Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 683–699

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-683-699 УДК 517.958

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КАВАХАРЫ

© 2019 г. **А. В. ФАМИНСКИЙ, Е. В. МАРТЫНОВ**

Аннотация. В статье рассматривается начально-краевая задача на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары с нелинейностью высокого порядка. Получен результат о существовании и единственности глобального решения. Также в случае наличия в уравнении абсорбирующего слагаемого, исчезающего на бесконечности, устанавливается затухание решения при больших временах.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В статье рассматривается начально-краевая задача для обобщенного уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + (f(u))_x + g(x)u = 0, \tag{1.1}$$

где $u = u(t,x)$, a, b — действительные константы, на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ при $t > 0$ с начальными и краевыми условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \geqslant 0, \qquad u(t,0) = u_x(t,0) = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Функция f удовлетворяет условию ограничения роста

$$|f'(u)| \leqslant c|u|^p, \quad p \in [1, 8), \tag{1.3}$$

для некоторой константы c и любых $u \in \mathbb{R}$. Без ограничения общности в дальнейшем всегда предполагается, что $f(0) = 0$.

Изучаются вопросы существования и единственности глобальных по времени решений, а также их убывания при больших временах.

Уравнение Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = 0 \tag{1.4}$$

было впервые выведено в работе [18] для описания распространения длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией. Оно является модификацией уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ)

$$u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = 0$$

на случай дисперсионного соотношения более высокого порядка. Как показано, например, в статьях [1, 3] в реальных физических моделях коэффициент b может быть положительным, отрицательным или нулевым. Наряду с квадратичной нелинейностью рассматриваются нелинейности более высокого порядка, например, модифицированное уравнение Кавахары [19]

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + u^2u_x = 0. \tag{1.5}$$

Слагаемое $g(x)u$ моделирует эффект абсорбции.

Наиболее изученной задачей для уравнения Кавахары и его обобщений является задача Коши (см., например, библиографию в [12, 15]). В частности, для самого уравнения Кавахары (1.4) глобальная корректность установлена для начальной функции из пространства $H^s(\mathbb{R})$, $s \geqslant -7/4$ (см. [13]). В статье [23] для модифицированного уравнения Кавахары (1.5) с $b > 0$ аналогичный результат получен для начальной функции из $H^2(\mathbb{R})$, а в статье [15] как для самого уравнения Кавахары, так и для его модифицированного аналога также с $b > 0$ при $u_0 \in L_2(\mathbb{R})$, причем при наличии абсорбирующего слагаемого.

В случае начально-краевой задачи на $\mathbb{R}_+$ с граничными условиями (1.2) глобальная корректность для уравнения Кавахары была установлена в работе [7] в классе бесконечно гладких функций, экспоненциально быстро убывающих при $x \to +\infty$. Аналогичные результаты в классах менее гладких функций, также экспоненциально быстро убывающих на $+\infty$, для уравнения (1.4) при $b = 1$ были получены в [14, 20]. Существование и единственность глобальных решений задачи (1.1), (1.2) с квадратичной нелинейностью (то есть при $f'(u) \equiv u$) для начальной функции из пространств L_2 и H^2 со степенными весами на $+\infty$ были доказаны в [8]. Глобальная корректность в случае уравнения Кавахары (1.4) для начальной функции $u_0 \in H^k(\mathbb{R}_+)$, $k \geqslant 2$, установлена в [2]. В недавней работе [12] глобальная корректность задачи (1.4), (1.2) при $a = b = 0$ получена для $u_0 \in L_2(\mathbb{R}_+)$.

Для модифицированного уравнения Кавахары (1.5) при $a = b = 1$ начально-краевая задача на ограниченном интервале рассматривалась в статье [10].

В случае задачи Коши как для уравнений (1.4), (1.5), так и для уравнения КдФ справедлив закон сохранения

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} u_0^2\,dx, \tag{1.6}$$

который исключает возможность убывания решений в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ при $t \to +\infty$. Если в уравнение добавить абсорбирующее слагаемое $g(x)u$ для неотрицательной функции $g \not\equiv 0$, то такое убывание становится возможным. Подобные результаты об экспоненциальном убывании решений при больших временах в норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ были установлены в случае, когда функция g строго положительна при больших $|x|$, для уравнения КдФ в [11, 15], его аналогов с бо́льшим порядком нелинейности в [15], уравнения Кавахары и модифицированного уравнения Кавахары в [15]. В недавней работе [4] для уравнения (1.5) без всяких дополнительных абсорбирующих членов был получен результат о степенном убывании решений при $t \to +\infty$ в нормах пространств $L_p(\mathbb{R})$, $p > 4$, при малых начальных данных из пространства H^2 со степенным весом на бесконечности.

Для начально-краевой задачи на $\mathbb{R}_+$ с граничными условиями (1.2) в случае уравнений (1.4) и (1.5) закон сохранения (1.7) следует заменить равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} u^2(t,x)\,dx + \int\limits_0^t u_{xx}^2(\tau,0)\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}_+} u_0^2\,dx \tag{1.7}$$

(аналогичное равенство справедливо и в случае уравнения КдФ с заменой u_{xx} на u_x). Оно показывает, что данная задача обладает определенной внутренней диссипацией, но вопрос о том, является ли это достаточным для убывания решений при больших временах, остается открытым.

Добавление к уравнению КдФ абсорбирующего слагаемого $g(x)u$, где неотрицательная функция g строго положительна при больших значениях x, приводит к экспоненциальному убыванию решений в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ при $t \to +\infty$ (см. [21, 22]). Аналогичный результат для уравнения Кавахары был установлен в [5, 6].

В статье [11] в случае начально-краевой задачи для уравнения КдФ с абсорбирующим слагаемым был получен результат об убывании решений при больших временах в норме $L_2(\mathbb{R}_+)$ (без оценки скорости убывания) при условии, что функция g положительна на $\mathbb{R}_+$, но убывает к нулю при $x \to +\infty$ с определенной скоростью (см. неравенство (1.9) далее), а начальные данные малы.

В недавней работе [17] этот результат был распространен на случай уравнения Кавахары, причем без предположения малости u_0. Настоящая статья является продолжением [17] на случай уравнения (1.1) с более высоким порядком нелинейности.

Наконец, в случае задачи на ограниченном интервале экспоненциальное убывание решений в норме L_2 может быть получено либо с помощью добавления в уравнение локализованного абсорбирующего слагаемого (см. [24] для уравнения Кавахары и [10] для модифицированного уравнения Кавахары), либо при малых начальных данных без искусственной абсорбции (см. [14, 16] для уравнения Кавахары и [10] для модифицированного уравнения Кавахары).

Пусть
$$\Pi_T^+ = (0,T)\times\mathbb{R}_+$$
для $T>0$. Положим
$$L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+), \quad W^k_{p,+} = W^k_p(\mathbb{R}_+), \quad H^k_+ = W^k_{2,+},$$
$$H^k_{0,+} = H^k_0(\mathbb{R}_+) = \{\varphi(x)\in H^k_+ : \varphi^{(j)}(0)=0, 0\leqslant j\leqslant k-1\}, \quad C^k_{b,+} = C^k_b(\overline{\mathbb{R}}_+)$$
(здесь и далее индекс b обозначает ограниченность отображения) для $p\in[1,+\infty]$ и целых $k\geqslant 0$. Для $\alpha\in\mathbb{R}$ определим специальные пространства Лебега со степенными весами
$$L^\alpha_{2,+} = \{\varphi(x) : (1+x)^\alpha\varphi\in L_{2,+}\}.$$

Введем понятие слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 1.1. Пусть $g\in L_{\infty,+}$, $u_0\in L_{2,+}$. Функция $u\in L_2(\Pi_T^+)$ называется *слабым решением* задачи (1.1), (1.2) в полуполосе Π_T^+ для некоторого $T>0$, если для любой функции $\phi\in L_2(0,T;H^5_+)$, такой что
$$\phi_t\in L_2(\Pi_T^+), \quad \phi\big|_{t=T}\equiv 0, \quad \phi\big|_{x=0} = \phi_x\big|_{x=0} = \phi_{xx}\big|_{x=0}\equiv 0,$$
выполнено $f(u(t,x))\phi_x\in L_1(\Pi_T^+)$ и справедливо равенство
$$\iint\limits_{\Pi_T^+}\Big[u\big(\phi_t-\phi_{xxxxx}+b\phi_{xxx}+a\phi_x-g\phi\big)+f(u)\phi_x\Big]\,dxdt+\int\limits_{\mathbb{R}_+}u_0\phi\big|_{t=0}\,dx = 0. \tag{1.8}$$

На самом деле решения будем рассматривать в более регулярном пространстве
$$X_2(\Pi_T^+) = \{u\in C([0,T];H^2_{0,+}), \quad \partial^j_x u\in C_b(\overline{\mathbb{R}}_+;H^{(4-j)/5}(0,T)) \text{ для } 0\leqslant j\leqslant 4,$$
$$u\in L_8(0,T;C^2_{b,+}) \quad u\in L_2(\mathbb{R}_+;C[0,T])\},$$
на котором введена естественная норма. Заметим, что в статье [2] была установлена глобальная корректность начально-краевой задачи для уравнения (1.4) с граничными условиями (1.2) при $u_0\in H^2_{0,+}$ (на самом деле в шкале соответствующих пространств $X_k(\Pi_T^+)$, $k\geqslant 2$ при начальных данных соответствующей гладкости). Заметим также, что если $u\in X_2(\Pi_T^+)$, то $u\in C_b(\overline{\Pi}_T^+)$ и, следовательно, если, например, $f\in C^1(\mathbb{R})$, $f(0)=0$, то $f(u(t,x))\in C([0,T];L_{2,+})$ и тогда $f(u(t,x))\phi_x\in L_1(\Pi_T^+)$ для функции ϕ из определения 1.1.

Также нам потребуется пространство со степенными весами: для $\alpha>0$ положим
$$X_2^\alpha(\Pi_T^+) = \{u\in X_2(\Pi_T^+)\cap C([0,T];L^\alpha_{2,+}) : u_{xx}\in L_2(0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})\}$$
с естественной нормой.

В дальнейшем будем опускать пределы интегрирования в интегралах по $\mathbb{R}_+$. Обозначим через $\eta(x)$ гладкую неубывающую функцию такую, что $\eta(x)=0$ для $x\leqslant 0$, $\eta(x)=1$ для $x\geqslant 1$,
$$\eta(x)+\eta(1-x)\equiv 1.$$
Для функции f положим
$$f^*(u)\equiv\int\limits_0^u f(v)\,dv.$$

Приведем основные результаты работы.

Теорема 1.1. *Пусть* $u_0\in H^2_{0,+}$, $g\in W^2_{\infty,+}$, $f\in C^4(\mathbb{R})$ *и для функции* f *выполнено условие* (1.3). *Тогда для любого* $T>0$ *в полуполосе* Π_T^+ *существует слабое решение задачи* (1.1), (1.2) $u\in X_2(\Pi_T^+)$, *которое единственно в более широком пространстве* $L_\infty(0,T;H^2_{0,+})$.

Теорема 1.2. *Если в дополнение к условиям теоремы* 1.1 *известно, что* $u_0 \in L^{\alpha}_{2,+}$ *для некоторого* $\alpha > 0$, *то решение* $u \in X^{\alpha}_2(\Pi^+_T)$.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теорем* 1.1 *и* 1.2, *и пусть существуют положительные константы* M *и* c_0, *такие что для* $x > 0$

$$g(x) \geqslant \frac{c_0}{1+x}, \tag{1.9}$$

$$|g'(x)| \leqslant Mg(x), \quad |g''(x)| \leqslant Mg(x). \tag{1.10}$$

Тогда решение u *обладает следующим свойством*:

$$\lim_{t\to+\infty} \|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} = 0. \tag{1.11}$$

В дальнейшем будем использовать простое интерполяционное неравенство,

$$\int (\varphi')^2\psi\,dx \leqslant \left(\int (\varphi'')^2\psi\,dx\right)^{1/2}\left(\int \varphi^2\psi\,dx\right)^{1/2} + \frac12\int \varphi^2|\psi''|\,dx, \tag{1.12}$$

справедливое для функций $\varphi \in H^2_+ \cap H^1_{0,+}$ и гладких весовых функций ψ при условии, что интегралы в правой части существуют.

Нам также понадобится одно более продвинутое неравенство.

Лемма 1.1. *Пусть положительные функции* $\psi_j \in W^1_\infty(0,r)$ $\forall r > 0$, $j = 0$ *и* 1, *причем существует константа* $\widetilde{c} > 0$ *такая, что для каждого* j

$$|\psi_j'(x)| \leqslant \widetilde{c}\psi_j(x) \quad \forall\ x > 0.$$

Пусть

$$2 \leqslant q \leqslant +\infty, \quad s = \frac18 - \frac{1}{4q}.$$

Тогда существует константа $c = c(q,\widetilde{c})$ *такая, что*

$$\big\|\varphi\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\big\|_{L_{q,+}} \leqslant c\Big[\big\|\big(|\varphi''|+|\varphi|\big)\psi_0^{1/2}\big\|^{2s}_{L_{2,+}}\|\varphi\psi_1^{1/2}\|^{1-2s}_{L_{2,+}} + \big\|\varphi\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\big\|^{1-2/q}_{L_{2,+}}\|\varphi\psi_1^{1/2}\|^{2/q}_{L_{2,+}}\Big] \tag{1.13}$$

для любой функции $\varphi \in H^2(0,r)$ $\forall r > 0$ *такой, что* $\varphi(0) = 0$, $\varphi''\psi_0^{1/2}, \varphi\psi_0^{1/2}, \varphi\psi_1^{1/2} \in L_{2,+}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что φ — гладкая, убывающая при $x \to +\infty$, функция.

Интегрированием по частям и использованием свойств функций ψ_j находим, что

$$\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx = -\int \varphi''\varphi\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx - \int \varphi'\varphi(\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2})'\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\int (\varphi'')^2\psi_0\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/2} + c\Big(\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_0\,dx\Big)^{1/4}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/4},$$

откуда следует неравенство

$$\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx \leqslant c\Big(\int \big((\varphi'')^2+\varphi^2\big)\psi_0\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/2}. \tag{1.14}$$

Далее используя элементарное неравенство

$$\sup_{x>0}\phi^2 \leqslant 2\int |\phi'|\cdot|\phi|\,dx,$$

находим, что

$$\sup_{x>0}\big(\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\big) \leqslant c\int \big(|\varphi'|+|\varphi|\big)\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\cdot|\varphi|\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\int |\varphi'|\psi_0^{1/4}\psi_1^{1/4}\cdot|\varphi|\psi_1^{1/2}\,dx + c\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\Big(\int (\varphi')^2\psi_0^{1/2}\psi_1^{1/2}\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int \varphi^2\psi_1\,dx\Big)^{1/2} + c\int \varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx,$$

откуда, применяя (1.14), выводим, что

$$\sup_{x>0}\bigl(\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\bigr) \leqslant c\Bigl(\int\bigl((\varphi'')^2+\varphi^2\bigr)\psi_0\,dx\Bigr)^{1/4}\Bigl(\int\varphi^2\psi_1\,dx\Bigr)^{3/4} + c\int\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx, \tag{1.15}$$

что совпадает с (1.13) при $q=+\infty$. Если $q<+\infty$, то из (1.15) следует неравенство

$$\int\bigl(|\varphi|\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\bigr)^q\,dx \leqslant \Bigl(\sup_{x>0}\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\Bigr)^{q/2-1}\int\varphi^2\psi_1\,dx \leqslant$$
$$\leqslant c\Bigl(\int\bigl((\varphi'')^2+\varphi^2\bigr)\psi_0\,dx\Bigr)^{(q-2)/8}\Bigl(\int\varphi^2\psi_1\,dx\Bigr)^{(3q+2)/8} + c\Bigl(\int\varphi^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int\varphi^2\psi_1\,dx,$$

что завершает доказательство леммы. □

Замечание 1.1. Если $\psi_0(x)\leqslant c\psi_1(x)$ $\forall x>0$, то неравенство (1.13) в более общем виде было доказано ранее, например, в [8].

Статья организована следующим образом. В разделе 2 рассматривается вспомогательная линейная задача. Доказательство результатов о разрешимости (теоремы 1.1 и 1.2) содержится в разделе 3, а об убывании решений при больших временах (теорема 1.3) — в разделе 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00536).

2. Вспомогательная линейная задача

В полуполосе Π_T^+ рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу

$$v_t - v_{xxxxx} + bv_{xxx} + av_x = F(t,x), \tag{2.1}$$

$$v\big|_{t=0} = u_0(x), \quad v\big|_{x=0} = v_x\big|_{x=0} = 0. \tag{2.2}$$

Слабое решение этой задачи понимается полностью аналогично определению 1.1. Заметим, что слабое решение задачи (2.1), (2.2) единственно в пространстве $L_2(\Pi_T^+)$ (см., например, [2]).

Лемма 2.1. *Пусть* $u_0\in H^2_{0,+}$, $F\in L_2(0,T;H^2_{0,+})$. *Тогда существует* (*единственное*) *решение задачи* (2.1), (2.2) $v\in X_2(\Pi_T^+)$ *и для любого* $t\in(0,T]$

$$\|v\|_{X_2(\Pi_t^+)} \leqslant c(T)\left(\|u_0\|_{H^2_+} + t^{1/10}\|F\|_{L_2(0,T;H^2_+)}\right), \tag{2.3}$$

$$\int v^2(t,x)\,dx + \int_0^t v_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau = \int u_0^2\,dx + 2\iint_{\Pi_t^+} Fv\,dxd\tau, \tag{2.4}$$

$$\int\left[v_{xx}^2(t,x) + bv_x^2(t,x) - 2f^*\bigl(v(t,x)\bigr)\right]\,dx + \int_0^t\left[(v_{xxxx}-bv_{xx})^2 + av_{xx}^2\right]\big|_{x=0}\,d\tau -$$
$$- 2\iint_{\Pi_t^+} f'(v)(v_xv_{xxxx} - bv_xv_{xx})\,dxd\tau = \int\left[(u_0'')^2 + b(u_0')^2 - 2f^*(u_0)\right]\,dx +$$
$$+ \iint_{\Pi_t^+}\bigl(2F_{xx}v_{xx} - 2bFv_{xx} - Ff(v)\bigr)\,dxd\tau, \tag{2.5}$$

где функция f *удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, $f(0)=0$.

Доказательство. Существование решения $v\in X_2(\Pi_T^+)$, удовлетворяющего оценке (2.3), было ранее доказано в статье [2].

Существование решений задачи (2.1)-(2.2) в классе гладких быстро убывающих на $+\infty$ функций (при соответствующих условиях на u_0 и F) было ранее установлено в статье [7]. Для таких решений равенства (2.4) и (2.5) получаются умножением уравнения (2.1) соответственно на $2v(t,x)$ и

$\big(2v_{xxxx}(t,x)-2bv_{xx}(t,x)-2f(v(t,x))\big)$ и последующим интегрированием. Общий случай получается предельным переходом. При этом неравенства

$$\|f^*(v)\|_{C([0,T];L_{1,+})} \leqslant c \sup_{t\in(0,T)} \int |v|^{p+2}\,dx \leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^p \|v\|^2_{C([0,T];L_{2,+})} \leqslant c\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\|f'(v)v_x v_{xxxx}\|_{L_1(\Pi_T^+)} \leqslant c \iint\limits_{\Pi_T^+} |v|^p |v_x v_{xxxx}|\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^{p-1} \|v_x\|_{L_2(\Pi_T^+)} \Big(\int \sup_{t\in(0,T)} v^2\,dx\Big)^{1/2} \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \Big(\int\limits_0^T v^2_{xxxx}\,dt\Big)^{1/2} \leqslant c(T)\|v\|^{p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\|Ff(v)\|_{L_1(\Pi_T^+)} \leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |v|^p \|v\|_{C([0,T];L_{2,+})} \|F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})} \leqslant C(T)\|v\|^{p+1}_{X_2(\Pi_T^+)} \|F\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}$$

обеспечивают возможность предельного перехода в соответствующих слагаемых. □

Замечание 2.1. Если $u_0 \in L_{2,+}$, $F \in L_1(0,T;L_{2,+})$, то предельным переходом из равенства (2.4) получаем существование (единственного) решения задачи (2.1), (2.2) из пространства $L_\infty(0,T;L_{2,+})$, для которого при почти всех $t\in(0,T)$ справедливо неравенство

$$\int v^2(t,x)\,dx \leqslant \int u_0^2\,dx + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} Fv\,dxd\tau. \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Пусть $u_0 \in L^\alpha_{2,+}$, $F \in L_1(0,T;L^\alpha_{2,+})$ для некоторого $\alpha > 0$. Тогда существует (единственное) решение $v(t,x)$ задачи (2.1), (2.2) такое, что $v \in C([0,T];L^\alpha_{2,+})$, $v_{xx} \in L_2(0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})$ и для любого $t\in(0,T]$*

$$\|v\|_{C([0,t];L^\alpha_{2,+})} + \|v_{xx}\|_{L_2(0,t;L^{\alpha-1/2}_{2,+})} \leqslant c(T,\alpha)\left(\|u_0\|_{L^\alpha_{2,+}} + \|F\|_{L_1(0,t;L^\alpha_{2,+})}\right), \tag{2.7}$$

$$\int v^2(t,x)\rho(x)\,dx + \iint\limits_{\Pi_t^+} \big[5v_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')v_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')v^2\big]\,dxd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int u_0^2\rho\,dx + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} Fv\rho\,dxd\tau, \tag{2.8}$$

где

$$\rho(x) \equiv (1+x)^{2\beta}$$

для $\beta\in(0,\alpha]$.

Доказательство. В гладком случае (см. доказательство предыдущей леммы) неравенство (2.8) получается умножением уравнения (2.1) на $2v(t,x)\rho(x)$ и последующим интегрированием. При $\beta=\alpha$ из этого неравенства и неравенства (1.12) следует оценка (2.7), которая позволяет сделать предельный переход и получить утверждение леммы. □

3. Существование и единственность решений

Доказательство теоремы 1.1. Сначала методом сжимающих отображений построим локальное по времени решение. Для этого для некоторого $T>0$ рассмотрим отображение $v=\Lambda u$, где для произвольной функции $u\in X_2(\Pi_T^+)$ функция $v\in X_2(\Pi_T^+)$ в полуполосе Π_T^+ является решением начально-краевой задачи для уравнения

$$v_t - v_{xxxxx} + bv_{xxx} + av_x = -f'(u)u_x - g(x)u \tag{3.1}$$

с граничными условиями (2.2). Имеем:

$$\big(f'(u)u_x\big)_{xx} = f'(u)u_{xxx} + 3f''(u)u_x u_{xx} + f'''(u)u_x^3,$$

а тогда

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \big(f'(u)u_{xxx}\big)^2\,dxdt \leqslant c^2 \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u|^{2p-2} \int \sup_{t\in(0,T)} u^2\,dx \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \int\limits_0^T u_{xxx}^2\,dt \leqslant c_1\|u\|^{2p+2}_{X_2(\Pi_T^+)},$$

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \Big[\big(f''(u)u_xu_{xx}\big)^2 + \big(f'''(u)u_x^3\big)^2 + \big(f'(u)u_x\big)^2\Big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant c(T)\|f'(\theta)\|^2_{C^2[|\theta|\leqslant\|u\|_{C_b(\overline{\Pi}_T^+)}]} \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+}(u_x^4+1) \sup_{t\in(0,T)}\int(u_{xx}^2+u_x^2)\,dx.$$

В итоге для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ имеем

$$\|f'(u)u_x\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \leqslant \Phi(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}). \tag{3.2}$$

Кроме того, очевидно, что

$$\|gu\|_{L_2(0,T;H_+^2)} \leqslant cT^{1/2}\|g\|_{W^2_{\infty,+}}\|u\|_{L_\infty(0,T;H_+^2)}. \tag{3.3}$$

В итоге получаем, что $f'(u)u_x + gu \in L_2(0,T;H^2_{0,+})$ для $u \in X_2(\Pi_T^+)$ и, следовательно, в силу леммы 2.1 отображение Λ определено, и согласно (2.3)

$$\|\Lambda u\|_{X_2(\Pi_T^+)} \leqslant c(T)\Big(\|u_0\|_{H_+^2} + T^{1/10}\Phi(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)})\Big) \tag{3.4}$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ. Кроме того, аналогично (3.4) нетрудно показать, что

$$\|\Lambda u - \Lambda\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)} \leqslant T^{1/10}\Phi_1\big(T, \|u\|_{X_2(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)}\big)\|u-\widetilde{u}\|_{X_2(\Pi_T^+)} \tag{3.5}$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ_1.

Из неравенств (3.4) и (3.5) стандартным способом получаем результат о существовании единственного решения задачи (1.1), (1.2) из пространства $X_2(\Pi_T^+)$ при достаточно малых T (зависящих от $\|u_0\|_{H_+^2}$).

Чтобы продолжить это решение на любой отрезок времени, установим соответствующие априорные оценки. Пусть $u \in X_2(\Pi_T^+)$ является решением рассматриваемой задачи для некоторого $T > 0$. Применим равенство (2.4) для

$$u \equiv v, \quad F \equiv -f'(u)u_x - gu,$$

тогда для любого $t \in (0,T]$

$$\int u^2(t,x)\,dx + \int\limits_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} gu^2\,dxd\tau = \int u_0^2\,dx. \tag{3.6}$$

Это равенство, разумеется, является полным аналогом равенства (1.7)), откуда следует, что, поскольку $g \in L_{\infty,+}$,

$$\|u\|_{C([0,T];L_{2,+})} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L_2(0,T)} \leqslant c(T, \|u_0\|_{L_{2,+}}, \|g\|_{L_{\infty,+}}. \tag{3.7}$$

Далее в аналогичной ситуации применим равенство (2.5). Тогда, поскольку

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} \big(f'(u)u_x\big)_{xx}u_{xx}\,dxdt = \iint\limits_{\Pi_T^+} f'(u)u_xu_{xxxx}\,dxdt,$$

$$\iint\limits_{\Pi_T^+} f'(u)f(u)u_x\,dxdt = 0,$$

получаем, что

$$\int \left[u_{xx}^2(t,x) + bu_x^2(t,x) - 2f^*\big(u(t,x)\big)\right]\,dx + a\int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau +$$
$$+\iint_{\Pi_t^+} \left[2(gu_{xx} + 2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx} - guf(u)\right]\,dxd\tau \leqslant \int \left[(u_0'')^2 + b(u_0')^2 - 2f^*(u_0)\right]\,dx. \quad (3.8)$$

Воспользовавшись неравенством (1.13) для $q = p + 2 < 10$ (тогда $sq < 1$) и $\psi_0 = \psi_1 \equiv 1$, находим, что с учетом уже установленной оценки (3.7)

$$\int \big|f^*\big(u(t,x)\big)\big|\,dx \leqslant \varepsilon \int u_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, T, \|u_0\|_{L_{2,+}}, \|g\|_{L_{\infty,+}}), \quad (3.9)$$

где $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Тогда из неравенства (3.8) (с использованием также (1.12) для $\psi \equiv 1$) следует, что поскольку $g \in W_{\infty,+}^2$, справедлива оценка

$$\|u\|_{C([0,T];H_+^2)} \leqslant c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}), \quad (3.10)$$

которая и обеспечивает существование решения $u \in X_2(\Pi_T^+)$ для любого $T > 0$.

Для доказательства единственности решения в более широком классе прежде всего заметим, что если $u \in L_\infty(0,T;H_+^2)$, то очевидно, что $f'(u)u_x \in L_1(0,T;L_{2,+})$. Рассмотрим два решения u и $\widetilde{u}$ из пространства $L_\infty(0,T;H_{0,+}^2)$. Запишем для

$$v \equiv u - \widetilde{u}$$

неравенство (2.6), тогда

$$\int v^2(t,x)\,dx \leqslant 2\Big|\iint_{\Pi_t^+} \big(f'(u)u_x - f'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\big)v\,dxd\tau\Big| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{|\theta|\leqslant \max(\|u\|_{L_\infty(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{L_\infty(\Pi_T^+)})} |f''(\theta)| \cdot \operatorname*{ess\,sup}_{(t,x)\in\Pi_T^+} \big(|u_x(t,x)| + |\widetilde{u}_x(t,x)|\big) \cdot \iint_{\Pi_t^+} v^2\,dxd\tau,$$

что в силу леммы Гронуолла и устанавливает единственность в пространстве $L_\infty(0,T;H_{0,+}^2)$. □

Доказательство теоремы 1.2. Повторим схему доказательства предыдущей теоремы, только отображение Λ будем строить в пространстве $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$. Заметим, что

$$\|f'(u)u_x\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)} \leqslant cT \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} \big(|u|^{p-1}|u_x|\big) \sup_{t\in(0,T)} \|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}^\alpha} \leqslant cT\|u\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)}^{p+1} \quad (3.11)$$

и аналогично

$$\|f'(u)u_x - f'(\widetilde{u})\widetilde{u}_x\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)} \leqslant T\Phi(T, \|u\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)}, \|\widetilde{u}\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)})\|u - \widetilde{u}\|_{X_2^\alpha(\Pi_T^+)} \quad (3.12)$$

для некоторой непрерывной и неубывающей по своим аргументам функции Φ. Кроме того очевидно, что

$$\|gu\|_{L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)} \leqslant T\|g\|_{L_{\infty,+}}\|u\|_{L_\infty(0,T;L_{2,+}^\alpha)}. \quad (3.13)$$

В итоге из оценок (3.4), (3.5), (3.11)–(3.13) следует существование единственного решения задачи (1.1), (1.2) из пространства $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ при достаточно малых T (зависящих от $\|u_0\|_{H_+^2}$ и $\|u_0\|_{L_{2,+}^\alpha}$).

Далее получим в дополнение к (3.10) оценку решения в весовом пространстве. Для этого применим неравенство (2.8) для

$$u \equiv v, \quad F \equiv -f'(u)u_x - gu$$

и $\beta \in (0,\alpha]$. Тогда при $t \in (0,T]$

$$\int u^2(t,x)\rho(x)\,dx + \iint\limits_{\Pi_t^+} \bigl[5u_{xx}^2\rho' + (3b\rho' - 5\rho''')u_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')u^2\bigr]\,dxd\tau + \\ + 2\iint\limits_{\Pi_t^+} gu^2\rho\,dxd\tau \leqslant \int u_0^2\rho\,dx - 2\iint\limits_{\Pi_t^+} f'(u)uu_x\rho\,dxd\tau. \quad (3.14)$$

Здесь

$$-\iint\limits_{\Pi_t^+} f'(u)uu_x\rho\,dxd\tau = \iint\limits_{\Pi_t^+} \bigl(f'(u)u\bigr)^*\rho'\,dxd\tau, \quad (3.15)$$

и тогда с учетом уже полученной оценки (3.10)

$$\Bigl|\iint\limits_{\Pi_t^+} \bigl(f'(u)u\bigr)^*\rho'\,dxd\tau\Bigr| \leqslant c \sup_{(t,x)\in\Pi_T^+} |u|^p \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho'\,dxd\tau \leqslant c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}) \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho'\,dxd\tau. \quad (3.16)$$

Применим неравенство (1.12) для оценки второго интеграла в левой части (3.14), тогда из (3.14), (3.15) следует, что

$$\int u^2(t,x)\rho(x)\,dx + \iint\limits_{\Pi_t^+} u_{xx}^2\rho'\,dxd\tau \leqslant \int u_0^2\rho\,dx + c(T, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}) \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho\,dxd\tau. \quad (3.17)$$

Выбирая $\beta = \alpha$, выводим из (3.17), что

$$\|u\|_{C([0,T];L_{2,+}^\alpha)} \leqslant c(T, \|u_0\|_{L_{2,+}^\alpha}, \|u_0\|_{H_+^2}, \|g\|_{W_{\infty,+}^2}). \quad (3.18)$$

Оценки (3.10) и (3.18) позволяют продолжить локальное по времени решение до решения в пространстве $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ для любого $T > 0$. □

4. Убывание решений при больших временах

Установленные в разделе 3 оценки (3.10), (3.18) не являются равномерными при $T \to +\infty$. В следующих двух леммах будут установлены аналоги этих оценок, уже не зависящие от T.

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.1 *и пусть дополнительно известно, что* $g(x) > 0$ *для любого* $x \geqslant 0$, *и для функции* g *справедливы неравенства* (1.10). *Тогда для решения* u *задачи* (1.1), (1.2), *принадлежащего пространству* $X_2(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$, *справедливо неравенство*

$$\|u(t,\cdot)\|_{H_+^2} \leqslant c(\|u_0\|_{H_+^2}, M) \quad \forall t \geqslant 0. \quad (4.1)$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (3.6), тогда в силу неотрицательности функции g получаем, что

$$\|u\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}}_+;L_{2,+})} + \|u_{xx}\big|_{x=0}\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \|u_0\|_{L_{2,+}}. \quad (4.2)$$

Из (3.6) и (3.8) следует, что для любой положительной константы $\widetilde{c}$

$$\int \bigl[u_{xx}^2(t,x) + bu_x^2(t,x) + \widetilde{c}u^2(t,x) - 2f^*\bigl(u(t,x)\bigr)\bigr]\,dx + (a+\widetilde{c})\int_0^t u_{xx}^2\big|_{x=0}\,d\tau + \\ + \iint\limits_{\Pi_t^+} \bigl[2(gu_{xx} + 2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx} + \widetilde{c}gu^2 - guf(u)\bigr]\,dxd\tau \leqslant \\ \leqslant \int \bigl[(u_0'')^2 + b(u_0')^2 + \widetilde{c}u_0^2 - 2f^*(u_0)\bigr]\,dx. \quad (4.3)$$

Из неравенств (1.10) и (1.12) находим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\Bigl|\int 2(2g'u_x + g''u - bgu)u_{xx}\,dx\Bigr| \leqslant \varepsilon\int gu_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, M)\int gu^2\,dx. \quad (4.4)$$

Далее, положим
$$q = p + 2, \quad s = (q-2)/(8q), \quad \psi_0 \equiv g, \quad \psi_1 \equiv g^{(10-q)/(3q+2)}$$
(очевидно, что эти функции удовлетворяют условиям леммы 1.1). Нетрудно видеть, что
$$\frac{q}{2} - qs = \frac{3q+2}{8}, \quad qs + \frac{10-q}{3q+2}\cdot\frac{3q+2}{8} = 1.$$
Тогда, применяя неравенство (1.13), находим, что
$$\Bigl|\int guf(u)\,dx\Bigr| \leqslant c\int g|u|^q\,dx = c\|u\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\|^q_{L_{q,+}} \leqslant$$
$$\leqslant c(M)\Bigl[\bigl\|\bigl(|u_{xx}|+|u|\bigr)\psi_0^{1/2}\bigr\|^{2qs}_{L_{2,+}}\|u\psi_1^{1/2}\|^{q-2qs}_{L_{2,+}} + \bigl\|u\psi_0^{1/8}\psi_1^{3/8}\bigr\|^{q-2}_{L_{2,+}}\|u\psi_1^{1/2}\|^2_{L_{2,+}}\Bigr]. \quad (4.5)$$
Здесь
$$\int u^2 g^{(10-q)/3q+2)}\,dx = \int (gu^2)^{(10-q)/(3q+2)}\cdot u^{2(4q-8)/(3q+2)}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl(\int gu^2\,dx\Bigr)^{(10-q)/(3q+2)}\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{(4q-8)/(3q+2)}.$$
Тогда
$$\Bigl(\int (u_{xx}^2+u^2)\psi_0\,dx\Bigr)^{(q-2)/8}\Bigl(\int u^2\psi_1\,dx\Bigr)^{(3q+2)/8} \leqslant$$
$$\leqslant \Bigl(\int g(u_{xx}^2+u^2)\,dx\Bigr)^{(q-2)/8}\Bigl(\int gu^2\,dx\Bigr)^{(10-q)/8}\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}.$$
Кроме того,
$$\Bigl(\int u^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int u^2\psi_1\,dx = \Bigl(\int u^2 g^{8/(3q+2)}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int u^2 g^{(10-q)/(3q+2)},$$
где
$$\int u^2 g^{8/(3q+2)}\,dx = \int (gu^2)^{8/(3q+2)}\cdot u^{6(q-2)/(3q+2)}\,dx \leqslant \Bigl(\int gu^2\,dx\Bigr)^{8/(3q+2)}\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{3(q-2)/(3q+2)},$$
и, таким образом, поскольку
$$\frac{8}{3q+2}\cdot\frac{q-2}{2} + \frac{10-q}{3q+2} = 1, \quad \frac{3(q-2)}{3q+2}\cdot\frac{q-2}{2} + \frac{4(q-2)}{3q+2} = \frac{q-2}{2},$$
находим, что
$$\Bigl(\int u^2\psi_0^{1/4}\psi_1^{3/4}\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}\int u^2\psi_1\,dx \leqslant \int gu^2\,dx\Bigl(\int u^2\,dx\Bigr)^{(q-2)/2}.$$
В итоге с учетом уже полученной оценки (4.2) выводим, что, так как $(q-2)/8 < 1$,
$$\Bigl|\int guf(u)\,dx\Bigr| \leqslant \varepsilon\int gu_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, \|u_0\|_{L_{2,+}}, M)\int gu^2\,dx. \quad (4.6)$$
Таким образом, если выбрать $\widetilde{c}$ достаточно большим (зависящим от M, b, $\|u_0\|_{L_{2,+}}$), то из неравенства (4.3) следует, что равномерно по t
$$\int \bigl[u_{xx}^2(t,x) + \widetilde{c}u^2(t,x) - 4f^*\bigl(u(t,x)\bigr)\bigr]\,dx \leqslant c. \quad (4.7)$$
Заметим, что, применяя вместо (3.7) оценку (4.2), полностью аналогично (3.9) находим, что равномерно по t
$$\int \bigl|f^*\bigl(u(t,x)\bigr)\bigr|\,dx \leqslant \varepsilon\int u_{xx}^2\,dx + c(\varepsilon, \|u_0\|_{L_{2,+}}). \quad (4.8)$$
Тогда из неравенств (4.7), (4.8) следует утверждение леммы. □

Лемма 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3. *Тогда для решения* u *задачи* (1.1), (1.2), *принадлежащего пространству* $X_2^\alpha(\Pi_T^+)$ $\forall T > 0$, *существует* $\beta \in (0, \alpha]$ *такое, что*

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}^\beta} \leqslant \|u_0\|_{L_{2,+}^\beta} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4.9}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (3.14) и равенством (3.15). Применяя вместо оценки (3.10) оценку (4.1), находим аналогично (3.16), что для любого $t > 0$

$$\Bigl|\iint\limits_{\Pi_t^+} \bigl(f'(u)u\bigr)^* \rho'\, dx d\tau\Bigr| \leqslant c \sup_{t>0,x>0} |u|^p \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho'\, dx d\tau \leqslant c(\|u_0\|_{H_+^2}, M) \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2 \rho'\, dx d\tau. \tag{4.10}$$

Далее будем считать без ограничения общности, что $\beta \in (0, 1/2]$. Тогда, в частности,

$$|\rho''(x)| \leqslant \rho'(x), \quad 0 \leqslant \rho'''(x) \leqslant 2\rho'(x), \quad \rho^{(5)}(x) \geqslant 0$$

(напомним, что $\rho(x) = (1+x)^{2\beta}$). Применяя неравенство (1.12), находим, что

$$\int \bigl[(3b\rho' - 5\rho''')u_x^2 + (\rho^{(5)} - b\rho''' - a\rho')u^2\bigr]\, dx \geqslant -\int u_{xx}^2 \rho'\, dx - c(a,b) \int u^2\rho'\, dx. \tag{4.11}$$

Поскольку в силу (1.9)

$$2g(x)\rho(x) \geqslant 2c_0\rho'(x)/(2\beta),$$

из неравенств (3.14), (4.10), (4.11) следует, что

$$\int u^2(t,x)\rho(x)\, dx + \left(\frac{2c_0}{2\beta} - c(a,b) - c\bigl(\|u_0\|_{H_+^2}, M\bigr)\right) \iint\limits_{\Pi_t^+} u^2\rho'\, dx d\tau \leqslant \int u_0^2 \rho\, dx,$$

при достаточно малых $\beta > 0$ приходим к неравенству (4.9). □

Дальнейшие рассуждения во многом аналогичны статье [11]. Для любых положительных β, L и ε через $\mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$ обозначим множеством функций $\varphi \in H_{0,+}^2 \cap L_{2,+}^\beta$ таких, что

$$\|\varphi\|_{H_+^2} + \|\varphi\|_{L_{2,+}^\beta} \leqslant L, \quad \|\varphi\|_{L_{2,+}} \geqslant \varepsilon.$$

Лемма 4.3. *Пусть* $g \in W_{\infty,+}^2$ — *неотрицательная функция такая, что*

$$g(x) \geqslant g_0 > 0$$

для $x \in I$, *где* I — *непустой интервал на* $\mathbb{R}_+$, *а для функции* f *выполнены условия теоремы* 1.1.

Тогда для любого $T > 0$ *и любого класса* $\mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$ *существует константа* $c = c(T,\beta,L,\varepsilon)$ *такая, что если* $u_0 \in \mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$, *то для соответствующего решения* u *задачи* (1.1), (1.2) *из пространства* $X_2^\beta(\Pi_T^+)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I} u^2(t,x)\, dxdt \leqslant c \iint\limits_{\Pi_T^+} g(x)u^2(t,x)\, dxdt. \tag{4.12}$$

Доказательство. Предположим, что неравенство (4.12) не выполнено. Пусть $\{u_{0k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon}$ является такой последовательностью начальных функций, что для соответствующих решений $\{u_k(t,x)\}_{k\in\mathbb{N}} \in X_2^\beta(\Pi_T^+)$ справедливо свойство

$$\lim_{k\to+\infty} \iint\limits_{\Pi_T^+} g(x)u_k^2(t,x)\, dxdt \left(\int_0^T \int\limits_{\mathbb{R}_+\setminus I} u_k^2(t,x)\, dxdt\right)^{-1} = 0.$$

В частности, из ограниченности $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L_\infty(0,T;L_{2,+})$ (см. оценку (3.7)) следует, что

$$\lim_{k\to+\infty} \iint\limits_{\Pi_T^+} g(x)u_k^2(t,x)\, dxdt = 0. \tag{4.13}$$

Следовательно, в силу условий на функцию $g(x)$

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_I u_k^2(t,x)\,dxdt=0. \tag{4.14}$$

Так как последовательность $\{u_{0k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена в пространстве $H^2_{0,+}\cap L^\beta_{2,+}$, из теоремы 1.2 следует, что равномерно по k

$$\|u_k\|_{X_2^\beta(\Pi_T^+)}\leqslant c. \tag{4.15}$$

Тогда используя само уравнение (1.1), находим, что для любого $r>0$ равномерно по k

$$\|u_{kt}\|_{L_2(0,T;H^{-1}(0,r))}\leqslant c(r). \tag{4.16}$$

Переходя к подпоследовательности (с сохранением обозначений), стандартным рассуждением получаем, что

$$u_{0k}\rightharpoonup u_0\quad \text{слабо в } H^2_{0,+}\text{ и } L^\beta_{2,+},$$
$$u_k\rightharpoonup u\quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H^2_{0,+})\text{ и } L_\infty(0,T;L^\beta_{2,+}),$$
$$u_k\rightharpoonup u\quad \text{слабо в } L_2(0,T;H^4(0,r))\ \forall r>0,$$
$$u_k\to u\quad \text{сильно в } L_2(0,T;H^3(0,r))\ \forall r>0.$$

Из последнего свойства в сочетании с (4.14) следует, что

$$u(t,x)=0\quad \text{для } t\in(0,T),\ x\in I. \tag{4.17}$$

Пусть $\phi(t,x)$ — произвольная функция такая, что $\phi\in L_2(0,T;H^5_+)$, $\phi_t\in L_2(\Pi_T^+)$,

$$\phi\big|_{t=T}=0,\quad \phi\big|_{x=0}=\phi_x\big|_{x=0}=\phi_{xx}\big|_{x=0}=0.$$

Положим

$$\phi_r(t,x)\equiv\phi(t,x)\eta(r-x)$$

для $r>0$. Тогда для любого k в силу равенства (1.8)

$$\iint_{\Pi_T^+}\Big(u_k\big(\phi_{rt}-\phi_{rxxxxx}+b\phi_{rxxx}+a\phi_{rx}-g(x)\phi_r\big)+f(u_k)\phi_{rx}\Big)\,dxdt+\int u_{0k}\phi_r\big|_{t=0}\,dx=0. \tag{4.18}$$

Заметим, что при $k\to+\infty$

$$\iint_{\Pi_T^+}\big|f(u_k)-f(u)\big|\cdot|\phi_{rx}|\,dxdt\leqslant c\sup_{k\in\mathbb{N}}\operatorname*{ess\,sup}_{(t,x)\in\Pi_T^+}|u_k(t,x)|^p\iint_{\Pi_T^+}|u_k-u|\cdot|\phi_{rx}|\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant c_1\sup_{k\in\mathbb{N}}\|u_k\|^p_{L_\infty(0,T;H^2_+)}\|u_k-u\|_{L_2((0,T)\times(0,r))}\|\phi\|_{L_2(0,T;H^1_+)}\to 0.$$

Поэтому переходя к пределу сначала при $k\to+\infty$ (и принимая во внимание (4.13)), а потом при $r\to+\infty$, получаем равенство

$$\iint_{\Pi_T^+}\Big(u\big(\phi_t-\phi_{xxxxx}+b\phi_{xxx}+a\phi_x\big)+f(u)\phi_x\Big)\,dxdt+\int u_0\phi\big|_{t=0}\,dx=0, \tag{4.19}$$

а это означает, что функция $u(t,x)$ является слабым решением в смысле определения 1.1 задачи (1.1), (1.2) при $g\equiv 0$.

Заметим, что так как $u\in L_\infty(0,T;H^2_{0,+})$, то u лежит в классе единственности, поэтому $u\in X_2^\beta(\Pi_T^+)$ согласно теореме 1.2. В частности, $u,u_x\in L_\infty(\Pi_T^+)$, $u\in L_2(0,T;H^4(0,r))$ для любого $r>0$. Следовательно, можно применить результаты [9, теорема 1] о единственности продолжения слабых решений уравнения (1.1). Согласно этим результатам из свойства (4.17) следует, что

$$u(t,x)=0\quad\forall\ (t,x)\in\Pi_T^+. \tag{4.20}$$

В частности,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_0^r u_k^2(t,x)\,dxdt=0\quad\forall\ r>1. \tag{4.21}$$

Теперь покажем, что

$$\lim_{k\to+\infty}\iint_{\Pi_T^+} u_k^2(t,x)\,dxdt=0. \tag{4.22}$$

Действительно,

$$\iint_{\Pi_T^+} u_k^2\,dxdt=\int_0^T\int_0^r u_k^2\,dxdt+\int_0^T\int_r^{+\infty} u_k^2\,dxdt,$$

где равномерно по k в соответствии с (4.15)

$$\sup_{t\in(0,T)}\int_r^{+\infty} u_k^2\,dx\leqslant cr^{-2\beta}. \tag{4.23}$$

Очевидно, что свойство (4.22) следует из (4.21) и (4.23).

С другой стороны, поскольку согласно (3.6)

$$\|u_k(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}\leqslant\|u_{0k}\|_{L_{2,+}}, \tag{4.24}$$

то

$$\begin{aligned}\int\left(u_k(t,x)-u_{0k}(x)\right)^2\,dx&\leqslant 2\int\left(u_{0k}(x)-u_k(t,x)\right)u_{0k}(x)\,dx=\\&=2\int\left(u_{0k}(x)-u_k(t,x)\right)u_{0k}(x)\eta(r+1-x)\,dx+2\int\left(u_{0k}(x)-u_k(t,x)\right)u_{0k}(x)\eta(x-r)\,dx,\end{aligned} \tag{4.25}$$

где

$$2\left|\int\left(u_{0k}(x)-u_k(t,x)\right)u_{0k}(x)\eta(x-r)\,dx\right|\leqslant 4\|u_{0k}\|_{L_{2,+}}\|u_{0k}\|_{L_2(r,+\infty)}\leqslant 4r^{-\beta}L^2. \tag{4.26}$$

Далее, в соответствии с (4.16)

$$\begin{aligned}2\left|\int\left(u_{0k}(x)-u_k(t,x)\right)u_{0k}(x)\eta(r+1-x)\,dx\right|&\leqslant\\&\leqslant 2\int_0^t\|u_{k\tau}(\tau,\cdot)\|_{H^{-1}(0,r+1)}\,d\tau\|u_{0k}\|_{H_+^1}\leqslant c(r,L)t^{1/2}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Из неравенств (4.25)–(4.27) следует, что

$$\|u_k(t,\cdot)-u_{0k}\|^2_{L_{2,+}}\leqslant 4r^{-\beta}L^2+c(r,L)t^{1/2}. \tag{4.28}$$

Выберем r так, чтобы $4r^{-\beta}L^2\leqslant\varepsilon^2/4$, и $t_0\in(0,T]$ так, чтобы $c(r,L)t_0^{1/2}\leqslant\varepsilon^2/4$. Тогда из неравенства (4.28) находим, что для $t\in[0,t_0]$ справедливо неравенство

$$\|u_k(t,\cdot)\|^2_{L_{2,+}}\geqslant\|u_{0k}\|^2_{L_{2,+}}-\frac{\varepsilon^2}{2}\geqslant\frac{\varepsilon^2}{2}$$

и, следовательно,

$$\iint_{\Pi_T^+} u_k^2(t,x)\,dxdt\geqslant t_0\frac{\varepsilon^2}{2},$$

что противоречит (4.22). □

Теперь можно перейти к доказательству основного результата этого раздела.

Доказательство теоремы 1.3. Предположим, что свойство (1.11) не справедливо. Это означает, что

$$\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}} \geqslant \varepsilon \quad \forall t \geqslant 0$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Из лемм 4.1 и 4.2 следует, что

$$u(t,\cdot) \in \mathcal{F}_+^{\beta,L,\varepsilon} \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4.29}$$

для некоторых $L > 0$ и $\beta \in (0,\alpha]$.

Зафиксируем произвольные $T > 0$ и $r > 0$. Пусть $I = (0,r)$, тогда

$$g(x) \geqslant g_0 = c_0(1+r)^{-1}$$

для любого $x \in I$. Из равенства (3.6) следует, что

$$\int u^2(T,x)\,dx + 2g_0 \int_0^T\int_0^r u^2\,dxd\tau \leqslant \int u_0^2\,dx$$

и, следовательно,

$$\iint_{\Pi_T^+} u^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2g_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)\,dx + \int_0^T\int_r^{+\infty} u^2\,dxdt.$$

Применяя (4.12), выводим из последнего неравенства, что

$$\iint_{\Pi_T^+} u^2\,dxdt \leqslant \frac{1}{2g_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)\,dx + c\iint_{\Pi_T^+} g(x)u^2\,dxdt.$$

Опять применим равенство (3.6) (из которого, в частности, следует невозрастание функции $\|u(t,\cdot)\|_{L_{2,+}}$), тогда

$$T\int u^2(T,x)\,dx \leqslant \frac{1}{2g_0}\int u_0^2\,dx - \frac{1}{2g_0}\int u^2(T,x)\,dx + \frac{c}{2}\left(\int u_0^2\,dx - \int u^2(T,x)\,dx\right).$$

В итоге получаем неравенство

$$\left(T + \frac{1}{2g_0} + \frac{c}{2}\right)\int u^2(T,x)\,dx \leqslant \left(\frac{1}{2g_0} + \frac{c}{2}\right)\int u_0^2\,dx,$$

которое эквивалентно неравенству

$$\|u(T,\cdot)\|_{L_{2,+}} \leqslant \gamma\|u_0\|_{L_{2,+}}$$

для некоторого $\gamma = \gamma(T,r,L,\beta,\varepsilon) \in (0,1)$. Тогда для любого натурального n в силу (4.29)

$$\|u(nT,\cdot)\|_{L_{2,+}} \leqslant \gamma^n\|u_0\|_{L_{2,+}},$$

что противоречит (4.29). □ □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильичев А. Т.* О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией// Тр. МИАН. — 1989. — *186*. — С. 222–226.
2. *Кувшинов Р. В., Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары// Дифф. уравн. — 2009. — *45*, № 3. — С. 391–402.
3. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом// Прикл. мат. мех. — 1988. — *52*, № 2. — С. 230–234.
4. *Наумкин П. И.* Оценки убывания решений задачи Коши для модифицированного уравнения Кавахары// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 5. — С. 72–108.
5. *Опритова М. А., Фаминский А. В.* О начально-краевой задаче в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары// Укр. мат. вiсн. — 2014. — *11*, № 3. — С. 312–339.
6. *Опритова М. А., Фаминский А. В.* Об убывании при больших временах решений начально-краевой задачи на полуоси для обобщенного уравнения Кавахары// Вестн. Тамб. гос. ун-та. — 2015. — *20*, № 5. — С. 1331–1337.

7. *Сангаре К.* Смешанная задача в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары в пространстве бесконечно дифференцируемых экспоненциально убывающих функций// Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. мат. — 2003. — *10*, № 1. — С. 91–107.
8. *Сангаре К., Фаминский А. В.* Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обобщенного уравнения Кавахары// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 1. — С. 98–109.
9. *Шананин Н. А.* О частичной квазианалитичности обобщенных решений слабо нелинейных дифференциальных уравнений со взвешенными производными// Мат. заметки. — 2000. — *68*, № 4. — С. 608–619.
10. *Araruna F. D., Capisrano-Filho R. A., Doronin G. G.* Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain// J. Math. Anal. Appl. — 2012. — *385*, № 2. — С. 743–756.
11. *Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Faminskii A., Natali F.* Decay of solutions to damped Korteweg—de Vries equation// Appl. Math. Optim. — 2012. — *65*. — С. 221–251.
12. *Cavalcanti M., Kwak Ch.* The initial-boundary value problem for the Kawahara equation on the half-line// ArXiv. — 2018. — 180505229v2.
13. *Chen W., Guo Z.* Global well-posedness and I-method for the fifth-order Korteweg—de Vries equation// J. Anal. Math. — 2011. — *114*, № 1. — С. 121–156.
14. *Doronin G. G., Larkin N. A.* Quarter-plane problem for the Kawahara equation// Pac. J. Appl. Math. — 2008. — *1*, № 3. — С. 151–176.
15. *Doronin G. G., Natali F.* Exponential decay for a locally damped fifth-order equation posed on a line// Nonlinear Anal., Real World Appl. — 2016. — *30*. — С. 59–72.
16. *Faminskii A. V., Larkin N. A.* Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval// Electron. J. Differ. Equ. — 2010. — № 1. — С. 1–20.
17. *Faminskii A. V., Martynov E. V.* Large-time decay of solutions to the damped Kawahara equation posed on a half-line// В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics». — Принято к печати.
18. *Kawahara T.* Oscillatory solitary waves in dispersive media// J. Phys. Soc. Jpn. — 1972. — *33*, № 1. — С. 260–264.
19. *Kichenassamy S., Olver P. J.* Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations// SIAM J. Math. Anal. — 1992. — *23*, № 5. — С. 1141–1166.
20. *Larkin N. A., Simoes M.* The Kawahara equation on bounded intervals and on a half-line// Nonlinear Anal. — 2015. — *127*. — С. 397–412.
21. *Linares F., Pazoto A. F.* Asymptotic behavior of the Korteweg—de Vries equation posed in a quarter plane// J. Differ. Equ. — 2009. — *246*. — С. 1342–1353.
22. *Pazoto A. F., Rosier R.* Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2010. — *14*. — С. 1511–1535.
23. *Tao S. P., Cui S. B.* Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equation// Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). — 2005. — *21*, № 5. — С. 1035–1044.
24. *Vasconcellos C. F., da Silva P. N.* Stabilization of the Kawahara equation with localized damping// ESAIM Control. Optim. Calc. Var. — 2011. — *17*. — С. 102–116.

А. В. Фаминский
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `afaminskii@sci.pfu.edu.ru`

Е. В. Мартынов
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `e.martynov@inbox.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-683-699 UDC 517.958

On Initial-Boundary Value Problem on Semiaxis for Generalized Kawahara Equation

© 2019 **A. V. Faminskii, E. V. Martynov**

Abstract. In this paper, we consider initial-boundary value problem on semiaxis for generalized Kawahara equation with higher-order nonlinearity. We obtain the result on existence and uniqueness of the global solution. Also, if the equation contains the absorbing term vanishing at infinity, we prove that the solution decays at large time values.

REFERENCES

1. A. T. Il'ichev, "O svoystvakh odnogo nelineynogo evolyutsionnogo uravneniya pyatogo poryadka, opisyvayushchego volnovye protsessy v sredakh so slaboy dispersiey" [On the properties of one fifth-order nonlinear evolution equation describing wave processes in media with weak dispersion], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1989, **186**, 222–226 (in Russian).
2. R. V. Kuvshinov and A. V. Faminskiy, "Smeshannaya zadacha v polupolose dlya uravneniya Kavakhary" [Mixed problem in a half-strip for the Kawahara equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2009, **45**, No. 3, 391–402 (in Russian).
3. A. V. Marchenko, "O dlinnykh volnakh v melkoy zhidkosti pod ledyanym pokrovom" [On long waves in shallow water under the ice cover], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1988, **52**, No. 2, 230–234 (in Russian).
4. P. I. Naumkin, "Otsenki ubyvaniya resheniy zadachi Koshi dlya modifitsirovannogo uravneniya Kavakhary" [Estimates of decreasing for solutions of the Cauchy problem for the modified Kawahara equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 5, 72–108 (in Russian).
5. M. A. Opritova and A. V. Faminskiy, "O nachal'no-kraevoy zadache v polupolose dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary" [On the initial-boundary value problem in a half-strip for generalized Kawahara equation], *Ukr. mat. visn.* [Ukr. Math. Bull.], 2014, **11**, No. 3, 312–339 (in Russian).
6. M. A. Opritova and A. V. Faminskiy, "Ob ubyvanii pri bol'shikh vremenakh resheniy nachal'no-kraevoy zadachi na poluosi dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary" [On decreasing for large time values of solutions of the initial-boundary value problem for the generalized Kawahara equation in a half-strip], *Vestn. Tamb. gos. un-ta* [Bull. Tambov State Univ.], 2015, **20**, No. 5, 1331–1337 (in Russian).
7. K. Sangare, "Smeshannaya zadacha v polupolose dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary v prostranstve beskonechno differentsiruemykh eksponentsial'no ubyvayushchikh funktsiy" [Mixed problem in a half-strip for the generalized Kawahara equation in the space of infinitely differentiable exponentially decreasing functions], *Vestn. Ros. un-ta druzhby narodov. Ser. mat.* [Bull. Peoples' Friendship Univ. Russ. Ser. Math.], 2003, **10**, No. 1, 91–107 (in Russian).
8. K. Sangare and A. V. Faminskiy, "Slabye resheniya smeshannoy zadachi v polupolose dlya obobshchennogo uravneniya Kavakhary" [Weak solutions of mixed problem for the generalized Kawahara equation in a half-strip], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **85**, No. 1, 98–109 (in Russian).
9. N. A. Shananin, "O chastichnoy kvazianalitichnosti obobshchennykh resheniy slabo nelineynykh differentsial'nykh uravneniy so vzveshennymi proizvodnymi" [On partial quasianalyticity of generalized solutions of weakly nonlinear differential equations with weighted derivatives], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2000, **68**, No. 4, 608–619 (in Russian).
10. F. D. Araruna, R. A. Capisrano-Filho, and G. G. Doronin, "Energy decay for the modified Kawahara equation posed in a bounded domain," *J. Math. Anal. Appl.*, 2012, **385**, No. 2, 743–756.
11. M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, A. Faminskii, and F. Natali, "Decay of solutions to damped Korteweg—de Vries equation," *Appl. Math. Optim.*, 2012, **65**, 221–251.
12. M. Cavalcanti and Ch. Kwak, "The initial-boundary value problem for the Kawahara equation on the half-line," *ArXiv*, 2018, 180505229v2.
13. W. Chen and Z. Guo, "Global well-posedness and I-method for the fifth-order Korteweg—de Vries equation," *J. Anal. Math.*, 2011, **114**, No. 1, 121–156.
14. G. G. Doronin and N. A. Larkin, "Quarter-plane problem for the Kawahara equation," *Pac. J. Appl. Math.*, 2008, **1**, No. 3, 151–176.

15. G. G. Doronin and F. Natali, “Exponential decay for a locally damped fifth-order equation posed on a line,” *Nonlinear Anal., Real World Appl.*, 2016, **30**, 59–72.
16. A. V. Faminskii and N. A. Larkin, “Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed on a bounded interval,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2010, No. 1, 1–20.
17. A. V. Faminskii and E. V. Martynov, “Large-time decay of solutions to the damped Kawahara equation posed on a half-line,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, to be published.
18. T. Kawahara, “Oscillatory solitary waves in dispersive media,” *J. Phys. Soc. Jpn.*, 1972, **33**, No. 1, 260–264.
19. S. Kichenassamy and P. J. Olver, “Existence and nonexistence of solitary wave solutions to higher-order model evolution equations,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, **23**, No. 5, 1141–1166.
20. N. A. Larkin and M. Simoes, “The Kawahara equation on bounded intervals and on a half-line,” *Nonlinear Anal.*, 2015, **127**, 397–412.
21. F. Linares and A. F. Pazoto, “Asymptotic behavior of the Korteweg—de Vries equation posed in a quarter plane,” *J. Differ. Equ.*, 2009, **246**, 1342–1353.
22. A. F. Pazoto and R. Rosier, “Uniform stabilization in weighted Sobolev spaces for the KdV equation posed on the half-line,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2010, **14**, 1511–1535.
23. S. P. Tao and S. B. Cui, “Local and global existence of solutions to initial value problems of modified nonlinear Kawahara equation,” *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2005, **21**, No. 5, 1035–1044.
24. C. F. Vasconcellos and P. N. da Silva, “Stabilization of the Kawahara equation with localized damping,” *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.*, 2011, **17**, 102–116.

A. V. Faminskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: afaminskii@sci.pfu.edu.ru

E. V. Martynov
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: e.martynov@inbox.ru