Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 593–604

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-593-604 УДК 517.43

ОБ АСИМПТОТИКЕ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2019 г. **В. И. БЕЗЯЕВ**

Аннотация. В работе находится асимптотика проинтегрированной плотности состояний с оценкой остаточного члена для гипоэллиптических систем с почти-периодическими (п.-п.) коэффициентами. Применяется метод приближенного спектрального проектора для матричных п.-п. операторов, имеющих непрерывный спектр.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Для линейных эллиптических дифференциальных операторов $P(x, D)$ с п.-п. коэффициентами в работе [10] было доказано существование предела

$$\lim_{\Omega\to\infty} \frac{N_\Omega(\lambda)}{|\Omega|}, \tag{1.1}$$

где $N_\Omega(\lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи Дирихле для этого оператора на ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $|\Omega|$ — мера Лебега области Ω. Функция $N(\lambda)$, совпадающая при заданном λ с пределом (1.1), естественным образом интерпретируется как проинтегрированная плотность состояний — функция распределения данного оператора.

С другой стороны, в [10] с помощью теории алгебр фон Неймана (см., напр., [12]) доказано, что проинтегрированную плотность состояний $N(\lambda)$ самосопряженного п.-п. оператора можно интерпретировать так же, как обычную функцию распределения дискретного спектра, но с использованием обобщенной размерности и обобщенного следа. Для этого используется $*$-представление C^*-алгебры п.-п. псевдодифференциальных операторов (п.д.о.), введенное в работе [11]. При этом, если $P(x, D)$ — формально самосопряженный п.-п. оператор, то

$$N(\lambda) = SpE_\lambda,$$

где E_λ — спектральный проектор оператора $P^\#$, построенного с помощью указанного выше $*$-представления в некоторую алгебру $\mathcal{A}$, Sp — относительная размерность (след) фон Неймана на подалгебре алгебры $\mathcal{A}$. Доказано также, что множество точек роста этой функции совпадает с непрерывным спектром исходного оператора $P(x, D)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, что позволяет, в частности, оценивать лакуны по асимптотике $N(\lambda)$.

Дифференциальные операторы с п.-п. коэффициентами можно использовать для моделирования квантово-механического движения электронов в средах с определенными отклонениями от периодичности, в частности, в некоторых жидкостях и сплавах. Кроме того, вопросы спектральной теории таких операторов возникают в ряде задач механики, например, при рассмотрении линеаризованных систем с условно периодическими движениями.

Асимптотика плотности состояний с оценкой остаточного члена скалярных гипоэллиптических п.-п. дифференциальных операторов (д.о.) была дана в работе [1], в которой был использован метод приближенного спектрального проектора. Этот метод впервые появился в работе [4], а затем интенсивно развивался для операторов с дискретным спектром (см. обзоры в [2, 3], а также [13]). Необходимо еще отметить, что методы, использовавшиеся для исследования асимптотики плотности состояний эллиптических п.-п. операторов (тауберовы теоремы, метод гиперболического уравнения), существенно опираются на специфику эллиптических операторов и на гипоэллиптический случай не переносятся.

Применение метода приближенного спектрального проектора для матричных дифференциальных операторов и п.д.о. содержит большие трудности, которые, тем не менее, успешно были преодолены в ряде задач с дискретным спектром [2].

В данной работе метод приближенного спектрального проектора проводится для матричных п.-п. операторов, имеющих непрерывный спектр.

2. Основные результаты

Пусть $P(x,D)$ — квадратная матрица порядка N скалярных линейных дифференциальных операторов на $\mathbb{R}^n$ с коэффициентами из $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $p(x,\xi)$ — ее матричный символ. Тогда оператор P можно представить в виде

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int p(x,\xi) d\xi \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, u(y)\, dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

где

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v = (v_1, \dots, v_N) : v_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \dots, N\},$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем. Здесь и дальше символ $\int$ означает интеграл по всему пространству.

Если разложить символ $p(x,\xi)$ в ряд Тейлора в точке $\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)$ и проинтегрировать по частям по ξ в предыдущей формуле, то получим формулу

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int d\xi \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \hat{p}(\frac{x+y}{2}, \xi)\, u(y)\, dy, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

где функция

$$\hat{p}(x,\xi) = \sum_\alpha \frac{1}{(-2i)^{|\alpha|}\alpha!} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)$$

называется *символом Вейля* оператора $P = Op\Big(\hat{p}\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big)\Big)$. Последняя сумма конечна, так как $p(x,\xi)$ — многочлен по ξ.

Важным свойством символа Вейля, отличающим его от обычного символа, является простота перехода к сопряженному оператору. Если оператор P имеет символ Вейля $\hat{p}(x,\xi)$, то оператор P^*, формально сопряженный к P в $L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$, задается матричным символом Вейля $\hat{p}^*(x,\xi)$ — матрицей, получаемой из $\hat{p}(x,\xi)$ транспонированием матрицы, элементы которой комплексно сопряжены к элементам $\hat{p}(x,\xi)$. Напомним, что формально сопряженный оператор P^* к оператору P определяется формулой

$$(Pu, v) = (u, P^*v), \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в

$$L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v = (v_1, \dots, v_N) : v_j \in L_2(\mathbb{R}^n),\ j = 1, \dots, N\}.$$

В частности, если символ $\hat{p}(x,\xi)$ — эрмитова матрица, то соответствующий оператор $P = Op\Big(\hat{p}\Big(\frac{x+y}{2}, \xi\Big)\Big)$ является формально самосопряженным.

Будем предполагать далее, что P — матричный дифференциальный оператор с $N \times N$-матричным символом Вейля $\hat{p}(x,\xi)$, элементы матрицы $\hat{p}(x,\xi)$ принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ и являются п.-п. функциями по x, $\hat{p}(x,\xi)$ — эрмитова матрица при всех $(x,\xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$.

Напомним определение почти-периодической функции.

Определение 2.1. Непрерывная функция $h(x)$ на $\mathbb{R}^n$ со значениями в $\mathbb{C}$ называется *почти-периодической по Бору*, или *равномерно почти-периодической*, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset \mathbb{R}^n$, что каждый его сдвиг $x + K$ содержит ϵ-почти-период функции h, т. е. такой вектор $\tau \in \mathbb{R}^n$, что

$$\sup_x |h(x+\tau) - h(x)| < \epsilon.$$

Эквивалентное определение состоит в том, что семейство всех сдвинутых функций $\{h(\cdot + \tau) : \tau \in \mathbb{R}^n\}$ должно быть предкомпактно в топологии равномерной сходимости на $\mathbb{R}^n$.

Для определения гипоэллиптичности символа Вейля и соответствующего оператора введем (следуя [7, с. 466]) понятие умеренной нормы на $\mathbb{C}^N$, параметризованной точками пространства $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$.

Определение 2.2. Норма $\|\cdot\|_{x,\xi}$ на $\mathbb{C}^N$, определенная для каждой точки $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, называется *умеренной*, если существуют такие положительные постоянные C и M, что

$$C^{-1}(1+|\xi|)^{-M}\|z\| \leqslant \|z\|_{x,\xi} \leqslant C(1+|\xi|)^M\|z\|, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi,\ z \in \mathbb{C}^N,$$

где

$$\|z\| = \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2\right)^{1/2}.$$

Определение 2.3. *П.-п. гипоэллиптическим матричным символом* будем называть $N\times N$ матричную функцию $p(x,\xi)$, элементы которой принадлежат $C^\infty(\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi)$ и являются п.-п. функциями по x, если для нее выполнены условия гипоэллиптичности на $\mathbb{R}^n$ (ср. [7, с. 466]):

1. $\|z\|'_{x,\xi} \leqslant C_0\|p(x,\xi)z\|''_{x,\xi},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R,\ z \in \mathbb{C}^N$;
2. $\|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x p(x,\xi)z\|''_{x,\xi} \leqslant C_{\alpha\beta}|\xi|^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\|z\|'_{x,\xi},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R,\ z \in \mathbb{C}^N$,

где $\|\cdot\|'_{x,\xi}$, $\|\cdot\|''_{x,\xi}$ — две умеренные нормы на $\mathbb{C}^N$, параметризованные точками $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, α,β — любые мультииндексы, $C_0, C_{\alpha\beta}, R$ — некоторые положительные постоянные, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$.

Поясним смысл условий 1 и 2 в определении 2.3 при $N=1$. В этом случае

$$\|z\|'_{x,\xi} = \widetilde{M}(x,\xi)\|z\|''_{x,\xi}$$

и сформулированные условия принимают вид

$$\widetilde{M}(x,\xi) \leqslant C|p(x,\xi)|, \quad |\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}\widetilde{M}(x,\xi)(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R.$$

Поэтому функция $\widetilde{M}(x,\xi)$ эквивалентна $|p(x,\xi)|$ при большом $|\xi|$ и

$$|\partial^\alpha_\xi\partial^\beta_x p(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha\beta}|p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},\ x \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geqslant R.$$

Это неравенство вместе с полиномиальными оценками на p и $1/p$ при большом $|\xi|$ эквивалентно гипоэллиптичности в определении 2.3.

Пусть P — дифференциальный оператор с п.-п. гипоэллиптическим символом Вейля $\hat{p}(x,\xi)$, принимающим значение в $L(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)$ (комплексные матрицы $N\times N$), и пусть $\hat{p}(x,\xi)$ — положительно определенная эрмитова матрица при всех $(x,\xi) \in R^n_x \times R^n_\xi$.

Обозначим через $\lambda_i(x,\xi)$ $(i=1,\dots,N)$ собственные числа матрицы $\hat{p}(x,\xi)$, где

$$\lambda_1(x,\xi) \leqslant \lambda_2(x,\xi) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_N(x,\xi)$$

при фиксированных $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^n_\xi$. Из непрерывной зависимости собственных чисел от элементов матрицы следует п.-п. по x и непрерывность по $\xi \in \mathbb{R}^n$ функций $\lambda_i(x,\xi)$, а из теоремы Коши о вычетах непосредственно получаем, что функции $\lambda_i(x,\xi)$ являются C^∞-гладкими по (x,ξ) во всех точках, кроме тех, где

$$\lambda_i(x,\xi) = \lambda_k(x,\xi),\ i \neq k\ (i,k=1,\dots,N).$$

Положим

$$V_i(\lambda) = (2\pi)^{-n} M_x \int\limits_{\lambda_i(x,\xi)<\lambda} d\xi, \qquad i = 1, \dots, N, \tag{2.1}$$

где M_x — среднее значение п.-п. функции,

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} V_i(\lambda), \tag{2.2}$$

$$W(\lambda, \tau) = V(\lambda + \tau) - V(\lambda - \tau). \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что функция $V(\lambda)$ конечна для любого λ. Для этого достаточно наложить на собственное значение $\lambda_1(x, \xi)$ матрицы $\hat{p}(x, \xi)$ условие

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \inf_x \lambda_1(x, \xi) = +\infty.$$

Теорема 2.1. *При сделанных предположениях на оператор P для любого $\nu \in (0, (\rho - \delta)(3M)^{-1})$ существует такая постоянная C, что*

$$N(\lambda) = V(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\nu})) + O(W(\lambda, C\lambda^{1-\nu})) \text{ при } \lambda \to +\infty, \tag{2.4}$$

где $M = M' + M''$, а M' и M'' — постоянные в определении умеренных норм $\|z\|'_{x,\xi}$ и $\|z\|''_{x,\xi}$, а функции $V(\lambda)$ и $W(\lambda, \tau)$ определены формулами (2.2) *и* (2.3).

Обозначим через $S^m_{\rho,\delta}$, где $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $m \in \mathbb{R}$, множество $N \times N$ матричных функций с элементами из $C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$, удовлетворяющих условиям

$$\|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x p(x, \xi) z\| \leqslant C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \|z\|, \ (x, \xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_\xi, \ z \in \mathbb{C}^N.$$

Теорема 2.2. *Если $\hat{p}(x, \xi)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *и, кроме того, $\hat{p}(x, \xi) \in S^m_{\rho,\delta}$, то формула* (2.4) *верна для любого $\nu \in (0, (\rho - \delta)(3m)^{-1})$.*

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и пусть, кроме того, функция $V(\lambda)$ при больших λ непрерывно дифференцируема и*

$$V'(\lambda)/V(\lambda) = O(\lambda^{\varkappa - 1}) \text{ при } \lambda \to +\infty,$$

где $\varkappa \in [0, \nu)$. Тогда

$$N(\lambda) = V(\lambda)(1 + O(\lambda^{\varkappa - \nu})) \text{ при } \lambda \to +\infty. \tag{2.5}$$

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *и пусть при некотором $\varkappa \in [0, \nu)$ имеет место асимптотическая формула* (2.5). *Предположим еще, что функция $V(\lambda)$ непрерывно дифференцируема при больших λ и*

$$V(\lambda)/V'(\lambda) = O(\lambda^{1-\mu}) \text{ при } \lambda \to +\infty, \tag{2.6}$$

где $\mu \in [0, \varkappa]$.

Тогда существует такая положительная постоянная K, что если интервал (a, b) не содержит спектра оператора P, то

$$|b - a| \leqslant K a^{1 - \nu - \mu + \varkappa}. \tag{2.7}$$

Отметим здесь, что явную оценку остатка в асимптотике функции $N(\lambda)$ (типа формулы (2.5) с $\varkappa = 0$) и оценку длины лакуны вида (2.7) с $\mu = 0$ легко получить непосредственно из формулы (2.3) в случае, когда собственные числа $\lambda_j(x, \xi)$ $(j = 1, \dots, N)$ являются квазиэллиптическими многочленами по ξ. Под квазиэллиптическим здесь понимается многочлен вида

$$\sum_{\alpha \cdot \mu \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

где

$$\alpha \cdot \mu = \alpha_1 \mu_1 + \ldots + \alpha_n \mu_n,$$

α — мультииндекс, $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — фиксированный для данного многочлена набор натуральных чисел,

$$\sum_{\alpha\cdot\mu=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \geqslant \varepsilon > 0$$

при $x \in \mathbb{R}^n$, $|\xi|_\mu = 1$. Здесь

$$|\xi|_\mu = \sum_{j=1}^n |\xi|^{\frac{1}{\mu_j}}.$$

Доказательство этого факта непосредственно следует из асимптотических формул для $V_j(\lambda)$, $j = 1, \dots, N$, аналогичных соответствующей формуле в скалярном случае (см. [1]).

3. Псевдодифференциальные операторы с ограниченными символами

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ матричные п.д.о. с равномерными по x оценками символов. Класс соответствующих символов — это множество $S^m_{\rho,\delta}$, где $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, $m \in \mathbb{R}$, определенное перед теоремой 2.2. Техника использования скалярных п.д.о. с равномерными по x оценками символов была разработана в [14] (см. также [1]). Перенос этой техники на матричный случай не представляет трудностей.

По символу Вейля $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}$ п.д.о. $P = Op\Big(p\Big(\dfrac{x+y}{2}, \xi\Big)\Big)$ определяется по формуле

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, p(\frac{x+y}{2}, \xi)\, u(y)\, dyd\xi, \tag{3.1}$$

где $u(y) \in C^\infty_b(\mathbb{R}^n_y, \mathbb{C}^N)$,

$$C^\infty_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) : |\partial^\alpha v(x)| \leqslant C_\alpha \text{ при всех } x \in \mathbb{R}^n\},$$

а интеграл понимается как осциллирующий [6].

Напомним, что один из способов регуляризации осциллирующих интегралов вида (3.1), не являющихся в общем случае абсолютно сходящимися, состоит в следующем. Пусть $\chi(x,y,\xi) \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{3n})$, $\chi(0,0,0) = 1$ — гладкая срезающая функция. Тогда формула

$$Pu(x) = (2\pi)^{-n} \lim_{\epsilon\to+0} \int e^{i(x-y)\cdot\xi}\, \chi(\epsilon x, \epsilon y, \epsilon\xi)\, p(\frac{x+y}{2}, \xi)\, u(y)\, dyd\xi \tag{3.2}$$

задает непрерывный линейный оператор

$$P : C^\infty_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

не зависящий от выбора срезающей функции $\chi(x,y,\xi)$. Кроме того, формула (3.2) корректно определяет линейный непрерывный оператор

$$P : H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$$

для любого $s \in \mathbb{R}$, где

$$H^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) = \{v = (v_1, \dots, v_N) : v_j \in H^s(\mathbb{R}^n)\},$$

$H^s(\mathbb{R}^n)$ — стандартное пространство Соболева в $\mathbb{R}^n$.

Класс операторов P вида (3.1) с символами Вейля $p \in S^m_{\rho,\delta}$ обозначается через $L^m_{\rho,\delta}$. Для этих классов имеется стандартное исчисление п.д.о. В частности, можно брать композиции любых двух операторов из

$$L^\infty_{\rho,\delta} = \bigcup_m L^m_{\rho,\delta}.$$

При этом в $L^\infty_{\rho,\delta}$ выполняются теоремы о композиции и о сопряженном операторе (доказательства для скалярного случая приведены, например, в [1]).

4. Функция $N(\lambda)$ для неограниченных операторов в алгебрах фон Неймана

Пусть $\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, являющаяся фактором типа I_∞ или II_∞. Предположим, что на $\mathcal{A}$ фиксирован некоторый точный нормальный полуконечный след, обозначаемый Sp (см., например, [8, 12]). Пусть, далее, $A = A^*$ и оператор A присоединен к фактору $\mathcal{A}$, т. е. $E_\lambda \in \mathcal{A}$ для любого спектрального проектора E_λ оператора A. В этом случае спектр A называется дискретным относительно фактора $\mathcal{A}$, если $SpE_\lambda < +\infty$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

В описанной ситуации определена и конечна неубывающая функция

$$N(\lambda) = SpE_\lambda \ (\lambda \in \mathbb{R}),$$

множество точек роста которой совпадает со спектром оператора A.

Следующая теорема (см. [1]), являющаяся обобщением на факторы схемы, приведенной в [5], позволяет находить асимптотику функции $N(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$.

Обозначим через $S_1(\mathcal{A})$ двусторонний идеал в факторе $\mathcal{A}$, состоящий из всех таких операторов $B \in \mathcal{A}$, что $Sp|B| < +\infty$.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — фактор типа I_∞ или II_∞. Пусть $A = A^*$, оператор A присоединен к $\mathcal{A}$ и $\mathcal{E}_\lambda$ $(\lambda \geqslant 1)$ — такое семейство операторов из $\mathcal{A}$, что выполнены следующие условия:*

1. $\mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda^*,\ Sp\,|\mathcal{E}_\lambda| < +\infty,\ \operatorname{Im}\mathcal{E}_\lambda \subset D_A$;
2. $(-1/2)I \leqslant \mathcal{E}_\lambda \leqslant (3/2)I$ *при* $\lambda \geqslant \lambda_0 \geqslant 1$, *где* I — *единичный оператор*;
3. $Sp\,\mathcal{E}_\lambda = V(\lambda)(1 + O(\lambda^{-\nu})) + O(W(\lambda, C_1\lambda^{1-\nu}))$ *при* $\lambda \to +\infty$, *где* $\mathcal{E}_{1\lambda} = \mathcal{E}_\lambda^2(3I - 2\mathcal{E}_\lambda)$, $V(\lambda)$ — *некоторая положительная неубывающая функция,* $W(t,\tau) = V(t+\tau) - V(t-\tau)$, $C_1 > 0$, $0 < \nu < 1$;
4. $Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(I - \mathcal{E}_{1\lambda})] = O(V(\lambda)\lambda^{-\nu}) + O(W(\lambda, C_2\lambda^{1-\nu}))$ *при* $\lambda \to +\infty$, $C_2 > 0$;
5. $\mathcal{E}_{1\lambda}(A - \lambda I)\mathcal{E}_\lambda \leqslant C_3\lambda^{1-\nu}I$, $C_3 > 0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$;
6. $(I - \mathcal{E}_{1\lambda})(A - \lambda I)(I - \mathcal{E}_{1\lambda}) \geqslant -C_4\lambda^{1-\nu}I$, $C_4 > 0$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Тогда спектр оператора A дискретен относительно фактора $\mathcal{A}$ и

$$N(\lambda) = V(\lambda) + O(W(\lambda, C_3\lambda^{1-\nu})) \ \text{\textit{при}}\ \lambda \to +\infty,$$

где $W(\lambda,\tau) = V(\lambda+\tau) - V(\lambda-\tau)$.

Для полноты изложения приведем доказательство этой леммы, основанное на вариационном принципе Глазмана. Доказательство основывается на двух леммах. Первая лемма является обобщением леммы Глазмана и доказана в работе [9].

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — фактор типа I_∞ или II_∞, $A = A^*$ и оператор A присоединен к $\mathcal{A}$. Тогда*

$$N(\lambda) = \sup_{\substack{E \in Proj(\mathcal{A}),\\ E(\mathcal{H}) \subset D_A,\\ E(A-\lambda)E \leqslant 0}} SpE.$$

Будем обозначать через $\chi_{<a,b>}(x)$ характеристическую функцию промежутка $< a, b >$ на вещественной оси.

Лемма 4.2. *Положим* $\tilde{N}(\lambda) = Sp\,\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})$. *Тогда*

$$\tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})) \quad \text{\textit{при}} \quad \lambda \to +\infty.$$

Доказательство. Оценим сначала $\tilde{N}(\lambda)$ снизу. Имеем

$$\tilde{N}(\lambda) = Sp\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda}) = Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] + Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \geqslant Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}]$$

при $\lambda \geqslant \lambda_0$, так как (в силу условия 2)) $0 \leqslant \mathcal{E}_{1\lambda} \leqslant 1$ при $\lambda \geqslant \lambda_0$. С другой стороны при $\lambda \geqslant \lambda_0$ имеем

$$Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] = Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] = Sp\,\mathcal{E}_{1\lambda} - Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{2\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}],$$

$$Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] \leqslant 2Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] =$$
$$= 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] - 2Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \leqslant 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})].$$

Отсюда при $\lambda \geqslant \lambda_0$ получаем

$$\tilde{N}(\lambda) \geqslant Sp\mathcal{E}_{1\lambda} - 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] =$$
$$= V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})) = V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})).$$

Теперь оценим $\tilde{N}(\lambda)$ сверху. Имеем

$$\tilde{N}(\lambda) = Sp\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda}) = Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] + Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})].$$

Далее, при $\lambda \geqslant \lambda_0$ получаем

$$Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] = Sp\mathcal{E}_{1\lambda} - Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}] \leqslant Sp\mathcal{E}_{1\lambda};$$
$$Sp[\chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] = Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \leqslant$$
$$\leqslant Sp[\chi_{(1/2,1]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] = 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] -$$
$$-2Sp[\chi_{[0,1/2]}(\mathcal{E}_{1\lambda})\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] \leqslant 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})].$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{N}(\lambda) \leqslant Sp\mathcal{E}_{1\lambda} - 2Sp[\mathcal{E}_{1\lambda}(1-\mathcal{E}_{1\lambda})] = V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})),$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство теоремы 4.1. Оценим $N(\lambda)$ снизу. Пусть $L_\lambda = \chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda})$. Тогда $L_\lambda \in Proj(\mathcal{A})$ и при $\lambda \to +\infty$

$$SpL_\lambda = \tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})).$$

Из условия 5 получаем

$$L_\lambda \mathcal{E}_{1\lambda}(A-\lambda)\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda \leqslant C_1\lambda^{1-\nu}L_\lambda^2 \leqslant 4C_1\lambda^{1-\nu}L_\lambda\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda,$$

или

$$L_\lambda\mathcal{E}_{1\lambda}(A-\lambda-4C_1\lambda^{1-\nu})\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda \leqslant 0.$$

Так как

$$\operatorname{Im}(\mathcal{E}_{1\lambda}L_\lambda) = \operatorname{Im} L_\lambda,$$

то

$$((A-\lambda-4C_1\lambda^{1-\nu})u, u) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad u \in \operatorname{Im} L_\lambda,$$

то есть

$$L_\lambda(A-\lambda-4C_1\lambda^{1-\nu})L_\lambda \leqslant 0.$$

По лемме 4.1 при $\lambda \to +\infty$ имеем

$$N(\lambda + 4C_1\lambda^{1-\nu}) \geqslant SpL_\lambda = \tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda, \lambda^{1-\nu})),$$

следовательно,

$$N(\lambda) \geqslant V(\lambda - C_3'\lambda^{1-\nu}) + O(V(\lambda + C_3'\lambda^{1-\nu})) - V(\lambda - C_3'\lambda^{1-\nu}) \geqslant$$
$$\geqslant V(\lambda) + O(W(\lambda, C_3'\lambda^{1-\nu})).$$

Оценим теперь $N(\lambda)$ сверху. Пусть

$$M_\lambda = I - L_\lambda = I - \chi_{(1/2,3/2)}(\mathcal{E}_{1\lambda}).$$

Тогда

$$M_\lambda(I-\mathcal{E}_{1\lambda})^2M_\lambda \geqslant 1/4M_\lambda^2.$$

Из условия 6 вытекает, что

$$(1-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda(A_\lambda)(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda + C_2\lambda^{1-\nu}M_\lambda^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda(A_\lambda)(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda + 4C_2\lambda^{I-\nu}(I-\mathcal{E}_{1\lambda})^2M_\lambda.$$

Так как

$$\operatorname{Im}[(I-\mathcal{E}_{1\lambda})M_\lambda] = \operatorname{Im} M_\lambda,$$

то

$$M_\lambda(A-\lambda+4C_2\lambda^{I-\nu})M_\lambda \geqslant 0.$$

Положим

$$\tau = \lambda - 4C_2\lambda^{I-\nu},$$

и пусть E_τ — спектральный проектор оператора A. Тогда $E_\tau\mathcal{H} \cap M_\lambda\mathcal{H} = 0$, так как

$$E_\tau(A-\tau)E_\tau \leqslant 0.$$

Таким образом, $B = L_\lambda E_\tau$ мономорфно отображает $E_\tau\mathcal{H}$ в $L_\lambda\mathcal{H}$, а значит,

$$N(\tau) = SpE_\tau \leqslant SpL_\lambda = \tilde{N}(\lambda) = V(\lambda) + O(V(\lambda,\lambda^{1-\nu})) \leqslant V(\tau) + O(W(\tau, C_3''\tau^{1-\nu})) \text{ при } \tau \to +\infty.$$

□

5. Представление алгебры п.-п. п.д.о.

Обозначим через $CAP(\mathbb{R}^n)$ множество всех п.-п. по Бору функций на $\mathbb{R}^n$. Поскольку любая п.-п. функция $h(x)$ ограничена на $\mathbb{R}^n$, то множество $CAP(\mathbb{R}^n)$ является коммутативной банаховой алгеброй с обычными операциями сложения и умножения функций и нормой

$$||h||_\infty = \sup_x |h(x)|.$$

В пространстве $CAP(\mathbb{R}^n)$ плотным является множество $Trig(\mathbb{R}^n)$ всех тригонометрических многочленов, т. е. конечных сумм вида

$$h(x) = \sum_\xi h_\xi e^{i\xi\cdot x}.$$

Пространство максимальных идеалов банаховой алгебры $CAP(\mathbb{R}^n)$ называется *компактом Бора* и обозначается $\mathbb{R}^n_B$. Имеется естественное непрерывное вложение $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n_B$, при котором $\mathbb{R}^n$ становится плотным подмножеством в $\mathbb{R}^n_B$. Сложение в $\mathbb{R}^n$ продолжается по непрерывности до операции, превращающей $\mathbb{R}^n_B$ в компактную топологическую группу. Среднее значение п.-п. функции h определяется формулой

$$M\{h\} = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R^n} \int\limits_{|x_j|<\frac{R}{2}} h(x)dx.$$

При этом предел существует для любой функции $h \in CAP(\mathbb{R}^n)$. Среднее значение функции $h \in CAP(\mathbb{R}^n)$ можно также записать в виде

$$M\{h\} = \int\limits_{\mathbb{R}^n_B} \hat{h}\, d\mu_n,$$

где $d\mu_n$ — мера Хаара на $\mathbb{R}^n$ (нормированная так, что мера всей группы $\mathbb{R}^n_B$ равна 1), а $\hat{h}$ — продолжение функции h с $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n_B$ по непрерывности.

Пусть, далее, $B^2(\mathbb{R}^n)$ — несепарабельное гильбертово пространство Безиковича, т. е. пополнение всех тригонометрических полиномов на $\mathbb{R}^n$ по норме, определяемой скалярным произведением

$$(\varphi,\psi) = M_x[\varphi(x)\overline{\psi(x)}],$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — тригонометрические полиномы на $\mathbb{R}^n$.

Введем гильбертово пространство

$$\mathcal{H} = B^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n_B \times \mathbb{R}^n)$$

(тензорное произведение предполагается пополненным по естественной гильбертовой норме). Далее, рассмотрим алгебру фон Неймана $\mathcal{A}_B$, порожденную двумя семействами операторов на $\mathcal{H}$:

$$\{e_\xi \otimes e_\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^n\}, \quad \{I \otimes T_\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^n\},$$

где e_ξ — оператор умножения на $e^{i\xi\cdot x}$ в $B^2(\mathbb{R}^n)$ или в $L^2(\mathbb{R}^n)$, а T_ξ — оператор сдвига на вектор ξ в $L^2(\mathbb{R}^n)$, т. е.

$$T_\xi u(x) = u(x-\xi).$$

Пространство $\mathcal{H}$ можно интерпретировать как пространство функций двух n-мерных переменных z и x, где $z \in \mathbb{R}^n_B$, $x \in \mathbb{R}^n$. Алгебра $\mathcal{A}_B$ является II_∞-фактором (см. [8]) и пусть Sp — относительный след на факторе $\mathcal{A}_B$.

Обозначим через $APS^m_{\rho,\delta}$ пространство всех функций $p(x,\xi)$ из $S^m_{\rho,\delta}$, для которых $p(x,\xi)$ является п.-п. по x функцией (со значениями в $L(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)$).

Пусть теперь $b(x,\xi)\in APS^m_{\rho,\delta}$ и $B = Op\Big(b\Big(\dfrac{x+y}{2},\xi\Big)\Big)$ (см. формулу (3.1)). Положим

$$\tilde\rho(B)=\tilde B,$$

где

$$\tilde B:\mathcal{H}^N\to\mathcal{H}^N,$$

$\mathcal{H} = B^2(\mathbb{R}^n)\otimes L^2(\mathbb{R}^n)$ (тензорное произведение подразумевается пополненным по естественной гильбертовой норме), $\mathcal{H}^N = \underbrace{\mathcal{H}\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}}_{N\text{ раз}}$,

$$\tilde B u(x,y) = [B_x u(x,\cdot)](y),\ \ B_x = T_{-x}BT_x.$$

В качестве области определения оператора $\tilde B$ берется пространство

$$\mathcal{H}^N_\infty = \underbrace{\mathcal{H}_\infty\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}_\infty}_{N},\ \text{ где }\ \mathcal{H}_\infty = \bigcap_m \mathcal{H}_m,\ \ \mathcal{H}_m = B^2(\mathbb{R}^n)\otimes L^2(\mathbb{R}^n).$$

Отображение $\tilde\rho: B\to\tilde B$ является $*$-представлением алгебры операторов вида

$$B = O_P\Big(b\Big(\frac{x+y}{2},\xi\Big)\Big),\quad \text{где}\quad b(x,\xi)\in APS^{-\infty}_{\rho,\delta} = \bigcap_m APS^m_{\rho,\delta}.$$

Областью определения оператора B является пространство

$$H^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N) = \bigcap_m H^m(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^N).$$

Через $B^\#$ обозначается замыкание оператора $\tilde B$ в $\mathcal{H}^N$.

Определим теперь в алгебре $L(\mathcal{H}^N,\mathcal{H}^N)$ ограниченных операторов в $\mathcal{H}^N$ подалгебру $\mathcal{A}^N_B$, которая будет фактором типа II_∞, т. е. на этой подалгебре однозначно (с точностью до множителя) определен точный нормальный полуконечный след. Алгебра $\mathcal{A}^N_B$ порождается семейством матричных операторов $A=(A_{ij})^N_{i,j=1}$, где

$$A_{ij} = e_{z_{ij}}\otimes e_{z_{ij}}:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad z_{ij}\in\mathbb{R}^n,$$

или

$$A_{ij} = I\otimes T_{z_{ij}}:\mathcal{H}\to\mathcal{H},\quad z_{ij}\in\mathbb{R}^n,$$

I — единичный оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$.

На факторе $\mathcal{A}^N_B$ фиксируется некоторый след, обозначаемый Sp, нормированный условием, которое будет указано ниже. Таким образом, Sp — функция из $\mathcal{A}^N_B$ в $[0,+\infty)$.

Пусть теперь $Q = Op\Big(q\Big(\dfrac{x+y}{2},\xi\Big)\Big)$, $q(x,\xi)\in APS^m_{\rho,\delta}$ тогда:

1. если $Q^\#$ самосопряжен, то его спектральные проекторы $E_\lambda\in\mathcal{A}^N_B$;
2. если $m=0$, то $Q^\#\in\mathcal{A}^N_B$;
3. если $m<-n$, то $Sp|Q^\#|<+\infty$ и

$$Sp\, Q^\# = (2\pi)^{-n} M_x\int_{\mathbb{R}^n} Tr\, q(x,\xi)d\xi. \tag{5.1}$$

В утверждении 3 через $|Q^\#|$ обозначен оператор $\sqrt{Q^\#\,(Q^\#)^*}$, Tr — след матрицы из $L(\mathbb{C}^N,\mathbb{C}^N)$. Кроме того, формула (5.1) определяет нормировочный множитель следа на $\mathcal{A}^N_B$.

Утверждения 1–3 доказаны при $N=1$ в [8]; доказательство этих утверждений переносится на случай $N>1$ непосредственно. Таким образом, оператор $P^\#$, построенный по исходному п.-п. гипоэллиптическому формально самосопряженному п.д.о. P, присоединен к фактору $\mathcal{A}^N_B$ (т. е. его проекторы E_λ принадлежат $\mathcal{A}^N_B$) и определена функция

$$N(\lambda) = SpE_\lambda,\ \ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Так же, как и в [1], используя существование параметрикса у оператора P, нетрудно доказать конечность функции $N(\lambda)$ при всех λ и совпадение спектров оператора $P^{\#}$ и оператора

$$P : L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \to L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

а значит, и совпадение этих спектров со множеством точек роста функции $N(\lambda)$.

6. Приближенный спектральный проектор и асимптотика функции $N(\lambda)$

Для доказательства основной теоремы достаточно теперь построить приближенный спектральный проектор $\mathcal{E}_\lambda$ оператора $P^{\#}$, удовлетворяющий теореме 4.1 при некотором $\nu \in (0,1)$.

Положим $\mathcal{E}_\lambda = \tilde{\rho}(\mathcal{E}^0_\lambda)$, где

$$\mathcal{E}^0_\lambda = O_P(e_\lambda(\frac{x+y}{2}, \xi)), \;\; e_\lambda(x,\xi) = \mathrm{X}(\hat{p}; (x,\xi); \lambda, \lambda^{1-\nu}), \;\; \nu \in (0,1), \;\; \lambda \geqslant 1,$$

а $\mathrm{X}(Y;\lambda,\tau)$ — специальная гладкая срезающая функция с параметрами λ и τ, отображающая матрицу $Y \in L(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$ в матрицу $\mathrm{X} \in L(\mathbb{C}^N, \mathbb{C}^N)$. Для этой функции, в частности, выполнены условия

$$\mathrm{X}(Y;\lambda,\tau) = \begin{cases} I_N \text{ при } Y < \lambda I_N, \\ O_N \text{ при } Y > (\lambda+\tau) I_N, \end{cases}$$

где O_N и I_N — нулевая и единичная матрицы $N \times N$. Более точно, функция $e_\lambda(x,\xi)$ определяется по формуле

$$e_\lambda(x,\xi) = \sum_k \varphi_k(x,\xi) e_{\lambda,k}(x,\xi),$$

где

$$\sum_k \varphi_k(x,\xi) \equiv 1$$

— некоторое специальное (для оператора P) разбиение единицы для соответствующего покрытия $\{U_k\}$ пространства $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$,

$$e_{\lambda,k}(x,\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{\Gamma_{k\lambda}} (\hat{p}(x,\xi) - z)^{-1} dz, \quad (x,\xi) \in U_k,$$

а $\Gamma_{k\lambda}$ — специально построенные простые контуры в комплексной плоскости, в частности, содержащие внутри себя все собственные числа матрицы $\hat{p}(x,\xi)$ при $(x,\xi) \in U_k$, меньшие λ. Такого типа конструкция для матричных операторов с дискретным спектром впервые была дана в работе [5].

Построенный по указанной схеме символ $e_\lambda(x,\xi)$ будет принадлежать пространству $APS^0_{\rho,\delta}$ при фиксированном λ, а соответствующий ему оператор $\mathcal{E}_\lambda$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 4.1 при $\nu \in (0, (\rho-\delta)(3M)^{-1})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Безяев В.И.* Асимптотика плотности состояний гипоэлиптических почти периодических операторов// Мат. сб. — 1978. — *24*, № 7. — С. 485–511.
2. *Левендорский С.З.* Метод приближенного спектрального проектора// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — *49*, № 6. — С. 1177–1228.
3. *Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А.* Спектральная теория дифференциальных операторов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1989. — *64*. — С. 5–242.
4. *Туловский В.Н., Шубин М.А.* Об асимптотическом распределении собственных значений псевдодифференциальных операторов в R^n// Мат. сб. — 1973. — *92*, № 4. — С. 571–588.
5. *Фейгин В.И.* Асимптотическое распределение собственных чисел для гипоэллиптических систем в $\mathbb{R}^n$// Мат. сб. — 1976. — *99*, № 4. — С. 594–614.
6. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. — М.: Мир, 1986.
7. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. — М.: Мир, 1987.
8. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1976. — *35*. — С. 103–164.

9. *Шубин М. А.* Теорема Вейля для оператора Шредингера с почти-периодическим потенциалом// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1976. — № 2. — С. 84–88.
10. *Шубин М. А.* Плотность состояний для самосопряженных эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1978. — *3*. — С. 243–275.
11. *Coburn L. A., Moyer R. D., Singer I. M.* C*-algebras of almost periodic pseudo-differential operators// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 279–307.
12. *Dixmier J.* Les algebres d'operateurs dans l'espace hilbertien (algebres de von Neumann). — Paris: Gauthier-Villars, 1969.
13. *Karol' A. I.* Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators of variable order// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2015. — *207*, № 2. — С. 236–248.
14. *Kumano-go H.* Algebras of pseudo-differential operators// J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A. — 1970. — *17*. — С. 31–50.

В. И. Безяев
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: vbezyaev@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-593-604 UDC 517.43

On Asymptotics of the Density of States for Hypoelliptic Almost Periodic Systems

© 2019 **V. I. Bezyaev**

Abstract. In this paper, we find the asymptotics of integrated density of states with remainder estimate for hypoelliptic systems with almost periodic (a.p.) coefficients. We use the approximate spectral projector method for matrix a.p. operators with continuous spectrum.

REFERENCES

1. V. I. Bezyaev, "Asimptotika plotnosti sostoyaniy gipoelipticheskikh pochti periodicheskikh operatorov" [Asymptotics of the density of states of hypoelliptic almost periodic operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1978, **24**, No. 7, 485–511 (in Russian).
2. S. Z. Levendorskiy, "Metod priblizhennogo spektral'nogo proektora" [Method of approximate spectral projector], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1985, **49**, No. 6, 1177–1228 (in Russian).
3. G. V. Rozenblyum, M. Z. Solomyak, and M. A. Shubin, "Spektral'naya teoriya differentsial'nykh operatorov" [Spectral theory of differential operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1989, **64**, 5–242 (in Russian).
4. V. N. Tulovskiy and M. A. Shubin, "Ob asimptoticheskom raspredelenii sobstvennykh znacheniy psevdodifferentsial'nykh operatorov v R^n" [On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudodifferential operators in R^n], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1973, **92**, No. 4, 571–588 (in Russian).
5. V. I. Feygin, "Asimptoticheskoe raspredelenie sobstvennykh chisel dlya gipoellipticheskikh sistem v $\mathbb{R}^n$" [Asymptotic distribution of eigenvalues for hypoelliptic systems in $\mathbb{R}^n$], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1976, **99**, No. 4, 594–614 (in Russian).
6. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 1* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
7. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 3* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
8. M. A. Shubin, "Psevdodifferentsial'nye pochti-periodicheskie operatory i algebry fon Neymana" [Pseudodifferential almost periodic operators and von Neumann algebras], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1976, **35**, 103–164 (in Russian).

9. M. A. Shubin, “Teorema Veylya dlya operatora Shredingera s pochti-periodicheskim potentsialom” [The Weil theorem for the Schrödinger operator with almost periodic potential], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1976, No. 2, 84–88 (in Russian).
10. M. A. Shubin, “Plotnost’ sostoyaniy dlya samosopryazhennykh ellipticheskikh operatorov s pochti-periodicheskimi koeffitsientami” [Density of states for self-adjoint elliptic operators with almost periodic coefficients], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1978, **3**, 243–275 (in Russian).
11. L. A. Coburn, R. D. Moyer, and I. M. Singer, “C*-algebras of almost periodic pseudo-differential operators,” *Acta Math.*, 1973, **130**, 279–307.
12. J. Dixmier, *Les algebres d’operateurs dans l’espace hilbertien (algebres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
13. A. I. Karol’, “Asymptotic behavior of the spectrum of pseudodifferential operators of variable order,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2015, **207**, No. 2, 236–248.
14. H. Kumano-go, “Algebras of pseudo-differential operators,” *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A*, 1970, **17**, 31–50.

V. I. Bezyaev
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: vbezyaev@mail.ru