

$$q(x, t) = Z(x, t) - p(x, t), \tag{11.45}$$

где $Z(x, t)$ — функция (11.35), а $p(x, t)$ удовлетворяет (11.40)–(11.44). Тогда функция (11.45) удовлетворяет соотношениям

$$\Delta q + b(x)\nabla q + c_\alpha(x)q - q_t = 0 \quad \text{при } |x| < R,\ t > 0, \tag{11.46}$$

$$q|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0 \tag{11.47}$$

$$q|_{t=0} = \varphi(x) - \varphi^-(x) = \varphi^+(x) > 0, \quad x \in B_R. \tag{11.48}$$

Применяя принцип максимума [46, 70] из (11.46)–(11.48), получим

$$q(x, t) \geqslant 0 \quad \text{при } |x| \leqslant R,\ t \geqslant 0. \tag{11.49}$$

Учитывая (11.45), перепишем (11.49) в следующем виде:

$$w_\alpha(x, t) = \delta\Gamma_\alpha(x) - p(x, t), \quad |x| \leqslant R,\ t > 0. \tag{11.50}$$

Пусть $x \in \overline{B}_{r_1}$, тогда для $\delta\Gamma_\alpha$ имеет место неравенство (11.36). Следовательно, учитывая в (11.50) при $x \in \overline{B}_{r_1}$ неравенство (11.36) и неравенство (11.44), будем иметь, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t \geqslant T(\varepsilon)$ и всех $x : x \in \overline{B}_{r_1}$

$$w_\alpha(x, t) < \varepsilon.$$

Теорема 11.1 доказана. □

12. О неулучшаемости условий на младшие коэффициенты в теоремах 10.1 и 11.1

Следующие утверждения показывают, что условие (B) на $b_1(x), \dots, b_N(x)$ и условие (C_2) в теоремах 10.1 и 11.1 являются точными.

Лемма 12.1. *Для произвольных $m > 0$, $B > 0$ существуют: начальная функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию роста* (10.3)*, ограниченные в $\mathbb{R}^N$ коэффициенты $b_1(x), \dots, b_N(x)$, удовлетворяющие условию (B_2) и такие, что*

$$b_i(x) = B\frac{x_i}{|x|^2} \quad \text{при } |x| > 1, \tag{12.1}$$

и коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_2) при

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 = m(m + N + B - 2),$$

для которых решение задачи Коши

$$\Delta u + (b(x), \nabla u) + c_{\alpha_0}(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D \tag{12.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{12.3}$$

не имеет нулевого предела

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0 \tag{12.4}$$

ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Доказательство. Определим коэффициент $c_\alpha(x)$ по формуле (8.3) и положим, что выполнено (C_2) при

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B).$$

В $\mathbb{R}^N$ рассмотрим уравнение

$$\Delta\Gamma_{\alpha_0} + (b(x), \nabla\Gamma_{\alpha_0}) + c_{\alpha_0}(x)\Gamma_{\alpha_0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{12.5}$$

При $|x| \leqslant 1$ положим $\Gamma_{\alpha_0} \equiv 1$. Ясно, что эта функция удовлетворяет (12.5) при $|x| \leqslant 1$, ибо $c_{\alpha_0}(x) = 0$ при $|x| < 1$. Перейдем в (12.5) к сферическим N-мерным координатам и рассмотрим задачу

$$\Gamma''_{\alpha_0} + \frac{N-1}{r}\Gamma'_{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{x_i}{r}\Gamma'_{\alpha_0} - \frac{\alpha_0^2}{r^2}\Gamma_{\alpha_0} = 0, \quad r > 1, \tag{12.6}$$

$$\Gamma_{\alpha_0}(1) = 1, \quad \Gamma'_{\alpha_0}(1) = 0. \tag{12.7}$$

Учитывая (12.1) можно переписать (12.6), (12.7) в следующем виде

$$\Gamma''_{\alpha_0} + \frac{N-1+B}{r}\Gamma'_{\alpha_0} - \frac{\alpha_0^2}{r^2}\Gamma_{\alpha_0} = 0, \quad r > 1, \tag{12.8}$$

$$\Gamma_{\alpha_0}(1) = 1, \quad \Gamma'_{\alpha_0}(1) = 0. \tag{12.9}$$

Будем искать решение уравнения (12.8) в виде

$$\Gamma_{\alpha_0} = r^\lambda.$$

Вставив r^λ в (12.8), получим определяющее уравнение

$$\lambda^2 + (N - 2 + B)\lambda - \alpha_0 = 0,$$

которое имеет корни $\lambda_1 = m$, $\lambda_2 = 2 - N - B - m < 0$. Дальнейшие построения точно такие же, как в разделе 11. Получим, что функция $\Gamma_{\alpha_0}(r)$ из формулы (11.20) определяет решение уравнения (12.8), удовлетворяющее условиям (12.9). Рассмотрим функцию

$$\Gamma_{\alpha_0}(x) = \begin{cases} \Gamma_{\alpha_0}(r) & \text{при } r \geqslant 1, \\ 1 & \text{при } r \leqslant 1. \end{cases} \tag{12.10}$$

Ясно, что построенная нами функция (12.10) такова, что $\Gamma_{\alpha_0}(x) \in W_2^{1,loc}(\mathbb{R}^N)$, $\Gamma_{\alpha_0}(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, и она удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению (12.5).

Рассмотрим задачу Коши (12.2), (12.3) в которой положим $u(x,\,0) = \Gamma_{\alpha_0}(x)$. Легко убедиться, что решением задачи (12.1), (12.2) при этом будет функция

$$u(x,\,t) = \Gamma_{\alpha_0}(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{12.11}$$

ибо $\Gamma_{\alpha_0}(x)$ не зависит от t и является решением уравнения (12.5). Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = \Gamma_{\alpha_0}(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Лемма 12.1 доказана. □

Следующее утверждение является усилением леммы 7.1.

Лемма 12.2. *Пусть $N \geqslant 3$, тогда существуют: коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_2) при*

$$\alpha^2 > m(m + N - 2 + B),$$

ограниченные коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$, удовлетворяющие условию (B_2), ограниченная непрерывная начальная функция $u_0(x)$ — для которых решение задачи Коши (12.2), (12.3) *не имеет равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела* (12.4).

Доказательство. Пусть коэффициент $c_\alpha(x)$ определен по формуле (8.3), а коэффициенты $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ определены по формуле

$$b_i(x) = \begin{cases} -\dfrac{Bx_i}{|x|^2}, & |x| \geqslant 1, \\ 0, & |x| < 1, \end{cases} \tag{12.12}$$

где $B = N - 3$. Отметим, что вектор $\{b_1(x), \ldots, b_N(x)\}$ коэффициентов (12.1) удовлетворяет условию (B_2) при $B = N - 3$, ибо очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i b_i(x)| \leqslant N - 3. \tag{12.13}$$

Начальную функцию $u_0(x)$ определим равенством

$$u_0(x) \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Тогда переходя к сферическим N-мерным координатам, перепишем задачу Коши (12.2), (12.3) в следующем виде:

$$u'' + \frac{N-1+B}{r}u' + c_\alpha(r)u - u_t = 0, \tag{12.14}$$

$$u|_{t=0} = 1, \tag{12.15}$$

где

$$r = |x| \geqslant 0, \quad u' = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

Сделаем замену в задаче Коши (12.14), (12.15) по формуле

$$u(r,\,t) = 1 - v(r,\,t)$$

и получим

$$v'' + \frac{2}{r}u' - v_t = c_\alpha(r)u, \tag{12.16}$$

$$v|_{t=0} = 0. \tag{12.17}$$

Функцию $c_\alpha(r)u(r,\,t)$ будем рассматривать как правую часть уравнения (12.16). Применяя известные формулы [5], будем иметь

$$v(r,\,t) = \frac{\alpha^2}{r\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_1^\infty \frac{1}{\xi}\left(e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4(t-\tau)}}\right) u(\xi,\,\tau)d\xi. \tag{12.18}$$

Отметим, что решение задачи (12.14), (12.15) является ограниченным:

$$|u(r,\,t)| \leqslant M.$$

Докажем, что для каждого $t > 0$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} v(r,\, t) = 0. \tag{12.19}$$

Фиксируем $T > 0$, и пусть $0 < t \leqslant T$. Так как мы будем устремлять r к бесконечности, то будем полагать, что $r \geqslant R_1 > 0$. Пусть $R \geqslant R_1 > 0$. Разобьем интеграл (12.18) на два интеграла:

$$v(r,\, t) = \frac{\alpha^2}{r\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_1^R \frac{u(\xi,\, \tau)}{\xi} \left(e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4(t-\tau)}}\right) d\xi \, +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{r\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_R^\infty \frac{u(\xi,\, \tau)}{\xi} \left(e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4(t-\tau)}}\right) d\xi = v_1 + v_2. \tag{12.20}$$

В v_2 применим оценки

$$\xi > R, \quad |u(x,\, t)| \leqslant M, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad 0 < t \leqslant T.$$

При этом будем иметь

$$|v_2| \leqslant \frac{C}{Rr} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4(t-\tau)}} d\xi \leqslant \frac{CT}{R}.$$

Для любого фиксированного T выберем $R > 0$ столь большим, чтобы

$$|v_2| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^N,\ 0 < t \leqslant T. \tag{12.21}$$

Для этого положим

$$R = \frac{2T}{\varepsilon} > 0.$$

Фиксируем такое R и перейдем к пределу при $r \to \infty$ в интеграле v_1, а также учтем, что для $1 \leqslant \xi \leqslant R$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \left[e^{-\frac{(r-\xi)^2}{4(t-\tau)}} - e^{-\frac{(r+\xi)^2}{4(t-\tau)}}\right] = 0$$

при каждом $0 < t \leqslant T$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{r\to\infty} v_1(r,\, t) = 0 \tag{12.22}$$

для каждого $t \in (0,\, T)$. Из произвольности $T > 0$ и из (12.21) и (12.22) вытекает, что существует предел:

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\, t) = 1 \quad \text{для каждого } t > 0. \tag{12.23}$$

К функции $u(r,\, t)$ применима теорема 6.1, поэтому существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(r,\, t) = 0 \tag{12.24}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Из существования пределов (12.23), (12.24) элементарно следует, что предел (12.4) не может быть равномерным по x во всем $\mathbb{R}^N$. Лемма 12.2 доказана. □

Лемма 12.3. *Для произвольных* $m > 0$, $B > 0$ *существуют: функция* $u_0(x)$, *удовлетворяющая условию степенного роста* (10.3), *коэффициенты* $b_1(x), \ldots, b_N(x)$, *удовлетворяющие условию* (B_2), *коэффициент* $c(x)$, *удовлетворяющий условию* (C_2) *для*

$$\alpha^2 > m(m + N - 2 + B) = \alpha_0^2,$$

такие, что решение задачи (12.2), (12.3) *не имеет равномерного во всем* $\mathbb{R}^N$ *предела* (12.4).

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 12.3 не является верным. Тогда для любой функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию степенного роста (10.3), и любых коэффициентов $b_1(x), \dots, b_N(x)$, удовлетворяющих условию (B_2), для любого $c(x)$, удовлетворяющего условию (C_2) при

$$\alpha^2 > \alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B),$$

решение задачи Коши

$$\Delta v_1 + b(x)\nabla v_1 + c(x)v_1 - v_{1t} = 0, \tag{12.25}$$

$$v_1|_{t=0} = u_0(x), \quad u_0(x) = (1 + |x|)^m, \tag{12.26}$$

имеет предел (12.4) равномерно по x во всем $\mathbb{R}^N$. Но тогда определим коэффициенты $b_1(x), \dots, b_N(x)$ по формулам (12.1) при $B = 3 - N$, а начальную функцию определим равенством

$$u_0(x) \equiv 1, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

и получим, что существует предел решения задачи Коши (12.25), (12.26)

$$\lim_{t\to\infty} u(r, t) = 0 \tag{12.27}$$

равномерно по x во всем $\mathbb{R}^N$. Это, очевидно, вытекает из оценки

$$u(r, t) \leqslant Cv_1(r, t), \tag{12.28}$$

где $v_1(r, t)$ — решение задачи Коши (12.25), (12.26), вытекающей из принципа максимума раздела 9. Получим противоречие, ибо в лемме 12.2 доказано, что предел (12.27) не является равномерным по x во всем $\mathbb{R}^N$. Лемма 12.3 доказана. □

Лемма 12.3 показывает, что теоремы 10.1, 11.1 не допускают усиления, состоящего в замене утверждения о равномерной на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ стабилизации к нулю решения соответствующей задачи Коши с произвольной начальной функцией степенного роста (10.3) на утверждение о равномерной во всем $\mathbb{R}^N$ стабилизации к нулю решения этой же задачи Коши.

Лемма 12.4. *Для произвольных $m > 0$, $B > 0$ существуют: начальная функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию степенного роста* (10.3)*, ограниченные в $\mathbb{R}^N$ коэффициенты $b_i(x)$, $i = 1, \dots, b_N(x)$ такие, что*

$$b_i(x) = \frac{Bx_i}{|x|^{2-\varepsilon}}, \quad |x| > 1,\ 0 < \varepsilon < 1, \tag{12.29}$$

и коэффициент $c(x)$, удовлетворяющий условию (C_2) при

$$\alpha^2 > \alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B),$$

для которых решение задачи Коши (12.2), (12.3) *не имеет предела* (12.4) *ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 12.4 неверно. Тогда для любой начальной функции $u_0(x)$, удовлетворяющей условию степенного роста (10.3), и любых коэффициентов $b_1(x), \dots, b_N(x)$ таких, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} (1 + |x|)^{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{N} |b_i(x)| = B,\ 0 < \varepsilon < 1,$$

и любого коэффициента $c(x)$, удовлетворяющего условию (C_2) при $\alpha^2 > \alpha_0^2$, решение задачи Коши (12.2), (12.3) стабилизируется к нулю равномерно на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, т. е. существует предел (12.4)

$$\lim_{t\to\infty} v_1(x, t) = 0.$$

Фиксируем α такое, что

$$\alpha^2 > \alpha_0^2 = m(m + N - 2 + B),$$

определим $b_1(x), \ldots, b_N(x)$ по формуле (12.29), коэффициент $c(x)$ определим равенством (8.3), а ограниченную функцию $u_0(x)$ определим по формуле (7.120). Получим задачу Коши (12.25), (12.26), решение которой в силу очевидной оценки

$$u(x,\, t) \leqslant v_1(x,\, t)$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = 0$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Получим противоречие, ибо в лемме 7.7 было доказано, что функция $u(x,\, t)$ не имеет предела ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$. Лемма 12.4 доказана. □

13. Доказательство теоремы 13.1

В этом разделе рассмотрим начальные функции, удовлетворяющие условию роста

$$|u_0(x)| < Me^{a|x|} \tag{13.1}$$

с некоторой постоянной $a > 0$.

В области $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\, \infty)$ рассмотрим задачу Коши

$$\mathcal{L}_2 u \equiv L(x,\, t)u + c(x,\, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{13.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{13.3}$$

где оператор $L(x,\, t)$ определен по формуле (2.2).

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (13.2) ограничены и измеримы в D, выполнены условия

$$\lambda_0^2|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,\,j=1}^{N} a_{ij}(x,\, t)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_1^2|\xi|^2 \quad \forall\,(x,\, t) \in D, \tag{13.4}$$

$$c(x,\, t) \leqslant 0, \quad (x,\, t) \in D. \tag{13.5}$$

Определение. Под *решением задачи Коши* (13.2), (13.3) мы будем понимать слабое решение в стандартном определении [46], т. е. такую функцию $u(x,\, t)$, которая при всех $R > 0$, $T > 0$ принадлежит пространству $W_2^{1,\,0}(B_R \times (0,\, T))$ и при каждом $T > 0$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_D [(a\nabla u,\, \nabla\eta) - \eta((b,\, \nabla u) + cu) - \eta_t u]dxdt = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\eta(x,\, 0)dx \tag{13.6}$$

для всех пробных функций $\eta(x,\, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, носитель которых лежит в полупространстве $\{x,\, t :\, x \in \mathbb{R}^N,\, t < T\}$.

Будем также предполагать, что решение задачи (13.2), (13.3) удовлетворяет условию

$$|u(x,\, t)| \leqslant M_T e^{a|x|} \tag{13.7}$$

для всех

$$(x,\, t) \in H_T = \{x \in \mathbb{R}^N,\, 0 \leqslant t \leqslant T\}, \quad \forall\, T > 0.$$

Из результатов работы [70] следует, что решение задачи (13.2), (13.3) существует и единственно в классе функций, удовлетворяющих (13.7).

Рассмотрим задачу Коши

$$L(x,\, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{13.8}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{13.9}$$

В работах Аронсона [69, 70] доказано, что фундаментальное решение $G(x,\, y,\, t,\, \tau)$ задачи Коши (13.8), (13.9) обладает двухсторонними оценками:

$$k_4^2(t-\tau)^{-N/2}\exp\left\{-\frac{r^2}{4k_3^2(t-\tau)}\right\} \leqslant G(x,\, y,\, t,\, \tau) \leqslant k_2^2(t-\tau)^{-N/2}\exp\left\{-\frac{r^2}{4k_1^2(t-\tau)}\right\} \tag{13.10}$$

с постоянными $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, 4$, зависящими лишь от постоянных λ_0^2, λ_1^2 и размерности N.

Справедлив следующий результат [19].

Теорема 13.1. *Если функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию роста* (13.1) *при некотором* $a > 0$, *коэффициент* $c(x, t)$ *удовлетворяет условию* (C_3): $c(x, t) \leqslant -\alpha^2$ *при*

$$\alpha^2 > a^2 k_1^2, \tag{13.11}$$

то тогда решение задачи Коши (13.2), (13.3) *имеет предел*

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0 \tag{13.12}$$

равномерно по x *на любом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Рассмотрим задачу в $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ Коши

$$L(x, t)u_\alpha - \alpha^2 u_\alpha - u_{\alpha t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{13.13}$$

$$u_\alpha|_{t=0} = Me^{a|x|} = u_1(x), \quad a > 0. \tag{13.14}$$

Применяя принцип максимума из раздела 9 к решению задачи Коши (13.2), (13.3) и к решению задачи Коши (13.13), (13.14), получим неравенство

$$|u(x, t)| \leqslant u_\alpha(x, t) \quad \text{в } D. \tag{13.15}$$

Из неравенства (13.15) вытекает, что для доказательства теоремы 13.1 достаточно установить, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u_\alpha(x, t) = 0 \tag{13.16}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. В уравнении (13.13) сделаем замену функции $u_\alpha(x, t)$ по формуле

$$u_\alpha(x, t) = e^{-\alpha^2 t} w(x, t). \tag{13.17}$$

Для функции $w(x, t)$ получим задачу Коши:

$$L(x, t)w - w_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{13.18}$$

$$w|_{t=0} = Me^{\alpha|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{13.19}$$

Из верхней оценки Арансона (13.10) следует, что функция $w(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$w(x, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} G(x, y, t, \tau) u_1(y) dy \leqslant \frac{Mk_2^2}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4k_1^2 t}\right\} e^{a|y|} dy. \tag{13.20}$$

Сделав в интеграле (13.20) замену переменной

$$y_i = x_i + 2k_1\sqrt{t}\sigma_i, \quad i = 1, \ldots, N,$$

получим

$$w(x, t) \leqslant M2^N k_2^2 k_1^N \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|\sigma|^2 + a|x + 2k_1\sigma|} d\sigma. \tag{13.21}$$

Учитывая в (13.21) неравенство

$$a(x + 2k_1\sigma\sqrt{t}) \leqslant a|x| + 2ak_1\sqrt{t}|\sigma|,$$

будем иметь:

$$w(x, t) \leqslant Ce^{a|x| + a^2 t k_1^2} \int\limits_{\mathbb{R}^N} e^{-|\sigma|^2 + 2|\sigma| a k_1 \sqrt{t} + a^2 k_1^2 t} d\sigma. \tag{13.22}$$

Переходя в интеграле (13.22) к сферическим N-мерным координатам [39] с центром в начале координат по формулам

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = \rho \sin\theta_1 \sin\theta_2 \ldots \sin\theta_N,\\
&\sigma_m = \rho\cos\theta_{N-1} \prod_{k=m}^{N-1} \sin\theta_k,\ m = 2, \ldots, N-1,\\
&\sigma_N = \rho\cos\theta_{N-1},\\
&\rho \geqslant 0,\ \theta_1 \in [0, 2\pi],\ \theta_m \in [0, \pi],\ m = 2, \ldots, N-1,
\end{aligned}$$

получим неравенство

$$w(x,\,t) \leqslant Ce^{a|x|+a^2 t}\omega_N Q, \tag{13.23}$$

где $\omega_N = 2\pi^{N/2}[\Gamma(N/2)]^{-1}$,

$$Q = \int\limits_0^\infty e^{(\rho - ak_1\sqrt{t})^2}\rho^{N-1}d\rho. \tag{13.24}$$

Докажем для интеграла (13.24) оценку

$$Q \leqslant B\left(1 + t^{\frac{N-1}{2}}\right). \tag{13.25}$$

Совершая под знаком интеграла (13.24) замену

$$\rho = \sigma + ak_1\sqrt{t},$$

получим

$$Q = \int\limits_{-ak_1\sqrt{t}}^{+\infty} e^{-|\sigma|^2}(\sigma + ak_1 t^{1/2})^{N-1}d\sigma. \tag{13.26}$$

Принимая в (13.26) очевидное неравенство

$$|(\sigma + ak_1 t^{1/2})|^{N-1} \leqslant 2^{N-1}(|\sigma|^{N-1} + (ak_1)^{N-1}t^{\frac{N-1}{2}})$$

и заменив промежуток интегрирования $(-ak_1\sqrt{t}, +\infty)$ на $(-\infty, +\infty)$, будем иметь

$$Q \leqslant 2^{N-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(|\sigma|^{N-1} + (ak_1)^{N-1}t^{\frac{N-1}{2}})e^{-|\sigma|^2}d\sigma = 2^N\int\limits_0^{+\infty}(|\sigma|^{N-1} + (ak_1)^{N-1}t^{\frac{N-1}{2}})e^{-|\sigma|^2}d\sigma =$$

$$= 2^N\left(\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) + (ak_1)^{N-1}t^{\frac{N-1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\right) \leqslant B\left(1 + t^{\frac{N-1}{2}}\right), \tag{13.27}$$

где

$$B = \max\left(2^N\Gamma\left(\frac{N}{2}\right),\, 2^{N-1}(ak_1)^{N-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Учитывая в (13.23) оценку (13.25), будем иметь

$$w(x,\,t) \leqslant CBe^{a|x|+a^2k_1^2 t}(\left(1 + t^{\frac{N-1}{2}}\right). \tag{13.28}$$

Из формулы (13.17) и оценки (13.28) следует, что

$$u_\alpha(x,\,t) = e^{\alpha^2 t}w(x,\,t) \leqslant CBt^{\frac{N-1}{2}}e^{-(\alpha^2 - a^2k_1^2)t}. \tag{13.29}$$

Из условия $\alpha^2 > a^2k_1^2$ и (13.29) вытекает, что существует предел (13.16) равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Из (13.15) и (13.16) тогда получим, что существует предел (13.12) равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Теорема 13.1 доказана. □

14. О точности условий в теореме 13.1

В этом разделе мы установим, что условие (C_3) в теореме 13.1 является точным, о чем свидетельствует

Лемма 14.1. *Для произвольного $a > 0$ существуют функция $u_0(x)$, удовлетворяющая условию роста* (13.1)*, и коэффициент $c(x,\,t)$, удовлетворяющий условию (C_3) при $\alpha^2 = a^2$, для которых решение задачи Коши*

$$\Delta u + c(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } D \tag{14.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{14.2}$$

не имеет нулевого предела

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0 \tag{14.3}$$

ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Доказательство. Пусть $c(x) = -a^2$. Рассмотрим функцию

$$\Gamma(|x|) = 2^{\frac{N-2}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)\frac{I_{\frac{N-2}{2}}(a|x|)}{(a|x|)^{\frac{N-2}{2}}}, \tag{14.4}$$

где $I_\nu(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента [4, с. 94]. Легко видеть, что функция (14.4) удовлетворяет задаче

$$\Gamma'' + \frac{N-1}{r}\Gamma' - a^2\Gamma = 0, \tag{14.5}$$

$$\Gamma(0) = 1, \quad \Gamma'(0) = 0. \tag{14.6}$$

Поэтому функция (14.4) является решением задачи Коши

$$\Delta u - a^2 u - u_t = 0, \tag{14.7}$$

$$u|_{t=0} = \Gamma(|x|). \tag{14.8}$$

Таким образом, $u(x,\, t) = \Gamma(|x|) > 0$ для всех $t > 0$, и

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\, t) = \Gamma(|x|) \neq 0. \tag{14.9}$$

Из асимптотики функции $I_\nu(x)$ на бесконечности [4, с. 371]

$$I_\nu(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad x \to +\infty,$$

следует, что при больших $|x|$ функция (14.4) удовлетворяет оценке

$$\Gamma(|x|) \leqslant 2^{\frac{N-2}{2}}\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)e^{a|x|}.$$

Лемма 14.1 доказана. □

Глава 2

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕДИВЕРГЕНТНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Данная глава посвящена изучению влияния младших коэффициентов недивергентного параболического уравнения на стабилизацию решения задачи Коши в различных классах начальных функций.

15. Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для уравнения с радиальным потенциалом

Пусть $b = b(|x|)$ — радиальная функция $x \in \mathbb{R}^N$ такая, что $b(r) \geqslant 0$ при $r = |x| \geqslant 0$, $b(r) \not\equiv 0$, и $b(r)$ является ограниченной функцией в $\mathbb{R}^N$, удовлетворяющей условию Гельдера.

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u - b(|x|)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{15.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{15.2}$$

где $u_0(x)$ — непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N$ функция,

$$|u_0(x)| \leqslant M.$$

Будем говорить, что коэффициент $b(|x|)$ удовлетворяет условию (C_4), если расходится интеграл

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{r_0}^{R} \tau b(\tau)d\tau = +\infty. \tag{15.3}$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 15.1. *Для того, чтобы решение задачи* (15.1), (15.2) *стабилизировалось к нулю*:
$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0 \tag{15.4}$$
равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент $b(|x|)$ удовлетворял условию (C_4).

Замечание. Из леммы 7.5 следует, что если определить коэффициент $b_1(|x|)$ при $u(x,\,t)$ по формуле
$$b_1(|x|) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{|x|^2} & \text{при } |x| > 1,\\ \alpha^2 & \text{при } |x| \leqslant 1, \end{cases} \tag{15.5}$$
то найдется начальная функция, ограниченная в $\mathbb{R}^N$, для которой решение соответствующей задачи Коши (15.1), (1.22) не имеет равномерного в $\mathbb{R}^N$ предела (15.4). Отметим, что условие (C_4) для коэффициента (15.5) очевидно выполнено. Таким образом в классе всех коэффициентов $b(|x|)$, удовлетворяющих (15.3), нельзя усилить утверждение теоремы 15.1, заменив компакт K на все $\mathbb{R}^N$.

Замечание. Если определить коэффициент $b(|x|)$ по формуле
$$b_2(|x|) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^2}{|x|^2(\ln|x|)^s} & \text{при } |x| \geqslant e,\\ \dfrac{\alpha^2}{e^2} & \text{при } |x| \leqslant e, \end{cases} \tag{15.6}$$
где $0 < s \leqslant 1$, то получим, что условие (C_4) для коэффициента $b_2(|x|)$ выполнено при $0 < s \leqslant 1$. По теореме 15.1 решение задачи Коши (15.1), (15.2) с этим коэффициентом имеет предел (15.4). Следовательно, получено усиление теоремы 6.1 с оператором $L(x) = \Delta$, ибо коэффициент (15.6) с большей скоростью стремится к нулю при $|x| \to \infty$ по сравнению с коэффициентом $c(x)$ (15.5). Напомним, что в степенной шкале убывания скорость $|x|^{-2}$ убывания $c(x)$ является предельно допустимой.

Для доказательства теоремы 15.1 нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^N$ при $N \geqslant 3$ уравнение
$$\Delta\Gamma - b(|x|)\Gamma = 0. \tag{15.7}$$

Лемма 15.1. *Если $b(|x|)$ удовлетворяет условию (C_4), то существует решение $\Gamma(|x|)$ уравнения* (15.7) *такое, что*

1. $\Gamma(r) > 0$ *в* $\mathbb{R}^N$,
2. $\Gamma'(r) \geqslant 0$,
3. $\lim\limits_{r\to\infty} \Gamma(r) = +\infty$.

Доказательство. Рассмотрим задачу
$$\Gamma'' + \frac{N-1}{r}\Gamma' - b(r)\Gamma = 0, \quad r > 0, \tag{15.8}$$
$$\Gamma(0) = 1, \quad \Gamma'(0) = 0. \tag{15.9}$$
Переписывая уравнение (15.8) в виде
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r}\right) = r^{N-1}b(r)\Gamma(r), \quad r > 0 \tag{15.10}$$
и выполняя интегрирование с учетом (15.9), будем иметь
$$r^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r} = \int\limits_0^r \sigma^{N-1}b(\sigma)\Gamma(\sigma)d\sigma, \tag{15.11}$$
$$\Gamma(r) = 1 + \int\limits_0^r \frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_0^\tau \sigma^{N-1}b(\sigma)\Gamma(\sigma)d\sigma. \tag{15.12}$$

Ясно, что задача (15.8), (15.9) эквивалентна (15.12). Докажем существование решения $\Gamma(r)$ уравнения (15.12) при достаточно малом $r > 0$. Интегрируя по частям в (15.12), получим

$$\Gamma(r) = 1 + \frac{1}{N-2}\int\limits_0^r \tau\left(1 - \left(\frac{\tau}{r}\right)^{N-2}\right)\Gamma(\tau)b(\tau)d\tau. \tag{15.13}$$

Итерируя (15.13), получим

$$\Gamma_n(r) = 1 + \frac{1}{N-2}\int\limits_0^r \tau\left(1 - \left(\frac{\tau}{r}\right)^{N-2}\right)\Gamma_{n-1}(\tau)b(\tau)d\tau. \tag{15.14}$$

Из (15.14) следует, что

$$\Gamma_{n+1}(r) - \Gamma_n(r) = \frac{1}{N-2}\int\limits_0^r \tau b(\tau)\left(1 - \left(\frac{\tau}{r}\right)^{N-2}\right)[\Gamma_n(\tau) - \Gamma_{n-1}(\tau)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{(N-2)^n}\int\limits_0^r \left(1 - \left(\frac{\tau_1}{r}\right)^{N-2}\right)\tau_1 b(\tau_1)d\tau\int\limits_0^{\tau_1}\left(1 - \left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right)^{N-2}\right)\tau_2 b(\tau_2)d\tau_1\cdots$$

$$\cdots\int\limits_0^{\tau_{n-1}}\left(1 - \left(\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}\right)^{N-2}\right)\tau_n b(\tau_n)[\Gamma_1(\tau_n) - \Gamma_0(\tau_n)]d\tau_n, \tag{15.15}$$

где $\Gamma_0 = \Gamma(r)$. Рассмотрим сегмент $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Тогда из непрерывности $b(\tau)$ и $\Gamma_1(r) - \Gamma_0(r)$ на $[0,\, \varepsilon]$ вытекает

$$|b(\tau)| \leqslant m(\varepsilon), \quad |\Gamma_1(\tau_n) - \Gamma_0(\tau_n)| \leqslant 2K(\varepsilon). \tag{15.16}$$

Из (15.15) с учетом (15.16) получим оценку

$$|\Gamma_{n+1}(r) - \Gamma_n(r)| \leqslant 2K\frac{m^n r^{2n}}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \tag{15.17}$$

на сегменте $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$.

Из оценки (15.17) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

$$\Gamma_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty}(\Gamma_n(r) - \Gamma_{n-1}(r)), \tag{15.18}$$

члены которого по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$2K\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{mr^2}{2}\right)^n\frac{1}{n!} = 2K\exp\left(\frac{mr^2}{2}\right) \leqslant 2K\exp\left(\frac{m\varepsilon^2}{2}\right).$$

Следовательно, $\Gamma_n(r)$ на сегменте $[0,\, \varepsilon]$ равномерно стремится к определенному пределу. Переходя к пределу в формуле (15.14) получим, что существует функция $\Gamma(x)$, удовлетворяющая равенству (15.12), т. е. существует решение $\Gamma(r)$ задачи (15.8), (15.9) на достаточно малом сегменте $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Из формул (15.11), (15.12) следует, что

$$\Gamma(r) \geqslant 1 \quad \text{на } [0,\, \varepsilon]$$

и, кроме того,

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant r \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

Пусть $r_0 > 0$ таково, что $0 < r_0 \leqslant \varepsilon$. Рассмотрим задачу

$$\Gamma'' + \frac{N-1}{r}\Gamma' - b(r)\Gamma = 0, \quad r > r_0, \tag{15.19}$$

$$\Gamma(r)|_{r=r_0} = y_0, \quad \Gamma(r) = y_1, \tag{15.20}$$

где y_0, y_1 — значения функции $\Gamma(r)$ и ее производной $\Gamma'(r)$ при $r = r_0$, $0 < r_0 \leqslant \varepsilon$, для решения задачи (15.8), (15.9). Как доказано выше,

$$y_0 \geqslant 1, \quad y_1 \geqslant 0. \tag{15.21}$$

Из [1, 60] следует, что решение задачи (15.19), (15.20) существует и единственно. Записывая уравнение (15.19) в виде (15.8), интегрируя и учитывая условия (15.20), получим

$$r^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r} = y_1 r_0^{N-1} + \int\limits_{r_0}^{r} \sigma^{N-1} b(\sigma)\Gamma_r(\sigma)d\sigma, \tag{15.22}$$

$$\Gamma(r) = y_0 + y_1 r_0^{N-1}\frac{1}{N-2}\left(r_0^{2-N} - r^{2-N}\right) + \int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\tau}\sigma^{N-1}b(\sigma)\Gamma(\sigma)d\sigma. \tag{15.23}$$

Функция $\Gamma(r)$ непрерывна на $r \geqslant 0$ и $\Gamma(r_0) = y_0 > 0$. Следовательно, $\Gamma(r) > 0$ и в малой правой окрестности $r = r_0$. Докажем, что $\Gamma(r) > 0$ для всех $r > r_0$. Предположим противное, тогда найдется $r_1 > r_0$ (первый нуль $\Gamma(r)$) такое, что $\Gamma(r_1) = 0$ и $r_1 > r_0$, и (15.23) при $r = r_1$ имеет вид

$$\Gamma(r_1) = 0 = y_0 + y_1 r_0^{\frac{N-1}{2}}\frac{1}{N-2}\left(r_0^{2-N} - r_1^{2-N}\right) + \int\limits_{r_0}^{r_1}\frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\tau}\sigma^{N-1}b(\sigma)\Gamma(\sigma)d\sigma. \tag{15.24}$$

Но при $r_0 \leqslant r \leqslant r_1$ правая часть (15.24) очевидно является положительной. Следовательно, из (15.24) мы получим противоречие. Тем самым обосновано, что

$$\Gamma(r) > 0 \quad \text{для всех } r > r_0. \tag{15.25}$$

Из (15.25) и (15.23) следует, что

$$\Gamma(r) \geqslant y_0 \geqslant 1 > 0 \quad \text{для всех } r \geqslant 0. \tag{15.26}$$

Из (15.26) и (15.22) получаем, что

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r} > 0 \quad \text{при } r > r_0. \tag{15.27}$$

Применяя в (15.23) неравенство (15.26), получим

$$\Gamma(r) \geqslant \int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\tau} b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma. \tag{15.28}$$

По условию,

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r_0}^{r}\tau b(\tau)d\tau = +\infty. \tag{15.29}$$

В лемме 15.2, которая доказывается в этом разделе ниже, будет установлено, что предельное равенство (15.29) эквивалентно равенству

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\tau} b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma = +\infty. \tag{15.30}$$

Применяя (15.30) в (15.28), получим

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma(r) = +\infty. \tag{15.31}$$

Лемма 15.1 доказана. □

Лемма 15.2. *Пусть функция $b(r) \geqslant 0$ — непрерывная и ограниченная при $r \geqslant r_0$. Тогда несобственные интегралы*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r_0}^{r}\tau b(\tau)d\tau, \tag{15.32}$$

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\tau}b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma \tag{15.33}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Преобразуем интеграл

$$\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{N-2}\tau b(\tau)d\tau,$$

используя очевидное тождество

$$\frac{1}{(N-2)\tau^{N-2}}=\frac{1}{(N-2)r^{N-2}}+\int\limits_{\tau}^{r}\sigma^{1-N}d\sigma.$$

Будем иметь

$$\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\tau b(\tau)}{N-2}d\tau=\int\limits_{r_0}^{r}\tau^{N-1}b(\tau)\left[\frac{1}{(N-2)\tau^{N-2}}\right]d\tau=\int\limits_{r_0}^{r}\tau^{N-1}b(\tau)\left[\frac{1}{(N-2)r^{N-2}}+\int\limits_{\tau}^{r}\sigma^{1-N}d\sigma\right]=$$

$$=\frac{1}{(N-2)r^{N-2}}\int\limits_{r_0}^{r}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau+\int\limits_{r_0}^{r}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau\int\limits_{\tau}^{r}\sigma^{1-N}d\sigma=$$

$$=\frac{1}{(N-2)r^{N-2}}\int\limits_{r_0}^{r}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau+\int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\sigma}{\sigma^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\sigma}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau.$$

Получим тождество

$$\frac{1}{N-2}\int\limits_{r_0}^{r}\tau b(\tau)d\tau-\int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\sigma}{\sigma^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\sigma}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau=\frac{1}{(N-2)r^{N-2}}\int\limits_{r_0}^{r}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau\geqslant 0. \tag{15.34}$$

Из (15.34) вытекает неравенство

$$\frac{1}{N-2}\int\limits_{r_0}^{r}\tau b(\tau)d\tau\geqslant\int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\sigma}{\sigma^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\sigma}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau. \tag{15.35}$$

Если интеграл (15.33) расходится, то из (15.35) следует, что расходится интеграл (15.32). Если интеграл (15.32) сходится, то из (15.35) вытекает, что сходится интеграл (15.33).

Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\tau}b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma=\frac{1}{N-2}\int\limits_{r_0}^{r}\tau b(\tau)\left(1-\left(\frac{\tau}{r}\right)^{N-2}\right)d\tau. \tag{15.36}$$

Преобразуем интеграл справа в (15.36). Применив интегрирование по частям, будем иметь

$$\int\limits_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_0}^{\tau}b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma=\int\limits_{r_0}^{r}\left(\int\limits_{r_0}^{\tau}\sigma b(\sigma)d\sigma\right)\frac{\tau^{N-3}}{r^{N-2}}d\tau. \tag{15.37}$$

Из тождества (15.37) элементарно вытекает, что если интеграл (15.32) расходится, то расходится и интеграл (15.33). Из ограниченности $b(\sigma)\geqslant 0$ и из сходимости (15.33) вытекает сходимость интеграла (15.32) (см. [62]). Лемма 15.2 доказана. □

Лемма 15.3. *Если существует ограниченное в* $\mathbb{R}^N$ *решение уравнения* (15.7)*, то сходится интеграл*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r_0}^{r}\tau b(\tau)d\tau.$$

Доказательство. Так как коэффициент в (15.7) является радиально-симметричным, то, учитывая инвариантность оператора Лапласа относительно вращения [58], получим, что решение $\Gamma(x)$ уравнения (15.7) является радиально-симметрическим. Запишем уравнение (15.7) в виде

$$\frac{1}{r^{N-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r}\right)=b(r)\Gamma(r),\quad r>0. \tag{15.38}$$

Из (15.38) следует, что функция $r^{N-1}\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r}$ не убывает на $r>0$. Докажем, что и $\Gamma(r)$ является неубывающей функцией. Предположим, что это не так, тогда существует $r_0>0$ такое, что $\Gamma'(r_0)<0$.

В силу неубывания $r^{N-1}\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}r}$ имеем

$$r^{N-1}\Gamma'(r)\leqslant r_0^{N-1}\Gamma'(r_0)\quad\text{на } 0<r<r_0. \tag{15.39}$$

Поэтому для любого $r:\ 0<r<r_0$ из (15.39) в силу того, что $\Gamma'(r_0)<0$, получим

$$\Gamma(r)=\Gamma(r_0)+\int\limits_{r}^{r_0}(-\Gamma'(\sigma)\sigma^{N-1})\frac{d\sigma}{\sigma^{N-1}}\geqslant\Gamma(r_0)+(-\Gamma'(r_0)r_0^{N-1})\int\limits_{r}^{r_0}\frac{d\sigma}{\sigma^{N-1}}. \tag{15.40}$$

Устремляя $r\to 0+$ в (15.40), получим, что

$$\lim_{r\to 0+}\Gamma(r)=+\infty.$$

Получили противоречие, ибо $\Gamma(r)$ по условию ограничена. Неубывание $\Gamma(r)$ доказано.

Докажем, что сходится интеграл (15.32). Так как $b\not\equiv 0$, то функция $\Gamma(r)$ не является постоянной (ибо постоянная функция не может быть решением (15.7)). Следовательно, найдется $r_0>0$, для которого

$$\Gamma(r_0)=y_0>0,\quad \Gamma'(r_0)=y_1>0. \tag{15.41}$$

Интегрируя (15.38) с учетом (15.41), вследствие неубывания $\Gamma(r)$ получим

$$r^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma(r)}{\mathrm{d}r}=r_0^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma(r_0)}{\mathrm{d}r_0}+\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\sigma^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}\right)d\sigma=r_0^{N-1}y_1+\int\limits_{r_0}^{r}b(\sigma)\sigma^{N-1}\Gamma(\sigma)d\sigma\geqslant$$

$$\geqslant r_0^{N-1}y_1+\Gamma(r_0)\int\limits_{r_0}^{r}b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma\geqslant\Gamma(r_0)\int\limits_{r_0}^{r}\sigma^{N-1}b(\sigma)d\sigma. \tag{15.42}$$

Из ограниченности $\Gamma(r)$ и (15.42) будем иметь

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{N-2}\int\limits_{r_0}^{r}\tau b(\tau)d\tau=\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{N-2}\tau^{2-N}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau=\int\limits_{r_0}^{\infty}\left(\int\limits_{\tau}^{\infty}\sigma^{1-N}d\sigma\right)\tau^{N-1}b(\tau)d\tau=$$

$$=\int\limits_{r_0}^{\infty}\left[\int\limits_{r_0}^{\sigma}\tau^{N-1}b(\tau)d\tau\right]\frac{d\sigma}{\sigma^{N-1}}\leqslant\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^{N-1}}\frac{1}{\Gamma(r_0)}\sigma^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}d\sigma=\frac{\Gamma(\infty)-\Gamma(r_0)}{\Gamma(r_0)}<\infty.$$

Лемма 15.3 доказана. □

Лемма 15.4. *Если интеграл* (15.32) *сходится, то существует ограниченное положительное решение уравнения* (15.7).

Доказательство. Из сходимости интеграла (15.32) и леммы 15.2 следует, что сходится интеграл (15.33). Рассмотрим задачу (15.8), (15.9). Как и выше в лемме 15.1, доказывается, что существует решение $\Gamma(r)$ этой задачи на достаточно малом сегменте $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а затем из [1,60] вытекает, что решение существует и единственно при $r \geqslant r_0 > 0$.

Интегрируя уравнение (15.8) от r_1 до r и учитывая, что $\Gamma(r)$ является неубывающей функцией, будем иметь:

$$\Gamma'(r)r^{N-1} - \Gamma'(r_1)r_1^{N-1} = \int\limits_{r_1}^{r} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\left(\sigma^{N-1}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}\sigma}\right)d\sigma =$$

$$= \int\limits_{r_1}^{r} b(\sigma)\sigma^{N-1}\Gamma(\sigma)d\sigma \leqslant \Gamma(r)\int\limits_{r_1}^{r} b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma. \tag{15.43}$$

Или, что тоже самое:

$$\Gamma'(r) \leqslant \frac{\Gamma'(r_1)r_1^{N-1}}{r^{N-1}} + \frac{\Gamma(r)}{r^{N-1}}\int\limits_{r_1}^{r} b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma. \tag{15.44}$$

Интегрируя (15.44) от r_1 до r и используя неубывание $\Gamma(r)$, получим

$$\Gamma(r) \leqslant \Gamma(r_1) + \Gamma(r_1)r_1^{N-1}\frac{1}{N-2}(r_1^{2-N} - r^{2-N}) + \Gamma(r)\int\limits_{r_1}^{r} \tau^{1-N}d\tau \int\limits_{r_1}^{\tau} b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma. \tag{15.45}$$

Из условия сходимости (15.33) вытекает, что можно выбрать $r_1 > 0$ так, чтобы

$$\int\limits_{r_1}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^{N-1}}\int\limits_{r_1}^{\tau} b(\sigma)\sigma^{N-1}d\sigma < \frac{1}{2}. \tag{15.46}$$

Будем считать, что r_1 в (15.45) выбрано из условия (15.46). Тогда из (15.45) и (15.46) следует

$$\Gamma(r) < \Gamma(r_1) + K_1\Gamma'(r_1)r_1^{N-1} + \frac{1}{2}\Gamma(r),$$

где

$$K_1 = \lim_{r\to\infty}\frac{1}{N-2}(r_1^{2-N} - r^{2-N}) = \frac{r_1^{2-N}}{N-2}.$$

Умножив (15.46) на 2, получим $\Gamma(r) < K_3$, где

$$K_3 = 2\Gamma(r_1) + 2K_1\Gamma'(r_1)r_1^{N-1}.$$

Лемма 15.4 доказана. □

Доказательство необходимости в теореме 15.1. Пусть интеграл (15.33) является сходящимся, тогда по лемме 15.4 существует ограниченное решение $\Gamma(r)$ уравнения (15.7). Рассмотрим задачу Коши (15.1), (15.2) в которой положим $u(x, 0) = \Gamma(r)$, где $\Gamma(r)$ — решение уравнения (15.7). Ясно, что $u(x, t) = \Gamma(r) > 0$ для всех t. Следовательно, не существует предела (15.4) ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$. Необходимость доказана. □

Лемма 15.5. *Пусть*

$$p(x) = \beta|x|^2 - 1 \quad \text{при } |x| \leqslant R, \tag{15.47}$$

где $\beta = \dfrac{1}{4R^2}$. *Тогда функция*

$$p_1(x, t) = e^{-k_1 t}p(x), \quad \text{где } k_1 = \frac{N}{4R^2}, \tag{15.48}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{L}p_1 \equiv \Delta p_1 - b(r)p_1 - p_{1t} > 0, \quad |x| < R,\ t > 0, \tag{15.49}$$

$$p_1|_{|x|=R} < 0, \quad t > 0, \tag{15.50}$$

$$p_1(x, 0) = p(x), \quad |x| < 0, \tag{15.51}$$

и существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p_1(x,\,t) = 0, \quad |x| < R. \tag{15.52}$$

Доказательство. Вначале докажем, что функция (15.47) удовлетворяет неравенству

$$\Delta p(x) - b(r)p(x) + k_1 p(x) > 0, \quad |x| < R. \tag{15.53}$$

Дифференцируя функцию (15.47), получим

$$\Delta p(x) = 2\beta N.$$

Учитывая, что

$$-b(r)p \geqslant 0$$

и отбрасывая слагаемые $-b(r)p$ и $k_1\beta r^2$, получим

$$\Delta p(x) - b(r)p + k_1 p \geqslant 2N\beta + k_1(\beta r^2 - 1) > 2N\beta - k_1 = 0.$$

Неравенство (15.53) доказано. Неравенства (15.49)–(15.50) после этого проверяются непосредственно. Равенства (15.51), (15.52) очевидны. Лемма 15.5 доказана. □

Доказательство достаточности в теореме 15.1. Пусть интеграл (15.32) расходится, тогда в силу леммы 15.2 расходится интеграл (15.33). Лемма 15.1 гарантирует существование решения $\Gamma(r)$ уравнения (15.7), для которого

$$\lim_{r\to\infty} \Gamma(r) = +\infty. \tag{15.54}$$

Из принципа максимума [36, § 1] элементарно следует неравенство

$$|u(x,\,t)| \leqslant v(x,\,t) \quad \text{в } D, \tag{15.55}$$

где $v(x,\,t)$ — решение задачи

$$\mathcal{L}v = \Delta v - b(|x|)v - v_t = 0, \quad v|_{t=0} = |u_0(x)|. \tag{15.56}$$

Для доказательства достаточно установить, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} v(x,\,t) = 0 \tag{15.57}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем число $r_2 > 0$ так, чтобы

$$K \subset \overline{B}_{r_2} = \{|x| \leqslant r_2\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon) >$ так, чтобы в замкнутом шаре $\overline{B}_{r_2}$ выполнялось неравенство

$$\delta\Gamma(r) \leqslant \frac{\delta}{2}, \quad x \in \overline{B}_{r_2}. \tag{15.58}$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,\,t) = \delta\Gamma(r) - v(x,\,t), \tag{15.59}$$

где $v(x,\,t)$ — решение задачи (15.56).

Так как функция $v(x,\,t)$ ограничена $|v| \leqslant M$ в D и функция $\Gamma(r)$ удовлетворяет (15.54), то существует $R > 0$ такое, что

$$w(x,\,t)|_{|x|=R} > 0 \quad \text{для всех } t > 0. \tag{15.60}$$

Функция (15.59) очевидно удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{L}w = 0 \quad \text{в } D, \tag{15.61}$$

$$w|_{|x|=R>0}, \quad t > 0, \tag{15.62}$$

$$w|_{t=0} = \delta\Gamma(r) - |u_0(x)| \geqslant \delta\Gamma(r) - M = f_1(r). \tag{15.63}$$

Рассмотрим функцию (15.47) из леммы 15.5, положим $k_1 = \dfrac{N}{4R^2}$ и введем новую функцию

$$p_1(x,\,t) = -p(x,\,t)\frac{A_1}{\gamma} = \frac{A_1}{\gamma}\left(1 - \frac{|x|^2}{4R^2}\right)e^{-k_1 t}, \tag{15.64}$$

где $p(x,\,t)$ — функция (15.48), $A_1 = \max\limits_{r\leqslant R} |f_1(r)|$, $\gamma = 3/4$.

Отметим, что
$$p_1(x,\,0) = \frac{A_1}{\gamma}\left(1 - \frac{|x|^2}{4R^2}\right) > A_1. \tag{15.65}$$
Из леммы 15.5 следует, что функция (15.64) удовлетворяет соотношениям
$$\mathcal{L}p_1 \leqslant 0, \quad r \leqslant R,\, t > 0, \tag{15.66}$$
$$p_1|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0 \tag{15.67}$$
$$p_1(x,\,0) \geqslant A_1 = \max_{r \leqslant R} |f_1(r)|, \tag{15.68}$$
где $f_1(r)$ определена по формуле (15.63), и существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} p_1(x,\,t) = 0$, равномерный по x в шаре B_R, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon)$ такое, что при $t \geqslant T$ и всех $x \in B_R$ справедливо неравенство
$$p_1(x,\,t) < \varepsilon/2. \tag{15.69}$$
Рассмотрим функцию
$$w_1(x,\,t) = w(x,\,t) + p_1(x,\,t), \tag{15.70}$$
где $w(x,\,t)$ — функция, определенная в (15.59), $p_1(x,\,t)$ — функция, определенная в (15.64). Ясно, что в силу (15.61)–(15.63) и (15.66)–(15.68) функция (15.70) удовлетворяет соотношениям
$$\mathcal{L}w_1 \leqslant 0, \quad |x| < R,\, t > 0$$
$$w_1|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0$$
$$w_1|_{t=0} \geqslant f_1(r) + |f_1(r)| \geqslant 0, \quad r \leqslant R.$$
В силу принципа максимума [36, § 1] отсюда получим
$$w_1(x,\,t) \geqslant 0, \quad |x| < R,\, t > 0,$$
т. е. при $|x| < R$, $t > 0$
$$v(x,\,t) \leqslant \delta\Gamma(r) + p_1(x,\,t). \tag{15.71}$$
При $|x| \leqslant M_2$ из (15.58), (15.69), (15.71) следует, что $v(x,\,t) < \varepsilon$ при $t \geqslant T(\varepsilon)$, $x \in \overline{B}_{r_2}$. Предельное равенство (15.57) обосновано. Теорема 15.1 доказана. □

16. Некоторые свойства суперрешений эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^{N+1}_+$

В области $D = \mathbb{R}^N \times (0,\,\infty)$ рассмотрим стационарное решение $\Gamma = \Gamma(r)$ неравенства
$$L_1\Gamma = \Lambda(x,\,t)\Gamma + (b(x,\,t), \nabla\Gamma) - b(r)\Gamma \leqslant 0, \tag{16.1}$$
где $\Lambda(x,\,t)$ — оператор (1.6), $b_i(x,\,t)$, $i = 1, \ldots, N$ удовлетворяют условию (B_3), $b(r)$ — функция, удовлетворяющая условию (C_4).

Известно [7, с. 40], что такие функции Γ называются *суперрешением* уравнения $L_1\Gamma = 0$ в $\mathbb{R}^{N+1}_+$.

Лемма 16.1. *Если для коэффициента* $b(r)$ *расходится интеграл* (15.33)*, то существует функция* $\Gamma(r)$*, удовлетворяющая условиям* $\Gamma(r) > 0$, $\Gamma'(r) \geqslant 0$,
$$L_1\Gamma \leqslant 0 \quad \textit{в}\ \mathbb{R}^N, \tag{16.2}$$
$$\lim_{r\to\infty} \Gamma(r) = +\infty. \tag{16.3}$$

Доказательство. Применяя формулы
$$\Gamma_{x_i} = \frac{x_i}{r}\Gamma', \quad \Gamma_{x_i x_k} = \frac{x_i x_k}{r^2}\left[\Gamma'' - \frac{1}{r}\Gamma'\right], \quad \Gamma_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r}\left[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\right] + \frac{\Gamma'}{r}, \tag{16.4}$$
будем иметь
$$L_1\Gamma = Q\left\{\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} a_{ii} + b_i x_i}{Q}\frac{\Gamma'}{r} - \frac{b(r)}{Q}\Gamma\right\}, \tag{16.5}$$

где
$$Q = \sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}(x,\,t)\frac{x_i x_k}{r^2}.$$

Из неравенств равномерной эллиптичности (1.4) и условия (B_3) следует, что
$$\lambda_0^2 \leqslant Q \leqslant \lambda_1^2, \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{a_{ii} + b_i x_i}{Q} \leqslant \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}. \tag{16.6}$$

Учитывая в (16.5) неравенства (16.6), получим
$$L_1\Gamma \leqslant Q\left[\Gamma'' + \left(\frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} - 1\right)\frac{\Gamma'}{r} - \frac{b(r)\Gamma}{\lambda_1^2}\right]. \tag{16.7}$$

Обозначим
$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} \tag{16.8}$$

и рассмотрим $\Gamma(r)$ как решение задачи
$$\Gamma'' + \frac{s-1}{r}\Gamma' - \frac{b(r)}{\lambda_1^2}\Gamma = 0, \quad r > 0, \tag{16.9}$$
$$\Gamma(0) = 1, \quad \Gamma'(0) = 0. \tag{16.10}$$

Используя метод последовательных приближений, докажем существование решения $\Gamma(r)$ задачи (16.9), (16.10) на малом сегменте $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Это построение Γ совершенно аналогично построениям решения задачи (15.8), (15.9). Следует лишь заменить в лемме 15.1 N на s, где s из (16.8), и коэффициент $b(r)$ заменить на $b(r)\lambda_1^{-2}$. Дальнейшие рассуждения, приведенные в лемме 15.1, дословно повторяются. Из условия
$$\lim_{r\to\infty}\int_{r_0}^{r} b(\sigma)\sigma d\sigma = +\infty$$

и леммы 15.2 следует также, что
$$\lim_{r\to\infty}\int_{r_0}^{r}\frac{d\tau}{\tau^{s-1}}\int_{r_0}^{\tau}\frac{b(\sigma)}{\lambda_1^2}\sigma^{N-1}d\sigma = +\infty.$$

Поэтому, повторяя все рассуждения леммы 15.1 и полагая в (16.7) $\Gamma = \Gamma(r)$, где $\Gamma(r)$ — решение задачи (16.9), (16.10), получим требуемое условие (16.3). Лемма 16.1 доказана. □

17. Доказательство теоремы 17.1

Теорема 17.1. *Пусть начальная функция $u_0(x)$ ограничена в $\mathbb{R}^N$, коэффициенты $b_i(x,t)$, $i = 1,\ldots,N$ удовлетворяют условию (B_3)*
$$\sup_D (1+|x|)\left(\sum_{i=1}^{N}|b_i(x,\,t)|^2\right)^{1/2} = B < \infty, \tag{17.1}$$

коэффициент $c(x,\,t)$ удовлетворяет условию (C_5):
$$c(x,\,t) \leqslant -b(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N,\, t > 0, \tag{17.2}$$

где $b(t) > 0$ — непрерывная на $[0,\,\infty)$ и такая, что расходится интеграл
$$\lim_{r\to\infty}\int_{r_0}^{r}\tau b(\tau)d\tau = +\infty. \tag{17.3}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\mathcal{L}u \equiv \Lambda(x,\,t)u + (b(x,\,t), \nabla u) + c(x,\,t)u - u_t = 0 \quad \textit{в } D, \tag{17.4}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{17.5}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0 \tag{17.6}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Пусть $v(x,\,t)$ — решение задачи Коши

$$\mathcal{L}_b v \equiv \Lambda(x,\,t)v + (b(x,\,t), \nabla v) - b(|x|)v - v_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{17.7}$$

$$v|_{t=0} = |u_0(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{17.8}$$

Из принципа максимума [36, § 1] следует, что

$$|u(x,\,t)| \leqslant v(x,\,t) \quad \text{в } D. \tag{17.9}$$

Отметим, что

$$v(x,\,t) \leqslant M \quad \text{в } D. \tag{17.10}$$

В силу леммы 16.1 существует функция $\Gamma(r)$ — решение задачи (16.9), (16.10) такая, что

$$\mathcal{L}\Gamma \leqslant 0, \quad \lim_{r\to\infty} \Gamma(r) = +\infty. \tag{17.11}$$

Применяя [36, теорема 4, § 12], получим, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} v(x,\,t) = 0 \tag{17.12}$$

равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$. Из (17.9), (17.12) следует необходимое утверждение. Теорема 17.1 доказана. □

18. О растущих суперрешениях для эллиптических недивергентных уравнений в $\mathbb{R}^{N+1}_+$, $N \geqslant 3$

1. В области $D = \mathbb{R}^N \times (0, +\infty)$ рассмотрим стационарные решения $\Gamma = \Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_a\Gamma \equiv \Lambda(x,\,t)\Gamma_\alpha + (b(x,\,t), \nabla\Gamma_\alpha) + a_\alpha(r)\Gamma_\alpha \leqslant 0, \tag{18.1}$$

где $\Lambda(x,\,t)$ — оператор (1.6), и для $b_i(x,\,t)$, $i = 1,\ldots,N$ выполнены условия (B_3), коэффициент $a_\alpha(r)$ в неравенстве (18.1) определен по формуле

$$a_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } r \leqslant 1, \\ -\dfrac{\alpha^2}{r^2} & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \qquad \alpha > 0. \tag{18.2}$$

Будем искать решения неравенства (18.1) такие, что

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \quad \Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0, \tag{18.3}$$

и

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_1 r^{\delta_1} \quad \text{при } r \to \infty, \tag{18.4}$$

где $C_1 > 0$, $\delta_1 > 0$ — больший корень уравнения

$$\delta^2 + (s-2)\delta - \alpha^2 = 0, \tag{18.5}$$

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}. \tag{18.6}$$

Применяя формулы (16.5), будем иметь

$$L_a\Gamma_\alpha = Q\left\{\Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r} + \sum_{i=1}^{N} \frac{a_{ii} + b_i x_i}{Q}\frac{\Gamma'_\alpha}{r} + \frac{a_\alpha(r)}{Q}\Gamma_\alpha\right\}, \tag{18.7}$$

где
$$Q = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\frac{x_i x_k}{r^2}.$$
Из неравенств (1.4), условия (B_3) следует, что
$$\lambda_0^2 \leqslant Q \leqslant \lambda_1^2, \sum_{i=1}^{N} \frac{a_{ii} + b_i x_i}{Q} \leqslant \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}. \tag{18.8}$$
При $r \leqslant 1$ справедливо равенство $a_\alpha(r) = -\alpha^2$, поэтому, учитывая в (18.7) неравенства (18.8), будем иметь
$$L_a\Gamma_\alpha \leqslant Q\left[\Gamma''_\alpha + \left(\frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} - 1\right)\frac{\Gamma'_\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}\Gamma_\alpha\right]. \tag{18.9}$$
Полагая
$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1} \tag{18.10}$$
и используя обозначение (18.6), рассмотрим для функции $Z_\alpha(r)$ задачу
$$Z''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}Z'_\alpha(r) - \overline{\alpha}^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \tag{18.11}$$
$$Z_\alpha(0) = 1, \quad Z'_\alpha(0) = 0. \tag{18.12}$$
Положив в (18.9)
$$\Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r),$$
где $Z_\alpha(r)$ — решение задачи (18.11), (18.12), получим неравенство
$$L_a\Gamma_\alpha(r) \leqslant r, \quad 0 < r \leqslant 1, \, t > 0. \tag{18.13}$$
Из теории функций Бесселя [4] следует, что решение задачи (18.11), (18.12) существует, единственно и представимо в виде
$$Z_\alpha(r) = q_1(s)\frac{I_{\frac{s-2}{2}}(r\overline{\alpha})}{(r\overline{\alpha})^{\frac{s-2}{2}}}, \quad q_1(s) = 2^{\frac{s-2}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \tag{18.14}$$
где $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ — функция Эйлера [39], $I_\nu(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [4]. Из (18.14) и формул [4, п. 3.71], следует, что $Z_\alpha(r) > 0$ при $r > r_0$ и
$$b_0(\alpha) = Z_\alpha|_{r=1} = q_1(s)\overline{\alpha}^{\frac{2-s}{2}} I_{\frac{s-2}{2}}(\overline{\alpha}) > 0, \quad b_1(\alpha) = Z'_\alpha(r)|_{r=1} = q_1(s)\overline{\alpha}^{-2-\frac{s}{2}} I_{\frac{s}{2}}(\alpha).$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{I_\nu(r)}{r^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(r)}{r^\nu} > 0. \tag{18.15}$$
При $r \geqslant 1$ имеет место равенство
$$a_\alpha(r) = -\frac{\alpha^2}{r^2},$$
поэтому, применяя в (18.7) неравенства (18.8), будем иметь
$$L_a\Gamma_\alpha \leqslant Q\left[\Gamma''_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2 r^2}\Gamma\right]. \tag{18.16}$$
Рассмотрим для функции $y'_\alpha(r)$ при $r \geqslant 1$ задачу
$$y''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}y'_\alpha(r) - \frac{\overline{\alpha}^2}{r^2}y_\alpha(r) = 0, \quad r > 1, \tag{18.17}$$
$$y_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad y'_\alpha(\alpha) = b_1(\alpha), \tag{18.18}$$
где были использованы обозначения (18.5) и (18.10), а постоянные $b_0(\alpha)$, $b_1(\alpha)$ определены в (18.15). Будем иметь решение задачи (18.17), (18.18) в виде
$$y_\alpha(r) = r^\delta,$$

при этом получим для определения δ уравнение (18.5), которое имеет корни

$$4\delta_1 = -(s-2) + \sqrt{D} > 0, \quad 4\delta_2 = -(s-2) - \sqrt{D} < 0, \quad D = (s-2)^2 + 4\alpha^2, \tag{18.19}$$

s из формулы (18.6).

Решение задачи (18.17), (18.18) имеет вид

$$y_\alpha(r) = C_1 r^{\delta_1} + C_2 r^{\delta_2}, \tag{18.20}$$

где постоянные C_1 и C_2 определяются из условий (18.18), т. е. из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = b_0(\alpha), \\ C_1\delta_1 + C_2\delta_2 = b_1(\alpha), \end{cases}$$

где $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ определены в (18.15).

Лемма 18.1. *Решение задачи* (18.17), (18.18) *обладает свойствами*:

1. $y_\alpha(r) > 0$, $r > 1$,
2. $y'_\alpha(r) > 0$, $r \geqslant 1$,
3. $\lim\limits_{r\to\infty} y_\alpha(r) = +\infty$.

Доказательство. Запишем уравнение (18.17) в следующем виде:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{s-1}\frac{\mathrm{d}y_\alpha(r)}{\mathrm{d}r}\right) = \overline{\alpha}^2 r^{s-3} y_\alpha(r), \quad r > 1.$$

Дважды проинтегрируем от 1 до r, учтем условия (18.18) и получим

$$\frac{\mathrm{d}y_\alpha(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{b_1(r)}{r^{s-1}} + \frac{\overline{\alpha}^2}{r^{s-1}}\int\limits_1^r \tau^{s-3} y_\alpha(\tau)d\tau. \tag{18.21}$$

$$y_\alpha(r) = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau + \overline{\alpha}^2\int\limits_1^r \tau^{1-s}\int\limits_1^\tau y_\alpha(\xi)\xi^{s-3}d\xi. \tag{18.22}$$

В силу положительности $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ и непрерывности функции $y_\alpha(r)$ правая часть (18.22) будет положительной в достаточно малой окрестности $r = 1$, т. е. при достаточно малом $r - 1 > 0$. Докажем, что она остается положительной и при всех $r > 1$. Предположим противное, тогда при некотором $r = r_1 > 1$ функция обратится в нуль (первый нуль $y_\alpha(r)$, при $r = r_1 > 1$). Тогда из (18.22) при $r = r_1$ получим

$$y_\alpha(r_1) = 0 = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\int\limits_1^{r_1} \tau^{1-s}d\tau + \overline{\alpha}^2\int\limits_1^{r_1} \tau^{1-s}d\tau\int\limits_1^\tau y_\alpha(\xi)\xi^{s-3}d\xi. \tag{18.23}$$

Так как при $1 \leqslant \xi \leqslant r_1$, $s > 1$ имеем $y_\alpha(\xi) > 0$, то очевидно, что правая часть (18.23) является положителной. Полученной противоречие доказывает, что $y_\alpha(r) > 0$ при всех $r > 1$. Утверждение 1 леммы 18.1 доказано. Из (18.21) тогда следует, что

$$\frac{\mathrm{d}y_\alpha}{\mathrm{d}r} > 0, \quad r \geqslant 1. \tag{18.24}$$

То есть утверждение 2 леммы 18.1 доказано. Из (18.22) тогда вытекает, что

$$y_\alpha(r) \geqslant b_0(\alpha) > 0 \quad \text{при} \quad r \geqslant 1.$$

Поэтому из (18.23) и (18.24) получим

$$y_\alpha(r) - y_\alpha(1) = \int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}y_\alpha(\tau)}{\mathrm{d}\tau}d(\tau) > \overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{s-1}\int\limits_1^\tau \sigma^{s-3}d\sigma = \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{(s-2)}\int\limits_1^r \tau^{1-s}(\tau^{s-2}-1)d\tau =$$

$$= \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{(s-2)}\left[\ln r - \frac{r^{2-s}-1}{2-s}\right] \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

ибо
$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} > N > 2.$$
Утверждение 3 леммы 18.1 доказано. Лемма 18.1 доказана. □

Положим в (18.16)
$$\Gamma_\alpha(r) = y_\alpha(r),$$
где $y_\alpha(r)$ — решение задачи (18.17), (18.18), и получим неравенство
$$L_a\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 1,\ t > 0. \tag{18.25}$$
Нами определена функция
$$\Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} z_\alpha(r) & \text{при } r \leqslant 1, \\ y_\alpha(r) & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{18.26}$$
где $z_\alpha(r)$ — решение задачи (18.11), (18.12), $y_\alpha(r)$ — решение задачи (18.17), (18.18).

Очевидно, что функция (18.26) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функций и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ по построению справедливы «условия склейки» (18.18)
$$z_\alpha(1) = y_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad z'_\alpha(1) = y'_\alpha(1) = b_1(\alpha).$$
Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (18.11), (18.17) при $r = 1$ и «условий склейки» (18.18) следует, что
$$z''_\alpha(1) = y''_\alpha(1).$$

Лемма 18.2. *Функция* (18.26) *обладает следующими свойствами*:

1. $L_a\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0$ *при* $r \geqslant 0$, $t > 0$,
2. $\Gamma_\alpha(r_1) > \Gamma_\alpha(r_2)$ *при* $r_1 > r_2 > 0$,
3. $\Gamma_{\alpha_1}(r) > \Gamma_{\alpha_2}(r)$ *при* $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$,
4. $\Gamma_\alpha(r) = Cr^\delta(1 + \varepsilon(r))$, $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$.

Доказательство. Из (18.13) и (18.25) получим, что $\Gamma_\alpha(r)$ удовлетворяет свойству 1.

Свойство 2 при $r \leqslant 1$ непосредственно вытекает из (18.14) и (18.15), а при $r \geqslant 1$ из утверждения 2 леммы 18.1.

Докажем свойство 3. Пусть $\alpha_1 > \alpha_2$, $\Gamma > 0$. При $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ определим по формуле (18.26) $\Gamma_{\alpha_1}(r)$ и $\Gamma_{\alpha_2}(r)$ и рассмотрим выражение
$$W(r) = r^{s-1}[\Gamma'_{\alpha_1}\Gamma_{\alpha_2}(r) - \Gamma_{\alpha_1}\Gamma'_{\alpha_2}]. \tag{18.27}$$
Дифференцируя функцию $W(r)$ по r и учитывая, что при $r \leqslant 1$ функции
$$\Gamma_{\alpha_1}(r) = z_{\alpha_1}(r), \quad \Gamma_{\alpha_2}(r) = z_{\alpha_2}(r)$$
удовлетворяют уравнению (18.11), при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, соответственно, а при $r \geqslant 1$ функции
$$\Gamma_{\alpha_1}(r) = y_{\alpha_1}(r), \quad \Gamma_{\alpha_2}(r) = y_{\alpha_2}(r)$$
удовлетворяют уравнению (18.17) при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, соответственно, получим
$$W'(r) = \frac{s-1}{r}W(r) + r^{s-1}[\Gamma''_{\alpha_1}\Gamma_{\alpha_2} - \Gamma_{\alpha_1}\Gamma''_{\alpha_2}] =$$
$$= \frac{s-1}{r}W(r) - \frac{s-1}{r}W(r) - \frac{r^{s-1}}{\lambda_1^2}\Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(a_{\alpha_1}(r) - a_{\alpha_2}(r)) > 0, \tag{18.28}$$
где $a_{\alpha_1}(r)$, $a_{\alpha_2}(r)$ — это значения функция (18.2) при $\alpha = \alpha_1$, $\alpha = \alpha_2$, соответственно. Так как $W(0) = 0$, то из (18.28) следует неравенство $W(r) > 0$ при $r > 0$.

Следовательно,
$$\left(\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)}\right)' = \frac{W(r)}{r^{s-1}\Gamma^2_{\alpha_2}(r)} > 0 \quad \text{при } r > 0,\ \alpha_1 > \alpha_2.$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая, что

$$\frac{\Gamma_{\alpha_1}(0)}{\Gamma_{\alpha_2}(0)} = 1,$$

получим

$$\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)} - 1 = \int\limits_0^r \frac{W(\tau)}{\tau^{s-1}\Gamma^2_{\alpha_2}(\tau)} d\tau > 0.$$

Свойство 3 доказано.

Докажем асимптотическую формулу 4. Из представления (18.20) при $r \to \infty$ будем, очевидно, иметь

$$\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{\delta_1}[1 + \frac{C_2}{C_1} r^{\delta_2-\delta_1}] = C_1 r^{\delta_1}[1 + \varepsilon(r)],$$

где

$$\varepsilon(r) = \frac{C_2}{C_1} r^{\delta_2-\delta_1} = \frac{C_2}{C_1} r^{-\sqrt{D}} \to 0, \quad r \to \infty,$$
$$D = (s-2)^2 + \frac{4\alpha^2}{\lambda_2^2} > 0.$$

Докажем, что постоянная C_1 в (18.20) является положительной. В самом деле, если это не так, т. е. $C_1 < 0$, тогда из асимптотики (18.20) мы получили бы, что

$$\Gamma_\alpha(r) \to -\infty \quad \text{при } r \to \infty,$$

что противоречит свойству 3 леммы 18.1. Свойство 4 доказано. Лемма 18.2 доказана. □

2. В области $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$, $N \geqslant 3$ построим стационарные решения $\Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_b\Gamma_\alpha = \Lambda(x,t)\Gamma_\alpha + (b(x,t), \nabla\Gamma_\alpha) + b_\alpha(r)\Gamma_\alpha \leqslant 0, \tag{18.29}$$

где $\Lambda(x,t)$ — оператор (1.6), для $b_i(x,t)$, $i = 1, \ldots, N$ выполнены условия (B_3) и коэффициент $b_\alpha(r)$ определен по формуле

$$b_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2, & r \leqslant 1, \\ -\dfrac{\alpha^2}{r^{2k}}, & r \geqslant 1. \end{cases} \tag{18.30}$$

Будем искать решения неравенства (18.29) такие, что $\Gamma_\alpha(r) > 0$, $\Gamma'_\alpha \geqslant 0$ при $r \to \infty$,

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_1 r^{\frac{k-s+1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha}{\lambda_1(1-k)} r^{1-k}\right), \tag{18.31}$$

s — постоянная (18.6).

Применяя формулы (16.4), будем иметь

$$L_b\Gamma_\alpha(r) = Q\left\{\Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r} + \sum_{i=1}^N \frac{a_{ii} + b_i x_i}{Q}\frac{\Gamma'_\alpha}{r} + b_\alpha(r)\Gamma_\alpha\right\}. \tag{18.32}$$

Применяя в (18.32) неравенства (18.8) и учитывая, что $b_\alpha(r) = -\alpha^2$ при $r \leqslant 1$, получим

$$L_b\Gamma_\alpha \leqslant Q\left[\Gamma''_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha - \overline{\alpha}^2\Gamma_\alpha\right], \tag{18.33}$$

где нами были использованы обозначения (18.5), (18.10).

Рассмотрим для функции $Z_\alpha(r)$, $r \geqslant 0$ задачу (18.11), (18.12) и, полагая, как и выше, $\Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r)$, где $Z_\alpha(r)$ — решение задачи (18.11), (18.12), получим из (18.33) неравенство

$$L_b\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad 0 < r \leqslant 1,\ t > 0. \tag{18.34}$$

При $r \geqslant 1$ имеет место равенство

$$b_\alpha(r) = -\frac{\alpha^2}{r^{2k}}, \quad 0 < k < 1.$$

Поэтому, применяя в (18.32) неравенство (18.8), будем иметь

$$L_b\Gamma_\alpha(r) \leqslant Q\left[\Gamma''_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2 r^{2k}}\Gamma_\alpha\right]. \tag{18.35}$$

Рассмотрим для функции $x_\alpha(r)$ при $r \geqslant 1$ задачу

$$x''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}x'_\alpha(r) - \frac{\overline{\alpha}^2}{r^{2k}}x_\alpha(r) = 0, \quad r > 0 \tag{18.36}$$

$$x_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad x'_\alpha(1) = b_1(\alpha), \tag{18.37}$$

где были использованы обозначения (18.6), (18.10), а постоянные $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ определены в (18.15). Ясно, что решение задачи (18.36), (18.37) существует и единственно [1, 60].

Изучим качественные свойства решений задачи (18.36), (18.37).

Лемма 18.3. *Решение задачи* (18.36), (18.37) *обладает следующими свойствами*:

1. $x_\alpha(r) > 0$, $r \geqslant 1$,
2. $x'_\alpha(r) > 0$, $r \geqslant 1$,
3. $\lim\limits_{r\to+\infty} x_\alpha(r) = +\infty$.

Доказательство. Доказательство свойств 1 и 2 проводится аналогично доказательству свойств 1 и 2 в лемме 18.1, если учесть, что уравнение (18.36) можно записать в виду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{s-1}\frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}r}\right) = \overline{\alpha}^2 r^{s-1-2k}x_\alpha(r), \quad r > 1.$$

Докажем свойство 3. Интегрируя (18.36) и учитывая (18.37), получим

$$x_\alpha(r) - b_0(\alpha) = \int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}x_\alpha}{\mathrm{d}\tau}d\tau > \overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau\int\limits_1^\tau \sigma^{s-1-2k}d\sigma =$$

$$= \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s-2k}\left[\int\limits_1^r \tau^{1-s}(\tau^{s-2k}-1)d\tau\right] = \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s-2k}\left[\frac{r^{2-2k}-1}{2-2k} - \frac{r^{2-s}-1}{2-s}\right] \to \infty \quad \text{при } r \to \infty.$$

Так как $2k < 2$, $2 - s < 0$,

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} > 1 + \frac{(N-1)\lambda_1^2}{\lambda_1^2} + \frac{B}{\lambda_0^2} > N > 2.$$

Утверждение 3 леммы 18.3 доказано. Лемма 18.3 доказана. □

Положим в (18.35)

$$\Gamma_\alpha = x_\alpha(r),$$

где $x_\alpha(r)$ — решение задачи (18.36), (18.37), при этом получим неравенство

$$L_b\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 1,\ t > 0. \tag{18.38}$$

Нами определена функция

$$\Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} z_\alpha(r), & r \leqslant 1,\\ x_\alpha(r), & r \geqslant 1,\end{cases} \tag{18.39}$$

где $z_\alpha(r)$ — решение задачи (18.11), (18.12), $x_\alpha(r)$ — решение задачи (18.36), (18.37).

Очевидно, что функция (18.39) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функций и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ по построению справедливы «условия склейки» (18.37)

$$z_\alpha(1) = x_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad z'_\alpha(1) = x'_\alpha(1) = b_1(\alpha).$$

Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (18.11) и (18.36) при $r = 1$ и условий склейки (18.37) следует, что

$$z''_\alpha(1) = x''_\alpha(1).$$

Лемма 18.4. *Функция* (18.39) *обладает следующими свойствами*:

1. $L_b\Gamma_\alpha \leqslant 0$ *при* $r \geqslant 0$, $t > 0$,
2. $\Gamma_\alpha(r_1) > \Gamma_\alpha(r_2)$ *при* $r_1 > r_2$,
3. $\Gamma_{\alpha_1} > \Gamma_{\alpha_2}$ *при* $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$,
4. $\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{\frac{k-s+1}{2}} \exp\left\{\dfrac{\alpha}{\lambda_1(1-k)} r^{1-k}\right\}[1+\varepsilon(r)]$, $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0$, $C_1 > 0$, $0 < k < 1$.

Доказательство. Из (18.34) и (18.38) следует, что функция (18.39) удовлетворяет свойству 1. Свойство 2 при $r \leqslant 1$ непосредственно вытекает из (18.14), (18.15), а при $r \geqslant 1$ из утверждения 2 леммы (18.3). Докажем свойство 3. Пусть $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$, тогда, определяя $\Gamma_\alpha(r)$ по формуле (18.39) и вводя соответствующую функцию $w(r)$ по формуле (18.27), после дифференцирования получим неравенство

$$w'(r) = \frac{s-1}{r}w(r) - \frac{s-1}{r}w(r) - \frac{r^{s-1}}{\lambda_1^2}\Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r)(b_{\alpha_1}(r) - b_{\alpha_2}(r)) > 0. \tag{18.40}$$

где $b_{\alpha_1}(r), b_{\alpha_2}(r)$ определены в (18.30) при $\alpha = \alpha_1, \alpha = \alpha_2$ Так как $w(0) = 0$, то из (18.40) вытекает неравенство

$$w(r) > 0, \quad r > 0.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\Gamma_{\alpha_1}}{\Gamma_{\alpha_2}}\right)' = \frac{w(r)}{r^{s-1}\Gamma_{\alpha_2}(r)^2} > 0,\ r > 0,\ \alpha_1 > \alpha_2.$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая, что

$$\frac{\Gamma_{\alpha_1}(0)}{\Gamma_{\alpha_2}(0)} = 1,$$

получим

$$\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)} - 1 = \int\limits_0^r \frac{w(\tau)}{\tau^{s-1}\Gamma_{\alpha_2}^2}d\tau > 0.$$

Свойство 3 доказано.

Докажем асимптотическую формулу 4. В уравнении (18.36) сделаем замену

$$x_\alpha(r) = U(r) r^{\frac{1-s}{2}},$$

при этом получим, что функция $U(r)$ является решением задачи

$$U'' - U\Big(\frac{\overline{\alpha}^2}{r^{2k}} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}\Big) = 0, \quad r > 1 \tag{18.41}$$

$$U|_{r=1} = b_0(\alpha), \quad U'|_{r=1} = b_1(\alpha) + \frac{s-1}{2}b_0(\alpha) = b_2(\alpha) > 0, \tag{18.42}$$

где $b_0(\alpha)$, $b_1(\alpha)$ из (18.15).

Пусть

$$q(r) = \frac{\overline{\alpha}^2}{r^{2k}} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}, \quad r > 1, \tag{18.43}$$

тогда задачу (18.42), (18.43) можно привести в виду

$$U'' - q(r)U = 0, \quad r > 1, \tag{18.44}$$

$$U(1) = b_0(\alpha), \quad U'(1) = b_2(\alpha), \tag{18.45}$$

где b_0 и b_1, b_2 определены в (18.15) и (18.42).

Ясно, что $q(r) > 0$ при $r > 1$, $q''(r)$ — непрерывная функция при $r > 1$ и, кроме того, как легко проверить, сходится следующий интеграл:

$$\int\limits_1^\infty |\beta(r)|dr < \infty, \quad \text{где} \quad \beta(r) = \frac{1}{8}\frac{q''(r)}{q^{3/2}(r)} - \frac{5}{32}\frac{(q'(r))^2}{q^{5/2}(r)},$$

и существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{q'(r)}{q^{3/2}(r)} = 0.$$

Поэтому для решения уравнения (18.44) выполнены все условия известной теоремы об асимптотике Грина—Лиувилля [60]. По этой теореме существует фундаментальная система решений $t_1(r), t_2(r)$ уравнения (18.44) такая, что

$$t_{1,2}(r) = q^{-1/4}(r)\exp\left(\pm S(r)\right)[1 + \varepsilon_{1,2}(r)], \tag{18.46}$$

где

$$S(r) = \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)}d\tau \to \infty, \quad \varepsilon_{1,2}(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Эту асимптотику можно дифференцировать:

$$t'_{1,2}(r) = \pm q^{1/4}\exp\left(\pm S(r)\right)[1 + \varepsilon_{3,4}(r)], \tag{18.47}$$

$$\varepsilon_{3,4}(r) \to 0 \quad \text{при } r \to \infty.$$

Применяя формулу Остроградского—Лиувилля и формулы (18.46), (18.47), вычислим определитель Вронского:

$$t_1(r)t'_2(r) - t'_1(r)t_2(r) = -2. \tag{18.48}$$

Поэтому эти решения $t_1(r)$ и $t_2(r)$ уравнения (18.44) линейно независимы.

Так как

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)}d\tau = +\infty,$$

то решение $t_1(r)$ монотонно возрастает и

$$\lim_{r\to\infty} t_1(r) = +\infty, \tag{18.49}$$

а решение $t_2(r)$ монотонно убывает и

$$\lim_{r\to\infty} t_2(r) = 0. \tag{18.50}$$

Решение уравнения (18.44) с заданными условиями (18.45) при $r = 1$ будем искать в виде

$$U(r) = C_1t_1(r) + C_2t_2(r), \tag{18.51}$$

где постоянные C_1, C_2 однозначно определены из системы

$$\begin{aligned} C_1t_1(1) + C_2t_2(1) &= b_0(\alpha), \\ C_1t'_1(1) + C_2t'_2(1) &= b_2(\alpha) \end{aligned}$$

с ненулевым определителем (18.48). Докажем, что

$$C_1 > 0. \tag{18.52}$$

В противном случае при $C_1 < 0$ из (18.51), (18.50), (18.49) мы бы получили

$$\Gamma_\alpha(r) = x_\alpha(r) = U(r)r^{\frac{1-s}{2}} \to -\infty \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

что противоречит утверждению 3 леммы 18.3, согласно которому

$$\lim_{r\to\infty} x_\alpha(r) = \lim_{r\to\infty}\Gamma_\alpha(r) = \lim_{r\to\infty}\frac{U(r)}{r^{\frac{s-1}{2}}} = \infty,$$

следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} U(r) = +\infty,$$

где $U(r)$ — решение (18.51) уравнения (18.44).

Таким образом из (18.51), (18.52), (18.49), (18.50) следует, что

$$U(r) \sim C_1t_1(r) \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Подставляя (18.43) в формулу (18.46) для $t_1(r)$, получим для $\Gamma_\alpha(r)$ асимптотику 4. Лемма 18.4 доказана. □

3. В области $D = \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$, $N \geqslant 3$ рассмотрим стационарное решение $\Gamma = \Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_h\Gamma_\alpha = \Lambda(x,t)\Gamma_\alpha + (b(x,t), \nabla\Gamma_\alpha) + k_\alpha(r)\Gamma_\alpha \leqslant 0. \tag{18.53}$$

где $\Lambda(x,t)$ — оператор (1.6) введения, $b_i(x,t)$, $i=1,\ldots,N$ удовлетворяют условиям (B_3), а $k_\alpha(r)$ определена по формуле

$$k_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } r \leqslant 1, \\ -\alpha^2 r^{2\ell} & \text{при } r \geqslant 1. \end{cases} \tag{18.54}$$

Будем искать решение $\Gamma_\alpha(r)$ неравенства (18.53) такое, что $\Gamma_\alpha(r) > 0$, $\Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0$,

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_1 r^{-\frac{s+\ell-1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha}{(1+\ell)\lambda_1} r^{1+\ell}\right), \tag{18.55}$$

где $C_1 > 0$, $0 < \ell < 1$, λ_1 — постоянная из (1.4), s — постоянная (18.6). Применяя формулы (16.4), получим

$$L_h\Gamma_\alpha(r) = Q\left(\Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r} + \sum_{i=1}^N \frac{a_{ii} + b_i x_i}{Q} + \frac{k_\alpha(r)}{Q}\Gamma_\alpha\right). \tag{18.56}$$

Применяя в (18.56) неравенства (18.8) и учитывая, что

$$k_\alpha(r) = -\alpha^2 \quad \text{при} \quad r \leqslant 1,$$

будем иметь

$$L_h\Gamma_\alpha \leqslant Q[\Gamma''_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha - \overline{\alpha}^2\Gamma_\alpha], \tag{18.57}$$

где нами были использованы обозначения (18.6), (18.10). Как и в предыдущих случая, рассмотрим для $Z_\alpha(r)$, $r \geqslant 1$ задачу (18.11), (18.12) и положим

$$\Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r),$$

где Z_α — решение задачи (18.11), (18.12), тогда из (18.57) вытекает неравенство

$$L_h\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1,\, t > 0. \tag{18.58}$$

При $r \geqslant 1$ имеет место равенство

$$k_\alpha(r) = -\alpha^2 r^{2\ell}, \quad 0 < \ell < 1,$$

Поэтому, применяя в (18.56) неравенство (18.8), получим

$$L_h\Gamma_\alpha(r) \leqslant Q[\Gamma'_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2 r^{2\ell}}{\lambda_1^2}\Gamma_\alpha], \tag{18.59}$$

где нами были использованы обозначения (18.6). Рассмотрим для функции $h_\alpha(r)$, $r \geqslant 1$ задачу

$$h''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}h_\alpha(r) - \frac{\alpha^2 r^{2\ell}}{\lambda_1^2}h_\alpha(r) = 0, \quad r > 1, \tag{18.60}$$

$$h_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad h_\alpha(1) = b_1(\alpha), \tag{18.61}$$

где нами были использованы обозначения (18.6), (18.10), а постоянные $b_0(\alpha)$, $b_1(\alpha)$ определены в (18.15). Ясно, что решение задачи (18.60), (18.61) существует и единственно [1,4].

Изучим качественные свойства решений задачи (18.60), (18.61)

Лемма 18.5. *Решение задачи* (18.60), (18.61) *обладает следующими свойствами*:

1. $h_\alpha(r) > 0$, $r \geqslant 1$,
2. $h'_\alpha(r) > 0$, $r \geqslant 1$,
3. $\lim\limits_{r\to\infty} h_\alpha(r) = +\infty$.

Доказательство. Доказательство свойств 1 и 2 проводится аналогично доказательству свойств 1 и 2 в лемме 18.1, если учесть, что уравнение (18.60) можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^{s-1}\frac{\mathrm{d}h_\alpha}{\mathrm{d}r}\right) = \overline{\alpha}^2 r^{s-1+2\ell} h_\alpha(r), \quad r > 1.$$

Докажем свойство 3. Интегрируя (18.60) и учитывая (18.61), получим

$$h_\alpha(r) - b_0(\alpha) = \int\limits_1^r \frac{\mathrm{d}h_\alpha(\tau)}{\mathrm{d}\tau} d\tau > \overline{\alpha}^2 b_0(\alpha) \int\limits_1^r \tau^{1-s} d\tau \int\limits_1^\tau \sigma^{s-1+2\ell} d\sigma =$$

$$= \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s+2\ell} \left[\int\limits_1^r \tau^{1-s}(\tau^{s+2\ell}-1)d\tau \right] = \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s+2\ell} \left[\frac{r^{2+2\ell}}{2+2\ell} - \frac{r^{2-s}-1}{2-s} \right] \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

ибо

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} > N > 2.$$

Утверждение 3 доказано. Лемма 18.5 доказана. □

Положим в (18.59) $\Gamma_\alpha(r) = h_\alpha(r)$, где $h_\alpha(r)$ — решение задачи (18.60), (18.61), при этом получим

$$L_h \Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 1,\, t > 0. \tag{18.62}$$

Нами определена функция

$$\Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} z_\alpha(r) & \text{при } r \leqslant 1, \\ h_\alpha(r) & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{18.63}$$

где $z_\alpha(r)$ — решение задачи (18.11), (18.12), $h_\alpha(r)$ — решение задачи (18.60), (18.61).

Очевидно, что функция (18.63) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функции и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ по построению справедливы «условия склейки» (18.61)

$$z_\alpha(1) = h_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad z'_\alpha(1) = h'_\alpha(1) = b_1(\alpha).$$

Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (18.11), (18.60) при $r = 1$ и «условий склейки» (18.61) следует, что

$$z''_\alpha(1) = h''_\alpha(1).$$

Лемма 18.6. *Функция* (18.63) *обладает следующими свойствами*:

1. $L_h \Gamma_\alpha(r) \leqslant 0$ *при* $r \geqslant 0$, $t > 0$,
2. $\Gamma_\alpha(r_1) > \Gamma_\alpha(r_2)$, $r_1 > r_2$,
3. $\Gamma_{\alpha_1}(r) > \Gamma_{\alpha_2}(r)$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$,
4. $\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{-\frac{s+\ell-1}{2}} \exp\left(\dfrac{\alpha}{\lambda_1(1+\ell)} r^{1+\ell} \right) [1 + \varepsilon(r)]$, *где* $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0$, $C_1 > 0$, $0 < \ell < 1$, s — *постоянная* (18.6).

Доказательство. Из (18.58), (18.62) следует, что функция (18.63) удовлетворяет свойству 1. Свойство 2 при $r \leqslant 1$ непосредственно вытекает из (18.14), (18.15), а при $r \geqslant 1$ — из утверждения 2 леммы 18.5. Докажем свойство 3. Пусть $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$, тогда определим $\Gamma_\alpha(r)$ по формуле (18.63), введем соответствующую функцию $W(r)$ по формуле (18.27) и после дифференцирования получим неравенство

$$W'(r) = \frac{s-1}{r} W(r) - \frac{s-1}{r} W(r) - \frac{s-1}{\lambda_1^2} \Gamma_{\alpha_1}(r) \Gamma_{\alpha_2}(r) (k_{\alpha_1}(r) - k_{\alpha_2}(r)) > 0. \tag{18.64}$$

Так как $W(0) = 0$, то из (18.64) вытекает неравенство $W(r) > 0$, $r > 0$. Следовательно,

$$\left(\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)} \right)' = \frac{W(r)}{r^{s-1} \Gamma^2_{\alpha_2}(r)} > 0, \quad r > 0,\, \alpha_1 > \alpha_2.$$

Отсюда аналогично леммам 18.2, 18.4 следует, что

$$\Gamma_{\alpha_1}(r) > \Gamma_{\alpha_2(r)} \quad \text{при} \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Свойство 3 доказано. Докажем асимптотическую формулу 4. В уравнении (18.60) сделаем замену

$$h_\alpha(r) = H(r) r^{\frac{1-s}{2}},$$

при этом получим, что функция $H(r)$ является решением задачи

$$H'' - H\left(\overline{\alpha}^2 r^{2\ell} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}\right) = 0, \quad r > 1, \tag{18.65}$$

$$H|_{r=1} = b_0(\alpha), \quad H'|_{r=1} = b_1(\alpha) + \frac{s-1}{2} b_0(\alpha) = b_2(\alpha), \tag{18.66}$$

где b_0 и b_1 определены в (18.15).

Пусть

$$q(r) = \overline{\alpha}^2 r^{2\ell} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}, \quad r > 1. \tag{18.67}$$

Тогда задачу (18.65), (18.66) можно записать в виде

$$H'' - q(r)H = 0, \quad r > 1, \tag{18.68}$$

$$H(1) = b_0(\alpha), \quad H'(1) = b_2(\alpha), \tag{18.69}$$

Ясно, что $q(r) > 0$ при $r > 1$, $q''(r)$ — непрерывная функция при $r > 1$ и, кроме того, как легко видеть, сходится следующий интеграл:

$$\int\limits_1^\infty |\beta(r)| dr, \quad \text{где } \beta(r) = \frac{1}{8}\frac{q''(r)}{q^{3/2}(r)} - \frac{5}{32}\frac{(q'(r))^2}{q^{5/2}(r)},$$

и существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{q'(r)}{q^{3/2}(r)} = 0.$$

Поэтому для решений уравнения (18.65) выполнены все условия известной теоремы об асимптотике Грина—Лиувилля [60]. По этой теореме существует фундаментальная система решений $x_1(r)$, $x_2(r)$ уравнения (18.68) такая, что

$$x_{1,2} = q^{-1/4}(r) \exp\left(\pm S(r)\right) [1 + \varepsilon_{1,2}(r)], \tag{18.70}$$

где

$$S(r) = \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)} d\tau \to 0, \quad \varepsilon_{1,2}(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

и эту асимптотику можно дифференцировать:

$$x'_{1,2}(r) = \pm q^{1/4} \exp\left(\pm S(r)\right) [1 + \varepsilon_{3,4}(r)], \tag{18.71}$$

$\varepsilon_{3,4}(r) \to 0$, $r \to \infty$.

Применяя формулу Остроградского—Лиувилля [4] и формулы (18.70), (18.71), вычислим определитель Вронского:

$$x_1(r)x_2'(r) - x_1'(r)x_2(r) = -2. \tag{18.72}$$

Поэтому решения $x_1(r)$, $x_2(r)$ линейно независимы. Так как

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)} d\tau \to \infty,$$

то решение $x_1(r)$ монотонно возрастает:

$$\lim_{r\to\infty} x_1(r) = \infty, \tag{18.73}$$

а решение $x_2(r)$ монотонно убывает:

$$\lim_{r\to\infty} x_2(r) = 0. \tag{18.74}$$

Решение уравнения (18.68) с заданными условиями (18.69) при $r = 1$ будем искать в виде

$$H(r) = C_1 x_1(r) + C_2 x_2(r), \tag{18.75}$$

где постоянные C_1 и C_2 однозначно определяются из системы

$$\begin{gathered} C_1 x_1(1) + c_1 2 x_2(1) = b_0(\alpha), \\ C_1 x_1'(1) + C_2 x_2'(1) = b_2(\alpha) \end{gathered}$$

с ненулевым определителем (18.72), а $b_0(\alpha)$ и $b_2(\alpha)$ определяются из (18.15), (18.42). Докажем, что

$$C_1 > 0. \tag{18.76}$$

В противном случае при $C_1 < 0$ из (18.75), (18.73), (18.74) мы получили бы

$$\Gamma_\alpha(r) = h_\alpha(r) = H(r)r^{\frac{1-s}{2}} \to \infty \quad \text{при } r \to -\infty,$$

что противоречит утверждению 4 леммы 18.5, согласно которому

$$\lim_{r\to\infty} h_\alpha(r) = \lim_{r\to\infty} \Gamma_\alpha(r) = \lim_{r\to\infty} H(r)r^{\frac{1-s}{2}} = +\infty,$$

следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} H(r) = \infty,$$

где $H(r)$ — решение (18.75) уравнения (18.68). Таким образом, из (18.75), (18.76), (18.73), (18.74) следует, что

$$H(r) \sim C_1 x_1(r) \quad \text{при } r \to \infty.$$

Вставляя (18.67) в формулу (18.70) для $x_1(r)$, получим для

$$\Gamma_\alpha(r) = H(r)r^{\frac{1-s}{2}}$$

асимптотику 4. Лемма 18.6 доказана. □

19. О стабилизации суперрешений параболических уравнений

При $0 < k \leqslant 1$, $\alpha > 0$ определим функцию $a_\alpha(r)$ и оператор L_b по формулам

$$b_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2, & r \leqslant 1, \\ -\dfrac{\alpha^2}{r^{2k}}, & r \geqslant 1, \end{cases} \tag{19.1}$$

$$L_b v \equiv \Lambda(x, t)v + (b(x, t), \nabla v) + b_\alpha(r)v, \tag{19.2}$$

где $\Lambda(x, t)$ — оператор, определенный в формуле (1.6), и пусть выполнены условия (B_3) для коэффициентов $b_i(x, t)$, $i = 1, \ldots, N$.

Лемма 19.1. *Для любых $R > 1$, $\alpha > 0$, $0 < k \leqslant 1$, $B > 0$ найдется постоянная $A_0(R, \alpha, B, k) > 0$ такая, что при $A \geqslant A_0$ и $\lambda = e^{-A}$ для функции*

$$v(r) = 1 - \exp\left[A\left(\frac{r^2}{4R^2} - 1\right)\right], \quad 0 \leqslant r \leqslant 2R \tag{19.3}$$

справедливы утверждения:

1. *выполнено*
$$L_b v(r) + \lambda v(r) < 0, \quad r < R; \tag{19.4}$$
2. *для функции*
$$p(x, t) = v(r)e^{-\lambda t} \tag{19.5}$$
справедливы соотношения
$$\mathcal{L} \equiv L_b p(x, t) - \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} \leqslant 0, \quad |x| < R,\ t > 0, \tag{19.6}$$
$$p(x, t)|_{|x|=R} = (1 - e^{-3/4})e^{-\lambda t} > 0, \tag{19.7}$$
$$p(x, t)|_{t=0} = v(r), \quad |x| < R, \tag{19.8}$$
$$\lim_{t\to\infty} p(x, t) = 0 \tag{19.9}$$
равномерно по x на каждом компакте $K = \{|x| < R\}$.

Доказательство. Проводя вычисления, будем иметь

$$L_b v + \lambda v = -\psi \frac{A^2}{4R^2} \sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik} x_i x_k - \psi \frac{A}{2R^2} \sum_{i=1}^{N} a_{ii} - \psi \frac{A}{2R^2} \sum_{i=1}^{N} b_i x_i + b_\alpha(r) v(r) + \lambda v, \tag{19.10}$$

где

$$\psi(r) = \exp\left[A\left(\frac{r^2}{4R^2} - 1\right)\right] > 0.$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского [39], в силу условия (B_3) будем иметь в шаре B_R неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{N} b_i x_i\right| \leqslant r \sqrt{\sum_{i=1}^{N} b_i^2(x,\,t)} \leqslant BR. \tag{19.11}$$

Учитывая в (19.10) неравенства (19.11) и (18.8) и отбрасывая при этом слагаемые

$$-\psi \frac{A^2}{4R^2} \sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik} x_i x_k < 0, \quad -\psi \frac{A}{2R^2} \sum_{i=1}^{N} a_{ii} < 0,$$

будем иметь в шаре B_R следующее неравенство:

$$L_b v + \lambda v \leqslant \psi(r)\left[\frac{AB}{2R} + v(r) b_\alpha(r) \exp\left(A\left(\frac{r^2}{4r^2} - 1\right)\right) + \exp\left(-A\frac{r^2}{4R^2}\right) v(r)\right] < 0. \tag{19.12}$$

Докажем (19.12). Положим

$$s_1(r) = \frac{AB}{2R} + + v(r) b_\alpha(r) \exp\left(A\left(\frac{r^2}{4r^2} - 1\right)\right) + \exp\left(-A\frac{r^2}{4R^2}\right) v(r). \tag{19.13}$$

При $1 \leqslant r \leqslant R$ учтем в (19.13) неравенства

$$\frac{\alpha^2}{r^{2k}} \leqslant \alpha^2, \quad -\frac{\alpha^2}{r^{2k}} \leqslant -\frac{\alpha^2}{R^{2k}}, \quad \exp\left(-A\frac{r^2}{4R^2}\right) v(r) \leqslant 1,$$

и получим

$$s_1(r) \leqslant \frac{AB}{2R} + \alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{R^{2k}} \exp\left(\frac{3}{4}A\right). \tag{19.14}$$

Выберем A_0 из условия

$$\frac{\alpha^2}{R^{2k}} \exp\left(\frac{3}{4}A\right) > \frac{A_0 B}{2R} + \alpha^2 + 1. \tag{19.15}$$

При $A \geqslant A_0$ из (19.14) и (19.15) следует, что

$$s_1(r) < 0, \quad 1 \leqslant r \leqslant R. \tag{19.16}$$

При $A \geqslant A_0$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$ для $s_1(r)$ в силу (19.15) имеет место неравенство

$$s_1(r) \leqslant \frac{AB}{2R} + \alpha^2 + 1 - \alpha^2 \exp\left(\frac{3}{4}A\right) \leqslant \frac{AB}{2R} + \alpha^2 + 1 - \frac{\alpha^2}{R^{2k}} \exp\left(\frac{3}{4}A\right) < 0. \tag{19.17}$$

Из (19.13), (19.16), (19.17) следует, что неравенство (19.12) доказано. Соотношения (19.6)–(19.9) для функции (19.5) после этого очевидны. Лемма 19.1 доказана. □

При $0 < \ell < 1$, $\alpha > 0$ введем функцию $h_\alpha(r)$ и оператор $L_h u$ по формулам

$$k_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2, & r \leqslant 1, \\ -\alpha^2 r^{2\ell}, & r \geqslant 1, \end{cases} \tag{19.18}$$

$$L_h u \equiv \Lambda(x,\,t) u + (b(x,\,t), \nabla u) + k_\alpha(r) u, \tag{19.19}$$

где $\Lambda(x,\,t)$ — оператор, определенный в формуле (1.6), и выполнены условия (B_3) для коэффициентов $b_i(x,\,t)$, $i = 1, \ldots, N$.

Лемма 19.2. *Для любых* $R > 1$, $\alpha > 0$, $0 < \ell \leqslant 1$, $B > 0$ *найдется постоянная* $d_0(R, \alpha, B, k) > 0$ *такая, что при* $d \geqslant d_0$ *и* $\lambda = e^{-d}$ *для функции*

$$u(r) = 1 - \exp\left[d\left(\frac{r^2}{4R^2} - 1\right)\right], \quad 0 \leqslant r \leqslant 2R \tag{19.20}$$

справедливы утверждения:

1. *выполнено*
$$L_h u(r) + \lambda u(r) < 0, \quad r < R; \tag{19.21}$$
2. *для функции*
$$q(x, t) = u(r)e^{-\lambda t} \tag{19.22}$$
справедливы соотношения
$$\mathcal{L}_h u \equiv L_h q(x, t) - \frac{\partial q(x, t)}{\partial t} \leqslant 0, \quad |x| < R, \, t > 0, \tag{19.23}$$
$$q(x, t)|_{|x|=R} = (1 - e^{-3/4})e^{-\lambda t} > 0, \tag{19.24}$$
$$q(x, t)|_{t=0} = u(r), \quad |x| < R, \tag{19.25}$$
$$\lim_{t\to\infty} q(x, t) = 0. \tag{19.26}$$

Доказательство. Проводя вычисления, будем иметь

$$L_h u + \lambda u = -\eta\frac{d^2}{4R^4}\sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}x_i x_k - \eta\frac{d}{2R^2}\sum_{i=1}^{N} a_{ii} - \eta\frac{d}{2R^2}\sum_{i=1}^{N} b_i x_i + k_\alpha(r)u(r) + \lambda u(r), \tag{19.27}$$

где

$$\eta(r) = \exp\left[d\left(\frac{r^2}{4R^2} - 1\right)\right].$$

Применяя неравенство Коши—Буняковского [39], в силу условия (B_3) получим неравенство (18.9). Учитывая в (19.27) неравенства (18.8) и отбрасывая при этом слагаемые

$$-\eta\frac{d^2}{4R^4}\sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}x_i x_k < 0, \quad -\eta\frac{d}{2R^2}\sum_{i=1}^{N} a_{ii} < 0,$$

будем иметь в шаре B_R неравенство

$$L_h u(r) + \lambda u(r) < \eta(r)\left[\frac{B}{2R} + u(r)k_\alpha(r)\exp\left[d\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right)\right] + \exp\left(-\frac{dr^2}{4R^2}\right)u(r)\right] < 0. \tag{19.28}$$

Докажем (19.28). Положим

$$s_2(r) = \frac{dB}{2R} + u(r)k_\alpha(r)\exp\left[d\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right)\right] + \exp\left(-\frac{dr^2}{4R^2}\right). \tag{19.29}$$

При $1 \leqslant r \leqslant R$ учтем в (19.28) неравенства

$$r^{2\ell}\alpha^2 \leqslant \alpha^2 R^{2\ell} < \alpha^2 R^2, \qquad -\alpha^2 r^{2\ell} \leqslant -\alpha^2, \qquad \exp\left(-\frac{r^2}{4R^2}\right)u(r) \leqslant 1$$

и получим

$$s_2(r) \leqslant \frac{dB}{2R} + \alpha^2 R^2 + 1 - \alpha^2\exp\left(\frac{3}{4}d\right). \tag{19.30}$$

Выберем $d_0 > 0$ из условия

$$\alpha^2\exp\left(\frac{3}{4}d_0\right) > \frac{d_0 B}{2R} + \alpha^2 R^2 + 1. \tag{19.31}$$

При $d > d_0$ из (19.30), (19.31) следует, что

$$s_2(r) < 0 \quad \text{при } 1 \leqslant r \leqslant R. \tag{19.32}$$

При $d > d_0$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$ для $s_2(r)$ в силу выбора d_0 имеем

$$s_2(r) \leqslant \frac{dB}{2R} + \alpha^2 + 1 - \alpha^2\exp\left(\frac{3}{4}d\right) \leqslant \frac{dB}{2R} + \alpha^2 R^2 + 1 - \alpha^2\exp\left(\frac{3}{4}d\right) < 0. \tag{19.33}$$

Из (19.29), (19.32), (19.33) вытекает, что неравенство (19.28) доказано. Соотношения (19.24)–(19.26) для функции (19.22) после этого очевидно. Лемма 19.2 доказана. □

20. Доказательство теоремы 20.1

Теорема 20.1. *Пусть функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию роста*

$$|u_0(x)| \leqslant C(1+|x|^m), \tag{20.1}$$

коэффициенты $b_i(x,\,t)$, $i=1,\ldots,N$ удовлетворяют условию (B_3)

$$\sup_D (1+|x|)\sqrt{\sum_{i=1}^{N}|b_i(x,\,t)|^2} = B < \infty, \tag{20.2}$$

коэффициент $c(x,\,t)$ удовлетворяет условию (C_6)

$$c(x,\,t) \leqslant a_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2, & |x| \leqslant 1, \\ -\dfrac{\alpha^2}{r^2}, & |x| \geqslant 1 \end{cases} \tag{20.3}$$

при

$$\alpha^2 > \lambda_1^2 m(m+s-2) = \alpha_0^2, \tag{20.4}$$

где

$$s = \frac{\lambda_1^2(N-1)+\lambda_0^2+B}{\lambda_0^2}. \tag{20.5}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\Lambda(x,\,t)u + (b(x,\,t),\nabla u) + c(x,\,t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{20.6}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{20.7}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0 \tag{20.8}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Наряду с задачей Коши (20.6), (20.7) рассмотрим задачу Коши

$$\Lambda(x,\,t)w_\alpha + (b(x,\,t),\nabla w_\alpha) + a_\alpha(r)w_\alpha - w_{\alpha t} = 0 \quad \text{в } D \tag{20.9}$$

$$w_\alpha|_{t=0} = u_1(x), \quad u_1(x) = C_1(1+|x|^m), \tag{20.10}$$

где $a_\alpha(r)$ — функция (20.3).

Из принципа максимума [36, § 1] элементарно следует неравенство

Лемма 20.1.

$$|u(x,\,t)| \leqslant w_\alpha(x,\,t) \quad \text{в } D. \tag{20.11}$$

Рассмотрим задачи Коши

$$\Lambda(x,\,t)w_{\alpha1} + (b(x,\,t),\nabla w_{\alpha1}) + a_{\alpha1}(r)w_{\alpha1} - w_{\alpha1t} = 0 \quad \text{в } D \tag{20.12}$$

$$w_{\alpha1}|_{t=0} = u_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{20.13}$$

$$\Lambda(x,\,t)w_{\alpha2} + (b(x,\,t),\nabla w_{\alpha2}) + a_{\alpha2}(r)w_{\alpha2} - w_{\alpha2t} = 0 \quad \text{в } D \tag{20.14}$$

$$w_{\alpha2}|_{t=0} = u_1(x), \quad x\in\mathbb{R}^N. \tag{20.15}$$

Лемма 20.2. *Если $\alpha_2 > \alpha_1$, то для решений задач Коши* (20.12), (20.13) *и* (20.14), (20.15) *таких, что*

$$|w_{\alpha i}(x,\,t)| \leqslant M(1+|x|^m),\ i=1,\,2 \quad \text{в } H_T$$

справедливо неравенство

$$w_{\alpha2}(x,\,t) \leqslant w_{\alpha1}(x,\,t) \quad \text{в } D. \tag{20.16}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$z(x,\, t) = w_{\alpha 2}(x,\, t) - w_{\alpha 1}(x,\, t)$$

и получим, что функция $z(x,\, t)$ удовлетворяет задаче

$$\Lambda(x,\, t)z + (b(x,\, t), \nabla z) + a_{\alpha 2}(r)z - z_t = w_{\alpha 1}(x,\, t)(a_{\alpha 2} - a_{\alpha 1}) > 0 \quad \text{в } D,$$
$$z|_{t=0} = 0.$$

Так как $w_{\alpha i} > 0$ и $a_{\alpha 1}(r) - a_{\alpha 2}(r) > 0$ при $\alpha_2 > \alpha_1$, то из принципа максимума [36, § 1] получим

$$z(x,\, t) < 0 \text{в } H_T \text{ для } \forall T > 0.$$

Из произвольности $T > 0$ получим (20.16). Лемма 20.2 доказана. □

Определим функцию $\Gamma_\alpha(r) > 0$ по формуле (18.26) и учтем,что в силу асимптотики 4 леммы 19.2

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_1 r^{\delta_1} \quad \text{при } r \to \infty, \tag{20.17}$$

где

$$\delta_1 = \frac{2 - s + \sqrt{D}}{2}, \quad D = (s-2)^2 + 4\alpha^2.$$

Заменяя $N + B$ в леммах 11.3, 11.4 на s, где s из (20.5), и проводя совершенно аналогичные доказательства, мы получим следующие утверждения.

Лемма 20.3. *Для* $m > 0$, $R > 0$,

$$\alpha_0^2 = m(m + s - 2)\lambda_1^2$$

существует постоянная $\ell > 0$ *такая, что решение* $w_\alpha(x,\, t)$ *задачи Коши* (20.9), (20.10) *удовлетворяет неравенству*

$$w_{\alpha_0}(x,\, t) \leqslant \ell\Gamma_{\alpha_0}(x), \tag{20.18}$$

где $\Gamma_\alpha(r)$ *— функция* (18.26) *при* $\alpha = \alpha_0$.

Лемма 20.4. *Пусть функция* $u_1(x)$ *определена в* (20.10), *а функция* $a_\alpha(r)$ *задана формулой* (20.3) *при*

$$\alpha^2 > \alpha_0^2 = \lambda_1^2(m + s - 2)m. \tag{20.19}$$

Тогда решение задачи Коши (20.9), (20.10) *удовлетворяет неравенству*

$$w_\alpha(x,\, t) \leqslant \ell\Gamma_\alpha(x), \quad t > 0,\, \ell > 0, \tag{20.20}$$

где $\Gamma_\alpha(r)$ *— функция* (18.26).

Доказательство теоремы 20.1. Доказательство теоремы теперь можно получить аналогично доказательству теоремы 11.1. При этом следует выбрать α из условия

$$\delta_1 = \frac{2 - s + \sqrt{D}}{2} > m, \tag{20.21}$$

где

$$D = (s-2)^2 + 4\frac{\alpha^2}{\lambda_1^2},$$

а s определено в (20.5). Неравенство (20.21) эквивалентно неравенству (20.4). Кроме того, при проведении доказательства теоремы 20.1 следует лемму 3.4 заменить на лемму 19.1, положив $k = 1$ в коэффициенте (19.1). Теорема 20.1 доказана. □

21. Доказательство теоремы 21.1

Теорема 21.1. *Пусть функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию роста на бесконечности*

$$|u_0(x)| \leqslant M\exp(a|x|^{1-k}), \quad a > 0,\ 0 < k < 1, \tag{21.1}$$

коэффициенты $b_i(x, t)$ удовлетворяют условию (B_3), коэффициент $c(x, t)$ удовлетворяет условию (C_7),

$$c(x, t) \leqslant \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ -\dfrac{\alpha^2}{|x|^{2k}} & \text{при } |x| > 1 \end{cases} \tag{21.2}$$

при

$$\alpha > \lambda_1 a(1-k). \tag{21.3}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\Lambda(x, t)u + (b(x, t), \nabla u) + c(x, t)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{21.4}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{21.5}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = 0 \tag{21.6}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Вместе с задачей Коши (21.4), (21.5) рассмотрим задачу

$$\Lambda(x, t)w_\alpha + (b(x, t), \nabla w_\alpha) + b_\alpha(r)w_\alpha - w_{\alpha t} = 0 \quad \text{в } D \tag{21.7}$$

$$w_\alpha|_{t=0} = u_1(x), \quad u_1(x) = M\exp(ar^{1-k}), \tag{21.8}$$

где $\Lambda(x, t)$ — оператор (1.6), $b_i(x, t)$, $i = 1, \ldots, N$ удовлетворяют условию (B_3), коэффициент $b_\alpha(r)$ определен по формуле

$$b_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ -\dfrac{\alpha^2}{|x|^{2k}} & \text{при } |x| > 1. \end{cases} \tag{21.9}$$

Из принципа максимума [36, § 1] элементарно вытекает следующее неравенство.

Лемма 21.1.

$$|u(x, t)| \leqslant w_\alpha(x, t) \quad \text{в } D. \tag{21.10}$$

Рассмотрим задачи Коши

$$\Lambda(x, t)w_{\alpha 1} + (b(x, t), \nabla w_{\alpha 1}) + b_{\alpha 1}(r)w_{\alpha 1} - w_{\alpha 1t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{21.11}$$

$$w_{\alpha 1}|_{t=0} = u_1(x), \quad u_1(x) = M\exp(ar^{1-k}), \tag{21.12}$$

$$\Lambda(x, t)w_{\alpha 2} + (b(x, t), \nabla w_{\alpha 2}) + b_{\alpha 2}(r)w_{\alpha 2} - w_{\alpha 2t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{21.13}$$

$$w_{\alpha 2}|_{t=0} = u_1(x), \quad u_1(x) = M\exp(ar^{1-k}). \tag{21.14}$$

Аналогично лемме 20.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 21.2. *Если $\alpha_2 > \alpha_1$, то для решений задач Коши* (21.11), (21.12) *и* (21.13), (21.14) *имеет место неравенство*

$$w_{\alpha 2}(x, t) \leqslant w_{\alpha 1}(x, t) \quad \text{в } D. \tag{21.15}$$

Фиксируем $a > 0$, $0 < k < 1$, и пусть $\alpha > a(1-k)\lambda_1$. Рассмотрим задачу Коши (21.7), (21.8) при этих a, k и $\alpha > a(1-k)\lambda_1$.

Лемма 21.3. *Найдется такая постоянная $M_* > 0$, что при*

$$\alpha_1 = (\alpha + \lambda_1 a(1-k))/2 \tag{21.16}$$

решение $w_\alpha(x, t)$ задачи (21.7), (21.8) *удовлетворяет неравенству*

$$w_{\alpha_1}(x, t) \leqslant M_*\Gamma_{\alpha_1}(r), \tag{21.17}$$

где $\Gamma_{\alpha_1}(r)$ — функция, определенная по формуле (18.39) *при $\alpha = \alpha_1$.*

Доказательство. В лемме 18.4 построена функция $\Gamma_\alpha(r)$, определенная формулой (18.39). Докажем сначала, что для фиксированных $M > 0$, $a > 0$, $0 < k < 1$ существует такое $M_* > 0$, что
$$M \exp(ar^{1-k}) \leqslant M_* \Gamma_{\alpha_1}(r). \tag{21.18}$$
Так как $\alpha > a(1-k)\lambda_1$, то α_1 из (21.16) удовлетворяет неравенствам
$$a(1-k)\lambda_1 < \alpha_1 < \alpha. \tag{21.19}$$
Из асимптотики 4 леммы 18.4 следует, что порядок роста $\Gamma_{\alpha_1}(r)$ при $r \to \infty$ больше, чем у функции (21.8). Поэтому существует $r_1 > 0$ такое, что при $\forall\, r > r_1$
$$\Gamma_{\alpha_1}(r) \geqslant \exp(ar^{1-k}). \tag{21.20}$$

Фиксируем такое r_1 и заметим, что функция $M \exp(ar^{1-k})$ возрастает по r, поэтому при $r \leqslant r_1$
$$-M \exp(ar^{1-k}) \geqslant -M \exp(ar_1^{1-k}). \tag{21.21}$$

Положим
$$M_* = M \exp(ar^{1-k}) > M \tag{21.22}$$
и рассмотрим функцию
$$f(r) = M_* \Gamma_{\alpha_1}(r) - M \exp(ar^{1-k}). \tag{21.23}$$
Из лемм 18.3, 18.4 следует, что $\Gamma_{\alpha_1}(r) \geqslant 1$, поэтому при $r \leqslant r_1$ из (21.21) получим
$$f(r) \geqslant M_* - M \exp(ar^{1-k}) = 0. \tag{21.24}$$
При $r \geqslant r_1$ в силу выбора r_1 справедливо (21.20), поэтому
$$f(r) \geqslant M_* \exp(ar^{1-k}) - M \exp(ar^{1-k}) = (M_* - M)\exp(ar^{1-k}) > 0. \tag{21.25}$$
Из (21.24), (21.25) следует, что (21.18) доказано. Докажем (21.17). Введем функцию
$$g(x,\, t) = w_{\alpha_1}(x,\, t) - M_* \Gamma_{\alpha_1}(r), \tag{21.26}$$
где α_1 из (21.16), w_{α_1} — решение задачи Коши (21.7), (21.8) при $\alpha = \alpha_1$. Учитывая (21.7) и (21.17), получим
$$\Lambda(x,\, t)g + (b(x,\, t), \nabla g) + b_\alpha(r)g - g_t > 0 \quad \text{в } D,$$
$$g(x,\, t)|_{t=0} = M \exp(ar^{1-k}) - M_* \Gamma_{\alpha_1}(r) < 0.$$
Применяя принцип максимума [36, § 1], получим, что в D справедливо неравенство $g(x,\, t) < 0$. Лемма 21.3 доказана. □

Следствие 21.1. *При*
$$\alpha > \alpha_1 > \lambda_1 a(1-k)$$
для решения $w_\alpha(x,\, t)$ задачи (21.7), (21.8) *имеют место неравенство*
$$w_\alpha(x,\, t) \leqslant M_* \Gamma_{\alpha_1}(r), \tag{21.27}$$
где $\Gamma_\alpha(r)$ — функция (18.39) *при $\alpha = \alpha_1$.*

Доказательство. Доказательство следует из очевидной цепи неравенств
$$w_\alpha(x,\, t) \leqslant w_{\alpha_1}(x,\, t) \leqslant M_* \Gamma_{\alpha_1}(r)$$
Следствие 21.1 доказано. □

Доказательство теоремы 21.1. Согласно лемме 21.1 и неравенству
$$w_\alpha(x,\, t) \leqslant w_{\alpha_1}(x,\, t),\ \alpha_1 = \lambda_1 a(1-k) < \alpha \tag{21.28}$$
для доказательства теоремы 21.1 достаточно доказать, что существует предел
$$\lim_{t\to\infty} w_{\alpha_1}(x,\, t) = 0 \tag{21.29}$$
равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$, где $w_{\alpha_1}(x,\, t)$ — решение (21.7), (21.8) при α из (21.16).

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем $r_2 > 0$ так, чтобы $K \subset \overline{B}_{r_2}$. Функцию $\Gamma_\alpha(r)$ зададим по формуле (18.39). При $\alpha > \lambda_1 a(1-k)$ она определена по лемме 18.4. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы в $\overline{B}_{r_2}$ выполнялось неравенство

$$\delta\Gamma_\alpha \leqslant \varepsilon/3,\ x \in \overline{B}_{r_2}. \tag{21.30}$$

Рассмотрим функцию

$$z(x,\,t) = \delta\Gamma_\alpha(r) - w_\alpha(x,\,t). \tag{21.31}$$

По лемме 18.4 для $z(x,\,t)$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}_\alpha z \leqslant 0 \quad \text{в } D. \tag{21.32}$$

Используя (21.19), лемму 21.2 и неравенство (21.17), будем иметь

$$z(x,\,t) \geqslant \delta\Gamma_\alpha(r) - w_{\alpha_1}(x,\,t) \geqslant \delta\Gamma_\alpha(r) - M_*\Gamma_{\alpha_1}(r). \tag{21.33}$$

Согласно лемме 18.4,

$$\delta\Gamma_\alpha(r) = \delta C_1 r^{\frac{k-s+1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha r^{1-k}}{\lambda_1(1-k)}\right)[1+\varepsilon_1(r)], \tag{21.34}$$

$$\Gamma_{\alpha_1}(r) = C_1 r^{\frac{k-s+1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha_1 r^{1-k}}{\lambda_1(1-k)}\right)[1+\varepsilon_2(r)], \tag{21.35}$$

где $\varepsilon_{1,\,2}(r) \to 0$ при $r \to \infty$.

Из неравенств $\alpha > \alpha_1 > \lambda_1 a(1-k)$, (21.34) и (21.35) следует, что порядок роста функции $\delta\Gamma_\alpha(r)$ при $r \to \infty$ больше порядка роста функции $\Gamma_{\alpha_1}(r)$. Следовательно, существует такое $R > r_2$, что при $|x| = R$ справедливо неравенство

$$z(x,\,t)|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0. \tag{21.36}$$

Функция $z(x,\,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{L}_a z \leqslant 0, \quad r < R,\ t > 0, \tag{21.37}$$

$$z|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0, \tag{21.38}$$

$$z|_{t=0} = \delta\Gamma_\alpha(r) - M\exp(ar^{1-k}). \tag{21.39}$$

Обозначим

$$f_2(r) = \delta\Gamma_\alpha(r) - M\exp(ar^{1-k}). \tag{21.40}$$

Рассмотрим функции $p(x,\,t)$ из (19.5) и введем новую функцию

$$p_1(x,\,t) = \frac{A_1}{\gamma}p(x,\,t) = \frac{A_1}{\gamma}\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right)e^{-\lambda t}, \tag{21.41}$$

где

$$\lambda = e^{-A}, \quad A_1 = \max_{r \leqslant R} f_2(r). \tag{21.42}$$

Отметим, что

$$p_1(x,\,0) = \frac{A_1 p(r)}{\gamma} \geqslant A_1,$$

ибо $1 \geqslant v(r) \geqslant \gamma$, где $v(r)$ — функция (19.3).

Из леммы 19.1 следует, что функция (21.41) удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{L}_a p_1 \leqslant 0, \quad r < R,\ t > 0, \tag{21.43}$$

$$p_1|_{|x|=R} > 0, \quad t > 0, \tag{21.44}$$

$$p_1|_{t=0} \geqslant A_1 = \max_{r \leqslant R} f_2(r), \tag{21.45}$$

где $f_2(r)$ из (21.40), и существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p_1(x,\,t) = 0 \tag{21.46}$$

равномерно по x в B_R, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что при $t \geqslant T$ и всех $x \in \mathbb{R}^N$ справедливо неравенство

$$p_1(x,\,t) < \varepsilon/2. \tag{21.47}$$

Рассмотрим функцию
$$z_1(x,\,t)=z(x,\,t)+p_1(x,\,t),\tag{21.48}$$
где $z(x,\,t)$ из (21.31), а $p_1(x,\,t)$ из (21.41). Ясно, что в силу (21.37)–(21.39) и (21.43)–(21.45) функция (21.48) удовлетворяет соотношениям
$$\mathcal{L}_a z_1\leqslant 0,\quad r<R,\, t>0,$$
$$z_1|_{|x|=R}\geqslant 0,\quad t>0,$$
$$p_1|_{t=0}\geqslant f_2(r)+|f_2(r)|.$$
В силу принципа максимума [36, § 1] следует, что $z_1\geqslant 0$, $r<R_1$, $t>0$. Таким образом, доказано, что для $r<R$, $t>0$
$$0\leqslant w_{\alpha_1}(x,\,t)\leqslant \delta\Gamma_\alpha(r)+p_1(x,\,t).\tag{21.49}$$
При $x\in B_{r_2}$ из (21.30), (21.28), (21.10), (21.49), (21.48) получим, что $|u(x,\,t)|<\varepsilon$. Теорема 21.1 доказана. □

22. Доказательство теоремы 22.1

Теорема 22.1. *Пусть функция $u_0(x)$ удовлетворяет условию роста на бесконечности*
$$|u_0(x)|\leqslant M\exp(b|x|^{1+\ell}),\quad b>0,\, 0<\ell<1,\tag{22.1}$$
коэффициенты $b_i(x,\,t)$ удовлетворяют условию (B_3), коэффициент $c(x,\,t)$ удовлетворяет условию (C_8)
$$c(x,\,t)\leqslant k_\alpha(r)=\begin{cases}-\alpha^2 & |x|\leqslant 1,\\ -\alpha^2|x|^{2\ell} & |x|\geqslant 1\end{cases}\tag{22.2}$$
при
$$\alpha>\lambda_1 b(1+\ell).\tag{22.3}$$
Тогда решение задачи Коши
$$\Lambda(x,\,t)u(x,\,t)+(b(x,\,t),\nabla u)+c(x,\,t)u-u_t=0\quad \text{в } D\tag{22.4}$$
$$u|_{t=0}=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^N,\tag{22.5}$$
имеет предел
$$\lim_{t\to\infty}u(x,\,t)=0\tag{22.6}$$
равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Вместе с задачей (22.4), (22.5) рассмотрим задачу
$$\mathcal{L}_k w_\alpha\equiv\Lambda(x,\,t)w_\alpha+(b(x,\,t),\nabla w_\alpha)+k_\alpha(r)w_\alpha-w_{\alpha t}=0\quad\text{в } D\tag{22.7}$$
$$w_\alpha|_{t=0}=u_1(x),\quad u_1(x)=M\exp(br^{1+\ell}),\quad 0<\ell<1,\tag{22.8}$$
где $\Lambda(x,\,t)$ — оператор (1.6), $b_i(x,\,t)$, $i=1,\ldots,N$ удовлетворяют условию (B_3), коэффициент $k_\alpha(r)$ определен по формуле (22.2).

Существование решений задач Коши (22.4), (22.5) и (22.7), (22.8) вытекает из работы Г. Н. Смирновой [57, т. 4], при этом предполагается, что коэффициенты уравнений принадлежат классам Гельдера $C^{\delta_1}(\Omega)$, $0<\delta_1<1$ в каждой ограниченной области $\Omega\subset D$. Из принципа максимума [61, гл. 2, т. 9] вытекает следующее неравенство.

Лемма 22.1.
$$|u(x,\,t)|\leqslant w_\alpha(x,\,t).$$

Аналогично лемме 22.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 22.2. *При $\alpha_2>\alpha_1$ справедливо неравенство*
$$w_{\alpha_2}(x,\,t)\leqslant w_{\alpha_1}(x,\,t)\quad \text{в } D,\tag{22.9}$$
где w_{α_i} — решения соответствующих задач (22.7), (22.8) при $\alpha=\alpha_i$, $i=1,\,2$.

Фиксируем $b>0$, $0<\ell<1$, и пусть $\alpha>\lambda b(1+\ell)$.

Лемма 22.3. *Найдется такая постоянная* $M_* > 0$, *что при*

$$\alpha_1 = (\alpha + \lambda_1 b(1+\ell))\frac{1}{2} \tag{22.10}$$

решение $w_\alpha(x,\,t)$ *задачи Коши* (22.7), (22.8) *удовлетворяет неравенству*

$$w_{\alpha_1}(x,\,t) \leqslant M_* \Gamma_{\alpha_1}(r), \tag{22.11}$$

где $\Gamma_\alpha(r)$ — *функция, определенная по формуле* (18.63) *при* $\alpha = \alpha_1$.

Доказательство. Доказательство леммы 22.3 проводится совершенно аналогично доказательству леммы 21.3 и поэтому опускается. □

Следствие 22.1. *При* $\alpha > \alpha_1 > \lambda_1 b(1+\ell)$ *для решения задачи* (22.7), (22.8) *имеет место неравенство*

$$w_\alpha(x,\,t) \leqslant M_* \Gamma_{\alpha_1}(r). \tag{22.12}$$

Доказательство (22.12) вытекает из лемм 22.2 и 22.3.

Доказательство теоремы 22.1. Оно опирается на леммы 22.1, 22.2 и 22.3, а также леммы 18.5, 18.6 и 19.2 и проводится по схеме, аналогичной доказательству теоремы 21.1, и поэтому опускается. □

23. О точности условий теоремы 21.1

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + b_\alpha(r)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{23.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{23.2}$$

где $b_\alpha(r)$ — функция (18.30).

Используя при $s = N$, $\lambda_1 = \lambda_0 = 1$ методику доказательства лемм 18.3 и 18.4, построим функцию $\Gamma_\alpha(r)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Gamma''_\alpha + \frac{N-1}{r}\Gamma'_\alpha + b_\alpha(r)\Gamma = 0, \quad r > 0, \tag{23.3}$$

$$\Gamma_\alpha(0) = 1, \quad \Gamma'_\alpha(0) = 0, \tag{23.4}$$

такую, что

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \quad \Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0, \quad \Gamma_\alpha(0) = 1,$$

$$\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{\frac{k-N+1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha}{1-k} r^{1-k}\right)(1+\varepsilon(r)), \tag{23.5}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$, $r \to \infty$.

Положим $\alpha_0 = a(1-k)$ и получим при этом α_0 функцию $\Gamma_{\alpha_0}(r)$, удовлетворяющую уравнению (23.3) и условиям (23.4). Рассмотрим теперь задачу Коши (23.1), (23.2), в которой положим $\alpha_0 = a(1-k)$, $u_0(x) = \Gamma_{\alpha_0}(r)$, и получим, что решение задачи (23.1), (23.2) имеет вид

$$u(x,\,t) = \Gamma_{\alpha_0}(r) > 0. \tag{23.6}$$

Ясно, что $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,\,t) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$. Сформулируем полученный результат.

Лемма 23.1. *Для фиксированных* $a > 0$, $0 < k < 1$ *существуют начальная функция* $u_0(x)$, *удовлетворяющая на бесконечности условию*

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp(a|x|^{1-k}),$$

и коэффициент $c(|x|)$, *удовлетворяющий условию* (C_7), *при* $\alpha = a(1-k)$, *для которых решение задачи Коши* (23.1), (23.2) *не имеет предела*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0$$

ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

24. Точность условий теоремы 22.1

Рассмотрим задачу Коши

$$\Delta u + k_\alpha(r)u - u_t = 0 \quad \text{в } D \tag{24.1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{24.2}$$

где $k_\alpha(x)$ — функция (18.54).

Используя при $s = N$, $\lambda_1 = \lambda_0 = 1$ методику доказательства лемм 18.5, 18.6 построим функцию $\Gamma_\alpha(r)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Gamma''_\alpha + \frac{N-1}{r}\Gamma'_\alpha + k_\alpha(r)\Gamma = 0, \quad r > 0 \tag{24.3}$$

$$\Gamma_\alpha(0) = 1, \quad \Gamma'_\alpha(0) = 0, \tag{24.4}$$

такую, что

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \quad \Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0,$$

$$\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{\frac{-N+\ell-1}{2}} \exp\left(\frac{\alpha}{1+\ell} r^{1+\ell}\right)(1+\varepsilon(r)), \tag{24.5}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$, $r \to \infty$.

Положим $\alpha_0 = b(1+\ell)$ и получим при этом α_0 функцию $\Gamma_{\alpha_0}(r)$, удовлетворяющую уравнению (24.3) и условиям (24.4), и такую, что на бесконечности выполняются условия

$$\Gamma_\alpha(r) \leqslant M \exp(br^{1+\ell}), \quad r \geqslant r_0. \tag{24.6}$$

Рассмотрим теперь задачу Коши (24.1), (24.2), в которой положим

$$\alpha_0 = b(1+\ell), \quad u_0(x) = \Gamma_{\alpha_0}(r),$$

где $\Gamma_\alpha(r)$ — решение задачи (24.3), (24.4). Получим, что решение задачи (24.1), (24.2) имеет вид

$$u(x,\,t) = \Gamma_{\alpha_0}(r) > 0.$$

Ясно, что

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) \neq 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^N$. Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 24.1. *Для фиксированных $b > 0$, $0 < \ell < 1$ существуют начальная функция $u_0(x)$, удовлетворяющая на бесконечности условию*

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp(b|x|^{1+\ell}),$$

и коэффициент $k_\alpha(r)$ из (18.54)*, удовлетворяющий условию* (C_8) *при $\alpha = b(1+\ell)$, для которых решение задачи Коши* (24.1), (24.2) *не имеет предела*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0$$

ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

25. Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с растущими коэффициентами $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$

В настоящем пункте мы изучим достаточные условия на растущие младшие коэффициенты $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$, гарантирующие стабилизацию решения задачи Коши в классе экспоненциально растущих начальных функций.

В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$, $N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv \Lambda u + (b, \nabla u) + c(x,t)u - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{25.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{25.2}$$

где

$$\Lambda u = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t) u_{x_i x_k}, \tag{25.3}$$

$$(b, \nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) u_{x_i}. \tag{25.4}$$

Определение (B_4)**.** Коэффициенты $b_i(x,t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ удовлетворяют *условию* (B_4), если существуют постоянные $B > 0$, $0 < l < 1$ такие, что

$$\sup_{(x,t)\in D} \sum_{i=1}^{N} |b_i(x,t)| \leqslant B \max(1,\, r^l), \tag{25.5}$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$,

Будем предполагать:

1. коэффициенты (25.1) действительны,

$$a_{ik} = a_{ki} \quad (i, k = 1, \ldots, N),$$

существуют постоянные $\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$ такие, что

$$\lambda_0^2 |y|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t) y_i y_k \leqslant \lambda_1^2 |y|^2, \quad \forall (x,t) \in D, y \in \mathbb{R}^N, \tag{25.6}$$

$$|y|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2;$$

2. коэффициенты уравнения (25.1) непрерывны и удовлетворяют условию Гельдера в любой ограниченной области Q в D;
3. коэффициенты $b_i(x,t)$ $(i = 1, \ldots, N)$ удовлетворяют условию (B_4);
4. коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию (C_8), т. е. существуют $\alpha > 0$ и $0 < k < 1$, для которых выполнено

$$c(x,t) \leqslant a_\alpha(r) = -\alpha^2 \max(1,\, r^{2k}); \tag{25.7}$$

5. начальная функция $u_0(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\{a r^{1+k}\}, \tag{25.8}$$

для некоторых постоянных $a > 0$, $0 < k < 1$.

Разрешимость в тихоновском классе [61, гл. 2, п. 1.3] задачи (25.1), (25.2) и других задач Коши настоящей работы вытекает, например, из [36, 61]. Далее будут рассматриваться классические решения задач Коши из тихоновского класса.

Изучим, при каких достаточных условиях на младшие коэффициенты (25.1) существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{25.9}$$

решения задачи (25.1), (25.2) равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Стабилизация решения задачи Коши (25.1), (25.2) в случае, когда

$$b_i(x,t) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, N$$

и выполняется условие (B_4) при замене max на min и при $l = -1$ в классе функций (25.8), была установлена в [23] в предположении, что для $c(x,t)$ выполнено условие (C_7) при

$$\alpha > a\lambda_1(1+k), \tag{25.10}$$

Здесь мы изучим два случая ограничений на $b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t)$:

а) в условии (B_4) выполняются соотношения $0 < l = k < 1$,

б) в условии (B_4) выполняются неравенства $0 < l < k < 1$.

Имеет место следующие результаты (см. [26]).

Теорема 25.1. *Пусть для произвольных фиксированных постоянных* $0 < k < 1$, $a > 0$, $B > 0$:

1. *начальная функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству* (25.8),
2. *коэффициенты* $b_1(x,t), \ldots, b_N(x,t)$ *удовлетворяют условию* (B_4) *при* $0 < l = k < 1$,

3. *коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_8) *при*

$$\alpha^2 > \lambda_1^2 a(1+k)(\frac{B}{\lambda_0^2} + a(1+k)). \tag{25.11}$$

Тогда решение задачи Коши (25.1), (25.2) *имеет предел* (25.9), *в каждой точке* x *в* $\mathbb{R}^N$ (*равномерно по* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$).

Теорема 25.2. *Пусть для произвольных фиксированных постоянных* $0 < k < 1$, $a > 0$, $0 < l < k < 1$, $B > 0$:

1. *начальная функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет неравенству* (25.8),
2. *коэффициенты* $b_1(x,t)\ldots,b_N(x,t)$ *удовлетворяют условию* (B_4) *при* $0 < l < k < 1$,
3. *коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_8) *при* α *из неравенства* (25.10).

Тогда решение задачи (25.1), (25.2) *имеет предел* (25.9) *в каждой точке* x *в* $\mathbb{R}^N$ (*равномерно по* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$).

Замечание. Сформулированные теоремы являются точными в том смысле, что утверждения теорем 25.1 и 25.2 нельзя усилить, заменив равномерную стабилизацию (25.9) на компактах на равномерную во всем $\mathbb{R}^N$ стабилизацию.

26. О суперрешениях в случае растущих младших коэффициентов

В области D построим стационарные решения $\Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_1\Gamma_\alpha \equiv \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x,t)\Gamma_{\alpha x_i x_k} + \sum_{i=1}^N b_i(x,t)\Gamma_{\alpha x_i} + a_\alpha(r)\Gamma_\alpha \leqslant 0 \quad \text{в } D, \tag{26.1}$$

где коэффициент $a_\alpha(r)$ определен в (25.7), такие, что

$$\Gamma_\alpha(r) > 0, \quad \Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0, \quad \Gamma''_\alpha(r) \geqslant 0,$$

и при $r \to \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

а) при $0 < k = l < 1$

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_1 r^m \exp\Big\{\frac{r^{(1+k)}}{(1+k)}(d - \frac{B_1}{2})\Big\}, \tag{26.2}$$

где

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad B_1 = \frac{B}{\lambda_0^2}, \quad d = \sqrt{\overline{\alpha}^2 + \frac{B_1^2}{4}}, \quad m = \frac{-k-s+1}{2} + \frac{B_1(s-1+k)}{2d};$$

б) при $0 < l < k < 1$

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_2 r^{\frac{-k-s+1}{2}} \exp\Big\{\frac{\alpha r^{(1+k)}}{\lambda_1(1+k)} - \frac{B_1 r^{1+l}}{2(1+l)}\Big\}, \tag{26.3}$$

$$\text{где } s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \quad C_1 > 0,\ C_2 > 0.$$

Применяя формулы

$$\Gamma'_{x_i} = \frac{x_i}{r}\Gamma', \quad \Gamma''_{x_i x_k} = \frac{x_i \cdot x_k}{r^2}\Big[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\Big],$$
$$\Gamma''_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2}\Big[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\Big] + \frac{\Gamma'}{r}, \tag{26.4}$$

будем иметь

$$L_1\Gamma_\alpha = Q\Big\{\Big[\Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\Big] + \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\frac{\sum\limits_{i=1}^N (a_{ii} + b_i x_i)}{Q} + \frac{a_\alpha(r)\Gamma_\alpha}{Q}\Big\}, \tag{26.5}$$

где

$$Q = Q(x,t) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x,t)\frac{x_i x_k}{r^2}.$$

Из неравенств (25.6) следует, что

$$\lambda_0^2 \leqslant Q(x,t) \leqslant \lambda_1^2, \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^N a_{ii}}{Q} \leqslant \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}. \tag{26.6}$$

Учитывая в (26.5) неравенства (25.5), (25.7) и условие (B_4), будем иметь при $r \leqslant 1, t > 0$

$$L_1\Gamma \leqslant \lambda_1^2\Big[\Gamma''_\alpha + \Big(\frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} - 1\Big)\frac{\Gamma'_\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}\Gamma_\alpha\Big]. \tag{26.7}$$

Обозначим

$$n \equiv \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1} \tag{26.8}$$

и рассмотрим для функции $Z_\alpha(r)$ задачу

$$Z''_\alpha(r) + \frac{(n-1)}{r}Z'_\alpha(r) - \overline{\alpha}^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \tag{26.9}$$

$$Z_\alpha(0) = 1, \quad Z'_\alpha(0) = 0.$$

Положим в (26.7)

$$\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r),$$

где $Z_\alpha(r)$ — решение задачи (26.9), и получим неравенство

$$L_1\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \quad t > 0, \tag{26.10}$$

где $L_1\Gamma_\alpha(r)$ из (26.1). Из теории функций Бесселя [4] следует, что решение задачи (26.8), (26.9) существует, единственно и представимо в виде

$$Z_\alpha(r) = q_1(n)\cdot\frac{I_{\frac{n-2}{2}}(r\overline{\alpha})}{(r\overline{\alpha})^{\frac{n-2}{2}}}, \quad q_1(n) = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}), \tag{26.11}$$

где $\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)$ — функция Эйлера [39], $I_\nu(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [39]. Из (26.11) и формул [4, п. 3.71] следует, что

$$\begin{gathered} Z_\alpha(r) > 0, \quad Z'_\alpha(r) > 0 \quad \text{при} \quad r > 0, \\ b_0(\alpha) = Z_\alpha(1) = q(n)\overline{\alpha}^{\frac{2-n}{2}} I_{\frac{n-2}{2}}(\overline{\alpha}) > 0, \\ b_1(\alpha) = Z'_\alpha(1) = q(n)\overline{\alpha}^{2-\frac{n}{2}} I_{\frac{n}{2}}(\overline{\alpha}) > 0, \\ \frac{d}{dr}\frac{I_\nu(r)}{r^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(r)}{r^\nu} > 0. \end{gathered} \tag{26.12}$$

При $r \geqslant 1$ имеет место равенство

$$a_\alpha(r) = -\alpha^2 r^{2k},$$

поэтому, применяя в (26.5) неравенства (26.6) и учитывая, что в силу условий (B_4) справедливо неравенство

$$\frac{|\sum\limits_{i=1}^N b_i \frac{x_i}{r}|}{Q(x,t)} \leqslant \frac{Br^l}{\lambda_0^2}, \quad r \geqslant 1, \tag{26.13}$$

будем иметь

$$L_1\Gamma_\alpha \leqslant \lambda_1^2\Big[\Gamma''_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha + B_1 r^l\Gamma' - \overline{\alpha}^2 r^{2k}\Gamma_\alpha\Big]. \tag{26.14}$$

где

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \quad B_1 = \frac{B}{\lambda_0^2}.$$

Рассмотрим для функции $y_\alpha(r)$ при $r \geqslant 1$ задачу

$$y''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}y'_\alpha(r) + B_1 r^l y'_\alpha(r) - \overline{\alpha}^2 y_\alpha(r) r^{2k} = 0, \quad r > 1 \tag{26.15}$$

$$y_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad y'_\alpha(1) = b_1(\alpha),$$

где были использованы обозначения (26.8) и постоянные $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$, определенные в (26.12). Ясно, что решение задачи (26.15) существует и единственно (см. [60]).

Положим в (26.14) $\Gamma_\alpha(r) = y_\alpha(r)$ при $r \geqslant 1$, где $y_\alpha(r)$ — решение задачи (26.15), тогда получим неравенство

$$L_1\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 1. \tag{26.16}$$

Нами определена функция

$$\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} Z_\alpha(r) \text{ при } r \leqslant 1, \\ y_\alpha(r) \text{ при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{26.17}$$

где $Z_\alpha(r)$ — решение задачи (26.9), $y_\alpha(r)$ — решение задачи (26.15).

Очевидно, функция (26.17) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функции и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ справедливы «условия склейки» из (26.15)

$$Z_\alpha(1) = y_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad Z'_\alpha(1) = y'_\alpha(1) = b_1(\alpha),$$

поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (26.8) и (26.15)

$$\lim_{r\to 1-0} \frac{n-1}{r} = \lim_{r\to 1+0} [\frac{s-1}{r} + B_1 r^l] = n-1, \qquad \lim_{r\to 1+0} \overline{\alpha}^2 r^{2k} = \overline{\alpha}^2$$

и «условий склейки» (26.15) следует, что

$$Z''_\alpha(1) = y''_\alpha(\alpha).$$

Из (26.10) и (26.11) получим

$$L_1\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 0. \tag{26.18}$$

Изучим некоторые качественные свойства решений задач (26.9) и (26.15).

Лемма 26.1. *Решение задачи* (26.15) *обладает следующими свойствами*:

1. $y_\alpha(r) > 0, \ r > 1,$
2. $y'_\alpha(r) > 0, \ r > 1,$
3. $\lim\limits_{r\to\infty} y_\alpha(r) = +\infty.$

Доказательство. Так как $y_\alpha(r)$ непрерывна и

$$y_\alpha(1) = b_0(\alpha),$$

то $y_\alpha(r) > 0$ в некоторой правой полуокрестности точки $r = 1$. Докажем, что

$$y_\alpha(r) > 0 \quad \text{для всех } r > 1.$$

Предположим противное. Тогда найдется $r_1 > 1$ такое, что $y(r_1) \leqslant 0$. Так как $y_\alpha(r)$ непрерывна на $[1, r_1]$, то существует $r_2 \in (1, r_1)$ такое, что $y_\alpha(r)$ при $r = r_2$ принимает максимальное значение на отрезке $[1, r_1]$, т. е.

$$y_\alpha(r_2) > 0, \quad y'_\alpha(r_2) = 0, \quad y''_\alpha(r_2) \leqslant 0.$$

В таком случае из уравнения (26.15) при $r = r_2$ получим противоречие, ибо левая часть равенства

$$y''_\alpha(r_2) = \overline{\alpha}^2 r_2^{2k} y_\alpha(r_2)$$

неположительна, а правая положительна.

Свойство 1 доказано.

Так как коэффициент $-\alpha^2 r^{2k} < 0$ в уравнении (26.15) отрицателен, а решение $y_\alpha(r) > 0$ — положительно, то известно, что [56, с. 165]

$$y_\alpha(r) y'_\alpha(r) > 0 \quad \text{при } r > 1.$$

Так как

$$y_\alpha(r) \geqslant b_0(\alpha) > 0,$$

то $y'_\alpha(r) > 0$.

Свойство 2 доказано.

Так как

$$\Gamma''_\alpha(r) = y''_\alpha(r) \geqslant 0,$$

то функция $y'_\alpha(r)$ не убывает по r ($r > 1$). Следовательно,

$$y'_\alpha(r) \geqslant b_1(\alpha), \quad r \geqslant 1.$$

Интегрируя последнее неравенство, получим

$$y_\alpha(r) > b_0(\alpha) + b_1(\alpha)(r-1) \to +\infty, \quad r \to \infty.$$

Свойство 3 доказано. Лемма 26.1 доказана. □

Лемма 26.2. *Решения задачи* (26.9) *обладают следующими свойствами*:

1. $z_\alpha(r) > 0$,
2. $z'_\alpha(r) > 0$,
3. $z_{\alpha_1}(r) > z_{\alpha_2}(r)$ *при* $\alpha_1 > \alpha_2$.

Доказательство. Свойства 1 и 2 вытекают из формул (26.11), (26.12). Докажем свойство 3. Пусть $\alpha_1 > \alpha_2$ и $z_{\alpha_1}(r), z_{\alpha_1}(r)$ — решения задачи (26.9) при $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$, соответственно. Определим функцию

$$k(r) = r^{n-1}[z'_{\alpha_1}(r)z_{\alpha_2}(r) - z_{\alpha_1}(r)z'_{\alpha_2}(r)].$$

Дифференцируя функцию $k(r)$ по r и учитывая, что $z_{\alpha_1}(r), z_{\alpha_2}(r)$ являются решениями задачи (26.9) при соответствующих α_1, α_2, получим

$$k'(r) = \frac{n-1}{r}k(r) + r^{n-1}[z''_{\alpha_1}(r)z_{\alpha_2}(r) - z''_{\alpha_2}(r)z_{\alpha_1}(r)] =$$

$$= \frac{n-1}{r}k(r) - \frac{n-1}{r}k(r) + r^{n-1}[\overline{\alpha}_1^2 - \overline{\alpha}_2^2]z_{\alpha_1}(r)z_{\alpha_2}(r) > 0, \quad r > 0,$$

т. к. $\alpha_1 > \alpha_2$, $z_{\alpha_1}(r) > 0$, $z_{\alpha_2}(r) > 0$, $r > 0$.

Ясно, что $k(0) = 0$. Поэтому $k(r) > 0$ при $r > 0$, $\alpha_1 > \alpha_2$.

Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{z_{\alpha_1}(r)}{z_{\alpha_2}(r)}\Big) = \frac{k(r)}{r^{n-1}z^2_{\alpha_2}(r)} > 0.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\frac{z_{\alpha_1}(r)}{z_{\alpha_2}(r)} - 1 = \int\limits_0^r \frac{k(\tau)}{\tau^{n-1}z^2_{\alpha_2}(\tau)}d\tau > 0.$$

Свойство 3 доказано. Лемма 26.2 доказана. □

Следствие. *Если* $\alpha_1 > \alpha_2$, *то*

$$1) \quad \frac{z_{\alpha_1}(1)}{z_{\alpha_2}(1)} = \gamma_1 > 1, \qquad 2) \quad k(1) = \gamma_2 > 0. \tag{26.19}$$

Лемма 26.3. *Функция* $\Gamma_\alpha(r)$(26.17) *обладает следующими свойствами*:

1. $\Gamma_\alpha(r_1) > \Gamma_\alpha(r_2)$, *если* $r_1 > r_2 > 0$;
2. $\Gamma_{\alpha_1}(r) > \Gamma_{\alpha_2}(r)$; *если* $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$,
3. *при* $0 < k = l < 1$

$$\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^m \exp\left\{\frac{r^{1+k}}{(1+k)}(d - \frac{B_1}{2})\right\}[1 + \varepsilon_1(r)], \tag{26.20}$$

где

$$\overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}, \quad B_1 = \frac{B}{\lambda_0^2}, \quad d = \sqrt{\overline{\alpha}^2 + \frac{B_1^2}{4}}, \quad m = \frac{-k-s+1}{2} + \frac{B_1(s-1+k)}{2d};$$

4. *при* $0 < l < k < 1$

$$\Gamma_\alpha(r) = C_2 r^{\frac{-k-s+1}{2}} \exp\left\{\frac{\alpha r^{1+k}}{\lambda_1(1+k)} - \frac{B_1}{2(1+l)}r^{1+l}\right\}[1 + \varepsilon_2(r)], \tag{26.21}$$

где $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_1(r) = 0$, $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_2(r) = 0$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$;

5. $\Lambda\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0$ *в* D.

Доказательство. Свойство 1 при $r \leqslant 1$ непосредственно вытекает из (26.11), (26.12), а при $r \geqslant 1$ из утверждения 2 леммы 26.1. Докажем свойство 2. Рассмотрим при $r > 1$ две задачи

$$\Gamma''_{\alpha_1} + \Gamma'_{\alpha_1}\Big(\frac{s-1}{r} + B_1 r^l\Big) - \overline{\alpha}_1^2 r^{2k}\Gamma_{\alpha_1} = 0, \quad r > 1, \tag{26.22}$$

$$\Gamma_{\alpha_1}(1) = b_0(\alpha_1), \quad \Gamma'_{\alpha_1} = b_1(\alpha_1),$$

$$\Gamma''_{\alpha_2} + \Gamma'_{\alpha_2}\Big(\frac{s-1}{r} + B_1 r^l\Big) - \overline{\alpha}_2^2 r^{2k}\Gamma_{\alpha_2} = 0, \quad r > 1, \tag{26.23}$$

$$\Gamma_{\alpha_2}(1) = b_0(\alpha_2), \quad \Gamma'_{\alpha_2} = b_1(\alpha_2),$$

где $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$.

Умножим уравнение в (26.22) на Γ_{α_2}, а уравнение в (26.23) на Γ_{α_1} и из первого произведения вычтем второе. Получим уравнение

$$\Gamma''_{\alpha_1}\Gamma_{\alpha_2} - \Gamma''_{\alpha_2}\Gamma_{\alpha_1} + \Big(\Gamma'_{\alpha_1}\Gamma_{\alpha_2} - \Gamma'_{\alpha_2}\Gamma'_{\alpha_1}\Big)\Big(\frac{s-1}{r} + B_1 r^l\Big) - r^{2k}(\overline{\alpha}_1^2 - \overline{\alpha}_2^2)\Gamma_{\alpha_1}\Gamma_{\alpha_2} = 0.$$

Введем функцию

$$K_1(r) = \Gamma'_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r) - \Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma'_{\alpha_2}(r)$$

и перепишем последнее уравнение в виде

$$K'_1(r) + \Big(\frac{s-1}{r} + B_1 r^l\Big)K_1(r) = (\overline{\alpha}_1^2 - \overline{\alpha}_2^2)r^{2k}\Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r). \tag{26.24}$$

Правая часть в (26.24) является положительной при $\overline{\alpha}_1^2 > \overline{\alpha}_2^2$, $r > 1$, поэтому из (26.24) следует неравенство

$$K'_1(r) + P_1(r)K_1(r) > 0, \quad r > 1, \tag{26.25}$$

где

$$P_1(r) = \frac{s-1}{r} + B_1 r^l. \tag{26.26}$$

Интегрируя (26.25) и учитывая (26.16) и (26.26), будем иметь

$$K_1(r) \geqslant K_1(1)\exp\Big(-\int\limits_1^r P_1(\tau)d\tau\Big) \geqslant \gamma_1 \exp\Big(-\int\limits_1^r P_1(\tau)d\tau\Big) > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)}\Big) = \frac{K_1(r)}{\Gamma^2_{\alpha_2}(r)} > 0. \tag{26.27}$$

Интегрируя (26.27) и используя (26.19), получим

$$\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)} - \gamma_1 = \int\limits_1^r \frac{K_1(\tau)}{\Gamma^2_{\alpha_2}(\tau)}d\tau > 0, \quad r > 1.$$

Свойство 2 при $r \geqslant 1$ доказано. При $0 < r \leqslant 1$ свойство 2 вытекает из утверждения леммы 26.2.

Докажем свойство 3. В уравнении (26.15) сделаем замену

$$y_\alpha(r) = V(r)r^{\frac{1-s}{2}}\exp\Big\{-\frac{B_1(r^{1+l}-1}{2(1+l)}\Big\}, \tag{26.28}$$

при этом получим, что функция $V(r)$ является решением задачи

$$V'' - V\Big(\overline{\alpha}^2 r^{2k} + \frac{B_1^2}{4}r^{2l} + \frac{P}{r^2} + Qr^{l-1}\Big) = 0, \quad r > 1, \tag{26.29}$$

$$V(1) = b_0(\alpha), \qquad V'(1) = b_0(\alpha)\Big(\frac{s-1+B_1}{2}\Big) + b_1(\alpha) = b_2(\alpha),$$

где постоянные $b_0(\alpha), b_1(\alpha)$ из (26.12),

$$B_1 = \frac{B}{\lambda_0^2}, \quad P = \frac{(s-1)(s-3)}{4}, \quad Q = B_1(s-1+k).$$

Полагая в (26.29) $0 < l = k < 1$ и вводя обозначение

$$q(r) = (\overline{\alpha}^2 + \frac{B_1^2}{4})r^{2k} + \frac{P}{r^2} + Qr^{k-1}, \tag{26.30}$$

запишем задачу (26.29) в виде

$$V''(r) - q(r)V(r) = 0, \quad r > 1 \tag{26.31}$$

$$V(1) = b_0(\alpha), \quad V'(1) = b_2(\alpha).$$

Ясно, что $q(r) > 0$ при $r > 1$, $q''(r)$ — непрерывная функция при $r \geqslant 1$ и, кроме того, как легко проверить, сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty |\beta(r)| dr < \infty,$$

где

$$\beta(r) = \frac{1}{8}\frac{q''(r)}{q^{\frac{3}{2}}(r)} - \frac{5}{32}\frac{(q'(r))^2}{q^{\frac{5}{2}}(r)},$$

и существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{q'(r)}{q^{\frac{3}{2}}(r)} = 0.$$

Поэтому для решений уравнения (26.31) выполнены все условия известной асимптотики Грина—Лиувилля (см. [60]). По этой теореме существует фундаментальная система решений $t_1(r)$, $t_2(r)$ уравнения (26.31) такая, что

$$t_{1,2}(r) = q^{\frac{-1}{4}}(r) \exp\{\pm S(r)\}[1 + \varepsilon_{1,2}(r)], \tag{26.32}$$

где

$$\varepsilon_{1,2}(r) \to 0 \quad \text{при } r \to \infty,$$

$$S(r) = \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)} d\tau \to \infty,$$

и эту асимптотику (26.32) можно дифференцировать:

$$t'_{1,2}(r) = \pm q^{\frac{1}{4}}(r) \exp\{\pm S(r)\}[1 + \varepsilon_{3,4}(r)], \tag{26.33}$$

$$\varepsilon_{3,4}(r) \to 0, \ \text{при } r \to \infty.$$

Применяя формулу Остроградского—Лиувилля [60] и формулы (26.32), (26.33), вычислим определитель Вронского:

$$t_1(r)t'_2(r) - t_2(r)t'_1(r) = -2. \tag{26.34}$$

Так как

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)} d\tau = +\infty,$$

то решение $t_1(r)$ монотонно возрастает и

$$\lim_{r\to\infty} t_1(r) = +\infty, \tag{26.35}$$

а решение $t_2(r)$ монотонно убывает и

$$\lim_{r\to\infty} t_2(r) = 0. \tag{26.36}$$

Решение задачи (26.31) будем искать в виде

$$V(r) = C_1 t_1(r) + C_2 t_2(r), \tag{26.37}$$

где постоянные C_1 и C_2 однозначно определяются из системы

$$b_0(\alpha) = C_1 t_1(1) + C_2 t_2(1),$$

$$b_2(\alpha) = C_1 t'_1(1) + C_2 t'_2(1)$$

с ненулевым определителем (26.34). Докажем, что

$$C_1 > 0. \tag{26.38}$$

В противном случае при $C_1 \leqslant 0$ из (26.35)–(26.37) мы получили бы либо $\Gamma_\alpha(r) \to 0$ при $r \to \infty$, либо

$$\Gamma_\alpha(r) = y_\alpha(r) = V(r) r^{\frac{1-s}{2}} \exp\left\{\frac{-B_1(r^{1+k}-1)}{2(1+k)}\right\} \to -\infty, \quad r \to \infty, \tag{26.39}$$

что противоречит утверждению 3 леммы 26.1, согласно которому

$$\lim_{r\to\infty} y_\alpha(r) = +\infty,$$

следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = +\infty,$$

где $V(r)$ — решение задачи (26.31). Неравенство (26.38) доказано.

Таким образом, из (26.35)–(26.38) следует, что $V(r) \sim C_1 t_1(r)$ при $r \to +\infty$. Подставляя (26.30) в формулу (26.32) для $t_1(r)$, получим для $\Gamma_\alpha(r)$ при $0 < l = k < 1$ асимптотическую формулу (26.20).

Докажем формулу (26.21). Предположим, что в (26.29) справедливы неравенства $0 < l < k < 1$ и запишем потенциал (26.29) в следующем виде:

$$q(r) = \overline{\alpha}^2 r^{2k}\Big(1 + \frac{B_1^2}{4\overline{\alpha}^2} r^{2l-2k} + \frac{P}{\overline{\alpha}^2 r^{2+2k}} + \frac{Q}{\overline{\alpha}^2} r^{l-2k-1}\Big), \tag{26.40}$$

где

$$P = \frac{(s-1)(s-3)}{4}, \quad Q = B_1(s+k-1), \quad B_1 = \frac{B}{\lambda_0^2}.$$

Так как по условию

$$2l - 2k < 0, \quad 2 + 2k > 0, \quad l - 1 - 2k < 0,$$

то главным слагаемым в (26.40) является слагаемое $\alpha^2 r^{2k}$. Повторяя рассуждения, аналогичные предыдущим (26.32)–(26.38), получим асимптотическую формулу

$$\Gamma_\alpha(r) = C_2 r^{\frac{-k-s+1}{2}} \exp\left\{\frac{\overline{\alpha} r^{1+k}}{1+k} - \frac{B_1}{2(1+l)} r^{1+l}\right\} \times [1 + \varepsilon_5(r)], \tag{26.41}$$

где $\varepsilon_5(r) \to 0$ при $r \to \infty$, $C_2 > 0$.

Свойство 5 вытекает из неравенства (26.18).

Лемма 26.3 доказана. □

Лемма 26.4. *Для любых $R > 1$, $\alpha > 0$, $B > 0$ найдется постоянная $A_0 = A_0(R, \alpha, B) > 0$ такая, что при $A \geqslant A_0$ и $\lambda = e^{-A} > 0$:*

1. *для функции*

$$V(r) = 1 - \exp[A(\frac{r^2}{4R^2} - 1)], \quad 0 \leqslant r \leqslant 2R, \tag{26.42}$$

выполнено

$$L_1 V(r) + \lambda V(r) < 0, \quad r < R, \tag{26.43}$$

где $L_1 V(r)$ из (26.1);

2. *для функции*

$$p(x,t) = V(r) e^{-\lambda t} \tag{26.44}$$

справедливы соотношения

$$\mathcal{L}_\alpha p(x,t) = L_1 p(x,t) - p_t(x,t) \leqslant 0, \quad |x| < R, \quad t > 0 \tag{26.45}$$

$$p(x,t)|_{|x|=R} = (1 - e^{-\frac{3}{4}A}) e^{-\lambda t} > 0, \quad t > 0 \tag{26.46}$$

$$p(x,t)|_{t=0} = V(r) \tag{26.47}$$

и существует предел

$$\lim_{t\to\infty} p(x,t) = 0 \tag{26.48}$$

равномерно по x на каждом компакте $K \subset \{|x| < R\}$.

Лемма 26.4 доказана на с. 104.

В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ рассмотрим задачу Коши (25.1), (25.2) и задачу

$$LV = 0, \tag{26.49}$$

$$V|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{26.50}$$

здесь и далее

$$u_1(x) = |u_0(x)|,$$

где $u_0(x)$ удовлетворяет условию (26.8), LV определено в (25.1).

Лемма 26.5. *Для решений задач Коши* (25.1)*,* (25.2) *и* (26.49)*,* (26.50) *имеет место неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant V(x,t). \tag{26.51}$$

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из принципа максимума [61, гл. 2, теорема 4].

В полупространстве $\overline{D}$ рассмотрим две задачи Коши:

$$\Lambda V_{\alpha_1} + (b, \nabla V_{\alpha_1}) + a_{\alpha_1}(r) V_{\alpha_1} - V_{\alpha_1 t} = 0, \quad V_{\alpha_1}|_{t=0} = u_1(x), \tag{26.52}$$

$$\Lambda V_{\alpha_2} + (b, \nabla V_{\alpha_2}) + a_{\alpha_2}(r) V_{\alpha_2} - V_{\alpha_2 t} = 0, \quad V_{\alpha_2}|_{t=0} = u_1(x), \tag{26.53}$$

где

$$a_{\alpha_1}(x) = \begin{cases} -\overline{\alpha_1}^2, & r \leqslant 1, \\ -\overline{\alpha}_1^2 r^{2k}, & r \geqslant 1, \end{cases} \qquad a_{\alpha_2}(x) = \begin{cases} -\overline{\alpha_2}^2, & r \leqslant 1, \\ -\overline{\alpha_2}^2 r^{2k}, & r \geqslant 1. \end{cases} \tag{26.54}$$

Лемма 26.6. *При $\alpha_1 > \alpha_2$ справедливо неравенство*

$$V_{\alpha_1}(x,t) \leqslant V_{\alpha_2}(x,t), \quad (x,t) \in D. \tag{26.55}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(x,t) = V_{\alpha_1}(x,t) - V_{\alpha_2}(x,t).$$

Тогда из (26.52), (26.53) получим для $V(x,t)$ задачу

$$\Lambda V + (b, \nabla V) + a_{\alpha_1}(r) V - V_t = V_{\alpha_1}[a_{\alpha_2}(r) - a_{\alpha_1}(r)], \quad V|_{t=0} = 0.$$

Так как $V(x,t)$ принадлежит классу А. Н. Тихонова, то, применяя принцип максимума [42, с. 182], получим, что $V(x,t) \leqslant 0$ в полосе $x \in \mathbb{R}^N$, $0 < t \leqslant T$ для любого $T > 0$. Так как $T > 0$ произвольно, неравенство (26.55) доказано. Лемма 26.6 доказана. □

Аналогично доказывается следующая лемма.

Лемма 26.7. *Пусть коэффициент $c(x,t)$ удовлетворяет условию* (25.7)*. Тогда для решений задач*

$$LV_1 + (b, \nabla V_1) + c(x,t) V_1 - V_{1t} = 0, \quad V_1|_{t=0} = u_1(x), \tag{26.56}$$

$$\Lambda V_\alpha + (b, V_\alpha) + a_\alpha(r) V_\alpha - V_{\alpha t} = 0, \quad V_\alpha|_{t=0} = u_1(x), \tag{26.57}$$

справедливо неравенство

$$V_1(x,t) \leqslant V_\alpha(x,t). \tag{26.58}$$

Доказательство леммы 26.7 аналогично доказательству леммы 26.6, и мы его не приводим.

Фиксируем $a > 0$, $B > 0$ и предположим, что при $0 < k = l < 1$ справедливо неравенство

$$\alpha^2 > \lambda_1^2 a(1+k)\left(\frac{B}{\lambda_0^2} + a(1+k)\right), \tag{26.59}$$

а при $0 < l < k$ справедливо неравенство

$$\alpha > \lambda_1 (1+k) a. \tag{26.60}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\Lambda V_\alpha^1 + (b, V_\alpha^1) + a_\alpha(r) V_\alpha^1 - V_{\alpha t}^1 = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{26.61}$$

$$V_\alpha^1|_{t=0} = C_0 \exp(a r^{1+k}). \tag{26.62}$$

Из принципа максимума [42, с. 182] следует, что

$$V_\alpha(x,t) \leqslant {V_\alpha}^1(x,t), \tag{26.63}$$

где $V_\alpha(x,t)$ — решение задачи Коши (26.57).

Лемма 26.8. *Пусть при* $0 < k = l < 1$, $C_0 > 0$, $a > 0$ *выполняется неравенство* (26.59),

$$\alpha > \beta_1, \tag{26.64}$$

где

$$\beta_1 = \lambda_1(a(1+k)(\frac{B_1}{\lambda^2} + a(1+k))^{\frac{1}{2}}. \tag{26.65}$$

Тогда существует постоянная $C_* > 0$ *такая, что при*

$$\alpha_1 = \frac{(\alpha + \beta_1)}{2} \tag{26.66}$$

решение $V_\alpha(x,t)$ *задачи Коши* (26.61), (26.62) *удовлетворяет неравенству*

$$V^1_{\alpha_1}(x,t) \leqslant C_*\Gamma_{\alpha_1}(r), \tag{26.67}$$

где $\Gamma_{\alpha_1}(r)$ *определяется по формуле* (26.17) *при* $\alpha = \alpha_1$ *из* (26.66).

Доказательство. В лемме 26.3 построена функция, определяемая по формуле (26.17) и такая, что при $0 < k = l < 1$ и при α, удовлетворяющим условию (26.59), справедлива асимптотика (26.20). Установим, что для фиксированных $C_0 > 0$, $a > 0$, $0 < k < 1$ найдется такая постоянная $C_* > 0$, что

$$C_0 \exp(ar^{1+k}) \leqslant C_*\Gamma_{\alpha_1}(r). \tag{26.68}$$

Так как $\alpha > \beta_1$, где β_1 из (26.65), то число $\alpha_1 = (\alpha + \beta_1)/2$ удовлетворяет неравенствам

$$\beta_1 < \alpha_1 < \alpha.$$

Из асимптотики (26.20) леммы 26.3 получаем, что поскольку неравенство

$$\sqrt{\overline{\alpha}^2 + \frac{B_1^2}{4}} - \frac{B_1}{2} > a(1+k) \tag{26.69}$$

после возведения в квадрат переходит в неравенство (26.59) или, что тоже самое, в неравенство (26.64), то порядок роста при $r \to +\infty$ функции $\Gamma_{\alpha_1}(r)$ больше, чем у функции (26.62). Поэтому существует $r_1 > 1$ такое, что при $r \geqslant r_1$

$$\Gamma_{\alpha_1}(r) \geqslant C_0 \exp(ar^{1+k}). \tag{26.70}$$

Фиксируем r_1 и заметим, что функция $C_0\exp(ar^{1+k})$ возрастает по r, поэтому при $r \leqslant r_1$

$$-C_0 \exp(ar^{1+k}) \geqslant -C_0 \exp(a{r_1}^{1+k}). \tag{26.71}$$

Положим

$$C_* = C_0 \exp(a{r_1}^{1+k})$$

и рассмотрим функцию

$$W(r) = C_*\Gamma_{\alpha_1}(r) - C_0 \exp(ar^{1+k}). \tag{26.72}$$

Из лемм 26.1 и 26.2 следует, что

$$\Gamma_{\alpha_1}(r) \geqslant 1.$$

Поэтому при $r \leqslant r_1$ получим неравенство

$$W(r) \geqslant C_* \cdot 1 - C_0 \exp(ar^{1+k}) = 0.$$

При $r \geqslant r_1$ в силу выбора r_1 справедливо (26.70), поэтому

$$W(r) \geqslant C_* \exp(ar^{1+k}) - C_0 \exp(ar^{1+k}) = \exp(ar^{1+k})(C_* - C_0) > 0.$$

Неравенство (26.68) обосновано. Для доказательства (26.67) введем функцию

$$W(x,t) = V^1_{\alpha_1}(x,t) - C_*\Gamma_{\alpha_1}(r),$$

где α_1 из (26.66), а $V_{\alpha_1}(x,t)$ — решение задачи Коши (26.61), (26.62) при $\alpha = \alpha_1$.

Учитывая (26.69), (26.68), получим:

$$\Lambda W + (b, W) + a_\alpha(r)W - W_{\alpha t} > 0,$$

$$W(x,t)|_{t=0} = C_0 \exp(ar^{1+k}) - C_* \Gamma_{\alpha_1}(r) \leqslant 0.$$

Применяя принцип максимума [42, с. 182], получим, что в D справедливо неравенство $W(x,t) \leqslant 0$. Лемма 26.8 доказана. □

Лемма 26.9. *Пусть при* $0 < l < k < 1$, $C_0 > 0$, $a > 0$, $B > 0$ *выполняется неравенство* (26.60), *тогда существует такая постоянная* $C_* > 0$, *что при*

$$\alpha_1 = (\alpha + a(1+k)\lambda_1)/2 \tag{26.73}$$

решение $V_{\alpha_1}(x,t)$ *задачи Коши* (26.61), (26.62) *удовлетворяет неравенству*

$$V^1_{\alpha_1}(x,t) \leqslant C_* \Gamma_{\alpha_1}(r) \tag{26.74}$$

где $\Gamma_{\alpha_1}(r)$ — *функция, определенная по формуле* (26.17) *при* $\alpha = \alpha_1$ *из* (26.73).

Доказательство леммы 26.9 проводится аналогично доказательству леммы 26.8.

27. Доказательство теорем 25.1 и 25.2

Фиксируем $a > 0$, $b > 0$, и пусть при $0 < k = l < 1$ число α удовлетворяет условию

$$\alpha > \beta_1 = \lambda_1 (a(1+k)(\frac{B_1}{\lambda_0^2} + a(1+k)))^{1/2}, \tag{27.1}$$

а при $0 < l < k < 1$ пусть α удовлетворяет условию

$$\alpha > \lambda_1 a(1+k). \tag{27.2}$$

Рассмотрим задачу Коши (25.1), (25.2). Согласно леммам 26.5–26.7 и неравенству (26.63), для доказательства теорем 25.1 и 25.2 достаточно установить, что существует предел

$$\lim_{t\to\infty} V^1_\alpha(x,t) = 0 \tag{27.3}$$

решения задачи Коши (26.61), (26.62), равномерный по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем число $r_2 > 0$ так, чтобы

$$K \subset \overline{B}_{r_2} \equiv \{|x| \leqslant r_2\}. \tag{27.4}$$

Для α, удовлетворяющего условию (27.1), по лемме 26.3 построим функцию $\Gamma_\alpha(r)$ из (26.17).

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы в шаре $\overline{B}_{r_2}$ было справедливо неравенство

$$\delta \Gamma_\alpha(r) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27.5}$$

Рассмотрим функцию

$$W(x,t) = \delta\Gamma_\alpha(r) - V^1_\alpha(x,t) \tag{27.6}$$

при $\alpha > \alpha_1$, где $\alpha_1 > 0$ из (26.66) и $0 < k = l < 1$. Используя неравенства (26.55) и (26.67), получим неравенство

$$W(x,t) \geqslant \delta\Gamma_\alpha(r) - V^1_{\alpha_1}(x,t) \geqslant \delta\Gamma_\alpha(r) - C_*\Gamma_{\alpha_1}(r). \tag{27.7}$$

Согласно лемме 26.3, имеют место асимптотические формулы (26.20):

$$\delta\Gamma_\alpha(r) = \delta C_1 r^m \exp\Big\{\frac{r^{1+k}}{(1+k)}(d - \frac{B_1}{2})\Big\}[1 + \varepsilon_1(r)], \tag{27.8}$$

$$\Gamma_{\alpha_1}(r) = C_1 r^{m_1} \exp\Big\{\frac{r^{1+k}}{(1+k)}(d_1 - \frac{B_1}{2})\Big\}[1 + \varepsilon_2(r)], \tag{27.9}$$

где $\varepsilon_{1,2}(r) \to 0$ при $r \to \infty$,

$$m = \frac{-k-s+1}{2} + \frac{B_1(s-1+k)}{2d}, \quad m_1 = \frac{-k-s+1}{2} + \frac{B_1(s-1+k)}{2d_1},$$

$$d = \sqrt{\overline{\alpha}^2 + \frac{B_1^2}{4}}, \quad d_1 = \sqrt{\overline{\alpha}_1^2 + \frac{B_1^2}{4}}.$$

Так как $\alpha > \alpha_1$ в силу (26.66), то из (27.8), (27.9) следует, что порядок роста функции $\delta\Gamma_\alpha(r)$ при $r \to +\infty$ больше, чем порядок роста у функции $C_*\Gamma_{\alpha_1}(r)$. Следовательно, существует такое $R > r_2$, что при $|x| = R$ имеет место неравенство

$$W(x,t)|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0.$$

Итак, функция (27.6) удовлетворяет соотношениям:

$$L_1 W - \frac{\partial W}{\partial t} \leqslant 0, \quad r < R, \quad t > 0, \tag{27.10}$$

$$W|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0, \tag{27.11}$$

$$W|_{t=0} = \delta\Gamma_\alpha(r) - C_0 \exp(ar^{1+k}). \tag{27.12}$$

Обозначим

$$f_1(r) = \delta\Gamma_\alpha(r) - C_0 \exp(ar^{1+k}). \tag{27.13}$$

Рассмотрим функцию (26.44) из леммы 26.4 и введем новую функцию

$$p_1(x,t) = \frac{A_1}{\gamma} p(x,t), \tag{27.14}$$

$$\text{где} A_1 = \max_{r \leqslant R} |f_1(r)|, \quad \gamma = 1 - e^{-\frac{3A}{4}} = V(R) > 0. \tag{27.15}$$

Здесь были использованы обозначения из леммы 26.4.

Далее отметим, что

$$p_1(x,0) = \frac{A_1 V(r)}{\gamma} \geqslant A_1,$$

ибо $1 \geqslant V(r) \geqslant \gamma$, где $V(r)$ из (26.42).

Из леммы 26.4 следует, что функция (27.14) удовлетворяет соотношениям

$$L_1 p_1 - \frac{\partial p_1}{\partial t} \leqslant 0, \quad r < R, \quad t > 0 \tag{27.16}$$

$$p_1(x,t)|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0 \tag{27.17}$$

$$p_1(x,0) \geqslant A_1 = \max_{r \leqslant R} |f_1(r)|, \tag{27.18}$$

где функция $f_1(r)$ определена в (27.13), и существует предел

$$\lim_{t \to \infty} p_1(x,t) = 0,$$

равномерный по x в шаре B_R, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $T = T(\varepsilon) > 0$, что при $t \geqslant T$ и всех $x \in B_R$ справедливо неравенство

$$p_1(x,t) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27.19}$$

Рассмотрим функцию

$$W_1(x,t) = W(x,t) + p_1(x,t). \tag{27.20}$$

где $W(x,t)$ — функция (27.6), а $p_1(x,t)$ — функция (27.14). Ясно, что в силу (27.10)–(27.12) и (27.16)–(27.18) функция (27.20) удовлетворяет соотношениям

$$L_1 W_1 - \frac{\partial W_1}{\partial t} \leqslant 0, \quad |x| < R, \quad t > 0,$$

$$W_1|_{|x|=R} \geqslant 0,$$

$$W_1|_{t=0} \geqslant f_1(r) + |f_1(r)| \geqslant 0, \quad |x| \leqslant R.$$

Отсюда, применяя принцип максимума [42, с. 182], заключаем, что

$$W_1 \geqslant 0, \quad r < R, \quad |x| \leqslant R, \quad t > 0, \tag{27.21}$$

т. е. при $|x| \leqslant R,\ t > 0$

$$0 \leqslant V_\alpha^1(x,t) \leqslant \delta\Gamma_\alpha(r) + p_1(x,t). \tag{27.22}$$

При $|x| \leqslant r_2$ из (27.5), (27.19) и (27.21) получим

$$0 \leqslant V_\alpha^1(x,t) < \varepsilon \quad \text{при } t \geqslant T,\ x \in B_{r_2}. \tag{27.23}$$

В силу лемм 26.5–26.7 и неравенства (26.63), получим, что теорема 25.1 доказана.

Доказательство теоремы 25.2 проводится аналогично доказательству теоремы 25.1. Следует лишь использовать при $1 > k > l > 0$ условие (27.2), неравенство (26.74) из леммы 26.9, а также асимптотическую формулу (26.21) из леммы 26.3. Остальные части доказательства теоремы 25.2 совершенно аналогичны соответствующим рассуждениям в теореме 25.1. Теорема 25.2 доказана.

Глава 3

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В этой главе устанавливаются необходимые и достаточные условия стабилизации решения первой краевой задачи для параболического уравнения второго порядка дивергентной структуры без младших коэффициентов. Изучается влияние произвольной (возможно, неограниченной) области $Q \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, на которой при $t = 0$ задана ограниченная начальная функция $u_0(x)$, на стабилизацию решения первой краевой задачи, рассматриваемой в прямом цилиндре $Z = Q \times [0, \infty)$ с нулевыми значениями решения на боковой поверхности цилиндра Z.

28. Формулировка результатов

Пусть Q — произвольная (возможно, неограниченная) область N-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$, а $Z = Q \times [0, \infty)$ — прямой цилиндр с основанием Q.

В цилиндре $\overline{Z}$ рассмотрим первую краевую задачу

$$L(x)u - u_t = 0 \quad \text{в } \overline{Z}, \tag{28.1}$$

$$u|_S = 0, \quad S = \partial Q \times [0, \infty), \tag{28.2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in Q, \tag{28.3}$$

где $L(x)$ — оператор (1.1).

Предполагается, что коэффициенты $a_{ik}(x)$ в $L(x)$ ограничены и измеримы в Q,

$$a_{ik} = a_{ki}$$

и выполнено условие параболичности (1.3), $u_0(x)$ — непрерывная, ограниченная функция в Q:

$$|u_0(x)| \leqslant M, \quad x \in Q. \tag{28.4}$$

Нашей целью является нахождение таких характеристик области $Q \subset \mathbb{R}^N$, которые были бы необходимыми и достаточными для стабилизации решения задачи (28.1)–(28.3):

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = 0 \tag{28.5}$$

в каждой точке $x \in Q$ (равномерно по x на каждом компакте K в Q).

Рассмотрим, кратко, вопрос о существовании обобщенного решения задачи (28.1)–(28.3).

Нам потребуется несколько определений известных пространств дифференцируемых функций (см., например, [45, 46, 52]). Через Q_a^b обозначим прямое произведение $Q \times (a, b)$, где Q — область в $\mathbb{R}^N$, $a < t < b$,

$$Q_a^b(R) = \{Q_a^b \cap |x| < R\}. \tag{28.6}$$

Пространство $\mathring{W}_2^{1,0}(Q_a^b(R))$ определяется как пополнение множества функций из $C_0^\infty(Q_{a-1}^{b+1})$ по норме

$$\|u\|_{\mathring{W}_2^{1,0}(Q_a^b(R))} = \int\limits_{Q_a^b(R)} [u^2(x, t) + |\nabla u(x, t)|^2] dx dt. \tag{28.7}$$

Пространство $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_a^b(R))$ определяется как пополнение множества функций из $C_0^\infty(Q_{a-1}^{b+1})$ по норме

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_a^b(R))} = \operatorname{vrai}\max_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_{B_R}[u^2(x,\,t)dx + \int\limits_{Q_a^b(R)}|\nabla u(x,\,t)|^2]dxdt. \tag{28.8}$$

Определение. *Обобщенным решением в* $Q_0^T = Q\times(0,\,T)$ *первой краевой задачи* (28.1)–(28.3) называется функция $u(x,\,t)$, принадлежащая классу $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,0}(Q_0^T(R))$, если выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_0^T}\left[-u\eta_t + \sum_{i,\,k=1}^N a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right]dxdt = \int\limits_Q \eta(x,\,0)\varphi(x)dx \tag{28.9}$$

для всех пробных функций $\eta(x,\,t)\in C_0^\infty(Q_{-1}^T)$, удовлетворяющих условию $\eta(x,\,T)\equiv 0$.

Функция $u(x,\,t)$ — *решение задачи* (28.1)–(28.3) *в* $Q\times(0,\,\infty)$, если при всех $T>0$ она является решением задачи (28.1)–(28.3) в Q_0^T.

Из работ [8, 52] вытекает, что для решения задачи (28.1)–(28.3) имеют место утверждения:

1. принцип максимума: если $u_0(x)\leqslant M$ для п. в. $x\in D$, то $u(x,\,t)\leqslant M$ для п. в. $x\in Q$ и $\forall\, t>0$;
2. если функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в Q, то ограниченное решение задачи (28.1)–(28.3) существует и единственно.

Для заданной функции $u_0(x)$ вместе с задачей (28.1)–(28.3) в цилиндре $Z = Q\times(0,\,\infty)$ рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в } Z, \tag{28.10}$$

$$u|_S = 0, \quad S = \partial Q\times[0,\,\infty), \tag{28.11}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x\in Q. \tag{28.12}$$

Не ограничивая общности будем всюду далее считать, что начало координат O принадлежит границе ∂Q области Q и что $\operatorname{cap}(\mathbb{R}^N\backslash Q)>0$.

Имеет место следующее утверждение [25].

Теорема 28.1. *Для того, чтобы решение задачи* (28.10)–(28.12) *стабилизировалось, т. е. существовал предел* (28.5) *в точке* $x\in D$ (*равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в области* Q), *необходимо и достаточно, чтобы при некотором* $q>1$ *расходился ряд*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^n \operatorname{cap}\left(\overline{B_{q^m}}\setminus Q\right) q^{m(2-N)} = +\infty, \tag{28.13}$$

где $\overline{B_R}$ — *замкнутый шар* $\{|x|\leqslant R\}$ *в* $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{cap}(E)$ — *винеровская емкость компакта* E *в* $\mathbb{R}^N$.

Критерий стабилизации решения задачи (28.10)–(28.12) можно сформулировать и в интегральном виде [17].

Теорема 28.2. *Для того, чтобы решение задачи* (28.10)–(28.12) *стабилизировалось, необходимо и достаточно, чтобы расходился интеграл*

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{r_0}^R \operatorname{cap}\left(\overline{B_\tau}\setminus Q\right)\frac{d\tau}{\tau^{N-1}} = +\infty, \tag{28.14}$$

где $\overline{B_R}$ — *замкнутый шар* $\{|x|\leqslant R\}$ *в* $\mathbb{R}^N$, $\operatorname{cap}(E)$ — *винеровская емкость компакта* E *в* $\mathbb{R}^N$.

Имеет место основной результат главы 3.

Теорема 28.3. *Для того, чтобы решение задачи* (28.1)–(28.3) *стабилизировалось к нулю равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в* Q, *необходимо и достаточно, чтобы это свойство было справедливо для решения задачи* (28.10)–(28.12) *для уравнения теплопроводности.*

Следствие 28.1. *Если область* $Q \subset \mathbb{R}^N$ *такова, что расходится ряд* (28.13) (*интеграл* (28.14)), *то для решения краевой задачи* (28.1)–(28.3) *справедливо неравенство*

$$|u(x,\,t)| \leqslant C_1 \exp\left\{-C_2 \int\limits_{a_0}^{\sqrt{t}} \frac{\operatorname{cap}\left(\overline{B_\tau} \setminus Q\right)}{q^{N-1}} d\tau\right\}, \tag{28.15}$$

где x_0 — *произвольная точка области* Q, $C_1 > 0$ — *некоторая постоянная, зависящая от* λ_1, λ_0, N; $a_0 > 0$, $C_2 > 0$ — *постоянные, зависящие от* N, λ_1, λ_0 *и* $|x_0|$.

Из теоремы 28.2 следует свойство устойчивости решений задачи (28.1)–(28.3) по отношению к изменению коэффициентов уравнения (28.1) и начальной функции.

Пусть Q — та же область в $\mathbb{R}^N$, что и в задаче (28.1)–(28.3). Вместе с ней рассмотрим в цилиндре $\overline{Z} = Q \times [0,\,\infty)$ другую задачу

$$L_1 u_1 - u_{1t} = 0 \quad \text{в } Z \tag{28.16}$$

$$u_1|_S = 0, \quad S = \partial Q \times (0,\,\infty), \tag{28.17}$$

$$u_1|_{t=0} = u_1(x),\ x \in Q, \quad |u_1(x)| \leqslant M, \tag{28.18}$$

где

$$L_1(x) u_1 = \sum_{i,\,k=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right),$$

и для ограниченных и измеримых в Q коэффициентов a_{ik}^1 выполнены те же ограничения (1.3), что и для коэффициентов a_{ik} уравнения (28.1), $u_1(x)$ — ограниченная и непрерывная в Q функция.

Будем также считать, что $|u_1(x,\,t)| \leqslant M$, где $u_1(x,\,t)$ — решение из класса $\overset{\circ}{V}{}_2^{1,\,0}(Q \times (0,\,\infty))$ задачи (28.16)–(28.18).

Теорема 28.4.

1. *Если область* $Q \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geqslant 3)$ *такова, что расходится ряд* (28.13) (*интеграл* (28.14)), *то решения краевых задач* (28.1)–(28.3) *и* (28.16)–(28.18) *имеют пределы*
$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} u_1(x,\,t) = 0, \tag{28.19}$$
в каждой точке x *области* Q (*равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в* Q).
2. *Если существует один из пределов* (28.19), *то для области* Q *расходится ряд* (28.13) (*интеграл* (28.14)) *и тогда существует и другой предел в* (28.19).

29. Лемма о возрастании

Напомним определение тепловой $\gamma(E)$ емкости [49] для уравнения теплопроводности (28.10). На с. 138 дается определение тепловой (параболической) емкости, отвечающей уравнению (28.1).

Пусть E — B-множество в $\mathbb{R}^{N+1}$. Рассмотрим на E всевозможные меры μ такие, что

$$\int\limits_E F(x-y,\,t-\tau) d\mu(y,\,\tau) \leqslant 1 \quad \text{при } (x,\,y) \notin E, \tag{29.1}$$

где

$$F(x,\,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t \leqslant 0 \text{ (кроме точки } (x=0,\,t=0)). \end{cases} \tag{29.2}$$

Положим по определению

$$\gamma(E) = \sup \mu(E), \tag{29.3}$$

где верхняя грань берется по всевозможным мерам μ, удовлетворяющим (29.1).

Число $\gamma(E)$ называется *тепловой* (*параболической*) *емкостью* B-множества $E \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Основные свойства тепловой емкости хорошо изучены (см., например, [49, 89]).

Введем обозначение

$$Z_{0,\,R}^{t_1,\,t_2} \equiv \{x,\,t \in \mathbb{R}^{N+1} : |x| < R,\, 0 < t_1 < t < t_2\}$$

для цилиндра с основанием $|x| < R$, лежащим в гиперплоскости $t = t_1$ и высотой $t_2 - t_1 > 0$.

Рассмотрим три соосных цилиндра

$$Z_1 = Z_{0,\,R}^{0,\,2\ell^2 R^2}, \quad Z_2 = Z_{0,\,\ell R}^{5/4\ell^2 R^2,\,2\ell^2 R^2}, \quad Z_3 = Z_{0,\,\ell R}^{0,\,\ell^2 R^2}, \tag{29.4}$$

где ℓ — некоторое число $0 < \ell < 1$.

В цилиндре $\overline{Z} = Q \times (0,\,\infty)$ рассмотрим неотрицательное решение $u(x,\,t)$ из класса $V_{2,\,loc}^{1,\,0}(Z)$ задачи

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \text{в } Z, \tag{29.5}$$

$$u|_S = 0, \quad S = \partial Q \times (0,\,\infty), \tag{29.6}$$

$$u|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in Q, \tag{29.7}$$

где функция $u_1(x)$ непрерывна в Q и

$$0 \leqslant u_1 \leqslant M. \tag{29.8}$$

К задаче (29.5)–(29.7) сводится задача (28.10)–(28.12), ибо всегда можно для решения задачи (28.10)–(28.12) положить

$$u_o(x) = u_o^+ - u_o^-,$$

где

$$u_o^+ = \max(u_0,\,0), \quad u^- = \min(u_0,\,0),$$

и в силу линейности (28.10)–(28.12) получаются две задачи типа (29.5)–(29.7).

Предположим, что начало координат O принадлежит границе ∂Q области Q. Пусть

$$CZ = \mathbb{R}_+^{N+1} \backslash Z$$

— дополнение цилиндра Z в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, и пусть $E = CZ \cap Z_3$, где Z_3 — цилиндр из (29.4).

Следующее утверждение является аналогом леммы о возрастании Е. М. Ландиса [49].

Лемма 29.1. *Если $u(x,\,t)$ — неотрицательное решение задачи* (29.5)–(29.7)*, то существует такое ℓ_1: $0 < \ell_1 < 1$, что при $0 < \ell < \ell_1$ справедливо неравенство*

$$\sup_{Z \cap Z_1} u \geqslant \left(1 + \frac{\eta}{\ell^N R^N} \gamma(\overline{E})\right) \sup_{Z \cap Z_2} u, \tag{29.9}$$

где $\eta > 0$ — постоянная, зависящая только от N, $\gamma(\overline{E})$ — тепловая емкость цилиндра $\overline{Z}_1$.

Замечание. Мы рассматриваем обобщенное решение $u(x,\,t) \geqslant 0$ задачи (29.5)–(29.7) из класса $V_{2,\,loc}^{1,\,0}(Z)$, поэтому мы доказываем лемму 29.1, вводя необходимые дополнения к классическому доказательству Е. М. Ландиса [48, 49].

Доказательство леммы 29.1. Пусть S_1 — боковая поверхность цилиндра $\overline{Z}_1$. Фиксируем произвольную точку $(y,\,\tau) \in Z_3$ и рассмотрим функцию

$$v(x,\,t) = F(x - y,\,t - \tau), \tag{29.10}$$

где $F(x,\,t)$ определена в (29.2), и оценим $\sup\limits_{(x,\,t) \in S_1} v(x,\,t)$.

Фиксируем точку x: $|x| = R$ и найдем значение t: $t > \tau$, при котором функция (29.10) достигает максимума:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((t-\tau)^{-N2} \exp\left\{-\frac{|x-y|^2}{4(t-\tau)}\right\}\right) = \exp\left(-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right)\left\{\frac{r^2}{4(t-\tau)^{\frac{N}{2}+2}} - \frac{N}{2(t-\tau)^{\frac{N}{2}+1}}\right\} = 0,$$

где

$$t - \tau = \frac{r^2}{2N}.$$

При $|x| = R$ и $|y| \leqslant \ell R$, $0 < \ell < 1$ имеем

$$|x - y| \geqslant R(1 - \ell).$$

Следовательно,

$$t - \tau \geqslant \frac{R^2}{2N}(1 - \ell).$$

И потому, в силу монотонности $v(x,\,t)$ по t до первого максимума, имеем

$$\sup_{(x,\,t)\in S_1} v(x,\,t) \leqslant \left(\frac{2N}{R^2(1-\ell)^2}\right)^{N/2} \exp\left\{-\frac{R^2(1-\ell)^2}{4R^2}\frac{2N}{(1-\ell)^2}\right\} =$$

$$= \left(\frac{2N}{R^2(1-\ell)^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{N}{2}\right). \qquad (29.11)$$

Оценим $\inf\limits_{(x,\,t)\in Z_2} v(x,\,t)$. Поскольку $(y,\,\tau)\in Z_3$, $(x,\,t)\in Z_2$, то

$$|x-y|^2 \leqslant (|x|+|y|)^2 \leqslant 4\ell^2R^2, \quad \frac{R^2\ell^2}{4} \leqslant t-\tau \leqslant 2\ell^2R^2. \qquad (29.12)$$

Поэтому

$$\inf_{(x,\,t)\in Z_2} v(x,\,t) \geqslant \frac{1}{(2\ell^2R^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{4}{\ell^2R^2}\frac{4\ell^2R^2}{4}\right\} = \exp(-4)\frac{1}{2^{N/2}\ell^N R^N}. \qquad (29.13)$$

Учитывая, что $(y,\,\tau)$ — произвольная точка $\overline{Z}_3$, получаем из (29.11), (29.13)

$$\sup_{\substack{(y,\,\tau)\in Z_3,\\ (x,\,t)\in S_1}} F(x-y,\,t-\tau) \leqslant \left(\frac{2N}{R^2(1-\ell)^2}\right)^{N/2} \exp\left(-\frac{N}{2}\right), \qquad (29.14)$$

$$\inf_{\substack{(y,\,\tau)\in Z_3,\\ (x,\,t)\in Z_2}} F(x-y,\,t-\tau) \geqslant \exp(-4)\frac{1}{2^{N/2}\ell^N R^N}. \qquad (29.15)$$

Пусть $E_1\subset Z_3$, где $E_1 = K\times[0,\,\ell^2R^2]$, K — компакт в шаре $B_{\ell R}$. Рассмотрим тепловой потенциал

$$w(x,\,t) = \int\limits_{E_1} F(x-y,\,t-\tau)d\mu(y,\,\tau), \qquad (29.16)$$

где μ — мера, реализующая тепловую емкость цилиндра E_1, и без ограничения общности считаем, что $\gamma(E_1)>0$.

Существование меры, реализующей тепловую емкость компакта E_1, доказано в работах В. Кайзера, Б. Мюллера [40], Е. Ланконелли [81], Ю. А. Алхутова [2]. В этих работах устанавливаются различные свойства теплового потенциала (29.16). В частности, в [2, 76] доказано, что $w(x,\,t)$ является решением уравнения теплопроводности из класса $V_2^{1,\,0}(\Pi_T\backslash E_1)$, где Π_T — полоса в $\mathbb{R}_+^{N+1}$, $\forall\, T>2\ell^2R^2$,

$$\Pi_T = \{x,\,t\in\mathbb{R}_+^{N+1} x\in\mathbb{R}^N,\,0<t\leqslant T\},$$

и $w(x,\,t)=1$ в поточечном смысле на верхней крышке $t=\ell^2R^2$ цилиндра E_1, а на боковой поверхности цилиндра E_1 равенство $w=1$ понимается в смысле $V_2^{1,\,0}$ (т. е. $w-1\in \overset{\circ}{V}{}_2^{1,\,0}(\Pi_T\backslash E_1)$), кроме того, $w(x,\,t)\leqslant 1$ в $\Pi_T\backslash E_1$ в поточечном смысле. Из неравенств (29.14), (29.15) получаем неравенства

$$\sup_{S_1} w(x,\,t) \leqslant \left(\frac{2N}{e}\right)^{N/2} \frac{1}{R^N(1-\ell)^N}\gamma(E_1), \qquad (29.17)$$

$$\inf_{Z_2} w(x,\,t) \geqslant \frac{1}{e^4 2^{N/2}R^N\ell^N}\gamma(E_1), \qquad (29.18)$$

где $\gamma(E_1)$ — тепловая емкость цилиндра E_1.

Рассмотрим в цилиндре $Z\cap Z_1$ функцию

$$U(x,\,t) = M[1-w(x,\,t)+\lambda], \qquad (29.19)$$

где

$$M = \sup_{Z\cap Z_1} u(x,\,t), \qquad (29.20)$$

$$\lambda = \sup_{\substack{(x,\,t)\in Z_1\\ (y,\,\tau)\in Z_3}} F(x-y,\,t-\tau)\gamma(\overline{Z}_3\backslash Z).$$

Сравним $u(x,\,t)$ и $U(x,\,t)$ на параболической границе цилиндра $Z_1 \cap Z$. В силу результатов работы [2], мы получаем, что функция (29.19) является решением из класса $V_2^{1,0}$ для уравнения теплопроводности

$$\Delta U - U_t = 0 \quad \text{в } \Pi_T \backslash E_1.$$

На боковой поверхности S_1 в $\overline{Z}_1 \cap Z$ имеем $U|_S > M$, ибо $w(x,\,t)|_{S_1} \leqslant \lambda$, а $u(x,\,t) \leqslant M$, поэтому $U|_{S_1} \geqslant u|_{s_1}$.

Кроме того, $w(x,\,t) \leqslant 1$ в смысле $V_2^{1,0}$ на боковой поверхности цилиндра Z, содержащейся в Z_1, а потому $U(x,\,t) \geqslant 0$ в смысле $V_2^{1,0}$ на боковой поверхности Z, содержащейся в Z_1, а также $u(x,\,t) = 0$ на этой же части боковой поверхности $Z \cap Z_1$. Наконец, при $t=0$ мы имеем, что $0 \leqslant u(x,\,0) \leqslant M$ в поточечном смысле (и тем более в смысле $V_2^{1,0}$) на нижнем основании цилиндра $\overline{Z}_1 \cap Z$, а также $U(x,\,t) > M$ на нижнем основании $Z_1 \cap Z$, ибо $w(x,\,0) = 0$, $x \notin K$. Следовательно, применяя принцип максимума [45], получим, что

$$u(x,\,t) < U(x,\,t) \quad \text{всюду в } Z_1 \cap Z.$$

Поэтому

$$\sup_{Z_2 \cap Z} u < \sup_{Z_2 \cap Z} U(x,\,t) \leqslant M(1 - \inf_{Z_2 \cap Z} w(x,\,t) + \lambda). \tag{29.21}$$

Учитывая в (29.21) неравенство (29.18), получим

$$\sup_{Z \cap Z_2} u \leqslant M\left(1 - \frac{\gamma(\overline{Z}_3 \backslash Z)}{R^N}\right)\left\{\frac{1}{e^4 2^{N/2} \ell^N} - \left(\frac{2N}{e}\right)^{N/2} \frac{1}{(1-\ell)^N}\right\}. \tag{29.22}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\ell) = \frac{A_1}{e^N} - \frac{B_1}{(1-\ell)^N}, \quad A_1 = \frac{1}{e^4 2^{N/2}}, \quad A_2 = \left(\frac{2N}{e}\right)^{N/2}.$$

Заметим, что

$$\lim_{\ell \to +0} f(\ell) = +\infty$$
$$\lim_{\ell \to 1-0} f(\ell) = -\infty$$

и $f'(\ell) < 0$ при $0 < \ell < 1$.

Поэтому найдется ℓ_1: $0 < \ell_1 < 1$ такое, что при $0 < \ell \leqslant \ell_1$ справедливо неравенство

$$f(\ell) > \frac{A_1}{2e^N}. \tag{29.23}$$

Выберем число ℓ_1 так, чтобы при ℓ: $0 < \ell \leqslant \ell_1$ было справедливо неравенство (29.23) и получим из (29.22) неравенство

$$\sup_{Z \cap Z_2} u \leqslant M\left(1 - \eta \frac{\gamma(\overline{Z}_2 \backslash Z)}{R^N \ell^N}\right), \tag{29.24}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{e^4 2^{N/2+1}}, \quad 0 < \ell \leqslant \ell_1 < 1.$$

Из неравенства (29.24) получаем требуемое неравенство (29.9). В самом деле, так как $Z_2 \subset Z_1$, то из (29.24) следует, что

$$\sup_{Z_1 \cap Z} u \geqslant \sup_{Z \cap Z_2} u + \sup_{Z \cap Z_1} u \cdot \eta \frac{\gamma(\overline{Z}_3 \cap Z)}{R^N \ell^N} \geqslant \sup_{Z \cap Z_2} \left(1 + \frac{\eta}{R^N \ell^N} \gamma(\overline{Z}_3) \backslash Z\right).$$

Лемма 29.1 доказана. □

30. Итерационное неравенство и его следствия

Положим
$$q = \frac{1}{\ell} > 1,$$
где $0 < \ell < 1$ из леммы 29.1, и пусть $t_0 > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и
$$t_0 - 2q^m \geqslant 0.$$

Рассмотрим систему соосных цилиндров
$$Z_1^m = Z_{1,\,q^{m+1}}^{t_0-2q^{2m},\,t_0}, \quad Z_2^m = Z_{0,\,q^m}^{t_0-3/4q^2m,\,t_0}, \quad Z_3^m = Z_{0,\,q^m}^{t_0-2q^{2m},\,t_0-q^{2m}}, \tag{30.1}$$
(т. е. в обозначениях леммы 29.1 мы полагаем $q^m = R\ell$, $\ell = \dfrac{1}{q} < 1$).

Потребуем выполнения условия
$$q^2 > \frac{8}{3}, \tag{30.2}$$
которое, очевидно, гарантирует выполнение включений
$$Z_2^m \supset \overline{Z}_1^{m-1}. \tag{30.3}$$
Так как $q = 1/\ell$, где $\ell > 0$ ограничено снизу только нулем, то условие (30.2) будет заведомо выполнено при
$$\ell^2 < \min\left(\frac{3}{8},\, \ell_1^2\right). \tag{30.4}$$
Введем обозначение
$$M_m = \sup_{Z_1^m \cap Z} u, \tag{30.5}$$
где $u(x,\,t)$ — решение задачи (29.5)–(29.7).

Лемма 30.1. *Для последовательности* (30.5) *имеет место неравенство*
$$M_m \geqslant M_{m-1}\left(1 + \frac{\eta}{q^{mN}}\gamma(CZ \cap \overline{Z}_3^m)\right), \tag{30.6}$$
где
$$\gamma(CZ \cap \overline{Z}_3^m) \equiv \gamma(\overline{Z}_3^m \backslash Z)$$
— тепловая емкость компакта $\overline{Z}_3^m \backslash Z$, $\eta > 0$.

Доказательство. Применим лемму 29.1 к $u(x,\,t) \geqslant 0$ — решению задачи (29.5)–(29.7) в цилиндрах (30.1) и получим неравенства
$$\sup_{Z \cap Z_1^m} u \geqslant \sup_{Z \cap Z_2^m} u \left(1 + \frac{\eta}{q^{mN}}\gamma\left(CZ \cap \overline{Z}_3^m\right)\right).$$
Так как из (30.4) следует включение (30.3), то из (30.6), учитывая неравенство
$$\sup_{Z_2^m} u \geqslant \sup_{\overline{Z}_1^{m-1}} u,$$
получим
$$M_m = \sup_{\overline{Z}_1^m \cap Z} u \geqslant \sup_{Z_2^m \cap Z} u \geqslant \sup_{\overline{Z}_1^{m-1} \cap Z} u\left(1 + \frac{\eta}{q^{mN}}\gamma\left(CZ \cap \overline{Z}_3^m\right)\right) = M_{m-1}\left(1 + \frac{\eta}{q^{mN}}\gamma\left(CZ \cap \overline{Z}_3^m\right)\right).$$
Лемма 30.1 доказана. □

Лемма 30.2. *Для последовательности* (30.5) *справедливо неравенство*
$$M_m \geqslant M_1 \exp\left(\sum_{i=2}^{m} \frac{a\eta}{q^{Ni}}\gamma(CZ \cap \overline{Z}_3^i)\right), \tag{30.7}$$
где $a > 0$ зависит от $\eta > 0$.

Доказательство. Итерируя неравенство (30.6) из леммы 30.1, и применяя свойство логарифмов, получим неравенство

$$M_m \geqslant M_{m-1}\left(1+\frac{\eta}{q^{(m-1)N}}\gamma\left(CZ\cap\overline{Z}_3^{m-1}\right)\right)\left(1+\frac{\eta}{q^{mN}}\gamma\left(CZ\cap\overline{Z}_3^{m}\right)\right)\geqslant$$
$$\geqslant\ldots\geqslant M_1\left(1+\frac{\eta}{q^{2N}}\gamma\right)\ldots\left(1+\frac{\eta}{q^{mN}}\gamma\right)=M_1\exp\ln\left(\prod_{i=2}^{m}\left(1+\frac{\eta}{q^{iN}}\gamma\right)\right)=$$
$$=M_1\exp\sum_{i=2}^{m}\ln\left(1+\frac{\eta}{q^{iN}}\gamma\right).$$

Учтем, что

$$\ln(1+\eta x)>ax,\quad x>0$$

с постоянной a, зависящей от η. Поэтому из предыдущего неравенства получим

$$M_m\geqslant M_1\exp\left(\sum_{i=2}^{m}\frac{a\gamma\left(CZ\cap\overline{Z}_3^{m-1}\right)}{q^{iN}}\right). \tag{30.8}$$

Лемма 30.2 доказана. □

31. Оценка снизу тепловой емкости цилиндра через тепловую емкость основания

Лемма 31.1. *Пусть $\gamma(K)$ — тепловая емкость цилиндра $K=F\times[0,\,a]$, где F — компакт в $\mathbb{R}^N$, тогда*

$$\gamma(K)\geqslant a\,\mathrm{cap}(E), \tag{31.1}$$

где $\mathrm{cap}(E)$ — винеровская емкость компакта K.

Доказательство. Обозначим через Π_T полосу

$$\Pi_T\equiv\{x,\,t:\,x\in\mathbb{R}^N,\,0<t\leqslant T,\,T>0\},$$

и рассмотрим цилиндр

$$K=F\times[0,\,a]\subset\Pi_T,$$

$\gamma(K)$ — тепловая емкость цилиндра K.

Будем использовать следующее свойство тепловой емкости (см. N. A. Watson [89]).

Если K_i — последовательность компактов и $K_i\supset K_{i+1}$, $i=1,\,\ldots,$ и $K=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}K_i$, то

$$\gamma(K)=\lim_{i\to\infty}\gamma(K_i). \tag{31.2}$$

Исходя из свойства (31.2), при оценке тепловой емкости $\gamma(K)$, можно считать, что основание F цилиндра K является областью с гладкой границей ∂F.

Приведенное выше свойство тепловой емкости (31.2) справедливо и для винеровской емкости

$$\mathrm{cap}(E)=\lim_{i\to\infty}\mathrm{cap}(F_i), \tag{31.3}$$

где

$$F_i\supset F_{i+1},\quad F=\bigcap_{i=1}^{\infty}F_i.$$

Известно также (см. работы В. Кайзера, Б. Мюллера [40], Е. Ланконелли [81], Ю. А. Алхутова [2]), что существует мера μ, реализующая тепловую емкость компакта $K=F\times[0,\,a]$ и тепловой потенциал

$$w^\mu(x,\,t)=\int\limits_K F(x-y,\,t-\tau)d\mu(y,\,\tau), \tag{31.4}$$

удовлетворяющий задаче

$$\Delta w^\mu-w_t^\mu=0\quad\text{в }\Pi_T\backslash K, \tag{31.5}$$
$$w^\mu|_{\Gamma(\Pi_T)}=1,\quad w^\mu|_{t=0}=0. \tag{31.6}$$

Из гладкости границы ∂F компакта F следует, что $w^\mu(x,\,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}\backslash K)$ вплоть до боковой поверхности цилиндра K и его верхней крышки.

Функция $w^\mu(x,\,t)$ имеет конечную норму в пространстве $V_2^{1,\,0}(\Pi_T\backslash K)$, т. е.

$$\|w^\mu\|_{V_2^{1,\,0}} = \operatorname{vrai}\sup_\tau \left[\int\limits_{\Pi_T\backslash K\cap\{t=T\}} w^\mu(x,\,\tau)dx\right]^{1/2} + \left[\int\limits_{\Pi_T\backslash K} |\nabla w^\mu(x,\,t)|^2 dxdt\right]^{1/2}, \tag{31.7}$$

где

$$\gamma(K) \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} w^\mu(x,\,\tau)dx + \int\limits_{\Pi_T\backslash K} |\nabla w^\mu(x,\,t)|^2 dxdt. \tag{31.8}$$

Неравенства (31.7), (31.8) доказаны в работе [2]. Нам будут нужны некоторые свойства винеровской емкости компакта $F \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$:

1. выполнено
$$\operatorname{cap}(F) = \inf_{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^N)} \int |\nabla\varphi|^2 dx, \quad \varphi = 1$$
в окрестности F;
2. Существует единственная функция $U(x)$ такая, что
   (a) $U(x) \in W^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^N)$,
   (b) $\Delta U(x) = 0$ в $\mathbb{R}^N\backslash F$,
   (c) $U|_{\partial F} = 1$,
   (d) $\operatorname{cap}(F) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^2 dx$.

Эти свойства винеровской емкости доказаны в работе [83].

Так как ∂F (граница компакта F) является гладкой, то можно считать, что $U(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N\backslash F)$ вплоть до границы ∂F компакта F. Фиксируем $t \in (0,\,a)$ и учтем, что $\Delta U(x) = 0$ в смысле $W_2^1(\mathbb{R}^N\backslash F)$, поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash F} \Delta U(x)[U(x) - w^\mu(x,\,t)]dx = 0. \tag{31.9}$$

Интегрируя по частям и замечая, что

$$(U(x) - w^\mu(x,\,t))|_{\partial F} = 0,$$

получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash F} \nabla U(x)\nabla[U(x) - w^\mu(x,\,t)]dx = 0,$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash F} |\nabla U(x)|^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash F} \nabla U(x)\nabla w^\mu(x,\,t)dx.$$

Применяя справа в последнем равенстве неравенство

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2},$$

получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash F} |\nabla U(x)|^2 dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash F} |\nabla w^\mu(x,\,t)|^2 x.$$

Отсюда теперь следует, что

$$\operatorname{cap}(F) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N\backslash F} |\nabla w^\mu(x,\,t)|^2 dx. \tag{31.10}$$

Интегрируя (31.10) по t от 0 до a, получим

$$a\,\mathrm{cap}(F) \leqslant \int\limits_0^a \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus F} |\nabla w^\mu(x,t)|^2 dxdt \leqslant \int\limits_{\Pi_T\setminus K} |\nabla w^\mu(x,t)|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N} (w^\mu(x,T))^2 dx \leqslant \gamma(K).$$

Лемма 31.1 доказана. □

Лемма 31.2. *Для последовательности* (30.5) *справедливы неравенства*

$$M_m \geqslant M_1 \exp\left[\sum_{i=1}^m \frac{a\,\mathrm{cap}(\overline{B}_{q^i}\setminus Q)}{q^{i(N-2)}}\right], \tag{31.11}$$

где $\mathrm{cap}(E)$ — *винеровская емкость компакта* E.

Доказательство. Применяя в правой части неравенства (30.8) из леммы 30.1, неравенства (31.1) и учитывая, что высота цилиндров $\overline{Z}_3^m$ равна q^2, получим неравенства (31.11). Лемма 31.2 доказана. □

32. Доказательства теорем 28.1 и 28.2

Доказательство теоремы 28.1. Фиксируем компакт K и выберем $q > 1$ так, чтобы $K \subset \overline{B}_q = \{|x| \leqslant q\}$. Пусть ряд (28.13) расходится. Из неравенства (31.11) следует, что для любого натурального $m > 2$ справедливо неравенство

$$M_1 \leqslant M_m \exp\left(-a\eta\sum_{i=2}^m \frac{\mathrm{cap}(\overline{B}_{q^i}\setminus Q)}{q^{i(N-2)}}\right) \leqslant M \exp\left(-a\eta\sum_{i=2}^m \frac{\mathrm{cap}(\overline{B}_{q^i}\setminus Q)}{q^{i(N-2)}}\right). \tag{32.1}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ так, чтобы правая часть (32.1) была меньше $\varepsilon/2$, тогда

$$M_1 = \sup_{x,\,\tau\in Z\cap\overline{Z}_1^m} u(x,\tau) < \varepsilon/2. \tag{32.2}$$

Такой выбор $m(\varepsilon)$ всегда возможен, ибо решение $u(x,t)$ задачи (29.5)–(29.7) ограничено числом M для всех $x \in Q$, $t > 0$, а ряд (28.13) является расходящимся. По числу $m(\varepsilon)$ найдем $t(\varepsilon)$ из условия

$$t(\varepsilon) - 2q^{2m(\varepsilon)} \geqslant 0. \tag{32.3}$$

Пусть $t \geqslant t(\varepsilon)$, тогда требование

$$t - 2q^{2K} \geqslant 0$$

приводит к аналогичному неравенству

$$\sup_{Z\cap\overline{Z}_1^m} u(x,\tau) < \varepsilon/2,$$

ибо при $m \geqslant m(\varepsilon)$ высота цилиндра $Z \cap Z_1^m$ не меньше, чем высота цилиндра $Z \cap Z_1^{m(\varepsilon)}$. То есть для $\forall\,\varepsilon > 0$ существует $t(\varepsilon) \geqslant 2q^{m(\varepsilon)}$ такое, что при $t \geqslant t(\varepsilon)$ и $\forall\,x \in K$ справедливо неравенство

$$u(x,t) < \varepsilon. \tag{32.4}$$

Достаточность в теореме 28.1 доказана.

Необходимость. Пусть ряд (28.13) является сходящимся, и пусть $\mathrm{cap}(\mathbb{R}^N\setminus Q) > 0$. Применяя теорему 5.1 из монографии [50] Н.С. Ландкофа, получим, что существует равновесная мера μ замкнутого множества $\mathrm{cap}(\mathbb{R}^N\setminus Q)$ и потенциал $U^\mu(x)$, отвечающий этой мере:

$$U^\mu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus Q} \frac{d\mu(y)}{|x-y|^{N-2}}, \tag{32.5}$$

обладающий следующими свойствами:

$$U^\mu(x) = 1 \quad \mu\text{-почти всюду на } \mathbb{R}^N\setminus Q, \tag{32.6}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} U^\mu(x) = 0, \tag{32.7}$$

$$\Delta U^\mu(x) = 0 \quad \text{в } Q. \tag{32.8}$$

Справедливо утверждение.

Лемма 32.1. *Потенциал* (32.5) *обладает следующими свойствами*:

1. $U^\mu(x) \in W^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^N \backslash Q)$,
2. $U^\mu(x) = 1$ *на* $\mathbb{R}^N \backslash Q$ *в смысле* $W^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^N \backslash Q)$,
3. $\int\limits_Q \nabla U^\mu(x) \nabla \varphi(x) dx = 0$ *для* $\forall\, \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Замечание. Равенство $U^\mu(x) = 1$ на $\mathbb{R}^N \backslash Q$ в смысле $W^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^N \backslash Q)$ означает, что для любого шара $B_R = \{|x| < R\}$ функцию $U^\mu(x) - 1$ можно приблизить гладкими функциями, равными нулю вблизи границы $\partial Q \cap B_R$.

Доказательство леммы 32.1. Пусть $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность компактов, т. е. $K_{n+1} \supset K_n$, таких, что $K_n \to \mathbb{R}^N \backslash Q$ при $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность задач

$$\Delta u_n(x) = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \backslash K_n, \tag{32.9}$$

$$u_n|_{\partial(\mathbb{R}^N \backslash K_n)} = 1, \qquad \lim_{|x| \to \infty} u_n(x) = 0, \tag{32.10}$$

решения которых понимаются в смысле обобщенного решения в пространстве $W_2^1(\mathbb{R}^N \backslash K_n)$ с единичным следом на $\partial(\mathbb{R}^N \backslash K_n)$. Хорошо известно [83], что при любом n решение задач (32.9), (32.10) имеет вид

$$u_n(x) = U^{\mu_n}(x) = \int\limits_{K_n} \frac{d\mu_n(y)}{|x-y|^{N-2}}, \tag{32.11}$$

где μ_n — мера, реализующая винеровскую емкость компакта K_n.

В монографии Н.С. Ландкофа [50] установлено, что если ряд (28.13) сходящийся, то последовательность мер $\{\mu_n\}$ является слабо сходящейся к мере μ, называемой равновесной мерой множества $\mathbb{R}^N \backslash Q$.

Отметим, что функции (32.11) обладают свойствами

1. $U^{\mu_n}(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^N \backslash K_n)$;
2. $u_n = 1$ в смысле W_2^1 на K_n;
3. выполнено
$$\mu(\mathbb{R}^N \backslash Q) \geqslant \mu_n(K_n) = C(N) \int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash K_n} |\nabla U^{\mu_n}(x)|^2 dx; \tag{32.12}$$
4. $\int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash K_n} \nabla u_n(x) \nabla \varphi(x) dx = 0$ для $\forall\, \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \backslash K_n)$.

Так как левая часть в (32.12) ограничена, то из слабой сходимости мер μ_n к мере μ следует, что последовательность ∇U^{μ_n} слабо компактна в $L^2(\mathbb{R}^N)$. Поэтому в пункте 4 можно перейти к пределу по слабо сходящейся подпоследовательности $\nabla u_{n_k}(x)$.

С другой стороны,

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = U^\mu(x) \, \text{поточечно (см. [50])}. \tag{32.13}$$

Таким образом, потенциал $U^\mu(x)$ удовлетворяет свойствам 1–3 леммы 32.1. Лемма 32.1 доказана. □

Замечание. Из равенства (32.12) путем перехода к пределу получим

$$\mu(\mathbb{R}^N \backslash Q) = C(N) \int\limits_Q |\nabla U^\mu(x)|^2 dx > 0. \tag{32.14}$$

Из (32.14) следует, что

$$U^\mu(x) \not\equiv 1 \quad \text{в} \quad Q,$$

ибо иначе было бы $\mu(\mathbb{R}^N \backslash Q) = 0$.

Переходим непосредственно к доказательству необходимости в теореме 28.1.

Рассмотрим задачу

$$\Delta U - U_t = 0 \quad \text{в } Z = Q \times (0,\, \infty), \tag{32.15}$$

$$U|_S = 0, \quad S = \partial Q \times (0,\, \infty), \tag{32.16}$$

$$U|_{t=0} = w(x), \quad x \in Q, \tag{32.17}$$

$$w(x) = 1 - U^{\mu}(x), \tag{32.18}$$

где $U^{\mu}(x)$ — равновесный потенциал множества $\mathbb{R}^N \backslash Q$. Из предыдущего замечания следует, что $w(x) \not\equiv 0$ в Q и, кроме того, ограниченное решение задачи (32.15)–(32.17) из класса $V^{1,0}_{2,\,loc}(Z)$ имеет вид $u(x,\, t) = w(x)\ \forall\, t > 0$ и

$$\lim_{t \to \infty} u(x,\, t) = w(x) \neq 0.$$

Необходимость доказана. Теорема 28.1 доказана. □

Для доказательства теоремы 28.2 нам потребуется следующий результат [25].

Лемма 32.2. *Для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$, $q > 1$ справедливы неравенства*

$$B_1 \sum_{m=2}^{k} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^{m+1}} \backslash Q)}{q^{(m-1)(N-2)}} \leqslant \int\limits_{q}^{q^k} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{\tau} \backslash Q)}{\tau^{N-1}} d\tau \leqslant B_2 \sum_{m=2}^{k} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^m} \backslash Q)}{q^{m(N-2)}}. \tag{32.19}$$

Доказательство. Известно [50], что емкость компакта обладает свойством монотонности, т. е. если E_1, E_2, E — компакты и $E_1 \subset E \subset E_2$, то

$$\operatorname{cap}(E_1) \leqslant \operatorname{cap}(E) \leqslant \operatorname{cap}(E_2).$$

Рассмотрим интеграл

$$I_m = \int\limits_{q^{m-1}}^{q^m} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{\tau} \backslash Q)}{\tau^{N-1}} d\tau, \quad m \geqslant 2. \tag{32.20}$$

Для $q^{m-1} \leqslant \tau \leqslant q^m$ воспользуемся в (32.20) неравенствами

$$\frac{1}{q^{m(N-1)}} \leqslant \frac{1}{\tau^{N-1}} \leqslant \frac{1}{q^{(m-1)(N-1)}}$$

и свойством монотонности емкости.

Будем иметь:

$$\frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^{(m-1)}} \backslash Q)}{q^{m(N-1)}}(q^m - q^{m-1}) \leqslant I_m \leqslant \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^m} \backslash Q)}{q^{(m-1)(N-1)}}(q^m - q^{m-1}). \tag{32.21}$$

Справедливы следующие тождества:

$$\frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^{(m-1)}} \backslash Q)}{q^{m(N-1)}}(q^m - q^{m-1}) = \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^{(m-1)}} \backslash Q)}{q^{(m-1)(N-2)}} \cdot \frac{q^{(m-1)(N-2)}}{q^{m(N-1)}}(q^m - q^{m-1}) =$$
$$= \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^{m-1}} \backslash Q)}{q^{(m-1)(N-2)}} \frac{1}{q^{N-2}} \left(1 - \frac{1}{q}\right), \tag{32.22}$$

$$\frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^m} \backslash Q)}{q^{(m-1)(N-1)}}(q^m - q^{m-1}) = \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^m} \backslash Q)}{q^{m(N-2)}} \cdot \frac{q^{m(N-2)}}{q^{(m-1)(N-1)}}(q^m - q^{m-1}) =$$
$$= \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_{q^m} \backslash Q)}{q^{m(N-2)}} q^{N-2}(q-1). \tag{32.23}$$

Учитывая в (32.20) тождества (32.22) и (32.23) и суммируя по m от 2 до k, получим неравенство (32.19). Лемма 32.2 доказана. □

Доказательство теоремы 28.2. Из леммы 32.2 следует, что ряд (28.13) сходится или расходится в том и только том случае, когда расходится интеграл (28.14). Ясно также, что число $q > 0$ в (32.14), (32.17) может быть любым больше 1, так как от выбора $q > 1$ не зависит сходимость интеграла (28.14). Теорема 28.2 доказана. □

33. Свойства тепловых потенциалов и параболических емкостей для параболического уравнения

Для того, чтобы доказать теорему 28.1 методами, аналогичными доказательству теорем 28.1 и 28.2, нам необходимо изучить свойства параболических емкостей и параболических потенциалов, отвечающих уравнению (28.1).

Продолжим в $\mathbb{R}^N\backslash Q$ коэффициенты $a_{ik}(x)$, $i,\, k = 1, \ldots, N$ оператора (28.1), положив $a_{ik}(x) = \delta_{ik}$ при $x \in \mathbb{R}^N\backslash Q$. Продолженный оператор снова обозначим через Lu. Пусть $\Gamma(x,\, y,\, t,\, \tau)$ — фундаментальное решение продолженного параболического оператора

$$L(x)u - u_t = 0$$

в $\mathbb{R}^{N+1}$. Известно, что для фундаментального решения $\Gamma(x,\, y,\, t,\, \tau)$ справедливы двусторонние оценки Аронсона [70]

$$C_2(t-\tau)^{-N/2}\exp\left\{-\frac{r^2}{4\beta(t-\tau)}\right\} \leqslant \Gamma(x,\, y,\, t,\, \tau) \leqslant C_1(t-\tau)^{-N/2}\exp\left\{-\frac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right\} \tag{33.1}$$

с положительными постоянными C_1, C_2, α, β, зависящими только от N, λ_0, λ_1.

Пусть

$$F(x,\, y,\, t,\, \tau) = \begin{cases} \Gamma(x,\, y,\, t,\, \tau), & t > \tau, \\ 0, & t \leqslant \tau. \end{cases} \tag{33.2}$$

Следуя [49], введем понятие параболической емкости B-множества $E \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Рассмотрим всевозможные меры μ такие, что

$$w^\mu(x,\, t) = \int\limits_E F(x,\, y,\, t,\, \tau)d\mu(y,\, \tau) \leqslant 1, \quad (x,\, t) \notin \overline{E}. \tag{33.3}$$

Положим

$$\gamma(E) = \sup \mu(E), \tag{33.4}$$

где верхняя грань берется по всевозможным мерам, для которых потенциалы w^μ удовлетворяют (33.3). Число $\gamma(E)$ называется *параболической емкостью* множества E. В работах [2, 40] доказано существование параболической емкости, отвечающей ядру (33.2). В [2] установлено, что функция (33.3) является решением из $V_2^{1,0}(\mathbb{R}^{N+1}\backslash E)$ следующей задачи:

$$Lw^\mu - w^\mu_t = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N\backslash E, \tag{33.5}$$

$$w^\mu|_{\partial(\mathbb{R}^{N+1}\backslash E)} = 1, \tag{33.6}$$

$$w|_{t=0} = 0. \tag{33.7}$$

Для доказательства аналога леммы 29.1 о возрастании достаточно более простого факта, а именно, что найдется мера μ, эквивалентная тепловой мере, для которой

$$\int\limits_E F(x,\, y,\, t,\, \tau)d\mu(y,\, \tau) \leqslant 1.$$

Такую меру можно предъявить следующим образом. Пусть мера μ реализует тепловую емкость множества E для ядра

$$(t-\tau)^{-N/2}\exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right). \tag{33.8}$$

Тогда из верхней оценки (33.1) следует, что функция

$$w_1^\mu(x,\, t) = \frac{1}{C_1}\int\limits_E F(x,\, y,\, t,\, \tau)d\mu(y,\, \tau) \tag{33.9}$$

1. удовлетворяет неравенству
$$w_1^\mu(x,\,t) \leqslant 1,\ (x,\,t) \in \mathbb{R}^{N+1}\backslash\overline{E}; \tag{33.10}$$
2. является решением уравнения
$$Lw_1^\mu - w_{1t}^\mu = 0$$
в смысле $V_2^{1,\,0}$ на $\mathbb{R}^{N+1}\backslash E$;
3. удовлетворяет неравенству $w_1^\mu \leqslant 1$ на боковой поверхности цилиндра E в смысле $W_2^{1,\,0}$.

Пусть $u(x,\,t)$ — неотрицательное ограниченное в $\overline{Z}$ решение из класса $\mathring{V}_2^{1,\,0}(Z)$ задачи
$$Lu - u_t = 0 \quad \text{в } Z, \tag{33.11}$$
$$u|_S = 0, \quad S = \partial Q \times (0,\,\infty), \tag{33.12}$$
$$u|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in Q, \tag{33.13}$$
где $u_1(x)$ — непрерывная функция в Q такая, что
$$0 < u_1(x) \leqslant M. \tag{33.14}$$
Пусть цилиндры Z_1, Z_2, Z_3 определены формулами (29.4). Предположим, что начало координат O принадлежит границе ∂Q области Q. Пусть
$$CZ = \mathbb{R}_+^{N+1}\backslash Z, \quad E = CZ \cap Z_3.$$

Лемма 33.1. *Если $u(x,\,t)$ — неотрицательное решение задачи* (33.11)–(33.13)*, то существует $\ell_1 \in (0,\,1)$ такое, что при $0 < \ell \leqslant \ell_1$ имеет место неравенство*
$$\sup_{Z_1 \cap Z} u \geqslant \sup_{Z_2 \cap Z} u \left(1 + \frac{\eta\gamma(E)}{R^N \ell^N}\right), \tag{33.15}$$
где $\gamma(E)$ — тепловая емкость цилиндра $\overline{E}$, отвечающая ядру теплопроводности (33.8)
$$F_1(x,\,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & \textit{при } t > 0, \\ 0 & \textit{при } t \leqslant 0. \end{cases} \tag{33.16}$$

Доказательство. Пусть S_1 — боковая поверхность цилиндра Z_1. Фиксируем произвольную точку $(y,\,\tau) \in Z_3$ и оценим функцию (33.2), используя оценку сверху (33.1) для $\Gamma(x,\,y,\,t,\,\tau)$:
$$\sup_{Z_1 \cap |x|=R} F < \sup_{(x,\,t) \in S_1 \cap Z} C_1 (t-\tau)^{-N/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right). \tag{33.17}$$
Фиксируем произвольную точку x, принадлежащую боковой поверхности S_1: $|x| = R$ цилиндра Z_1 и найдем значение $t > \tau$, при котором функция в правой части неравенства (33.16) достигает максимума.
$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(t-\tau)^{-N/2} \exp\left\{-\frac{r^2}{4\alpha(t-\tau)}\right\}\right] = 0.$$
Отсюда получим
$$t - \tau = \frac{r^2}{4N\alpha}.$$
При $|x| = R$ и $|y| < R\ell$, где $0 < \ell < 1$, имеем $r = |x-y| \geqslant R(1-\ell)$, поэтому
$$t - \tau \geqslant \frac{R^2(1-\ell)}{4N\alpha}.$$
В силу (33.17) и монотонности функции $v_1(x,\,y) = F_1(x-y,\,t-\tau)$ до первого максимума (F_1 определена в (33.16)), получим
$$\sup_{(x,\,t) \in S_1 \cap Z} F(x,\,t) \leqslant C_1 \left(\frac{2N\alpha}{R^N(1-\ell)^N}\right) \exp\left(-\frac{N}{2}\right). \tag{33.18}$$
Оценим $\inf\limits_{(x,\,t) \in Z_2} F$. Поскольку $(y,\,\tau) \in Z_3$, а $(x,\,t) \in Z_2$, то
$$|x-y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \leqslant 4\ell^2 R^2,$$

$$\frac{R^2\ell^2}{4} \leqslant t-\tau \leqslant 2\ell^2 R^2.$$

Поэтому, применяя оценку снизу (33.1) и приведенные выше оценки, будем иметь

$$\inf_{(x,\,t)\in Z_2} F(x,\,t) \geqslant \frac{C_2}{(2\ell^2R^2)^{N/2}} \exp\left\{-\frac{4}{\ell^2R^2}\frac{4R^2\ell^2}{4\beta}\right\} = \frac{C_2\exp(-4/\beta)}{2^{N/2}R^N\ell^N}. \tag{33.19}$$

Учитывая, что $(y,\,\tau)$ — произвольная точка $\overline{Z}_3$, получим из (33.18) и (33.19) оценки

$$\sup_{\substack{(x,\,t)\in S_1\\(t,\,\tau)\in Z_3}} \leqslant C_1\frac{(2N\alpha)^{N/2}}{R^N(1-\ell)^N}e^{-\frac{N}{2}}, \tag{33.20}$$

$$\inf_{\substack{(x,\,t)\in S_1\\(t,\,\tau)\in Z_3}} \geqslant C_2\frac{\exp(-4/\beta)}{2^{N/2}R^N\ell^N}. \tag{33.21}$$

Рассмотрим потенциал (33.9), где равновесная тепловая мера μ цилиндра E_1 содержится в $\overline{Z}_3$. Тогда из неравенств (33.20), (33.21) получим

$$\sup_{S_1} w_1(x,\,t) \leqslant C_1\left(\frac{2N\alpha}{e}\right)^{N/2}\frac{1}{R^N(1-\ell)^N}\gamma(E_1), \tag{33.22}$$

$$\inf_{\substack{(x,\,t)\in Z_2\\(y,\,\tau)\in Z_3}} w_1(x,\,t) \geqslant C_2\frac{\exp(-4/\beta)}{2^{N/2}\ell^N R^N}\gamma(E_1). \tag{33.23}$$

Рассмотрим в цилиндре $Z_1\cap Z$ функцию

$$U(x,\,t) = M\left\{1 - w_1(x,\,t) + \sup_{\substack{(x,\,t)\in Z_1\\(y,\,\tau)\in Z_3}}\frac{F}{C_1}\gamma(\overline{Z}_3\backslash Z)\right\}. \tag{33.24}$$

Сравним функцию (33.24) и решение $u(x,\,t)$ задачи (33.11)–(33.13) на параболической границе области $Z_1\cap Z$. В силу результатов работы [2] мы получим, что функция (33.24) является решением из класса $V_2^{1,\,0}$ уравнения

$$LU - U_t = 0 \quad \text{в } \Pi_T\backslash E_1.$$

На боковой поверхности $S_1 = \{|x| = R\}$ в $\overline{Z_1}\cap Z$ имеем $U(x,\,t) \geqslant 0$ в смысле $V_2^{1,\,0}(\overline{Z_1}\cap Z)$, ибо $w_1 \leqslant 1$ в смысле $V_2^{1,\,0}(\overline{Z_1}\cap Z)$, а на нижнем основании $u(x,\,t) \leqslant M$ в поточечном смысле и тем более в смысле $V_2^{1,\,0}$, а функция $w_1(x,\,t)$ равна нулю при $t=0$ в поточечном смысле. Следовательно, по принципу максимума

$$u(x,\,t) < U(x,\,t) \quad \text{в } Z\cap Z_1.$$

Поэтому и

$$\sup_{Z_2\cap Z} u \leqslant \sup_{Z_2\cap Z} U \leqslant M\left\{1 - \inf_{Z_1\cap Z} w_1(x,\,t) + \sup_{Z_1\cap Z}\frac{F}{C_1}\gamma(\overline{Z}_3\backslash Z)\right\}, \tag{33.25}$$

$$\inf_{Z_1\cap Z} w_1 = \inf_{Z_1\cap Z}\frac{1}{C_1}\int\limits_{\overline{Z}_3\backslash Z} F(x,\,y,\,t,\,\tau)d\mu \geqslant \inf_{\substack{(x,\,t)\in Z_2\\(y,\,\tau)\in Z_3}}\frac{F(x,\,y,\,t,\,\tau)}{C_1}\gamma(\overline{Z}_3\backslash Z). \tag{33.26}$$

Учитывая в (33.25) неравенства (33.26), (33.22), (33.23), получим неравенство

$$\sup_{Z_2\cap Z} u < M\left(1 - \frac{\gamma(Z_3\backslash Z)}{R^N}\left[-\frac{(2N\alpha)^{N/2}}{e^{N/2}(1-\ell)^N} + \frac{C_2}{C_1}\frac{e^{-4/\beta}}{2^{N/2}\ell^N}\right]\right).$$

Далее рассмотрим функцию

$$f(\ell) = \frac{A_1}{\ell^N} - \frac{B_1}{(1-\ell)^N},$$

где

$$A_1 = \frac{C_2}{C_1}\frac{e^{-4/\beta}}{2^{N/2}}, \quad A_2 = \frac{(2N\alpha)^{N/2}}{e^{N/2}}.$$

Продолжая дальнейшие рассуждения аналогично доказательству леммы 29.1, мы приходим к доказательству леммы 33.1. Лемма 33.1 доказана. □

34. Доказательство достаточности в теореме 28.3

Пусть $0 < \ell \leqslant \ell_1 < 1$ из леммы 33.1. Положим

$$q = \frac{1}{\ell} > 1,$$

и пусть $t_0 > 0$, $m \in \mathbb{N}$,

$$t_0 - 2q^m \geqslant 0.$$

Рассмотрим систему соосных цилиндров (30.1) и потребуем, чтобы выполнялось условие

$$\ell^2 \leqslant \min\left(\frac{3}{8}, \ell^2\right). \tag{34.1}$$

Введем обозначение

$$M_m = \sup_{\overline{Z}_1^m \cap Z} u(x, t), \tag{34.2}$$

где $u(x, t)$ — решение задачи (33.11)–(33.13), и применяя неравенство (32.2), мы получим, что для последовательности (34.2) имеет место следующее неравенство.

Лемма 34.1.

$$M_m \geqslant M_{m-1}\left(1 + \frac{\eta}{q^{Nm}}\gamma(\overline{Z}_3^m \backslash Z)\right). \tag{34.3}$$

Аналогично разделу 30, из неравенства (34.3) получим неравенство

$$M_m \geqslant M_1 \exp\left[\sum_{i=2}^{m} \frac{a\gamma(\overline{Z}_3^m \backslash Z)}{q^{iN}}\right]. \tag{34.4}$$

Применяя в (34.4) оценку снизу (31.1) тепловой емкости через винеровскую, получим неравенство

$$M_m \geqslant M_1 \exp\left[\sum_{i=2}^{m} \frac{a\eta}{q^{i(N-2)}} \operatorname{cap}(\overline{B}_{q^i} \backslash Q)\right]. \tag{34.5}$$

Проводя дальнейшие рассуждения аналогично тем, которые были приведены в разделе 32 для доказательства достаточности теоремы 28.1, мы получим доказательство достаточности теоремы 28.3.

35. Доказательство необходимости в теореме 28.3

Рассмотрим следующую задачу для эллиптического уравнения

$$L(x)u = 0 \quad \text{в } Q \subset \mathbb{R}^N, \tag{35.1}$$

$$u|_{\partial Q} = 1, \tag{35.2}$$

где $u(x) \in W^1_{2,\,loc}(Q)$, а оператор $L(x)$ определен в (1.1). Продолжим коэффициенты уравнения в $\mathbb{R}^N$, полагая

$$a_{ik}(x) = \delta_{ik} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \backslash D$$

и продолжим оператор, снова обозначая его через L.

Пусть $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность компактов K_n: $K_{n+1} \supset K_n$, $K_n \subset \mathbb{R}^N \backslash Q$ таких, что $K_n \to \mathbb{R}^N \backslash Q$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим последовательность задач

$$L(x)u_n = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^N \backslash K_n, \tag{35.3}$$

$$u_n|_{\partial(\mathbb{R}^N \backslash K_n)} = 1, \tag{35.4}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u_n(x) = 0. \tag{35.5}$$

Решение задачи (35.3)–(35.5) задается функцией

$$u_n(x) = \int\limits_{K_n} \Gamma(x,\, y) d\mu_n(y), \tag{35.6}$$

где $\Gamma(x,\, y)$ — фундаментальное решение продолженного оператора $L(x)$ в $\mathbb{R}^N$, а μ_n — мера, реализующая L-емкость компакта K_n.

С другой стороны (см. [83, 88])

$$L(x)u_n = -d\mu_n \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \tag{35.7}$$

$$u_n \in \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\, loc}. \tag{35.8}$$

Умножим (35.7) на $u_n(x)$ и учтем, что $u_n(x) = 1$ на носителе меры μ_n:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n L u_n dx = -\int\limits_{K_n} u_n d\mu_n = -\mu_n(K_n). \tag{35.9}$$

Интегрируя по частям в левой части (35.9), получим

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} dx = \mu_n(K_n). \tag{35.10}$$

Применяя неравенство эллиптичности (1.3), получим

$$\mu_n(K_n) \geqslant \lambda_0^2 \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 dx. \tag{35.11}$$

Но для $\mu_n(K_n)$ мы имеем оценку

$$\mu_n(K_n) \leqslant C(N,\, \lambda_1,\, \lambda_0) \operatorname*{cap}_{\Delta}(K_n), \tag{35.12}$$

где $\operatorname{cap}_\Delta(K_n)$ — винеровская емкость компакта K_n, и, кроме того, очевидно, что

$$\operatorname{cap}(K_n) \leqslant \operatorname{cap}(\mathbb{R}^N \backslash Q) < \infty, \tag{35.13}$$

так как ряд (28.13) является сходящимся, и в силу [50, теорема 5.1] существует

$$\operatorname{cap}(\mathbb{R}^N \backslash Q) < \infty.$$

Поэтому последовательность $\{\operatorname{cap}_\Delta(K_n)\}$ является ограниченной.

Умножим уравнение (35.7) на пробную функцию $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ и проинтегрируем по частям, при этом получим

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik}(x) u_{x_k} \varphi_{x_i} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu_n. \tag{35.14}$$

Так как последовательность $\mu_n(K_n)$ не убывает и ограничена, то μ_n слабо сходится к некоторой мере μ, кроме того, из оценок (35.11)–(35.13) следует, что последовательность $\nabla u_n(x)$ является слабо сходящейся в $L^2(\mathbb{R}^N)$. Тогда переходя к пределу в (35.14) по слабо сходящимся последовательностям u_n, μ_n, получим

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) d\mu(x). \tag{35.15}$$

Кроме того, докажем, что существует поточечный предел

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{K_n} \Gamma(x,\, y) d\mu_n(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^N \backslash Q} \Gamma(x,\, y) d\mu(y) = u(x). \tag{35.16}$$

С этой целью решим задачу

$$L(x)u_{n,R} = -d\mu_n \quad \text{в } B_R, \tag{35.17}$$

$$u|_{\partial K_n} = 1, \quad u|_{\partial B_R} = 0, \tag{35.18}$$

где $B_R \supset K_n$.

Решение задачи (35.17), (35.18) дается формулой

$$u_{n,R}(x) = \int\limits_{B_R \setminus K_n} g_R(x, y)d\mu_n(y), \tag{35.19}$$

где $g_R(x, y)$ — функция Грина в шаре B_R для оператора $L(x)$. Переходя к пределу в (35.19) при $R \to \infty$, получим

$$u_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus K_n} \Gamma(x, y)d\mu_n(y). \tag{35.20}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (35.20), получим, что предел (35.16) обоснован.

Докажем, что функция $u(x)$ в (35.16) такова, что $u(x) \not\equiv 1$ в Q.

Пусть K_n — возрастающая последовательность компактов K_n: $K_{n+1} \supset K_n$, $K_n \to \mathbb{R}^N \setminus Q$, и для нее рассмотрим задачи (35.3)–(35.5), и получим последовательность (35.6) функций, реализующих L-емкостный потенциал компактов K_n.

Лемма 35.1. *Если последовательность мер* $\{\mu_n\}$ *из* (35.6) *слабо сходится к мере* μ, *то последовательность градиентов* $\{\nabla u_n(x)\} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nabla u(x)$ *сильно сходится в* $L^2(\mathbb{R}^N)$, *где*

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus Q} \Gamma(x, y)d\mu(y). \tag{35.21}$$

и μ *— равновесная мера (т. е.* $\mu_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$*) множества* $\mathbb{R}^N \setminus Q$.

Доказательство. Так как коэффициенты оператора L симметричны, то

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(y, x).$$

Рассмотрим пробную функцию

$$\varphi(x) = u_n(x) - u_m(x),$$

где $u_n(x)$ — элементы функциональной последовательности (35.20). В силу (35.7) получим уравнение

$$L(u_n - u_m) = -d\mu_n + d\mu_m. \tag{35.22}$$

Умножив (35.22) на

$$\varphi(x) = u_n(x) - u_m(x)$$

и интегрируя по частям, получим

$$\sum_{i,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik}(x)(u_n - u_m)_{x_i}(u_n - u_m)_{x_k}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n d\mu_n - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_m d\mu_n - \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n d\mu_m + \int\limits_{u_m} d\mu_m. \tag{35.23}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n d\mu_n = \mu_n(K_n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_m d\mu_m = \mu_m(K_m).$$

В силу симметрии $\Gamma(x, y) = \Gamma(y, x)$ получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_m d\mu_n = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n d\mu_m.$$

Поэтому (35.23) можно записать так:

$$\sum_{i,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik}(x)(u_n - u_m)_{x_i}(u_n - u_m)_{x_k}dx = \mu_n(K_n) + \mu_m(K_m) - 2\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n d\mu_m. \tag{35.24}$$

Не ограничивая общности, считаем, что $n > m$, тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n d\mu_m = \mu_m(K_m),$$

и последнее равенство (35.24) можно записать в виде

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik}(x)(u_n - u_m)_{x_i}(u_n - u_m)_{x_k} dx = \mu_n(K_n) - \mu_m(K_m). \tag{35.25}$$

Так как по условию $\mu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu$ сходится слабо к μ, то из (35.25) и неравенства эллиптичности (28.4) получим, что последовательность $\{\nabla u_n(x)\}$ градиентов фундаментальна в $L^2(\mathbb{R}^N)$. Лемма 35.1 доказана. □

Применяя лемму 35.1 и переходя к пределу в равенстве

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik}(x)(u_n)_{x_k}(u_n)_{x_i} dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} u_n d\mu_n = \mu_n(K_n), \tag{35.26}$$

получим

$$\sum_{i,\,k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^N} a_{ik}(x) u_{x_k} u_{x_i} dx = \mu(\mathbb{R}^N \backslash Q) > 0. \tag{35.27}$$

Из условия $\mu(\mathbb{R}^N \backslash D) > 0$ следует, что $u(x) \not\equiv 1$ в области Q.

Докажем необходимость в теореме 28.3. Пусть ряд (28.13) является расходящимся, тогда, как было доказано выше, существует функция $u(x)$, определенная формулой (35.10), такая, что

1. $u(x) \in W^1_{2,\,loc}(\mathbb{R}^N)$;
2. $L(x)u = 0$ в Q в смысле $W^1_{2,\,loc}(Q)$;
3. $u|_{\partial(\mathbb{R}^N \backslash Q)} = 1$;
4. $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x) = 0$.

Кроме того, как установлено в лемме 35.1,

$$u(x) \not\equiv 0 \quad \text{в } Q.$$

Введем функцию

$$w_1(x) = 1 - u(x)$$

и рассмотрим в Q смешанную задачу

$$Lw - w_t = 0 \quad \text{в } Z = Q \times (0,\,\infty), \tag{35.28}$$

$$w|_{\partial Q} = 0, \tag{35.29}$$

$$w|_{t=0} = w_1(x). \tag{35.30}$$

Ясно, что решение смешанной задачи (35.28)–(35.30) имеет вид

$$u(x,\,t) = w(x) = 1 - u(x) \neq 0 \quad \forall\, t > 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,\,t) = 1 - u(x) \neq 0, \quad x \in Q.$$

Необходимость доказана. Теорема 28.3 доказана. □

36. Доказательство следствия 28.1 из теоремы 28.3 о стабилизации решения краевой задачи в конусе

Доказательство следствия 28.1. Докажем оценку (28.15). Пусть выполнены условия теоремы 28.3 и ряд (28.13) (или, соответственно, интеграл (28.14)) являются расходящимися. Из неравенства (34.5) при $t \geqslant 2q^{2m}$, $q > 1$ получим неравенство

$$M_1 \leqslant M \exp\left(-\sum_{i=2}^{m} \frac{\eta \operatorname{cap}(\overline{B}_{q^i} \backslash Q)}{q^{m(N-2)}}\right), \tag{36.1}$$

где

$$M_1 = \sup_{(x,\,\tau)\in Z_1\cap Z} u(x,\,\tau),$$

$$Z_1 = \{x,\,t:\,|x| < q^2,\, t - 2q^2 < \tau < t\}.$$

Применим в правой части (36.1) оценку снизу из неравенства (32.19) и получим

$$M_1 \leqslant M \exp\left\{-\eta \int\limits_{q}^{q^m} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_\tau \backslash Q)}{\tau^{N-1}} d\tau\right\}. \tag{36.2}$$

Для любого $t > 2$ найдется $m \in \mathrm{M}$ такое, что

$$2q^{2m} \leqslant t \leqslant 2q^{2m+2}. \tag{36.3}$$

Отсюда получим, что

$$q^m \geqslant \sqrt{\frac{t}{2q^2}}.$$

Заменяя в (36.2) верхний предел на больший предел $\sqrt{\dfrac{t}{2q^2}}$, получим

$$\sup_{|x|\leqslant R^2,\ t\geqslant 2q^m} u(x,\,t) \leqslant M \exp\left\{-\eta \int\limits_{q_1}^{\sqrt{\frac{t}{2q^2}}} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_\tau \backslash Q)}{\tau^{N-1}} d\tau\right\}.$$

Так как $K \subset B_q$, то из последнего неравенства получим

$$\sup_{x\in K,\ t\geqslant 2q^m} u(x,\,t) \leqslant M \exp\left\{-\eta \int\limits_{q_1}^{\sqrt{\frac{t}{2q^2}}} \frac{\operatorname{cap}(\overline{B}_\tau \backslash Q)}{\tau^{N-1}} d\tau\right\}.$$

Оценка (28.15) доказана. Следствие 28.1 доказано. □

Имеет место утверждение.

Утверждение. *Пусть в* $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ *задан цилиндр* Z *с радиусом основания* ρ *и высотой* h. *Тогда*

$$\operatorname{cap}(Z) \geqslant \alpha_1 \rho^{N-3} h, \tag{36.4}$$

$$\operatorname{cap}(Z) \leqslant \alpha_2 \rho^{N-3} h, \tag{36.5}$$

где α_1, α_2 — *некоторые положительные константы, зависящие от* N.

Неравенство (36.4) доказано в [49, § 2].

Пусть область $\mathbb{R}^N \backslash Q$ является конусом

$$\gamma = \mathbb{R}^N \backslash Q = \{x:\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{N-1}^2} < x_N,\, 0 < x_N < \infty\}, \tag{36.6}$$

который расположен в полупространстве $\mathbb{R}^N_+ = \{x:\, x_N \geqslant 0\}$. Рассмотрим два цилиндра:

- Z_1 — цилиндр, у которого верхнее основание имеет радиус $\tau > 0$ и расположено в гиперплоскости $x_N = \tau$, высота цилиндра Z_1 равна 4τ;

- Z_2 — цилиндр, у которого верхнее основание имеет радиус $\tau/4$ и расположено в гиперплоскости $x_N = \tau/4$, а высота Z_2 равна τ.

Ясно, что справедливы включения

$$Z_1 \supset B_\tau \backslash Q \supset Z_2. \tag{36.7}$$

Из (36.7) и свойства монотонности включения емкости [85] следует

$$\operatorname{cap}(Z_1) \geqslant \operatorname{cap}(B_\tau \backslash Q) \geqslant \operatorname{cap}(Z_2). \tag{36.8}$$

Используя оценки (36.4) и (36.5) в (36.8), при $\rho = \tau/4$, $h = \tau$ и $\rho = \tau$, $h = 4\tau$, соответственно, будем иметь

$$\alpha_2 4\tau^{N-2} \geqslant \operatorname{cap}(B_\tau \backslash Q)) \geqslant \alpha_1 \tau^{N-2} \frac{1}{4^{N-4}}. \tag{36.9}$$

Используя оценки (36.9), будем иметь

$$\frac{\alpha_1}{4^{N-4}} \int\limits_{a_0}^{\sqrt{\frac{t}{C_3}}} \frac{d\tau}{\tau} \leqslant \int\limits_{a_0}^{\sqrt{\frac{t}{C_3}}} \frac{\operatorname{cap}(B_\tau \backslash Q))}{\tau^{N-1}} d\tau \leqslant 4\alpha_2 \int\limits_{a_0}^{\sqrt{\frac{t}{C_0}}} \frac{d\tau}{\tau}. \tag{36.10}$$

Из неравенства (36.10) следует, что расходится интеграл

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{a_0}^{\sqrt{\frac{t}{C_3}}} \frac{\operatorname{cap}(B_\tau \backslash Q))}{\tau^{N-1}} d\tau = \infty,$$

т. е. в силу теоремы 28.1 решение задачи Коши (28.1)–(28.3) стабилизируется к нулю при $t \to \infty$. Более того, из оценки (28.15) и из нижней оценки (36.10) следует, что

$$|u(x,\, t)| \leqslant C_1 \exp\left\{ -\frac{\alpha_1}{4^{N-4}} \int\limits_{a_0}^{\sqrt{\frac{t}{C_3}}} \frac{d\tau}{\tau} \right\} = C_4 \frac{1}{t^{\frac{C_5}{2}}}, \tag{36.11}$$

где

$$C_5 = \frac{\alpha_1}{4^{N-4}}, \quad C_4 = C_1 (a\sqrt{C_3})^{\frac{\alpha}{4^{N-1}}}.$$

Из оценки (36.11) следует, что в случае, когда

$$Q = \{x : \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{N-1}^2} < x_N\},$$

решение задачи (28.1)–(28.3) имеет степенную скорость стабилизации к нулю при $t \to \infty$.

37. Доказательство теоремы 28.4

Доказательство теоремы 28.4 вытекает непосредственно из теоремы 28.3, если эту теорему применить к решениям задачи (28.1)–(28.3) и задачи (28.16)–(28.18) для одной и тоже области $Q \subset \mathbb{R}^N$, для которой расходится ряд типа Винера (28.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Факториал Пресс, 2005.
2. *Алхутов Ю. А.* Устранимые особенности решений параболических уравнений второго порядка// Мат. заметки. — 1991. — *50*, № 5. — С. 9–17.
3. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971.
6. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1987.
7. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
8. *Гущин А. К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения// Мат. сб. — 1982. — *119*, № 4. — С. 451–507.

9. *Гущин А. К.* О зависимости поведения при больших значениях времени решения параболического уравнения от данных задачи// В сб.: «Качественная теория дифференциальных уравнений». — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 72–82.
10. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения// Дифф. уравн. — 1971. — *7*, № 2. — С. 297–311.
11. *Гущин А. К., Михайлов В. П., Муравей А. Л.* О стабилизации решений нестационарных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных// Динам. сплош. среды. — 1975. — № 23. — С. 57–90.
12. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с коэффициентом младшего порядка и растущей начальной функцией// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23.* — С. 125–148.
13. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом// Дифф. уравн. — 2003. — *39*, № 4. — С. 506–515.
14. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом и с полиномиально растущей начальной функцией// Тр. конф. «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы». — М.: Физматлит, 2003. — С. 293–245.
15. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентом и растущей начальной функцией// Докл. РАН. — 2004. — *397*, № 4. — С. 439–441.
16. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 4. — С. 145–212.
17. *Денисов В. Н.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения задачи Дирихле для уравнения теплопроводности// Докл. РАН. — 2006. — *407*, № 2. — С. 163–166.
18. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом// Фундам. и прикл. мат. — 2006. — *12*, № 4. — С. 79–97.
19. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом и с экспоненциально растущей начальной функцией// Тр. МИАН. — 2008. — *261.* — С. 97–106.
20. *Денисов В. Н.* Условия стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения в классах растущих начальных функций// Тр. конф. «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология». — М.: Физматлит, 2008. — С. 118–32.
21. *Денисов В. Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36.* — С. 61–71.
22. *Денисов В. Н.* О необходимых и достаточных условиях стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами// Докл. РАН. — 2010. — *433*, № 4. — С. 452–454.
23. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшим коэффициентом в классах растущих начальных функций// Докл. РАН. — 2010. — *430*, № 5. — С. 586–588.
24. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с растущими младшими коэффициентами// Тр. МИАН. — 2010. — *270.* — С. 97–109.
25. *Денисов В. Н.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решения первой краевой задачи для параболического уравнения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2013. — *29.* — С. 248–280.
26. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с растущими младшими коэффициентами// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 5. — С. 1–14.
27. *Денисов В. Н., Жиков В. В.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений// Мат. заметки. — 1985. — *37*, № 6. — С. 834–850.
28. *Денисов В. Н., Муравник А. Б.* О стабилизации решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 3. — С. 351–355.
29. *Денисов В. Н., Репников В. Д.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений// Дифф. уравн. — 1984. — *20*, № 1. — С. 20–41.
30. *Дрожжинов Ю. Н.* Стабилизация решений обобщенной задачи Коши для ультрапараболического уравнения// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1969. — *33*, № 2. — С. 368–378.
31. *Жиков В. В.* О стабилизации решений параболических уравнений// Мат. сб. — 1977. — *104*, № 4. — С. 597–616.
32. *Жиков В. В.* Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболических уравнений второго порядка с младшими членами// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1983. — *46.* — С. 69–98.
33. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1959. — № 1. — С. 55–74.

34. *Ильин А. М.* О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 2. — С. 115–121.
35. *Ильин А. М.* Об одном достаточном условии стабилизации решения параболического уравнения// Мат. заметки. — 1985. — *37*. — С. 851–856.
36. *Ильин А. М., Клашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Усп. мат. наук. — 1962. — *17*, № 3. — С. 3–146.
37. *Ильин А. М., Хасьминский Р. З.* Асимптотическое поведение решений параболических уравнений и эргодическое свойство неоднородных диффузионных процессов// Мат. сб. — 1963. — *60*, № 3. — С. 368–392.
38. *Ильин В. А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений// Усп. мат. наук. — 1960. — *15*, № 2. — С. 97–154.
39. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х.* Математический анализ. Ч. 1, 2. — М.: МГУ, 2005.
40. *Кайзер В., Мюллер Б.* Устранимые множества для уравнения теплопроводности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1973. — № 5. — С. 26–32.
41. *Кожевникова Л. М.* Классы единственности решений первой смешанной задачи для параболического уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях// Мат. сб. — 2007. — *198*, № 1. — С. 59–101.
42. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка// В сб.: «Дифференциальные уравнения с частными производными». — М.: ВИНИТИ, 1988. — С. 99–215.
43. *Красносельский М. А., Соболевский П. Е.* О неотрицательной собственной функции первой краевой задачи для эллиптического уравнения// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 1. — С. 197–199.
44. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха// Усп. мат. наук. — 1948. — *3*, № 1. — С. 3–95.
45. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
46. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
47. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
48. *Ландис Е. М.* Необходимые и достаточные условия регулярности граничной точки для задачи Дирихле для уравнения теплопроводности// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 3. — С. 517–520.
49. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.
50. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. — М.: Наука, 1966.
51. *Мукминов Ф. Х.* Стабилизация решения первой смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка// Мат. сб. — 1980. — *111*, № 4. — С. 503–521.
52. *Мукминов Ф. Х.* О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения// Мат. сб. — 1990. — *131*, № 11. — С. 1486–1509.
53. *Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д.* Теоремы об асимптотической близости решений многомерных параболических уравнений второго порядка// Усп. мат. наук. — 1980. — *35*, № 1. — С. 211–212.
54. *Репников В. Д.* О равномерной стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений// Докл. АН СССР. — 1964. — *157*, № 3. — С. 532–535.
55. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши// Докл. АН СССР. — 1966. — *167*, № 2. — С. 298–301.
56. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. — М.: ИЛ, 1953.
57. *Смирнова Г. Н.* Задача Коши для параболических уравнений, вырождающихся на бесконечности// Мат. сб. — 1966. — *70*, № 4. — С. 591–604.
58. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
59. *Тихонов А. Н.* Об уравнении теплопроводности для нескольких переменных// Бюлл. МГУ. Мат. и мех. — 1938. — *1*, № 9. — С. 1–49.
60. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1983.
61. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
62. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Факториал Пресс, 2006.
63. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
64. *Хасьминский Р. З.* Эргодические свойства возвратных диффузионных процессов и стабилизация решений задачи Коши для параболических уравнений// Теор. вер. и ее прилож. — 1960. — *5*, № 2. — С. 196–214.
65. *Черемных Ю. Н.* Об асимптотике решений параболических уравнений// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1959. — *23*, № 6. — С. 913–924.

66. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003.
67. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964.
68. *Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О.* О поведении решений параболических уравнений второго порядка с диссипацией// Дифф. уравн. — 1971. — *7*, № 9. — С. 1684–1695.
69. *Aronson D. G.* Bounds for the fundamental solution of a parabolic equations// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*, № 6. — С. 890–896.
70. *Aronson D. G.* Non-negative solutions of linear parabolic equations// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3). — 1968. — *22*, № 4. — С. 607–694.
71. *Denisov V. N.* On the behaviour of solutions of parabolic equations for large values of time// Russ. Math. Surv. — 2005. — *60*, № 4. — С. 721–790.
72. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Wiener criterion for the heat equation// Arch. Ration. Mech Anal. — 1982. — *78*, № 4. — С. 193–194.
73. *Friedman A.* Convergence of solutions of parabolic equations to a steady state// J. Math. Mech. — 1956. — *8*, № 1. — С. 57–76.
74. *Friedman A.* Asymptotic behaviour of solutions of parabolic equations of any order// Acta Math. — 1961. — *106*, № 1-2. — С. 1–43.
75. *Fulks W.* A note on the steady state solutions of the heat equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1956. — *7*, № 5. — С. 766–771.
76. *Gariepy R., Ziemer W. P.* Thermal capacity and boundary regularity// J. Differ. Equ. — 1982. — *45*. — С. 374–388.
77. *Gilbarg D., Serrin J.* On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations// J. Anal. Math. — 1956. — *4*. — С. 309–340.
78. *Giorgi E.* Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari// Mem. Acad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. — 1957. — *3*. — С. 25–43.
79. *Kamin S.* On stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations// Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. — 1976. — *76*. — С. 43–53.
80. *Krzyżański M.* Sur l'allure asymptotique des solutions d'équation du type parabolique// Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III — 1956. — № 4. — С. 247–251.
81. *Lanconelli E.* Sur problema di Dirichlet per l'equasione del calibre// Ann. Mat. Pura Appl. — 1973. — *77*. — С. 83–114.
82. *Lieberman G. M.* Second Order Parabolic Differential Equations. — Singapore: World Scientific, 1996.
83. *Littman W., Stampacchia G., Wainberger N. F.* Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1963. — *17*. — С. 43–77.
84. *Meyers N., Serrin J.* The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations// J. Math. Mech. — 1960. — *9*, № 4. — С. 513–538.
85. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations// Am. J. Math. — 1958. — *80*, № 4. — С. 531–954.
86. *Osada H.* Diffusion processes with generator of generalized divergence forms// J. Math. Kyoto Univ. — 1987. — *72*. — С. 597–619.
87. *Pinchover Y.* On uniqueness and nonuniqueness of the positive Cauchy problem for parabolic equations with unbounded coefficients// Math. Z. — 1996. — *223*. — С. 566–586.
88. *Stampacchia G.* Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinuous// Ann. Inst. Fourier. — 1965. — *15*, № 1. — С. 189–258.
89. *Watson N. A.* Thermal capacity// Proc. London Math. Soc. — 1978. — *37*. — С. 372–662.
90. *Zang Qi. S.* Gaussian bounds for the fundamental solutions of $\nabla(A\nabla u) + B\nabla u - u_t = 0$// Manuscripta Math. — 1997. — *93*. — С. 381–390.
91. *Ziemer W. P.* Behavior at the boundary of solutions of quazilinear parabolic equations// J. Differ. Equ. — 1980. — *35*. — С. 291–305.

Денисов Василий Николаевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-1-1-155 UDC 517.9

On Large-Time Behavior of Solutions of Parabolic Equations

© 2020 **V. N. Denisov**

Abstract. We study the stabilization of solutions of the Cauchy problem for second-order parabolic equations depending on the behavior of the lower-order coefficients of equations at the infinity and on the growth rate of initial functions. We also consider the stabilization of solution of the first boundary-value problem for a parabolic equation without lower-order coefficients depending on the domain Q where the initial function is defined for $t = 0$.

In the first chapter, we study sufficient conditions for uniform in x on a compact $K \subset \mathbb{R}^N$ stabilization to zero of the solution of the Cauchy problem with divergent elliptic operator and coefficients independent of t and depending only on x. We consider classes of initial functions:

1. bounded in $\mathbb{R}^N$,
2. with power growth rate at the infinity in $\mathbb{R}^N$,
3. with exponential order at the infinity.

Using examples, we show that sufficient conditions are sharp and, moreover, do not allow the uniform in $\mathbb{R}^N$ stabilization to zero of the solution of the Cauchy problem.

In the second chapter, we study the Cauchy problem with elliptic nondivergent operator and coefficients depending on x and t. In different classes of growing initial functions we obtain exact sufficient conditions for stabilization of solutions of the corresponding Cauchy problem uniformly in x on any compact K in $\mathbb{R}^N$. We consider examples proving the sharpness of these conditions.

In the third chapter, for the solution of the first boundary-value problem without lower-order terms, we obtain necessary and sufficient conditions of uniform in x on any compact in Q stabilization to zero in terms of the domain $\mathbb{R}^N \setminus Q$ where Q is the definitional domain of the initial function for $t = 0$. We establish the power estimate for the rate of stabilization of the solution of the boundary-value problem with bounded initial function in the case where $\mathbb{R}^N \setminus Q$ is a cone for $t = 0$.

REFERENCES

1. E. L. Ince, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Faktorial Press, Moscow, 2005 (Russian translation).
2. Yu. A. Alkhutov, "Ustranimye osobennosti resheniy parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [Removable singularities of solutions of second-order parabolic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **50**, No. 5, 9–17 (in Russian).
3. R. Bellman, *Teoriya ustoychivosti resheniy differentsial'nykh uravneniy* [Stability Theory of Differential Equations], IL, Moscow, 1954 (Russian translation).
4. G. N. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions], IL, Moscow, 1949 (Russian translation).
5. V. S. Vladimirov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
6. J. Garnett, *Ogranichennye analiticheskie funktsii* [Bounded Analytic Functions], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
7. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order], Nauka, Moscow, 1989 (Russian translation).
8. A. K. Gushchin, "O ravnomernoy stabilizatsii resheniy vtoroy smeshannoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya" [On uniform stabilization of solutions of the second mixed problem for a parabolic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **119**, No. 4, 451–507 (in Russian).

9. A. K. Gushchin, "O zavisimosti povedeniya pri bol'shikh znacheniyakh vremeni resheniya parabolicheskogo uravneniya ot dannykh zadachi" [On large-time behavior of solution of a parabolic equation depending on the data of the problem], In: *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Qualitative Theory of Differential Equations], Nauka, Novosibirsk, 1988, pp. 72–82 (in Russian).
10. A.K. Gushchin and Mikhaylov V.P., "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1971, **7**, No. 2, 297–311 (in Russian).
11. A. K. Gushchin, V. P. Mikhaylov, and A. L. Muravey, "O stabilizatsii resheniy nestatsionarnykh granichnykh zadach dlya lineynykh differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh" [On stabilization of solutions of nonstationary boundary-value problems for linear partial differential equations], *Dinam. splosh. sredy* [Dynam. Contin. Medium], 1975, No. 23, 57–90 (in Russian).
12. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s koeffitsientom mladshego poryadka i rastushchey nachal'noy funktsiey" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient and growing initial function], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2003, **23**, 125–148 (in Russian).
13. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2003, **39**, No. 4, 506–515 (in Russian).
14. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom i s polinomial'no rastushchey nachal'noy funktsiey" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient and polynomially growing initial function], *Proc. Conf. "Funktsional'nye prostranstva. Differentsial'nye operatory"* [Functional spaces. Differential operators], Fizmatlit, Moscow, 2003, pp. 293–245 (in Russian).
15. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientom i rastushchey nachal'noy funktsiey" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient and growing initial function], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2004, **397**, No. 4, 439–441 (in Russian).
16. V. N. Denisov, "O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy pri bol'shikh znacheniyakh vremeni" [On large-time behavior of solutions of parabolic equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2005, **60**, No. 4, 145–212 (in Russian).
17. V. N. Denisov, "Neobkhodimye i dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Dirikhle dlya uravneniya teploprovodnosti" [Necessary and sufficient conditions for stabilization of solution of the Cauchy problem for the heat equation], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2006, **407**, No. 2, 163–166 (in Russian).
18. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2006, **12**, No. 4, 79–97 (in Russian).
19. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom i s eksponentsial'no rastushchey nachal'noy funktsiey" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient and exponentially growing initial function], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2008, **261**, 97–106 (in Russian).
20. V. N. Denisov, "Usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya v klassakh rastushchikh nachal'nykh funktsiy" [Conditions of stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation in classes of growing initial functions], *Proc. Conf. "Funktsional'nye prostranstva. Differentsial'nye operatory. Obshchaya topologiya"* [Functional spaces. Differential operators. General topology], Fizmatlit, Moscow, 2008, pp. 118–32 (in Russian).
21. V. N. Denisov, "Dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [Sufficient conditions for stabilization of solutions of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with lower-order coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 61–71 (in Russian).
22. V. N. Denisov, "O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [On necessary and sufficient conditions for stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **433**, No. 4, 452–454 (in Russian).
23. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom v klassakh rastushchikh nachal'nykh funktsiy" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation with lower-order coefficient in classes of growing initial functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **430**, No. 5, 586–588 (in Russian).

24. V. N. Denisov, “Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s rastushchimi mladshimi koeffitsientami” [Stabilization of solution of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation with growing lower-order coefficients], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 97–109 (in Russian).
25. V. N. Denisov, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya pervoy kraevoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya” [Necessary and sufficient conditions for stabilization of solution of the first boundary-value problem for a parabolic equation], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2013, **29**, 248–280 (in Russian).
26. V. N. Denisov, “Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s rastushchimi mladshimi koeffitsientami” [Stabilization of solution of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation with growing lower-order coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 5, 1–14 (in Russian).
27. V. N. Denisov and V. V. Zhikov, “O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskikh uravneniy” [On stabilization of solution of the Cauchy problem for parabolic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1985, **37**, No. 6, 834–850 (in Russian).
28. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, “O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy” [On stabilization of solution of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 3, 351–355 (in Russian).
29. V. N. Denisov and V. D. Repnikov, “O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskikh uravneniy” [On stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1984, **20**, No. 1, 20–41 (in Russian).
30. Yu. N. Drozhzhinov, “Stabilizatsiya resheniy obobshchennoy zadachi Koshi dlya ul’traparabolicheskogo uravneniya” [Stabilization of solutions of the generalized Cauchy problem for an ultraparabolic equation], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1969, **33**, No. 2, 368–378 (in Russian).
31. V. V. Zhikov, “O stabilizatsii resheniy parabolicheskikh uravneniy” [On stabilization of solutions of parabolic equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **104**, No. 4, 597–616 (in Russian).
32. V. V. Zhikov, “Asimptoticheskoe povedenie i stabilizatsiya resheniy parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka s mladshimi chlenami” [Asymptotic behavior and stabilization of solutions of second-order parabolic equations with lower-order terms], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1983, **46**, 69–98 (in Russian).
33. Ya. I. Zhitomirskiy, “Zadacha Koshi dlya parabolicheskikh sistem lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s rastushchimi koeffitsientami” [The Cauchy problem for parabolic systems of linear partial differential equations with growing coefficients], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1959, No. 1, 55–74 (in Russian).
34. A. M. Il’in, “O povedenii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya pri neogranichennom vozrastanii vremeni” [On behavior of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation under infinite growth of time], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 2, 115–121 (in Russian).
35. A. M. Il’in, “Ob odnom dostatochnom uslovii stabilizatsii resheniya parabolicheskogo uravneniya” [On one sufficient condition for stabilization of solution of a parabolic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1985, **37**, 851–856 (in Russian).
36. A. M. Il’in, A. S. Klashnikov, and O. A. Oleynik, “Lineynye uravneniya vtorogo poryadka parabolicheskogo tipa” [Linear second-order equations of parabolic type], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1962, **17**, No. 3, 3–146 (in Russian).
37. A. M. Il’in and R. Z. Khas’minskiy, “Asimptoticheskoe povedenie resheniy parabolicheskikh uravneniy i ergodicheskoe svoystvo neodnorodnykh diffuzionnykh protsessov” [Asymptotic behavior of solutions of parabolic equations and ergodic property of nonhomogeneous diffusion processes], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1963, **60**, No. 3, 368–392 (in Russian).
38. V. A. Il’in, “O razreshimosti smeshannykh zadach dlya giperbolicheskogo i parabolicheskogo uravneniy” [On solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1960, **15**, No. 2, 97–154 (in Russian).
39. V. A. Il’in, V. A. Sadovnichiy, and Bl. Kh. Sendov, *Matematicheskiy analiz. Ch. 1, 2* [Mathematical Analysis. V. 1, 2], MGU, Moscow, 2005 (in Russian).
40. V. Kayzer and B. Myuller, “Ustranimye mnozhestva dlya uravneniya teploprovodnosti” [Removable sets for the heat equation], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1973, No. 5, 26–32 (in Russian).
41. L. M. Kozhevnikova, “Klassy edinstvennosti resheniy pervoy smeshannoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya $u_t = Au$ s kvaziellipticheskim operatorom A v neogranichennykh oblastyakh” [Classes of

unique solvability of the first mixed problem for a parabolic equation $u_t = Au$ with quasi-elliptic operator A in unbounded domains], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2007, **198**, No. 1, 59–101 (in Russian).
42. V. A. Kondrat'ev and E. M. Landis, "Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka" [Qualitative theory of second-order partial differential equations], In: *Differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], VINITI, Moscow, 1988, pp. 99–215 (in Russian).
43. M. A. Krasnosel'skiy and P. E. Sobolevskiy, "O neotritsatel'noy sobstvennoy funktsii pervoy kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo uravneniya" [On nonnegative eigenfunction of the first boundary-value problem for an elliptic equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 1, 197–199 (in Russian).
44. M. G. Kreyn and M. A. Rutman, "Lineynye operatory, ostavlyayushchie invariantnym konus v prostranstve Banakha" [Linear operators preserving a cone invariant in the Banach space], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1948, **3**, No. 1, 3–95 (in Russian).
45. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
46. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
47. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasi-Linear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
48. E. M. Landis, "Neobkhodimye i dostatochnye usloviya regulyarnosti granichnoy tochki dlya zadachi Dirikhle dlya uravneniya teploprovodnosti" [Necessary and sufficient conditions for regularity of a boundary point for the Dirichlet problem for a heat equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 3, 517–520 (in Russian).
49. E. M. Landis, *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [Second-Order Equations of Elliptic and Parabolic Types], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
50. N. S. Landkof, *Osnovy sovremennoy teorii potentsiala* [Foundations of Modern Potential Theory], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
51. F. Kh. Mukminov, "Stabilizatsiya resheniya pervoy smeshannoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka" [Stabilization of solution of the first mixed problem for a second-order parabolic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1980, **111**, No. 4, 503–521 (in Russian).
52. F. Kh. Mukminov, "O ravnomernoy stabilizatsii resheniy pervoy smeshannoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya" [On uniform stabilization of solutions of the first mixed problem for a parabolic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1990, **131**, No. 11, 1486–1509 (in Russian).
53. F. O. Porper and S. D. Eydel'man, "Teoremy ob asimptoticheskoy blizosti resheniy mnogomernykh parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [Theorems on asymptotic proximity of solutions of multidimensional second-order parabolic equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1980, **35**, No. 1, 211–212 (in Russian).
54. V. D. Repnikov, "O ravnomernoy stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskikh uravneniy" [On uniform stabilization of solution of the Cauchy problem for parabolic equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **157**, No. 3, 532–535 (in Russian).
55. V. D. Repnikov and S. D. Eydel'man, "Neobkhodimye i dostatochnye usloviya ustanovleniya resheniya zadachi Koshi" [Necessary and sufficient conditions of stabilization of solution of the Cauchy problem], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1966, **167**, No. 2, 298–301 (in Russian).
56. Dzh. Sansone, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. T. 1* [Ordinary Differential Equations. V. 1], IL, Moscow, 1953 (in Russian).
57. G. N. Smirnova, "Zadacha Koshi dlya parabolicheskikh uravneniy, vyrozhdayushchikhsya na beskonechnosti" [The Cauchy problem for parabolic equations degenerating at infinity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1966, **70**, No. 4, 591–604 (in Russian).
58. I. Steyn and G. Veys, *Vvedenie v garmonicheskiy analiz na evklidovykh prostranstvakh* [Introduction to Harmonic Analysis in Euclidean Spaces], Mir, Moscow, 1974 (in Russian).
59. A. N. Tikhonov, "Ob uravnenii teploprovodnosti dlya neskol'kikh peremennykh" [On the heat equation of several variables], *Byull. MGU. Mat. i mekh.* [Bull. MSU Math. Mech.], 1938, **1**, No. 9, 1–49 (in Russian).
60. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).
61. A. Fridman, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type], Mir, Moscow, 1968 (in Russian).
62. G. Hardy, *Raskhodyashchiesya ryady* [Divergent Series], Faktorial Press, Moscow, 2006 (Russian translation).

63. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Neravenstva* [Inequalities], IL, Moscow, 1948 (Russian translation).
64. R. Z. Khas'minskiy, "Ergodicheskie svoystva vozvratnykh diffuzionnykh protsessov i stabilizatsiya resheniy zadachi Koshi dlya parabolicheskikh uravneniy" [Ergodic properties of recurrent diffusion processes and stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations], *Teor. ver. i ee prilozh.* [Probab. Theor. Appl.], 1960, **5**, No. 2, 196–214 (in Russian).
65. Yu. N. Cheremnykh, "Ob asimptotike resheniy parabolicheskikh uravneniy" [On asymptotics of solutions of parabolic equations], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1959, **23**, No. 6, 913–924 (in Russian).
66. L. C. Evans, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Tamara Rozhkovskaya, Novosibirsk, 2003 (Russian translation).
67. S. D. Eydel'man, *Parabolicheskie sistemy* [Parabolic Systems], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
68. S. D. Eydel'man and F. O. Porper, "O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka s dissipatsiey" [On behavior of solutions of second-order parabolic equations with dissipation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1971, **7**, No. 9, 1684–1695 (in Russian).
69. D. G. Aronson, "Bounds for the fundamental solution of a parabolic equations," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, No. 6, 890–896.
70. D. G. Aronson, "Non-negative solutions of linear parabolic equations," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (3)*, 1968, **22**, No. 4, 607–694.
71. V. N. Denisov, "On the behaviour of solutions of parabolic equations for large values of time," *Russ. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 4, 721–790.
72. L. C. Evans and R. F. Gariepy, "Wiener criterion for the heat equation," *Arch. Ration. Mech Anal.*, 1982, **78**, No. 4, 193–194.
73. A. Friedman, "Convergence of solutions of parabolic equations to a steady state," *J. Math. Mech.*, 1956, **8**, No. 1, 57–76.
74. A. Friedman, "Asymptotic behaviour of solutions of parabolic equations of any order," *Acta Math.*, 1961, **106**, No. 1-2, 1–43.
75. W. Fulks, "A note on the steady state solutions of the heat equations," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1956, **7**, No. 5, 766–771.
76. R. Gariepy and W. P. Ziemer, "Thermal capacity and boundary regularity," *J. Differ. Equ.*, 1982, **45**, 374–388.
77. D. Gilbarg and J. Serrin, "On isolated singularities of solutions of second order elliptic differential equations," *J. Anal. Math.*, 1956, **4**, 309–340.
78. E. Giorgi, "Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari," *Mem. Acad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1957, **3**, 25–43.
79. S. Kamin, "On stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations," *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A*, 1976, **76**, 43–53.
80. M. Krzyżański, "Sur l'allure asymptotique des solutions d'équation du type parabolique," *Bull. Acad. Pol. Sci. Cl. III*, 1956, No. 4, 247–251.
81. E. Lanconelli, "Sur problema di Dirichlet per l'equasione del calibre," *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1973, **77**, 83–114.
82. G. M. Lieberman, *Second Order Parabolic Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1996.
83. W. Littman, G. Stampacchia, and N. F. Wainberger, "Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1963, **17**, 43–77.
84. N. Meyers and J. Serrin, "The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations," *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, No. 4, 513–538.
85. J. Nash, "Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations," *Am. J. Math.*, 1958, **80**, No. 4, 531–954.
86. H. Osada, "Diffusion processes with generator of generalized divergence forms," *J. Math. Kyoto Univ.*, 1987, **72**, 597–619.
87. Y. Pinchover, "On uniqueness and nonuniqueness of the positive Cauchy problem for parabolic equations with unbounded coefficients," *Math. Z.*, 1996, **223**, 566–586.
88. G. Stampacchia, "Le probleme de Dirichlet pour les equations elliptiques du second ordre a coefficients discontinuous," *Ann. Inst. Fourier*, 1965, **15**, No. 1, 189–258.
89. N. A. Watson, "Thermal capacity," *Proc. London Math. Soc.*, 1978, **37**, 372–662.
90. Qi. S. Zang, "Gaussian bounds for the fundamental solutions of $\nabla(A\nabla u) + B\nabla u - u_t = 0$," *Manuscripta Math.*, 1997, **93**, 381–390.

91. W. P. Ziemer, “Behavior at the boundary of solutions of quazilinear parabolic equations,” *J. Differ. Equ.*, 1980, **35**, 291–305.

Vasiliy N. Denisov
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru