Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 613–622

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-613-622 УДК 517.929

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ, СВОДЯЩИЕСЯ К НЕЛОКАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

© 2019 г. **Е. П. ИВАНОВА**

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащие несоизмеримые сдвиги аргументов в старших членах. Показано, что для случая, когда орбиты точек границы области, сгенерированные множеством сдвигов разностного оператора, конечны, исходная задача может быть сведена к краевой задаче для дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами исследовались в работах А. Л. Скубачевского [1, 4]. В частности, им было показано, что в случае невырожденного разностного оператора краевая задача для дифференциально-разностного уравнения на ограниченной области эквивалентна краевой задаче для дифференциального уравнения на этой области с нелокальными краевыми условиями. Был предложен метод исследования задач для дифференциально-разностных уравнений с помощью нелокальных задач.

Для дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами этот метод в общем случае неприменим. Однако в случае, когда множество сдвигов разностного оператора порождает конечную орбиту границы заданной области, исходная краевая задача также может быть сведена к нелокальной. Для этого строится специальное разбиение области на непересекающиеся подобласти, основанное не на аддитивной группе сдвигов, как в работах А. Л. Скубачевского, а на графе, ассоциированном с множеством сдвигов.

Это разбиение описано в работах [2, 3]; оно применяется для исследования гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами [3] и получения условий сильной эллиптичности (выполнения неравенства Гординга) [2]. В данной статье исследуется разрешимость краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргумента методом сведения их к нелокальным задачам. Этот метод применим и в случае, когда дифференциально-разностный оператор не является сильно эллиптическим. Сведение к нелокальной задаче позволяет строить аналитические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргумента. В данной статье приводятся примеры таких решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00401).

1. Разностные операторы и орбиты границ

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$:

$$(Ru)(x) = \sum_{h \in M} a_h[u(x+h) + u(x-h)], \tag{1.1}$$

где $a_h, h \in \mathbb{R},\ M$ — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов h, $h_0 = 0 \in M$.

Будем рассматривать действия операторов R на функциях $u \in L_2(\mathbb{R})$, для которых

$$u(x) = 0,\ x \notin Q = (0, d). \tag{1.2}$$

Для учета однородных краевых условий (1.2) используем операторы I_Q, P_Q:

$I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R})$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем вне Q,

$P_Q : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R})$ на Q.

Введем также оператор

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q).$$

Обозначим $\widehat{M} := M \cup (-M)$.

Введем множества

$$S_1 := \Big(\bigcup_{h \in \widehat{M}} h\Big) \bigcap \bar{Q},$$

$$S_2 := \Big(\bigcup_{h \in \widehat{M}} (S_1 + h)\Big) \bigcap \bar{Q}, \ldots,$$

$$S_k := \Big(\bigcup_{h \in \widehat{M}} (S_{k-1} + h)\Big) \bigcap \bar{Q}, \ldots$$

В силу построения $S_{k-1} \subseteq S_k$. Введем множество

$$S^0 = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Аналогичное множество S^d построим для правой границы (точки d). Обозначим $S := S^0 \cup S^d$. Возможно существование 2-х случаев.

Случай 1. На некотором шаге $S_{k+1} = S_k$. Тогда и все $S_{k+p} = S_k$ $(p \geqslant 1)$, и процесс построения прервется. В этом случае множество S^0 состоит из конечного числа точек $S^0 = S_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < d$.

Назовем S^0 *орбитой* точки 0, $S = orb(0)$, а x_i точками орбиты. Аналогичную орбиту S^d построим для точки d, $S^d = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$, $0 < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_N = d$. В силу симметричности разностного оператора эти орбиты идентичны.

Случай 2. Множество S состоит из бесконечного числа точек.

В данной работе мы будем рассматривать только случай 1.

Замечание 1.1. Для бесконечной орбиты, когда число различных множеств S_k счетно, множество S может быть даже всюду плотным в $\bar{Q}$ (см. [4, пример 3.10]).

Рассмотрим открытое множество $G = \bar{Q} \backslash (S^0 \cup S^d)$. Оно состоит из конечного числа непересекающихся связных компонент Q_r $(r = 1, 2 \ldots)$ и

$$G = \bigcup_r Q_r, \quad S^0 \cup S^d = \bigcup_r \partial Q_r.$$

Замечание 1.2. В работе А. Л. Скубачевского [4] для исследования свойств разностных операторов с соизмеримыми сдвигами и гладкости решений соответствующих краевых задач строится разбиение области Q на непересекающиеся подобласти с использованием аддитивной абелевой группы, порожденной множеством сдвигов M. Для множества, содержащего несоизмеримые сдвиги, такое разбиение не существует.

Будем использовать разбиение, построенное без использования группы и описанное в [2].

Определение 1.1. Назовем $\Re_0$ *регулярным разбиением* области Q на непересекающиеся подобласти $Q_r (r = 1,2,\ldots)$, если:

1. $\bigcup\limits_r \bar{Q}_r = \overline{Q}$;
2. для любой Q_{r_1} и $h \in \widehat{M} = \{M, -M\}$ или найдется Q_{r_2} так, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, или $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R}\backslash Q$. Здесь M — множество векторов из формулы (1.1).

В силу [2, теорема 2.1] справедлива

Лемма 1.1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества G является регулярным разбиением $\Re_0$ области Q.*

Разбиению $\Re_0$ поставим в соответствие ориентированный граф. Вершины этого графа — подобласти Q_r, дуги графа — сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2}, Q_{r_1} соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2}\rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h — коэффициенты разностного оператора из формулы (1.1).

Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π: подобласти Q_{r_1}, $Q_{r_2} \in \Re_0$ находятся в отношении π, если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2}. В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества $\Re_0$ на классы эквивалентности.

Обозначим подобласти Q_{sl}, где s — номер класса эквивалентности и l — номер области в этом классе. Каждый класс s в силу ограниченности области Q состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}.

Обозначим $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ $(l = 1, \ldots, N(s))$. Обозначим $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$. В силу [4, лемма 8.5] $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ является инвариантным подпространством оператора R_{ijQ}, при этом $L_2(Q) = \bigoplus\limits_s L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) \ = u(x + h_{sl}) \ (x \in Q_{s1}),$$

где $l = \ 1, \ldots, N = N(s),\ h_{sl}$ такое, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = \ 0)$, $L_2^N(Q_{s1}) \ = \prod\limits_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1})$.

Аналогично доказательству [4, лемма 8.6] можно показать, что оператор $R_s : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_s = U_s R_Q {U_s}^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, элементы матрицы r_{km}^s вычисляются по формуле

$$r_{km}^s = \begin{cases} a_h \ (h = h_{sm} - h_{sk} \in M), \\ 0 \ (h = h_{sm} - h_{sk} \notin M). \end{cases} \tag{1.3}$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением $\Re_0$ граф, для вершин Q_{sk}, Q_{sm}, связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm}\rangle$, положим $r_{km}^s = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r_{km}^s = 0$.

В силу [4, лемма 8.7] спектр $\sigma(R_Q)$ оператора R_Q совпадает с объединением спектров всех матриц $\sigma(R_Q) = \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$. Отсюда следует

Лемма 1.2. *Оператор R_Q невырожден тогда и только тогда, когда все матрицы R_s невырождены.*

Присвоим первый номер классу интервалов, левой границей которых являются точки x_i орбиты нуля: $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < d$. Оператор $R_{Q1} : L_2^N\,(Q_{11}) \to L_2^N\,(Q_{11})$, заданный формулой $R_{Q1} = U_1 R_Q U_1^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_1 порядка $N \times N$.

Пример 1.1. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Ru)(x) = a_0u(x) + a_1(u(x+1+\tau) + u(x-1-\tau)) + a_2(u(x+1+2\tau) + u(x-1-2\tau)), \qquad (1.4)$$

где $\dfrac{1}{3} < \tau < \dfrac{1}{2}$, τ — иррациональное.

Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, где $Q = (0,2)$.

Орбиты границы:

$$S^0 = orb(0) = \{0, \tau, 1+\tau, 1+2\tau\},$$
$$S^d = orb(d) = \{1-2\tau, 1-\tau, 2-\tau, 2\}.$$

Разбиение области Q состоит из трех классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$Q_{11} = (0, 1-2\tau), \qquad Q_{12} = (\tau, 1-\tau),$$
$$Q_{13} = (1+\tau, 2-\tau), \quad Q_{14} = (1+\tau, 2);$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1-2\tau, \tau), \quad Q_{22} = (2-\tau, 1+2\tau).$$

Третий класс состоит из одной области

$$Q_{13} = (1-\tau, 1+\tau).$$

Для первого класса $s = 1$ подобластей оператор $R_1 : L_2^4(Q_{11}) \to L_2^4(Q_{11})$, где $R_1 = U_1 R_Q {U_1}^{-1}$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Действию оператора R_1 в силу формулы (1.3) соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}. \qquad (1.5)$$

Для второго класса $s = 2$ подобластей оператор $R_2 : L_2^2(Q_{21}) \to L_2^2(Q_{21})$, где $R_2 = U_2 R_Q {U_2}^{-1}$.

Действию этого оператора соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

На третьем классе действию оператора R_Q соответствует умножение на a_0.

2. Действие разностного оператора в пространстве $\mathring{H}^1(Q)$

Введем в рассмотрение $H^1(Q)$ $(Q = (0,d))$ — пространство Соболева функций, у которых существует и принадлежит пространству $L_2(Q)$ обобщенная производная:

$$\mathring{H}^1(Q) = \left\{u \in H^1(Q) | u(0) = u(d) = 0\right\}.$$

Эквивалентная норма $||u||_{\mathring{H}^1(Q)}$ в $\mathring{H}^1(Q)$ определяется формулой

$$||u||^2_{\mathring{H}^1(Q)} = \int\limits_0^d u' \ \bar{u}' dx.$$

Введем в рассмотрение также пространство $H^1_\gamma(0,d)$ функций $v \in H^1(0,d)$, для которых

$$v(0) = \sum_{i=1}^N \gamma_i v(x_i), \qquad (2.1)$$

$$v(d) = \sum_{i=1}^N \gamma_i v(d - x_i). \qquad (2.2)$$

Пусть R_1 — матрица первого класса подобластей разбиения области Q, определенная формулой (1.3). Обозначим через R_1^1 матрицу, полученную из матрицы R_1 вычеркиванием первого столбца. Обозначим e_i i-ю строку матрицы R_1^1, R_1^2 — матрицу, полученную из R_1 вычеркиванием первого столбца и строки. Предположим, что $\det R_1^2 \neq 0$. Тогда первая строка матрицы R_1 есть линейная комбинация остальных ее строк:

$$e_1 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i e_{i+1}. \tag{2.3}$$

Доказательство теоремы 2.1 следует схеме доказательства работы [4, теорема 2.1].

Теорема 2.1. *Пусть R_Q — невырожденный оператор и $\det R_1^2 \neq 0$. Тогда существуют γ_i $(i = 1, \dots, N)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(Q)$ на $H^1_\gamma(0,d)$ непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. 1. Покажем, что существуют такие γ_i $(i = 1, \dots, N)$, что

$$R_Q(\mathring{H}^1(0,d)) \subset H^1_\gamma(0,d).$$

В силу [4, лемма 2.10] $R_Q(\mathring{H}^1(0,d)) \subset H^1(0,d)$.

Для $v \in \mathring{H}^1(Q)$

$$\begin{aligned}(R_Q v)(0) = (U_1 P_1 R_Q v)_1(0) = (R_1 U_1 P_1 v)_1(0) = \\ = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (R_1 U_1 P_1 v)_{i+1}(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (R_Q v)(x_i).\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$(R_Q v)(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i (R_Q v)(d - x_i).$$

Следовательно, $R_Q(\mathring{H}^1(0,d)) \subset H^1_\gamma(0,d)$.

2. Докажем, что

$$H^1_\gamma(0,d) \subset R_Q(\mathring{H}^1(0,d)).$$

Пусть $u \in H^1_\gamma(0,d)$. В силу [4, лемма 2.7] оператор R_Q имеет ограниченный обратный $R_Q^{-1} : L_2(0,d) \to L_2(0,d)$.

Покажем, что

$$v = R_Q^{-1} u \in \mathring{H}^1(0,d)).$$

В силу [4, лемма 2.12] $v \in H^1(Q_{si})$ для всех подобластей Q_{si} разбиения $\Re_0$. Достаточно показать, что для точек x_i орбиты нуля

$$v|_{t=x_i+0} = v|_{t=x_i-0}, \quad x_i = 1, \dots, N,$$
$$v(0) = 0,$$

где

$$v|_{t=x+0} = \lim_{\substack{t \to x, \\ t > x}} v(t),$$
$$v|_{t=x-0} = \lim_{\substack{t \to x, \\ t < x}} v(t).$$

Аналогичные равенства должны быть также выполнены и для точек орбиты d.

Обозначим

$$\varphi_i = v|_{t=x_i+0}, \ i = 0, \dots, N,$$
$$\psi_j = v|_{t=x_j-0}, \quad j = 1, \dots, N,$$
$$\psi_0 = 0.$$

Все значения φ_i в силу построения определяются значениями функции v на областях $Q_{1,i+1}$ первого класса разбиения. Функции ψ_i могут определяться на областях различных классов, в том числе и на первом (см. примеры 1.1, 2.1). При этом действию оператора R_Q на первом классе соответствует умножение на матрицу R_1, действию оператора R_Q на других классах соответствует умножение на различные матрицы.

Для того, чтобы унифицировать действие оператора R_Q, введем в рассмотрение область $Q^\delta = (-\delta, d)$ и окрестности G_i точек орбиты x_i:

$$G_i = (x_i - \delta, x_i + \delta) \quad (i = 0, \dots, N).$$

Выберем δ достаточно малым, так, чтобы интервалы

$$G_i^- = (x_i - \delta, x_i) \quad (i = 1, \dots, N),$$
$$G_i^+ = (x_i, x_i + \delta) \quad (i = 0, \dots, N)$$

содержались целиком в соответствующих подобластях разбиения.

Действию оператора $R_{Q^\delta} = P_{Q^\delta} R I_{Q^\delta}$ на $L_2\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{N} G_i\Big)$ соответствует умножение на матрицу R_1.

Эта же матрица соответствует действию оператора R_Q на $L_2\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{N} G_i^-\Big)$ и $L_2\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{N} G_i^+\Big)$. При этом будем рассматривать только функции $v(x) = 0$, $x \in G_0^-$.

Из этого следует, что $\psi_0 = 0$. Тогда

$$(R_{Q^\delta} v)(x) = (R_Q v)(x), \quad x \in Q.$$

Поскольку $R_Q v \in H_\gamma^1(0, d)$,

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1}. \tag{2.4}$$

В силу условия (2.3)

$$r_{1,p} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i r_{i+1,p}, \quad p = 2, \dots, N+1.$$

Тогда левая часть равенства (2.4) примет вид

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{1,p}\varphi_{p-1} = r_{11}\varphi_0 + \sum_{p=2}^{N+1} r_{1,p}\varphi_{p-1} = r_{11}\varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1}.$$

Подставив это выражение в (2.4), получим

$$r_{11}\varphi_0 + \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1}.$$

Отсюда

$$r_{11}\varphi_0 = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i r_{i+1,1}\varphi_0,$$

или

$$(r_{11} - \sum_{i=1}^{N} \gamma_i r_{i+1,1})\varphi_0 = 0.$$

Выражение в скобках не может быть равным нулю, иначе вся первая строка матрицы R_1 была бы линейной комбинацией остальных ее строк, что противоречит условию невырожденности матрицы R_1. Следовательно, $\varphi_0 = 0$.

Поскольку $R_Q v \in H^1(0, d)$,

$$(R_Q v)|_{t=x_i+0} = (R_Q v)|_{t=x_i-0}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.5}$$

Отсюда

$$\sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{p=1}^{N+1} r_{i+1,p}\psi_{p-1}, \quad i = 1, .., N. \tag{2.6}$$

В силу того, что $\psi_0 = 0$ по построению и $\varphi_0 = 0$ в силу доказанного выше, из (2.6) следует

$$\sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}\varphi_{p-1} = \sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}\psi_{p-1},\ i = 1,..,N.$$

Отсюда

$$\sum_{p=2}^{N+1} r_{i+1,p}(\varphi_{p-1} - \psi_{p-1}) = \sum_{p=1}^{N} r_{i+1,p+1}(\varphi_p - \psi_p) = 0,\ i = 1,..,N.$$

Поскольку $\det R_1^2 \neq 0$, отсюда следует, что $\varphi_p = \psi_p,\ p = 1,\dots,N$ и $H^1_\gamma(0,d) \subset R_Q(\mathring{H}^1(0,d))$. $\square$

Пример 2.1. Пусть разностный оператор R имеет вид

$$(Ru)(x) = a_0u(x) + a_1(u(x+1) + u(x-1)) + a_2(u(x+1+\tau) + u(x-1-\tau)), \tag{2.7}$$

где $0{,}25 < \tau < 0{,}5$, τ — иррациональное. Рассмотрим оператор $R_Q = P_QRI_Q$, где $Q = (0,2)$.

Орбиты границы:

$$S^0 = orb(0) = \{0, \tau, 1, 1+\tau\}\,,$$
$$S^d = orb(d) = \{1-\tau, 1, 2-\tau, 2\}\,.$$

Разбиение области Q состоит из двух классов подобластей. Первый класс содержит 4 подобласти:

$$Q_{11} = (0, 1-\tau), \quad Q_{12} = (\tau, 1), \quad Q_{13} = (1, 2-\tau), \quad Q_{14} = (1+\tau, 2);$$

второй класс состоит из подобластей

$$Q_{21} = (1-\tau, \tau), \quad Q_{22} = (2-\tau, 1+\tau).$$

На первом классе подобластей действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу R_1, определенную формулой (1.5). Ее определитель

$$\det R_1 = ({a_0}^2 - {a_1}^2 - a_0a_2)({a_0}^2 - {a_1}^2 + a_0a_2).$$

На втором классе действию оператора R_Q соответствует умножение на матрицу R_2, определенную формулой (1.6). Ее определитель $\det R_2 = ({a_0}^2 - {a_1}^2)$. В силу леммы 1.2 необходимое и достаточное условие невырожденности оператора R_Q:

$$\begin{gathered} |a_0| \neq |a_1|\,, \\ ({a_0}^2 - {a_1}^2 - a_0a_2)({a_0}^2 - {a_1}^2 + a_0a_2) \neq 0. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Матрицы R_1^1, R_1^2 :

$$R_1^1 = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}, \quad R_1^2 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & a_0 & 0 \\ a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Условие невырожденности R_1^2 :

$$\det R_1^2 = a_0({a_0}^2 - {a_1}^2) \neq 0. \tag{2.9}$$

Пусть выполнены условия (2.8), (2.9). Тогда в силу теоремы 2.1 существуют γ_i $(i = 1,\dots,3)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(0,d))$ на $H^1_\gamma(0,d)$ непрерывно и взаимно однозначно, где $H^1_\gamma(0,d)$ — подпространство функций $u \in H^1(0,2)$, удовлетворяющих условиям

$$u(0) = \gamma_1u(\tau) + \gamma_2u(1) + \gamma_3u(1+\tau), \tag{2.10}$$

$$u(2) = \gamma_1u(2-\tau) + \gamma_2u(1) + \gamma_3u(1-\tau), \tag{2.11}$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ в силу формулы (2.3) и симметричности матрицы R_1 находятся из системы:

$$(R_1^1)^t\gamma = 0 \quad (\gamma = (-1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^t),$$

где $(R_1^1)^t$ — транспонированная матрица R_1^1.

Решение этой системы существует и единственно:

$$\gamma_1 = \frac{a_1a_2}{{a_1}^2 - {a_0}^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_1}{a_0}, \quad \gamma_3 = -\frac{a_0a_2}{{a_1}^2 - {a_0}^2}. \tag{2.12}$$

3. Дифференциально-разностные уравнения и их связь с нелокальными задачами

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$-(Rv)''(x) + A_1 v - \lambda v(x) = f(x) \quad (x \in Q = (0,d)) \tag{3.1}$$

с однородными краевыми условиями

$$v(x) = 0 \ (\ x \notin Q). \tag{3.2}$$

Здесь R — разностный оператор с несоизмеримыми сдвигами, определенный формулой (1.1), $A_1 : \mathring{H}^1(Q) \to L_2(Q)$ — линейный ограниченный оператор, $f \in L_2(Q)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, λ — спектральный параметр.

Пусть $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ — неограниченный оператор, заданный следующим образом:

$$\begin{gathered} D(A_R) = \{v \in \mathring{H}^1(Q) |\ R_Q v \in H^2(Q)\}, \\ A_R v = -(R_Q v)''(x) + A_1 v \quad (v \in D(A_R)). \end{gathered} \tag{3.3}$$

Задача (3.1), (3.2) для целочисленных сдвигов разностного оператора R исследована в работе [4]. А. Л. Скубачевским предложен метод сведения этой задачи к краевой задаче с нелокальными краевыми условиями. Разбиение, описанное в разделе 1, позволяет обобщить этот метод на случай несоизмеримых сдвигов (если орбита границы конечна).

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений вида (3.1), (3.2), вообще говоря, не имеют гладких классических решений и естественно определить решение в обобщенном смысле (см. [4]).

Определение 3.1. Функцию $v \in D(A_R)$ назовем *обобщенным решением* задачи (3.1), (3.2), если

$$A_R v - \lambda v = f. \tag{3.4}$$

Это определение эквивалентно следующему.

Определение 3.2. Функцию $v \in \mathring{H}^1(Q)$ назовем *обобщенным решением* задачи (3.1), (3.2), если для любой функции $w \in \mathring{H}^1(Q)$ выполнено тождество

$$(R_Q v', w')_{L_2(Q)} + (A_1 v, w)_{L_2(Q)} - (\lambda v, w)_{L_2(Q)} = (f, w)_{L_2(Q)}, \tag{3.5}$$

где $(v,w)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в $L_2(Q)$.

Теорема 3.1. *Пусть оператор R_Q невырожден и $\det R_1^2 \neq 0$. Тогда неограниченный оператор $A_R : L_2(Q) \to L_2(Q)$ фредгольмов и $\operatorname{ind} A_R = 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 существуют γ_i $(i = 1, \dots, N)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(0,d)$ на $H^1_\gamma(0,d)$ непрерывно и взаимно однозначно. Обозначим $u = R_Q v$. Здесь $H^1_\gamma(0,d)$ — подпространство функций из $H^1(0,d)$, удовлетворяющих условиям:

$$u(0) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i u(x_i), \tag{3.6}$$

$$u(d) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i u(d - x_i). \tag{3.7}$$

Оператор $A_R = A_\gamma R_Q$, где

$$A_\gamma u = -u'' + A_1 R_Q^{-1} u,$$

$u \in H^2(0,d) \cap H^1_\gamma(0,d)$. Задача (3.1), (3.2) эквивалентна уравнению

$$A_\gamma u = -u'' + A_1 R_Q^{-1} u = f \tag{3.8}$$

с нелокальными краевыми условиями (3.6), (3.7).

В силу [4, теорема 1.2] оператор A_γ фредгольмов и $\operatorname{ind} A_\gamma = 0$. Следовательно, из [4, теорема 1.A] следует, что оператор A_R фредгольмов и $\operatorname{ind} A_R = 0$. □

Пример 3.1. Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-(R_Q v))'' = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.9}$$

где $Q = (0,2)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, R — разностный оператор, определенный формулой (2.7) (см. пример 2.1). Предположим, что оператор R_Q является невырожденным (условие (2.8)) и выполнено условие (2.9). Обозначим $u = R_Q v$.

В силу теоремы 2.1 существуют γ_i $(i = 1, \dots, 3)$ такие, что оператор R_Q отображает $\mathring{H}^1(0,2)$ на $H^1_\gamma(0,2)$ непрерывно и взаимно однозначно, где $H^1_\gamma(0,2)$ — подпространство функций $u \in H^1(0,2)$, удовлетворяющих условиям (2.10), (2.11).

Краевая задача (3.9) эквивалентна уравнению

$$-u''(x) = f(x), \ x \in (0,2) \tag{3.10}$$

с нелокальными краевыми условиями (2.10), (2.11).

Решаем задачу с помощью программы Maple для значений параметров

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 1, a_2 = 2, \quad \tau = \sqrt{3} - 1, \quad f = 2.$$

По формуле (2.12) находим значения

$$\gamma_1 = -\frac{1}{4}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{3}, \quad \gamma_3 = \frac{3}{4}.$$

Решение u задачи (3.10), (2.10), (2.11) существует и единственно:

$$u(x) = x^2 - 4x - 6{,}17.$$

Поскольку оператор R_Q имеет ограниченный обратный, мы можем найти обобщенное решение v задачи (3.9) по формуле

$$v(x) = R_Q^{-1} u(x).$$

Находим решение задачи (3.9) на первом классе подобластей разбиения, используя обратную матрицу R_1^{-1}:

$$(U_1 v)(x) = \begin{pmatrix} 0{,}14x^2 - 2{,}77x, \\ 0{,}29x^2 - 1{,}08x - 0{,}96, \\ 0{,}29x^2 + 0{,}92x - 1{,}23, \\ 0{,}14x^2 - 2{,}77x \end{pmatrix}, \quad x \in Q_{11} = (0, 1-\tau).$$

Находим решение на втором классе подобластей разбиения, используя обратную матрицу R_2^{-1}:

$$(U_2 v)(x) = \begin{pmatrix} 0{,}25x^2 - 0{,}61x - 0{,}73 \\ 0{,}25x^2 + 0{,}38x - 0{,}96 \end{pmatrix}, \quad x \in Q_{21} = (1-\tau, 1).$$

Далее находим

$$v(x) = U^{-1}((Uv)(x)).$$

Производная функции v терпит разрывы в точках орбит границы, но гладкость решения внутри подобластей разбиения сохраняется.

Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за внимание и интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *32*, № 2. — С. 261–278.
2. *Ivanova E. P.* On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2019. — *239*, № 6. — С. 802–816.
3. *Ivanova E. P.* On smooth solutions of differential-Difference equations with incommensurable shifts of arguments// Math. Notes. — 2019. — *105*, № 1. — С. 140–144.
4. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and aplications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Е. П. Иванова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6;
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: elpaliv@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-613-622 UDC 517.929

Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations with Incommeasurable Shifts of Arguments Reducible to Nonlocal Problems

 E. P. Ivanova

Abstract. We consider boundary-value problems for differential-difference equations containing incommeasurable shifts of arguments in higher-order terms. We prove that in the case of finite orbits of boundary points generated by the set of shifts of the difference operator, the original problem is reduced to the boundary-value problem for differential equation with nonlocal boundary conditions.

REFERENCES

1. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **32**, No. 2, 261–278 (in Russian).
2. E. P. Ivanova, "On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2019, **239**, No. 6, 802–816.
3. E. P. Ivanova, "On smooth solutions of differential-Difference equations with incommensurable shifts of arguments," *Math. Notes*, 2019, **105**, No. 1, 140–144.
4. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and aplications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

E. P. Ivanova
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia;
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: elpaliv@yandex.ru