Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 655–671

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-655-671 УДК 517.929

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2019 г. **Д. А. НЕВЕРОВА**

Аннотация. Данная статья посвящена изучению качественных свойств решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Ранее были получены результаты о существовании обобщенных решений рассматриваемых задач и доказано, что гладкость этих решений сохраняется в некоторых подобластях, но может нарушаться на их границах даже для бесконечно гладкой функции правой части. Для случая дифференциально-разностных уравнений, рассматриваемых на отрезке, с непрерывными правыми частями и краевыми условиями первого, второго и третьего рода автором были получены условия на коэффициенты разностных операторов, при выполнении которых существует классическое решение задачи, совпадающее с обобщенным. Кроме того, для задачи Дирихле для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения получены необходимые и достаточные условия сохранения гладкости обобщенного решения в пространствах Гельдера на границе соседних подобластей. Гладкость решений внутри некоторых подобластей за исключением ε-окрестностей угловых точек была также доказана ранее. Однако проблема гладкости обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений оставалась неисследованной.

В данной работе для того, чтобы повысить в шкале пространств Соболева гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения внутри подобластей, применен подход, использующий метод аппроксимации оператора дифференцирования конечноразностными операторами и доказана соответствующая теорема.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение 655
2. Геометрические вопросы 656
3. Разностные операторы 658
4. Обобщенные и классические решения 661
5. Гладкость обобщенных решений вблизи границ подобластей в шкале пространств W_2^k . 662
Список литературы 668

1. Введение

Общей теории функционально-дифференциальных уравнений посвящен целый ряд монографий, среди которых широко известны работы А. Д. Мышкиса [11], Р. Беллмана и К. Кука [2], Дж. Хейла [24]. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения рассматривались в работах Ф. Хартмана и Г. Стампакья [26], А. Б. Антоневича [1], В. С. Рабиновича [17] и др.

Интерес к изучению функционально-дифференциальных уравнений связан с их приложениями в теории многослойных пластин и оболочек [13,29], в нелинейной оптике [4], в теории многомерных диффузионных процессов [32], в теории нелокальных эллиптических задач [3, 22], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [9] и др.

Общая теория краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах [18, 22, 32]. Систематическое исследование широкого класса эволюционных функционально-дифференциальных уравнений методами спектральной теории содержится в работах [5–7].

В работе [32] для краевых задач для дифференциально-разностных уравнений были получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной, фредгольмовой и нетеровой разрешимости в пространствах Соболева, а также изучена гладкость обобщенных решений. В частности, было показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться внутри области даже при бесконечно дифференцируемых правых частях уравнений и сохраняется лишь в некоторых подобластях.

Исследования теории краевых задач для дифференциально-разностных уравнений, такие как спектральная асимптотика, операторы с вырождением, краевые задачи для параболического уравнения со сдвигом по пространственным переменным, нашли свое продолжение в работах [15, 16, 19, 20, 23, 25].

Результаты о существования классического решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с непрерывной правой частью, изучение гладкости обобщенных решений краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения с правой частью из пространств Гельдера приведены в работах [12, 27, 28].

В настоящей работе изучается гладкость обобщенных решений в подобластях в шкале пространств Соболева второй и третьей краевых задач для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения.

Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ijQ}u_{x_j})_{x_i}=f(x)\qquad (x\in Q\subset\mathbb{R}^n) \tag{1.1}$$

с краевым условием

$$\sum_{i,j=1}^{n}R_{ijQ}u_{x_j}\cos(\nu,x_i)+\sigma(x)u=0\qquad (x\in\partial Q), \tag{1.2}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к ∂Q, $\sigma\in C^k(\partial Q)$ — неотрицательная вещественнозначная функция; операторы R_{ijQ} определены по формуле

$$R_{ijQ}=P_QR_{ij}I_Q:L_2(Q)\to L_2(Q);$$

$I_Q\colon L_2(Q)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n\setminus Q$; $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q; $R_{ij}:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ — разностные операторы вида

$$(R_{ij}u)(x)=\sum_{h\in\mathcal{M}}a_{ijh}u(x+h)\quad (i,j=1,\dots,n), \tag{1.3}$$

где a_{ijh} — вещественные числа; $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами.

2. Геометрические вопросы

В этом разделе мы рассмотрим свойства разностных операторов. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти в [32, гл. 2].

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. *Пусть $Q\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q=\bigcup_i\overline{X}_i$ $(i=1,\dots,N_1)$, где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n\geqslant 2$. При этом в окрестности каждой точки $x^0\in\partial Q\setminus\bigcup_i X_i$ область Q диффеоморфна n-мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.*

В частности, $Q\subset\mathbb{R}^n$ может быть ограниченной областью с границей $\partial Q\in C^\infty$, а также цилиндром $(0,d)\times G$ или прямоугольником, где $G\subset\mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G\in C^\infty$, если $n\geqslant 3$).

Пусть $\mathcal{M}\subset\mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q\setminus\bigcup_{h\in M}(\partial Q+h)$.

Определение 2.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r $(r = 1, 2, \dots)$ назовем *разбиением области* Q.

Заметим, что множество $\mathcal{R}$ не более, чем счетно.

Лемма 2.1. $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \left(\bigcup\limits_{h\in M} (\partial Q + h)\right) \bigcap \overline{Q}$.

Лемма 2.2.

1. $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$.
2. *Для любых* Q_{r_1} *и* $h \in M$ *либо найдется такое* Q_{r_2}, *что* $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, *либо* $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.

Разбиение $\mathcal{R}$ естественным образом распадается на классы. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, \dots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и

$$N(s) \leqslant ([\mathrm{diam}\ Q] + 1)^n.$$

Введем множество $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}. \tag{2.1}$$

Из определения множества $\mathcal{K}$ следуют следующие леммы.

Лемма 2.3. *Пусть* $x^0 \in \partial Q \cap \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Лемма 2.4. *Пусть* $x^0 \in \bigcap\limits_i \partial Q_{s_i l_i}$ *и* $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ *при* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Будем считать, что выполнено

Условие 2.2.

$$\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0,$$

где $\mu_{n-1}(\cdot)$ — *мера Лебега в* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Обозначим через Γ_p компоненты связности открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$.

Лемма 2.5. *Если*

$$(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$$

при некотором $h \in M$, *то либо* $\Gamma_p + h \subset Q$, *либо существует* $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ *такое, что* $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.

В силу леммы 2.5 мы можем следующим образом разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q},\ p = 1, 2, \dots,\ h \in M\}$ на классы. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1. существует $h \in M$ такое, что
$$\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h,$$
2. в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$, направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать только одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более, чем двум классам. Будем обозначать множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \dots$ — номер класса, j — номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q, \quad \Gamma_{r,J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q \quad (0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)).$$

Лемма 2.6. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ *существует подобласть* Q_{sl} *такая, что* $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$, *если* $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Лемма 2.7. *Для любого* $r = 1, 2, \ldots$ *существует единственное* $s = s(r)$ *такое, что* $N(s) = J(r)$, *и при этом подобласти* s*-го класса* Q_{sl} *можно перенумеровать так, что* $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \ldots, N(s))$.

Лемма 2.8. *Для любого* $\Gamma_{rj} \subset Q$ *существуют подобласти* $Q_{s_1 l_1}$ *и* $Q_{s_2 l_2}$ *такие, что* $Q_{s_1 l_1} \neq Q_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$ *и при этом* $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3 l_3} = \varnothing$, *если* $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

Пример 2.1. Рассмотрим случай прямоугольника

$$Q = (0, 2) \times (0, 1), \quad \mathcal{M} = \{(1, 0)\}.$$

Разобьем прямоугольник Q на подобласти. В этом примере разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей

$$Q_1 = Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1), \quad Q_2 = Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$$

(см. рис. 1). Легко видеть, что

$$\mathcal{K} = \{(0, 0); (1, 0); (2, 0); (0, 1); (1, 1); (2, 1)\}.$$

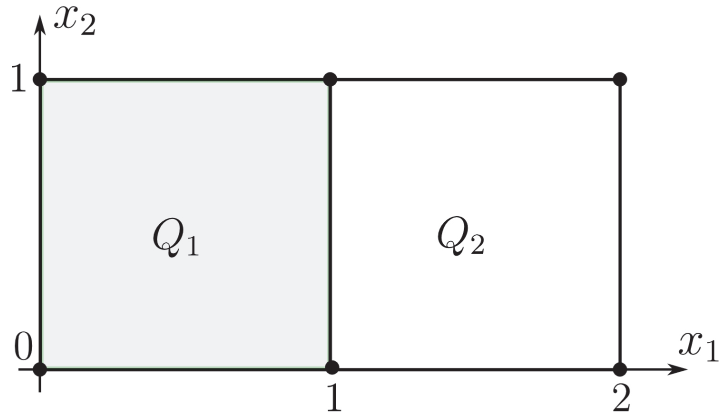

Рис. 1. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примере 2.1. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

Пример 2.2. Пусть область $Q \subset \mathbb{R}^2$ вне окружностей $S_{1/3}((1/3, 1/3))$, $S_{1/3}((1, 1))$ совпадает с границами квадрата $(0, 4/3) \times (0, 4/3)$, а множество $\mathcal{M} = \{(1, 1)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$, состоящее из двух классов, классы границ и множество

$$\mathcal{K} = \{(1/3, 0), (4/3, 1), (0, 1/3), (1, 4/3)\}$$

изображены на рис. 2.

Пример 2.3. Рассмотрим случай, когда множество Q представляет собой единичный круг

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}, \quad \mathcal{M} = \{(1, 0)\}.$$

Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из семи точек:

$$\mathcal{K} = \{(0, 0),\ (1, 0),\ (-1, 0),\ (-1/2, -\sqrt{3}/2),\ (-1/2, \sqrt{3}/2),\ (1/2, -\sqrt{3}/2),\ (1/2, \sqrt{3}/2)\}.$$

Разбиение $\mathcal{R}$ области Q и классы границ, а также множество $\mathcal{K}$ представлены на рис. 3.

3. Разностные операторы

Введенные по формуле (1.3), разностные операторы R_{ij} действуют во всем $\mathbb{R}^n$, чтобы рассмотреть их в области Q, введем линейные операторы I_Q, P_Q, R_{ijQ}. Оператор $I_Q \colon L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ является оператором продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, оператор $P_Q \colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q, операторы $R_{ijQ} \colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ определены по формулам $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q$, соответственно.

Лемма 3.1. *Операторы* $R_{ij} \colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ *и* $R_{ijQ} \colon L_2(Q) \to L_2(Q)$ *являются ограниченными.*

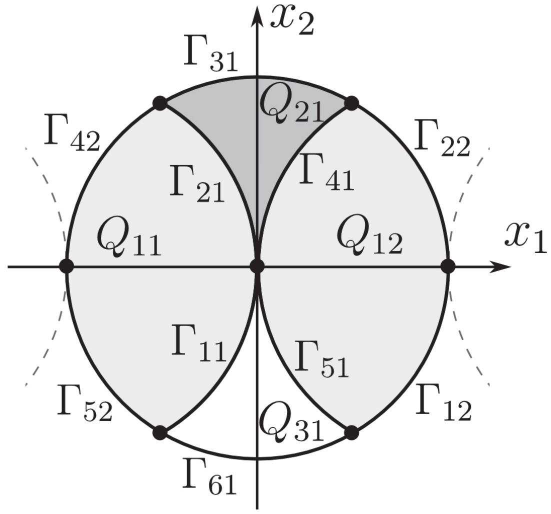

Рис. 2. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примере 2.2. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

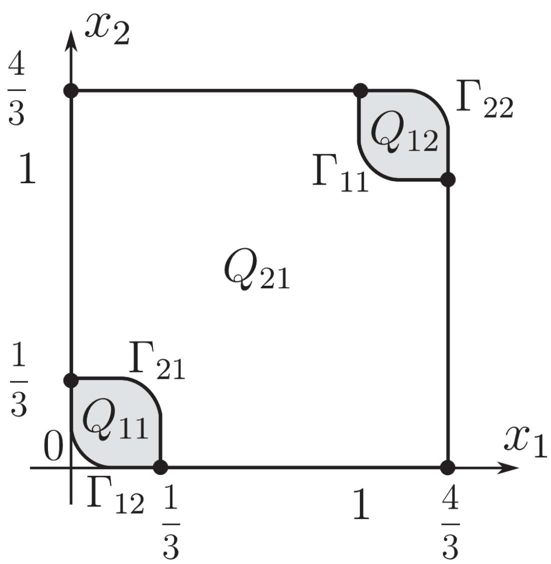

Рис. 3. Область Q и ее разбиения, рассмотренные в примере 2.3. Элементы множества $\mathcal{K}$ выделены точками.

Далее мы рассмотрим некоторые свойства разностных операторов R_{ijQ} в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из коэффициентов разностного оператора и нулей.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$, а через $P_s\colon L_2(Q) \to L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right), \tag{3.1}$$

где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 3.2. $L_2\left(\bigcup\limits_l Q_{sl}\right)$ — *инвариантное подпространство операторов* R_{ijQ}.

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s \colon L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \to L_2^N(Q_{s1}), \tag{3.2}$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ равенством

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{3.3}$$

где $l = 1, \ldots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = \bar{0})$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{sl})$.

Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}, \end{cases} \tag{3.4}$$

Лемма 3.3. *Операторы $R_{ijQs} \colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, определенные по формуле*

$$R_{ijQs} = U_s R_{ijQ} U_s^{-1}, \tag{3.5}$$

являются операторами умножения на квадратные матрицы R_{ijs} соответственно.

Замечание 3.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_{ijs} состоят из конечного множества чисел a_{ijh} и нулей, то множество различных матриц конечно (см. [31]).

Введем блочную матрицу R_s вида

$$R_s = \|R_{ijs}\|_{i,j=1}^n.$$

Условие 3.1. *Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию* **(SE)***, если матрицы $R_s + R_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots)$ положительно определены. Здесь матрица R_s^* является сопряженной к R_s.*

Поэтому если уравнение (1.1) удовлетворяет условию **(SE)**, то существует константа $c > 0$ такая, что для всех $s = 1, 2, \ldots$ и всех $Y \in \mathbb{C}^{nN(s)}$

$$\operatorname{Re}(R_s Y, Y) \geqslant c(Y, Y),$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^{nN(s)}$.

Всюду далее мы будем считать, что дифференциально-разностное уравнение (1.1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Определение 3.1. Краевую задачу (1.1)-(1.2) будем называть *второй краевой задачей* для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения, если $\sigma(x) \equiv 0$ $(x \in \partial Q)$, и *третьей краевой задачей*, если $\sigma(x) \not\equiv 0$ $(x \in \partial Q)$.

Обозначим через $W_2^k(Q)$ пространство Соболева комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q)$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q)$. В пространстве $W_2^k(Q)$ вводится скалярное произведение по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q D^\alpha u(x) D^\alpha \overline{v} dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}, \quad D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Обозначим через $\mathring{W}_2^k(Q)$ замыкание пространства $\dot{C}^\infty(Q)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в пространстве $W_2^k(Q)$.

Обозначим $W_{2,loc}^k(Q)$ $(k > 0)$ пространство комплекснозначных функций, состоящее из функций, принадлежащих $L_2(Q')$ и имеющих все обобщенные производные до k-го порядка из $L_2(Q')$, где Q' — произвольная внутренняя подобласть области Q, т. е. $Q' \Subset Q$.

Лемма 3.4. *Операторы* R_{ijQ} *непрерывно отображают пространство* $\mathring{W}_2^k(Q)$ *в пространство* $W_2^k(Q)$. *Если* $u \in \mathring{W}_2^k(Q)$, *то*

$$D^\alpha R_{ijQ} u = R_{ijQ} D^\alpha u \quad (|\alpha| \leqslant k).$$

Введем полуторалинейную форму $a_R[u,v]$ в $L_2(Q)$ с областью определения $D(a_R) = W_2^1(Q)$ по формуле

$$a_R[u,v] = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma u, v)_{L_2(\partial Q)}, \tag{3.6}$$

где

$$(\sigma u, v)_{L_2(\partial Q)} = ((\sigma u)|_{\partial Q}, v|_{\partial Q})_{L_2(\partial Q)}.$$

Всюду далее через $(f,g)_{L_2(\partial Q)}$ будем обозначать скалярное произведение следов функций f, g, т. е.

$$(f,g)_{L_2(\partial Q)} = (f|_{\partial Q}, g|_{\partial Q})_{L_2(\partial Q)}.$$

Из [8, лемма 1, §13, гл. II] получим следующий результат.

Лемма 3.5. *Пусть выполнено условие* **(SE)**. *Тогда существуют постоянные* $c_1, c_2 > 0$ *такие, что*

$$|a_R[u,v]| \leqslant c_1 \|u\|_{W_2^1(Q)} \|v\|_{W_2^1(Q)} \quad (u, v \in W_2^1(Q)), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{Re} a_R[u,u] \geqslant c_2 |u|^2_{W_2^1(Q)} \quad (u \in W_2^1(Q)), \tag{3.8}$$

где

$$|u|^2_{W_2^1(Q)} = \int\limits_Q |\bigtriangledown u(x)|^2 dx \tag{3.9}$$

задает квадрат полунормы функции $u \in W_2^1(Q)$. *Данная полунорма в случае третьей краевой задачи* $|u|^2_{W_2^1(Q)}$ *является эквивалентной нормой функции* $u \in W_2^1(Q)$.

Из неравенств (3.7)–(3.9) и [9, теорема 1.11, §1, гл. VI] следует, что форма $a_R[u,v]$ $(u, v \in W_2^1(Q))$ является плотно определенной, замкнутой, секториальной полуторалинейной формой в $L_2(Q)$. Поэтому в силу [9, теорема 2.1, §2, гл. VI] существует m-секториальный оператор $A_R : L_2(Q) \subset D(A_R) \to L_2(Q)$ такой, что $D(A_R) \subset D(a_R) = W_2^1(Q)$ и

$$a_R[u,v] = (A_R u, v)_{L_2(Q)} \quad (u \in D(A_R), v \in D(a_R)). \tag{3.10}$$

Отсюда и из леммы 3.5 вытекает

Лемма 3.6. *Пусть выполнено условие* **(SE)**. *Тогда в случае второй краевой задачи для любого* $c_3 > 0$ *существует* $c_4 > 0$ *такое, что*

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} + c_3 \|u\|^2_{L_2(Q)} \geqslant c_4 \|u\|^2_{W_2^1(Q)} \quad (u \in D(A_R))), \tag{3.11}$$

а в случае третьей краевой задачи существует $c_5 > 0$ *такое, что*

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_5 \|u\|^2_{W_2^1(Q)} \quad (u \in D(A_R)). \tag{3.12}$$

4. Обобщенные и классические решения

Введем пространство $C^k(\overline{Q})$ как множество непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\overline{Q}$ с нормой

$$\|u\|_{C^k(\overline{Q})} = \max_{0 \leqslant |\beta| \leqslant k} \sup_{x \in \overline{Q}} |D^\beta u(x)|. \tag{4.1}$$

Определение 4.1. Функцию u будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (1.1)-(1.2), если $u \in W_2^1(Q)$ и для всех $v \in W_2^1(Q)$

$$a_R[u,v] = (f,v)_{L_2(Q)}. \tag{4.2}$$

Используя методы, изложенные в [10, гл. IV, §1] можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда вторая краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_Q f(x)dx = 0. \tag{4.3}$$

При этом существует единственное обобщенное решение $u(x)$ *такое, что*

$$\int\limits_Q u(x)dx = 0.$$

Всякое другое решение имеет вид

$$\tilde{u}(x) = u(x) + c,$$

где c — *некоторая константа.*

Обобщенное решение третьей краевой задачи существует и единственно для любой $f \in L_2(Q)$.

Приведенная теорема доказана в [23].

Определение 4.2. Функцию $u \in C^2(Q) \bigcap C^1(\overline{Q})$ назовем *классическим решением* краевой задачи (1.1)-(1.2), если $R_{ijQ}u_{x_j} \in C^1(\overline{Q})$ $(i, j = 1, \dots, n)$ и $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1) для всех $x \in Q$ и краевому условию (1.2) на ∂Q.

Из определений 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.2. *Пусть* $u(x)$ — *классическое решение задачи* (1.1)-(1.2), *и пусть* $u \in C^1(\overline{Q})$ *и* $R_{ijQ}u_{x_j} \in C^1(\overline{Q})$. *Тогда* $u(x)$ *является обобщенным решением задачи* (1.1)-(1.2).

5. Гладкость обобщенных решений вблизи границ подобластей в шкале пространств W_2^k

В данном разделе мы изучим гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений внутри подобластей Q_{sl} и вблизи их границ. Данный результат приблизит нас к ответу на вопрос об условиях существования классического решения краевой задачи (1.1)-(1.2).

Всюду в дальнейшем при рассмотрении второй краевой задачи условие ее разрешимости (4.3) будем считать выполненным. Ниже приведем некоторые результаты, которые понадобятся нам для доказательства теоремы о гладкости.

Теорема 5.1. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2) *и ее правая часть* $f \in L_2(Q) \bigcap W^k_{2,loc}(Q_{sl})$ $(s = p, q;\ l = 1, \dots, N(s))$. *Тогда* $u \in W^{k+2}_{2,loc}(Q_{sl})$.

Доказательство содержится в [31, с. 347].

Следствие 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Тогда почти всюду в* Q_{sl} $(s = p, q;$ $l = 1, \dots, N(s))$ *обобщенное решение* $u(x)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1).

См. доказательство в [23, с. 1769].

В дальнейшем при исследовании гладкости обобщенных решений краевой задачи (1.1)-(1.2) вблизи границ подобластей Q_{sl} важную роль играет ε-окрестность множества $\mathcal{K}$, определенного в (2.1):

$$\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$.

Лемма 5.1. *Для любой функции* $u \in W_2^1(Q)$ *имеет место неравенство*

$$\|u\big|_{\partial Q}\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant \|u\|_{W_2^1(Q)}.$$

См. доказательство в [10, §5, гл. III].

Теорема 5.2. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2), $\sigma \in C^1(\partial Q)$ *и* $f \in L_2(Q)$. *Тогда* $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2 \dots;\ l = 1, \dots, N(s))$.

Доказательство содержится в [8, теорема 2, §11].

Рассмотрим вопрос о гладкости обобщенных решений вблизи границ подобластей Q_{sl} ($s = 1, 2\ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)$) для случая $f \in W_2^k(Q)$.

Теорема 5.3. *Пусть для уравнения* (1.1) *выполнено условие* **(SE)**. *Пусть* $u(x)$ — *обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2), $\sigma \in C^{k+1}(\partial Q)$ *и* $f \in W_2^k(Q)$ ($k \geqslant 0$). *Тогда* $u \in W_2^{k+2}(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ ($s = 1, 2\ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)$).

Доказательство. В силу теоремы 5.1 достаточно показать, что для любой точки $y \in \partial Q_{pi} \setminus \mathcal{K}$ существует шар $B_a(y)$ такой, что $u \in W_2^{k+2}(Q_{pi} \bigcap B_a(y))$, где $B_a(y)$ — шар радиуса a с центром в точке y.

Доказательство этого утверждения основано на известном методе аппроксимации оператора дифференцирования конечноразностным оператором. Однако, в отличие от эллиптических дифференциальных уравнений, эллиптические дифференциально-разностные уравнения являются нелокальными. Поэтому, изучая гладкость решения в окрестности точки $y \in \partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}$, мы одновременно должны рассматривать соответствующие окрестности всех точек $y + h \in \overline{Q}$, где $h \in M$.

Методы доказательства являются дальнейшим развитием техники, разработанной в [25, теорема 3, с. 1143], [32, теорема 11.3, §11, Гл. II].

1. Зафиксируем некоторый класс подобластей $s = p$ и точку $y \in \partial Q_{pi} \setminus \mathcal{K}$. Пусть h_{pl} — вектор, удовлетворяющий условию

$$Q_{pl} = Q_{p1} + h_{pl} \quad (l = 1, \ldots, N(p)), \quad h_{p1} = 0.$$

Введем точки $y^1, \ldots, y^{N(p)}$ так, что

$$y^l = y^i - h_{pi} + h_{pl},$$

где $y^i = y$. Из определения множеств Γ_{sl} следует, что существует единственное r такое, что $J(r) \geqslant N(p)$, и после перенумерации множеств Q_{pl} и Γ_{rl} имеем

- $y^l \in \Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}$ ($l = 1, \ldots, N(p)$);
- $\Gamma_{rl} \subset Q$ ($l = 1, \ldots, J_0 = J_0(r)$);
- $\Gamma_{rl} \subset \partial Q$ ($l = J_0 + 1, \ldots, J(r)$).

Существует единственная подобласть $Q_{qm} \neq Q_{p1}$ такая, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{qm}$. Перенумеруем подобласти q-го класса так, чтобы $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{ql}$ ($l = 1, \ldots, J_0$).

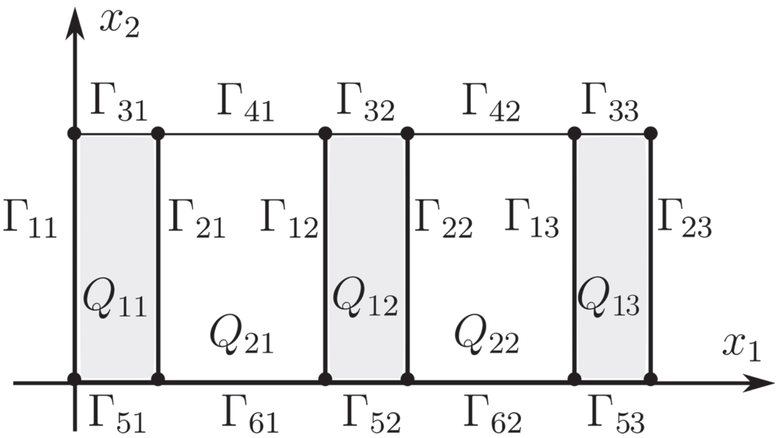

Рис. 4. Область Q и ее разбиение после перенумерации множеств Q_{pl} и Γ_{rl}. Здесь $q = 1$, $p = 2$, $N(q) = 3$, $N(p) = 2$, $r = 2$, $J(r) = r$, $J_0(r) = J_0 = 2$.

Введем точки $z^l \in \overline{Q}$ ($l = 1, \ldots, N(q)$), так, что

$$z^l = y^1 + h_{ql} \quad (l = 1, \ldots, N(q)).$$

По построению $y^l = z^l \in Q$ ($l = 1, \ldots, J_0$), $z^l \in \partial Q_{ql} \setminus \mathcal{K}$, ($l = J_0 + 1, \ldots, N(q)$).

В силу леммы 2.8 существует единственная подобласть $Q_{qj} \neq Q_{p1}$ такая, что $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{qj}$. Перенумеруем подобласти q-го класса так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{ql}$ ($l = 1, \ldots, J_0$). Введем точки $z^1, \ldots, z^N \in \overline{Q}$

так, что $z^l = y^1 + h_{ql}$ $(l = 1, \dots, N(q) \geqslant J_0)$. По построению $z^l = y^l \in Q$ $(l = 1, \dots, J_0)$; $z^l \in \partial Q_{ql} \setminus \mathcal{K}$ $(l = J_0 + 1, \dots, N(q))$. Кроме того, по лемме 2.6

$$\left(\bigcup_{l > J_0} y^l\right) \bigcap \left(\bigcup_{l > J_0} z^l\right) = \varnothing.$$

Рассмотрим шары $B_{4\delta}(x^{sl})$ $(s = p, q; l = 1, \dots, N(s))$, где $x^{pl} = y^l$, $x^{ql} = z^l$. В силу условия $\partial Q \setminus \bigcup\limits_i \Gamma_i = \mathcal{K}$ и лемм 2.3, 2.4 мы можем выбрать $\delta > 0$ настолько малым, чтобы выполнялись следующие условия:

- $4\delta < \min\limits_{s,l} \min\{\rho(x^{sl}, \mathcal{K}), 1/2\}$;
- множества $\partial Q_{sl} \bigcap B_{4\delta}(x^{sl})$ — связные и принадлежат классу C^∞ $(l = 1, \dots, N(s); s = p, q)$;
- $B_{4\delta}(x^{sl}) \subset \Gamma_{rl} \bigcup Q_{pl} \bigcup Q_{ql}$ $(s = p, q; l = 1, \dots, J_0)$;
- $B_{4\delta}(x^{sl}) \bigcap Q = B_{4\delta}(x^{sl}) \bigcap Q_{sl}$ $(s = p, q; l = J_0 + 1, \dots, N(s))$.

2. Не ограничивая общности, будем считать, что $y^1 = 0$, а уравнение поверхности

$$\gamma = \Gamma_{p1} \bigcap B_{4\delta}(0)$$

имеет вид $x_n = 0$. В противном случае можно применить стандартную процедуру распрямления границы (см., например, [10, теорема 4, §2, гл. 4]).

Пусть

$$\xi(x) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(p)} \eta(x - h_{pl}) + \sum_{J_0 \leqslant l \leqslant N(q)} \eta(x - h_{ql}),$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ $(x \in B_{2\delta}(0))$,

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_\delta(0), \\ 0, & x \notin B_{2\delta(0)}. \end{cases}$$

Введем пространство функций

$$W_a^1 = \{u \in W_2^1(Q) : u(x) \equiv 0, x \in Q \setminus \Omega_a\},$$

где

$$\Omega_a = \bigcup_{s=p,q} \bigcup_l B_a(x^{sl}).$$

В интегральном тождестве (4.2) положим $v = \xi v_0$, где $v_0 \in W_{4\delta}^1$. Так как операторы R_{ijQ} коммутируют с операторами умножения на $\xi(x)$, $\xi_{x_i}(x)$ $(i = 1, \dots, n)$, легко видеть, что

$$a_R[u, \xi v_0] = a_R[\xi u, v_0] + \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j}, \xi_{x_i} v_0)_{L_2(Q)} - \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}(\xi_{x_j} u), v_{0x_i})_{L_2(Q)} \tag{5.1}$$

и, следовательно,

$$a_R[w, v_0] = (F, v_0)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}(\xi_{x_j} u), v_{0x_i})_{L_2(Q)}, \tag{5.2}$$

где

$$w = \xi u, \quad F = \xi f - \sum_{i,j=1}^n \xi_{x_i} R_{ijQ} u_{x_j} \in L_2(Q).$$

В формуле (5.2) положим $v_0 = \delta_{-t}^r v_1$ $(1 \leqslant r \leqslant n - 1; 0 < t < \delta)$, $v_1 \in W_{3\delta}^1$, а оператор δ_{-t}^r определен по формулам

$$(\delta_{\pm t}^r v_1)(x) = \frac{(v_1)_{\pm t}^r - v_1}{\pm t} \quad (x \in \Omega_{3\delta}),$$

где

$$(v_1)_{\pm t}^r = v_1(x_1, \dots, x_{r-1}, x_r \pm t, x_{r+1}, \dots, x_n).$$

Отметим также, что для финитных в $\mathbb{R}^n \setminus Q$ функций v и w, продолженных нулем, справедливы следующие формулы:

$$(\delta_t^r v, w)_{L_2(Q)} = -(v, \delta_{-t}^r w)_{L_2(Q)},$$

$$\delta_t^r(vw) = v\delta_t^r w + w_t^r \delta_t^r v.$$

По построению $v_0 \in W_{4\delta}^1$. Из (3.6) получим

$$a_R[\delta_t^r w, v_1] = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}\delta_t^r w_{x_j}, v_{1x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma\delta_t^r w, v_1)_{L_2(\partial Q)} =$$
$$= -\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} w_{x_j}, \delta_{-t}^r v_{1x_i})_{L_2(Q)} + (\delta_t^r(\sigma w) - w_t^r\delta_t^r\sigma, v_1)_{L_2(\partial Q)} =$$
$$= -a_R[w, v_0] - (w_t^r\delta_t^r\sigma, v_1)_{L_2(\partial Q)}, \quad (5.3)$$

где

$$a_R[w, v_0] = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} w_{x_j}, \delta_{-t}^r v_{1x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma w, \delta_{-t}^r v_1)_{L_2(\partial Q)}.$$

С другой стороны, подставляя равенство (5.2) в (5.3), имеем

$$a_R[\delta_t^r w, v_1] = a_1(v_1) + a_2(v_1) + a_3(v_1), \quad (5.4)$$

где

$$a_1(v_1) = -(F, \delta_{-t}^r v_1)_{L_2(Q)},$$
$$a_2(v_1) = \sum_{i,j=1}^n (\delta_t^r R_{ijQ}(\xi_{x_j} u), (v_1)_{x_i})_{L_2(Q)},$$
$$a_3(v_1) = -(w_t^r\delta_t^r\sigma(x), v_1)_{L_2(\partial Q)}.$$

По теореме о конечных разностях [10, теорема 4, §3, гл. III] получим следующие оценки слагаемых $a_1(v_1)$, $a_2(v_1)$, $a_3(v_1)$:

$$|a_1(v_1)| \leqslant k_1\|F\|_{L_2(Q)}\|v_{1x_r}\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})\|v_{1x_r}\|_{L_2(Q)}, \quad (5.5)$$

$$|a_2(v_1)| \leqslant k_3\|u\|_{W_2^1(Q)}|v_1|_{W_2^1(Q)}. \quad (5.6)$$

Используя предположение о гладкости $\sigma(x)$ и лемму 5.1, получим

$$a_3(v_1) = 0, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.7)$$

$$|a_3(v_1)| \leqslant k_4\|w|_{\partial Q}\|_{L_2(\partial Q)}\|v_1|_{\partial Q}\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant k_5\|w\|_{W_2^1(Q)}\|v_1\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.8)$$

Из соотношений (5.4)–(5.7) получим

$$|a_R[\delta_t^r w, v_1]| \leqslant k_7(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})|v_1|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.9)$$

$$|a_R[\delta_t^r w, v_1]| \leqslant |a_1(v_1)| + |a_2(v_1)| + |a_3(v_1)| \leqslant$$
$$\leqslant k_2(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})\|v_{1x_r}\|_{L_2(Q)} + k_3\|u\|_{W_2^1(Q)}\|v_1\|_{W_2^1(Q)} + k_5\|w\|_{W_2^1(Q)}\|v_1\|_{W_2^1(Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_6(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)})\|v_1\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.10)$$

3. Положим $v_1 = \delta_t^r w$. Очевидно, что $v_1 \in W_{3\delta}^1$. В силу леммы 3.5

$$|a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w]| \geqslant \operatorname{Re} a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w] \geqslant c_2|\delta_t^r w|^2_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.11)$$

$$|a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w]| \geqslant \operatorname{Re} a_R[\delta_t^r w, \delta_t^r w] \geqslant k_8\|\delta_t^r w\|^2_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.12)$$

Из оценок (5.9), (5.11) и (5.10), (5.12) получим

$$|\delta_t^r w|_{W_2^1(Q)} \leqslant \frac{k_7}{c_2}(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.13)$$

$$|\delta_t^r w|_{W_2^1(Q)} \leqslant \|\delta_t^r w\|_{W_2^1(Q)} \leqslant \frac{k_6}{k_8}(\|f\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}), \text{ если } \sigma(x)\not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \quad (5.14)$$

Используя теорему об аппроксимации обобщенных производных конечно-разностными отношениями (см. [10, теорема 4, §3, гл. III]), мы имеем $w_{x_i x_r} \in L_2(Q)$ $(i + r < 2n)$, т. е. $u_{x_i x_r} \in L_2(Q_{pl} \bigcap B_\delta(x^{pl}))$ $(l = 1, \ldots, N(p))$.

4. Докажем теперь, что

$$u_{x_n x_n} \in L_2(Q_{pl}) \bigcap B_\delta(x^{pl}).$$

Используя изоморфизм $U_p : L_2(\bigcup\limits_l Q_{pl}) \to L_2^{N(p)}(Q_{p1})$, введенный выше, получим, что $(U_p P_p u)_{x_i x_j} \in L_2(Q_{p1} \bigcap B_\delta(0))$, где $i + j < 2n$.

Согласно следствию 5.1 функция $u(x)$ в $B_\delta(0) \bigcap Q_{p1}$ удовлетворяет уравнению

$$-R_{nnp}(U_p P_p u)_{x_n x_n} = \Psi(x), \tag{5.15}$$

где

$$\Psi(x) = \sum_{i+j<2n} R_{ijp}(U_p P_p u)_{x_i x_j} + U_p P_p f \in L_2^{N(p)}(Q_{p1} \bigcap B_\delta(0)).$$

В виду сильной эллиптичности задачи (1.1)-(1.2), матрица R_{nnp} имеет обратную. Таким образом,

$$(U_p P_p u)_{x_n x_n} \in L_2^{N(p)}(Q_{p1} \bigcap B_\delta(0))),$$

т. е. $u_{x_n x_n} \in L_2(Q_{pl} \bigcap B_\delta(x^{pl}))$.

Таким образом, теорема 5.3 для $k = 0$ доказана.

5. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — любое. В силу доказанного выше нам достаточно установить, что для произвольной фиксированной точки границы $y \in \partial Q_{pi} \setminus \mathcal{K}$ существует шар $B_\delta(y)$ такой, что

$$u \in W_2^{k+2}(Q_{pi} \bigcap B_\delta(y)),$$

а точнее

$$u \in W_2^{k+2}(Q_{pl} \bigcap B_\delta(x^{pl})) \quad (l = 1, \dots, N(p)).$$

Из предыдущих рассуждений нам известно, что $u \in W_2^2(Q_{pl} \bigcap B_\delta(x^{pl}))$ и выполнено равенство (5.4).

Покажем, что для любого $m = 1, 2, \dots, k$ выполнено $u \in W_2^{m+2}(Q_{pl} \bigcap B_\delta(x^{pl}))$, и что будет справедливо равенство

$$a_R[\delta_t^r D^\alpha w, v_{m+1}] = a_1^m(v_{m+1}) + a_2^m(v_{m+1}) + a_3^m(v_{m+1}), \tag{5.4$_m$}$$

где

$$a_1^m(v_{m+1}) = -(D^\alpha F, \delta_{-t}^r v_{m+1})_{L_2(Q)},$$
$$a_2^m(v_{m+1}) = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} \delta_t^r (D^\alpha(\xi_{x_j} u)), (v_{m+1})_{x_i})_{L_2(Q)},$$
$$a_3^m(v_{m+1}) = -\sum_{\lambda,\beta} b_{\lambda,\beta} \left(((D^\lambda w)_t^r \delta_t^r (D^\beta \sigma), v_{m+1})_{L_2(\partial Q)} + (\delta_t^r (D^\lambda w) D^\beta \sigma, v_{m+1})_{L_2(\partial Q)} \right).$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, 0)$, $|\alpha| \leqslant m$, $r = 1, \dots, n-1$, $0 < |t| < \delta$, суммирование по λ, β осуществляется по всем индексам таким, что $\beta + \lambda = \alpha$, $|\lambda| \leqslant m - 1$, $b_{\lambda,\beta} \in \mathbb{R}$, $v_{m+1} \in W_{3\delta}^1$.

Докажем это утверждение при $m = 1$. Для этого запишем $a_1(v_1)$ из равенства (5.4) следующим образом:

$$a_1^0(v_1) = a_1(v_1) = -(F, \delta_{-t}^r v_1)_{L_2(Q)} = (\delta_t^r F, v_1)_{L_2(Q)}$$

и перейдем к пределу при $t \to 0$ в равенстве (5.4), тогда

$$a_R[w_{x_r}, v_1] = (F_{x_r}, v_1)_{L_2(Q)} + \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}(\xi_{x_j} u)_{x_r}, (v_1)_{x_i})_{L_2(Q)} - (w \sigma_{x_r}, v_1)_{L_2(\partial Q)}.$$

Положим $v_1 = \delta_{-t}^g v_2$, где $g < n$, $0 < |t| < \delta$, $v_2 \in W_{3\delta}^1$. Тогда, используя (5.3), получим

$$a_R[\delta_t^g w_{x_r}, v_2] = -a_R[w_{x_r}, v_1] - ((w_{x_r})_t^g \delta_t^g \sigma, v_1)_{L_2(\partial Q)} = a_1^1(v_2) + a_2^1(v_2) + a_3^1(v_2), \tag{5.4$_1$}$$

где

$$a_1^1(v_2) = -(F_{x_r}, \delta_{-t}^g v_2)_{L_2(Q)},$$
$$a_2^1(v_2) = \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}\delta_t^g((\xi_{x_j}u)_{x_r}), v_{2x_i})_{L_2(Q)},$$
$$a_3^1(v_2) = -(w\delta_t^g\sigma_{x_r}, v_2)_{L_2(\partial Q)} - (\sigma_t^g\delta_t^g w, v_2)_{L_2(\partial Q)}.$$

Используя теорему о конечных разностях и учитывая гладкость $\sigma(x)$, получим, аналогично предыдущим оценкам, следующие:

$$|a_1^1(v_2)| \leqslant k_1^1\|F_{x_r}\|_{L_2(Q)}\|v_{2x_g}\|_{L_2(Q)} \leqslant k_2^1(\|f_{x_r}\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta})})|v_{2x_g}|_{L_2(Q)}, \tag{5.5$_1$}$$

$$|a_2^1(v_2)| \leqslant k_3^1\|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}|v_2|_{W_2^1(Q)}, \tag{5.6$_1$}$$

$$a_3^1(v_2) = 0, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q), \tag{5.7$_1$}$$

$$|a_3^1(v_2)| \leqslant k_4^1\|w_{x_g}\|_{L_2(\partial Q)}\|v_2\|_{L_2(\partial Q)} + k_5^1\|w\|_{L_2(\partial Q)}\|v_2\|_{L_2(\partial Q)} \leqslant$$
$$\leqslant k_6^1(\|w_{x_g}\|_{W_2^1(Q)} + \|w\|_{W_2^1(Q)})\|v_2\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_7^1\|w\|_{W_2^2(Q)}\|v_2\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \tag{5.8$_1$}$$

Из (5.4$_1$)–(5.7$_1$) получим

$$|a_R[\delta_t^g w_{x_r}, v_2]| \leqslant k_8^1\left(\|f\|_{W_2^1(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}\right)|v_2|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \equiv 0 \quad (x \in \partial Q) \tag{5.9$_1$}$$

$$|a_R[\delta_t^g w_{x_r}, v_2]| \leqslant k_9^1\left(\|f\|_{W_2^1(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}\right)\|v_2\|_{W_2^1(Q)}, \text{ если } \sigma(x) \not\equiv 0 \quad (x \in \partial Q). \tag{5.10$_1$}$$

Полагая $v_2 = \delta_t^g w_{x_r}$ ($v_2 \in W_{3\delta}^1$), из (5.9$_1$), (5.10$_1$) в силу (5.11)–(5.14) получим

$$|\delta_t^g w_{x_r}|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_{10}^1(\|f\|_{W_2^1(Q)} + \|u\|_{W_2^2(\Omega_{2\delta}\bigcap Q)}).$$

Отсюда, используя теорему об аппроксимации обобщенных производных конечно-разностными операторами, имеем

$$w_{x_r x_g x_i} \in L_2(Q) \quad (i = 1, \dots, n;\ g, r = 1, \dots, n-1),$$

т. е.

$$u_{x_r x_g x_i} \in L_2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl})) \quad (l = 1, \dots, N(p)).$$

Для оценки остальных производных третьего порядка $u_{x_g x_n x_n}$ ($g = 1, \dots, n-1$) продифференцируем равенство (5.15) по x_g ($g = 1, \dots, n-1$). Тогда в силу невырожденности матрицы R_{nnp} мы получим $u_{x_g x_n x_n} \in L_2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$. Отсюда, дифференцируя (5.15) по x_n, имеем $u_{x_n x_n x_n} \in L_2(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$. Таким образом,

$$u \in W_2^3(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$$

и имеет место равенство (5.4$_1$).

Повторяя этот процесс m раз ($m \leqslant k$), получим, что

$$u \in W_2^{m+2}(Q_{pl}\bigcap B_\delta(x^{pl}))$$

и имеет место равенство (5.4$_m$).

Таким образом, используя результат теоремы 5.1 о внутренней гладкости и итерационную схему, описанную выше, мы доказали теорему. □

Из теоремы 5.3 и теоремы вложения Соболева вытекает утверждение о принадлежности обобщенного решения пространству непрерывно-дифференцируемых функций внутри подобластей $Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$ области Q.

Следствие 5.2. *Пусть уравнение* (1.1) *— сильно эллиптическое. Пусть* $u(x)$ *— обобщенное решение краевой задачи* (1.1)-(1.2), $\sigma \in C^{k+1}(\partial Q)$ *и* $f \in W_2^k(Q)$ $(k \geqslant 0)$. *Тогда* $u \in C^{k+1-[\frac{n}{2}]}(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ *для каждого* $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2 \dots; l = 1, \dots, N(s))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8*, № 2. — С. 309–317.
2. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739-740.
4. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 5–36
5. *Власов В. В., Перез Ортиз Р., Раутиан Н. А.* Исследование вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений с ядрами, зависящими от параметра// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 3. — С. 369–386.
6. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
7. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами// Докл. РАН. — 2017. — *477*, № 6. — С. 641–645.
8. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: МАИ, 1992.
9. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
10. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
11. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972.
12. *Неверова Д. А., Скубачевский А. Л.* О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2013. — *94*, № 5. — С. 702–719.
13. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.
14. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов// Дифф. уравн. — 1999. — *35*. — С. 393–800.
15. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 125–142.
16. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 130–140.
17. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на $\mathbb{R}^n$ и в полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*, № 5. — С. 1134–1137.
18. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 31–38.
19. *Селицкий А. М.* Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 114–132.
20. *Селицкий А. М., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*. — С. 324–347.
21. *Скубачевский А. Л.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 127–136.
22. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
23. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
24. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
25. *Цветков Е. Л.* О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Укр. мат. ж. — 1993. — *45*, № 8. — С. 1140–1150.
26. *Hartman F., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential-functional equations// Acta Math. — 1966. — *115*. — С. 271–310.
27. *Neverova D. A.* Generalized and classical solutions to the Second and third boundary value problem for difference-differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2014. — *21*. — С. 47–65.
28. *Neverova D. A., Skubachevskii A. L.* On the smoothness of generalized solutions to boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — *22*, № 4. — С. 504–517.
29. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 192–207.

30. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1996. — *3*, № 4. — С. 491–500.
31. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*, № 3. — С. 332–361.
32. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Д. А. Неверова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: dneverova@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-655-671 UDC 517.929

Smoothness of Generalized Solutions of the Second and Third Boundary-Value Problems for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations

© 2019 **D. A. Neverova**

Abstract. In this paper, we investigate qualitative properties of solutions of boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations.

Earlier results establish the existence of generalized solutions of these problems. It was proved that smoothness of such solutions is preserved in some subdomains but can be violated on their boundaries even for infinitely smooth function on the right-hand side. For differential-difference equations on a segment with continuous right-hand sides and boundary conditions of the first, second, or the third kind, earlier we had obtained conditions on the coefficients of difference operators under which there is a classical solution of the problem that coincides with its generalized solution. Also, for the Dirichlet problem for strongly elliptic differential-difference equations, the necessary and sufficient conditions for smoothness of the generalized solution in Hölder spaces on the boundaries between subdomains were obtained. The smoothness of solutions inside some subdomains except for ε-neighborhoods of angular points was established earlier as well. However, the problem of smoothness of generalized solutions of the second and the third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations remained uninvestigated.

In this paper, we use approximation of the differential operator by finite-difference operators in order to increase the smoothness of generalized solutions of the second and the third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations in the scale of Sobolev spaces inside subdomains. We prove the corresponding theorem.

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, “Ob indekse i normal’noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigov na granitse” [On the index and normal solvability of general elliptic boundary-value problem with a finite group of shifts on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. R. Bellman and K. Cooke, *Differentsial’no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739-740 (in Russian).
4. E. M. Varfolomeev, “O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional’no-differentsial’nykh operatorov, voznikayushchikh v nelineynoy optike” [On some properties of elliptic and parabolic functional differential operators arising in nonlinear optics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 5–36 (in Russian)

5. V. V. Vlasov, R. Perez Ortiz, and N. A. Rautian, “Issledovanie vol’terrovykh integro-differentsial’nykh uravneniy s yadrami, zavisyashchimi ot parametra” [Investigation of Volterra integrodifferential equations with kernels depending of a parameter], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 3, 369–386 (in Russian).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
7. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Issledovanie funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy s neogranichennymi operatornymi koeffitsientami” [Investigation of functional differential equations with unbounded operator coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **477**, No. 6, 641–645 (in Russian).
8. G. A. Kamenskiy and A. L. Skubachevskii, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1992 (in Russian).
9. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
10. V. P. Mikhaylov, *Differentsial’nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
11. A. D. Myshkis, *Lineynye differentsial’nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Delayed Argument], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
12. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, “O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
13. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Differentsial’nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruemogo tela” [Differential equations with deviating arguments in stationary problems of mechanics of deformable bodies], *Prikl. mekh.* [Appl. Mech.], 1979, **15**, No. 5, 39–47 (in Russian).
14. V. V. Podyapol’skii and A. L. Skubachevskii, “Spektral’naya asimptotika sil’no ellipticheskikh differentsial’-no-raznostnykh operatorov” [Spectral asymptotics of strongly elliptic differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, 393–800 (in Russian).
15. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, “Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem” [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142 (in Russian).
16. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, “Gladkost’ obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial’no raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem” [Smoothness of generalized solutions of elliptic difference differential equations with degenerations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 130–140 (in Russian).
17. V. S. Rabinovich, “O razreshimosti differentsial’no-raznostnykh uravneniy na $\mathbb{R}^n$ i v poluprostranstve” [On solvability of differential-difference equations in $\mathbb{R}^n$ and in the half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
18. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 31–38 (in Russian).
19. A. M. Selitskii, “Tret’ya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The third boundary-value problem for parabolic functional differential equation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 114–132 (in Russian).
20. A. M. Selitskii and A. L. Skubachevskii, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The second boundary-value problem for parabolic functional differential equation], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2007, **26**, 324–347 (in Russian).
21. A. L. Skubachevskii, “O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh nelokal’nykh kraevykh zadach” [On eigenvalues and eigenfunctions of some nonlocal boundary-value problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 127–136 (in Russian).
22. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
23. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).

24. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
25. E. L. Tsvetkov, "O gladkosti obobshchennykh resheniy tret'ey kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [On smoothness of generalized solutions of the third boundary-value problem for elliptic differential-difference equation], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1993, **45**, No. 8, 1140–1150 (in Russian).
26. F. Hartman and G. Stampacchia, "On some nonlinear elliptic differential-functional equations," *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–310.
27. D. A. Neverova, "Generalized and classical solutions to the Second and third boundary value problem for difference-differential equations," *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
28. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, "On the smoothness of generalized solutions to boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring subdomains," *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 504–517.
29. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Nonlocal Problems in the Mechanics of Three-Layer Shells," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 192–207.
30. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, "On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 1996, **3**, No. 4, 491–500.
31. A. L. Skubachevskii, "The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
32. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

D. A. Neverova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: dneverova@gmail.com