

О ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ПРЯМОЛИНЕЙНОМ ДВИЖЕНИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА, НЕСУЩЕГО ПОДВИЖНУЮ ВНУТРЕННЮЮ МАССУ

2019 г. **Б. С. БАРДИН, А. С. ПАНЁВ**

Аннотация. Рассматривается движение механической системы, состоящей из корпуса (твёрдого тела) и внутренней массы (материальной точки), движущейся внутри него по окружности, центр которой совпадает с центром масс корпуса. Предполагается, что абсолютная величина скорости кругового движения внутренней массы постоянна. Корпус движется поступательно и прямолинейно по плоской горизонтальной поверхности, со стороны которой на него действуют силы вязкого и сухого кулонова трения. Движение внутренней массы происходит в вертикальной плоскости.

Выполнено полное качественное исследование динамики системы. Показано, что всегда существует единственный режим движения корпуса с периодически меняющейся скоростью. Изучены все возможные типы указанного периодического движения. Установлено, что при любой начальной скорости корпус в зависимости от значений параметров задачи либо выйдет на периодический режим движения за конечное время, либо будет асимптотически к нему приближаться.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	557
1. Уравнение движения	559
2. О характере движения корпуса с нулевой начальной скоростью. Периодические режимы движения	560
3. Предварительные замечания о свойствах решений уравнения движения корпуса	565
4. Анализ движения корпуса в области I	571
5. О качественном характере движения корпуса в области II	575
6. Исследование движения корпуса в области III	583
7. Выводы	587
Список литературы	588

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим механическую систему, состоящую из твёрдого тела массой M и движущейся внутри него материальной точки массой m . Тело находится на горизонтальной плоскости, на которую оно опирается своей плоской гранью. Движение точки внутри тела происходит в вертикальной плоскости по круговой траектории радиуса R , центр которой совпадает с центром масс тела. При движении (скольжении) тела в области его контакта с плоскостью возникают силы сухого и вязкого трения. Внутренняя масса с внешней средой не взаимодействует, а угловая скорость ω радиус-вектора, описывающего её круговое движение внутри тела, постоянна.

Следует отметить, что рассматриваемую здесь механическую систему можно также интерпретировать как твёрдое тело, внутри которого вращается маятник. Ось вращения маятника параллельна опорной плоскости и проходит через центр масс тела. К оси маятника приложен управляющий момент, который обеспечивает вращение маятника с постоянной угловой скоростью.

Исследование динамики тел, несущих подвижные массы, представляет не только теоретический интерес, но может иметь и прикладное значение для создания вибрационных роботов, движущихся посредством перемещения внутренних масс. Важным преимуществом таких устройств является то, что они не требуют специальных движителей (колес, гусениц и т. д.) и могут быть конструктивно выполнены в форме запаянных капсул. Это делает их устойчивыми к внешним воздействиям,

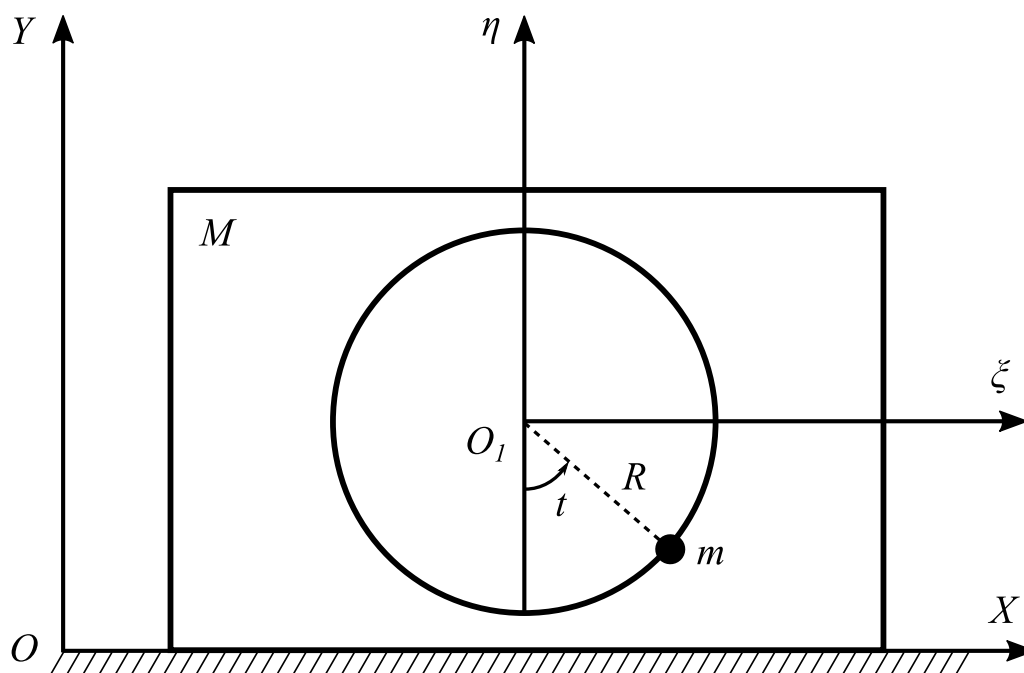


Рис. 1. Механическая система

поэтому вибрационные роботы могут оказаться весьма перспективными для работы в агрессивных средах как на твёрдых поверхностях, так и в жидкостях. В частности, они могут представлять интерес для космических проектов, при исследовании поверхностей небесных тел.

Прикладным задачам динамики, математического моделирования движения, а также вопросам конструирования мобильных роботов, способных передвигаться по поверхности благодаря перемещению внутренних масс, посвящено много работ [9, 10, 25–29, 34–38].

Строгое теоретическое исследование задач динамики и оптимального управления движением механических систем, состоящих из корпуса (несущего тела) и внутренних подвижных масс, было начато в работах [18, 22]. Работы [4, 6], посвящены поиску оптимального управления с целью максимизации средней скорости несущего тела. В предположении о малости коэффициента трения скольжения в работе [4] методами усреднения изучены стационарные периодические режимы движения. В [16] аналогичная методика применялась для исследования движения несущего тела при наличии вязкого трения, а в [17, 19] — для анализа движения тела по наклонной плоскости.

Рассматривался также случай двумерного движения [14, 23, 39]. В частности, были изучены способы маневрирования (поворотов) и перемещения несущего тела из исходного положения в заданное. Анализ безударных прыжков тела, несущего две подвижные массы, по горизонтальной плоскости был выполнен в [1].

Ряд работ посвящён анализу динамики и построению оптимального управления двухмассовой системой, состоящей из твёрдого тела и материальной точки, перемещающейся внутри тела по некоторой траектории. В [3] исследовалась динамика несущего тела в предположении, что внутренняя масса перемещается внутри него в вертикальной плоскости прямолинейно, а координаты её относительного движения меняются по гармоническому закону. В [33] исследовались режимы движения несущего тела, при которых оно совершает остановки, покоится в течении конечного интервала времени, а затем продолжает скольжение по горизонтальной плоскости, проведён анализ бифуркации указанных режимов. Построению оптимального управления движением корпуса при прямолинейном относительном движении внутренней массы посвящены работы [5, 7, 8]. Задачи оптимального управления движением корпуса в случае кругового относительного движения внутренней массы при некоторых ограничениях, наложенных на её ускорение, рассматривались в [11, 12]. В [24] построены траектории относительного движения внутренней массы, обеспечивающие оптимальное управление корпусом.

Целью данной работы является полное качественное исследование динамики описанной выше механической системы при всех допустимых значениях параметров и начальных условий. При

нулевой начальной скорости корпуса анализ динамики данной системы был выполнен в [2, 15]. В работах [30, 31] были изучены некоторые режимы движения корпуса при отличной от нуля начальной скорости. Без учёта сил вязкого трения анализ движения корпуса при всех значениях параметров задачи и начальных скоростях был выполнен в [32].

1. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Пусть параметры системы и начальная скорость корпуса выбраны так, что он совершает поступательное прямолинейное движение (скольжение без отрыва от горизонтальной плоскости). Тогда движение центра масс O_1 тела и внутренней подвижной массы будет происходить в некоторой фиксированной вертикальной плоскости, с которой свяжем абсолютную систему координат OXY (рис. 1). Введём ещё подвижную систему координат $O_1\xi\eta$ (рис. 1), начало которой расположено в центре масс O_1 тела, а оси $O_1\xi$ и $O_1\eta$ имеют соответственно горизонтальное и вертикальное направление. Без ограничения общности будем считать, что в начальный момент ($t = 0$) внутренняя масса, двигаясь против часовой стрелки, проходит нижнюю точку окружности. Тогда относительное движение массы описывается формулами

$$\xi_* = R \sin \omega t, \quad \eta_* = -R \cos \omega t.$$

В такой постановке задачи положение корпуса полностью задаётся координатой X его центра масс, а уравнение движения имеет вид

$$M\ddot{X} + m(\ddot{X} - R\omega^2 \sin \omega t) = F_c - \nu \dot{X}. \quad (1.1)$$

Через ν обозначен коэффициент вязкого трения, а через F_c — сила сухого трения, которая описывается моделью Кулона (см. например, [13]):

$$F_c = \begin{cases} -kN \operatorname{sign} \dot{X}, & \text{если } \dot{X} \neq 0, \\ m\ddot{\xi}_*, & \text{если } \dot{X} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}_*| \leq kN, \\ kN \operatorname{sign}(m\ddot{\xi}_*), & \text{если } \dot{X} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}_*| > kN, \end{cases} \quad (1.2)$$

где k — коэффициент сухого трения. Нормальная реакция N изменяется по закону

$$N = (M + m)g + R\omega^2 \cos \omega t.$$

Введём безразмерные координату x , время t' и параметры μ, λ :

$$X = \frac{Rmx}{M + m}, \quad t = \frac{t'}{\omega}, \quad \mu = \frac{(M + m)g}{Rm\omega^2}, \quad \alpha = \frac{\nu}{(M + m)\omega}, \quad (1.3)$$

где g — ускорение свободного падения.

Отметим, что новое время t' играет роль угловой координаты, определяющей положение внутренней массы на окружности. Далее мы будем опускать значок «штрих» в обозначении нового времени, сохраняя для него прежнее обозначение t .

В новых переменных уравнение движения корпуса по горизонтальной поверхности примет вид

$$\dot{u} + \alpha u = \sin t + f_c, \quad (1.4)$$

где $u = \dot{x}$ — безразмерная скорость корпуса, а функция f_c задаётся следующим образом:

$$f_c = \begin{cases} -k(\mu + \cos t) \operatorname{sign} u, & \text{если } u \neq 0; \\ -\sin t, & \text{если } u = 0 \text{ и } |\sin t| \leq k(\mu + \cos t); \\ -k(\mu + \cos t) \operatorname{sign}(\sin t), & \text{если } u = 0 \text{ и } |\sin t| > k(\mu + \cos t). \end{cases} \quad (1.5)$$

Согласно (1.4) и (1.5) движение корпуса в положительном направлении описывается уравнением

$$\dot{u} + \alpha u = f_1(t), \quad (1.6)$$

а в отрицательном направлении — уравнением

$$\dot{u} + \alpha u = f_2(t), \quad (1.7)$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяются по формулам

$$f_1(t) = \sin t - k(\mu + \cos t), \quad f_2(t) = \sin t + k(\mu + \cos t). \quad (1.8)$$

2. О ХАРАКТЕРЕ ДВИЖЕНИЯ КОРПУСА С НУЛЕВОЙ НАЧАЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ.
 ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ

Далее будем считать, что параметры системы удовлетворяют следующим неравенствам

$$k^2 < \frac{1}{\mu^2 - 1}, \quad \mu \geq 1. \quad (2.1)$$

Первое неравенство гарантирует, что существует такой момент времени, при котором горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная к внутренней массе, по абсолютной величине превзойдёт силу сухого трения, т. е. относительное движение внутренней массы может вывести корпус из состояния покоя. Второе неравенство означает, что во всё время движения вертикальная составляющая силы инерции по абсолютной величине не превосходит силы тяжести, приложенной в центре масс системы, т. е. корпус будет двигаться без отрыва от поверхности. Кроме того, будем считать, что геометрия корпуса и его начальная скорость таковы, что он не опрокидывается во время движения.

Исследование динамики корпуса начнем с определения моментов времени, в которые горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная к внутренней массе, по абсолютной величине равна силе сухого трения и противоположна ей по направлению. Эти моменты времени находятся из уравнения

$$\sin t = \pm k(\mu + \cos t). \quad (2.2)$$

На интервале $t \in (0, 2\pi)$ данное уравнение имеет следующие корни:

$$t_1 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right), \quad t_2 = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right), \quad (2.3)$$

$$t_3 = 2\pi - t_2, \quad t_4 = 2\pi - t_1.$$

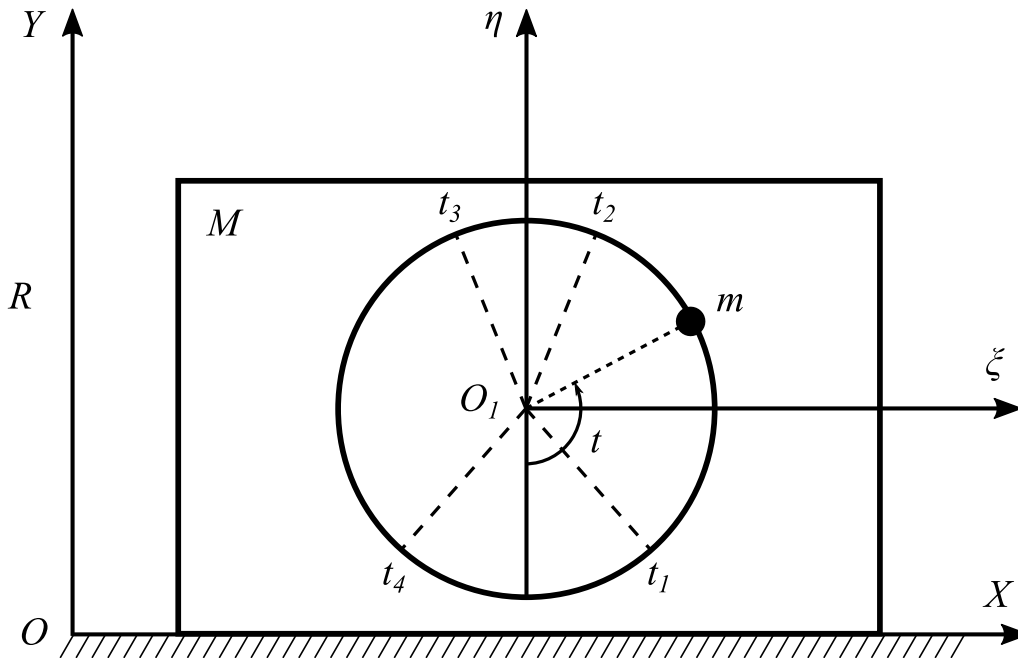


Рис. 2. Зоны замедления

Моменты времени t_i ($i = 1, 2, 3, 4$) задают интервалы (t_2, t_3) и $(t_4, t_1 + 2\pi)$, на которых ускорение корпуса противоположно направлению его скорости или равно нулю. При прохождении первого из указанных интервалов внутренняя масса находится в верхней части траектории движения, при прохождении второго — в нижней части. Указанные интервалы назовём соответственно верхней и нижней зонами замедления (рис. 2). Они играют важную роль при анализе характера движения корпуса. В частности, если корпус остановится в момент прохождения внутренней массой зоны

замедления, то он будет оставаться в состоянии покоя до тех пор, пока она не покинет зону замедления. Такое явление называют залипанием корпуса [8].

Отметим ещё, что имеет место следующие неравенство

$$t_1 + t_2 > \pi, \tag{2.4}$$

и тождество

$$\cos t_1 + k \sin t_1 = -(\cos t_2 + k \sin t_2) = \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}, \tag{2.5}$$

которыми мы воспользуемся ниже.

Далее в данном разделе мы предполагаем, что скорость корпуса при $t = t_1$ равна нулю, т. е. t_1 — момент начала движения. Ниже будет показано, что в зависимости от значений параметров k, μ, α движение системы может иметь качественно различный характер.

Движение с залипанием в верхней и нижней зонах замедления. Движение корпуса от момента времени t_1 до первой остановки описывается уравнением (1.6). Пусть корпус, начав движение в момент времени t_1 , совершит остановку в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I \in (t_2, t_3)$. Поскольку функция $u(t)$, полученная как решение уравнения (1.6), убывает на всём интервале $(t_2, t_3]$, то для того, чтобы она обращалась в нуль на указанном интервале, её значение на его правой границе $t = t_3$ должно быть либо отрицательным, либо обращаться в нуль. Таким образом, решая уравнение (1.6) с начальным условием $u(t_1) = 0$, находим следующее условие остановки корпуса на интервале $(t_2, t_3]$, т. е. в верхней зоне замедления:

$$\int_{t_1}^{t_3} e^{\alpha t} f_1(t) dt \leq 0. \tag{2.6}$$

Введём функции G_1 и G_2 :

$$G_1(t) = \frac{\alpha^2 f_1(t) - \alpha f_1'(t) - k\mu}{\alpha(\alpha^2 + 1)}, \quad G_2(t) = \frac{\alpha^2 f_2(t) - \alpha f_2'(t) + k\mu}{\alpha(\alpha^2 + 1)}. \tag{2.7}$$

Тогда неравенство (2.6) можно переписать в виде

$$e^{\alpha t_3} G_1(t_3) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1) \leq 0. \tag{2.8}$$

Напомним, что t_1 и t_3 выражаются через k и μ по формулам (2.3), поэтому левая часть неравенства (2.8) представляет собой функцию параметров k, μ и α . Таким образом, если параметры задачи k, μ и α удовлетворяют неравенствам (2.1) и (2.8), то корпус будет совершать движение с остановкой в верхней зоне замедления.

Итак, в момент времени t_1 корпус начинает движение и, перемещаясь в положительном направлении оси OX , останавливается в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I$. Далее на промежутке $(t_1 + \Delta t_*^I, t_3)$ корпус будет находиться в состоянии покоя, а затем начнёт движение в противоположном (отрицательном) направлении. С момента времени t_3 до следующей остановки движение корпуса описывается уравнением (1.7). Покажем, что если корпус остановится в верхней зоне замедления, то, начав движение в момент времени t_3 в отрицательном направлении, он остановится и в нижней зоне замедления, причём перемещение корпуса за период будет нулевым. Интегрируя уравнение (1.6) с начальным условием $u(t_1) = 0$, имеем

$$u(t_1 + \tau) = G_1(t_1 + \tau) - e^{-\alpha\tau} G_1(t_1). \tag{2.9}$$

Аналогично, интегрируя уравнение (1.7) с нулевым начальным условием $u(t_3) = 0$, получаем

$$u(t_3 + \tau) = G_2(t_3 + \tau) - e^{-\alpha\tau} G_2(t_3). \tag{2.10}$$

Используя тождество (2.5) и явные выражения (2.9), (2.10), можно показать, что

$$u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau). \tag{2.11}$$

В частности, имеет место равенство

$$u(t_1 + \Delta t_*^I) = -u(t_3 + \Delta t_*^I) = 0. \tag{2.12}$$

Последнее означает, что корпус совершит остановки в верхней и нижней зонах замедления в моменты времени

$$t = t_1 + \Delta t_*^I, \quad t = t_3 + \Delta t_*^I,$$

т. е. как в положительном, так и в отрицательном направлении корпус будет двигаться в течение одного и того же периода времени Δt_*^I . Величина Δt_*^I определяется из уравнения

$$u(t_1 + \Delta t_*^I) = 0.$$

Поскольку $u = \dot{x}$, то, интегрируя обе части равенства (2.11) по τ на интервале времени от 0 до Δt_*^I , имеем

$$x(t_1 + \Delta t_*^I) - x(t_1) = -x(t_3 + \Delta t_*^I) + x(t_3). \quad (2.13)$$

Равенство (2.13) означает, что перемещения корпуса в положительном и отрицательном направлениях равны по абсолютной величине, т. е. корпус совершает 2π -периодическое возвратно-поступательное движение.

Первое из неравенств (2.1) и неравенство (2.8) определяют в пространстве параметров k , μ и α область, в которой корпус совершает периодическое возвратно-поступательное движение с залипаниями в верхней и нижней зонах замедления. При таком движении перемещение корпуса за время полного оборота внутренней массы по окружности будет равно нулю. Указанную область будем называть областью I.

Движение с залипанием только в нижней зоне замедления. Пусть теперь условие (2.8) не выполнено, т. е. имеет место неравенство

$$e^{\alpha t_3} G_1(t_3) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1) > 0. \quad (2.14)$$

В этом случае корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in (t_3, t_4)$, т. е. после того как внутренняя масса пройдет верхнюю зону замедления и до её попадания в нижнюю зону замедления. Это нетрудно доказать от противного. Действительно, пусть

$$t_3 + \Delta t_*^{II} > t_4,$$

тогда

$$u(t_4) > 0.$$

С другой стороны, интегрируя уравнение (1.6) на интервале (t_1, t_4) с нулевым начальным условием, имеем

$$u(t_4) = e^{-\alpha t_4} \int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} [\sin t - k(\mu + \cos t)] dt, \quad (2.15)$$

или

$$u(t_4) = e^{-\alpha t_4} \left[\int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} [-k(\mu + \cos t)] dt + \int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} \sin t dt \right]. \quad (2.16)$$

Очевидно, что первое слагаемое в квадратных скобках правой части (2.16) будет отрицательным. Учитывая, что

$$t_4 = 2\pi - t_1,$$

второе слагаемое можно представить в следующем виде:

$$\int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} \sin t dt = \int_{t_1}^{\pi} e^{-\alpha t} (e^{2\alpha t} - e^{2\pi\alpha}) \sin t dt. \quad (2.17)$$

Подынтегральное выражение в правой части равенства (2.17) на интервале (t_1, π) может принимать только отрицательные значения, поэтому и второе слагаемое в квадратных скобках правой части (2.16) будет отрицательным. Из этого следует, что

$$u(t_4) < 0,$$

т. е. приходим к противоречию с предположением. Таким образом, если корпус не остановится при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления, то остановка обязательно произойдёт на интервале времени (t_3, t_4) . Величина Δt_*^{II} определяется из уравнения

$$e^{\alpha(t_3 + \Delta t_*^{II})} G_1(t_3 + \Delta t_*^{II}) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1) = 0. \quad (2.18)$$

После остановки в момент времени

$$t = t_3 + \Delta t_*^{II}$$

корпус, изменив направление, будет двигаться с отрицательной скоростью до новой остановки. Выясним, каким условиям должны удовлетворять параметры задачи k , μ и α , чтобы эта остановка произошла в нижней зоне замедления. На интервале времени от $t_3 + \Delta t_*^{II}$ до новой остановки скорость корпуса определяется в результате решения уравнения (1.7) с начальным условием

$$u(t_3 + \Delta t_*^{II}) = 0.$$

В момент времени t_4 скорость корпуса принимает отрицательное значение. Заметим теперь, что любое решение уравнения (1.7) является непрерывной и возрастающей функцией на интервале $(t_4, t_1 + 2\pi)$. Если эта функция принимает отрицательное значение на левой границе указанного интервала, то для её обращения в нуль на данном интервале необходимо и достаточно, чтобы на правой границе интервала (при $t_1 + 2\pi$) она принимала неотрицательное значение, т. е. было выполнено неравенство

$$u(t_1 + 2\pi) = e^{-\alpha(t_1 + 2\pi)} \int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt \geq 0. \quad (2.19)$$

Используя введённые выше обозначения, последнее неравенство можно переписать в виде

$$e^{\alpha(t_1 + 2\pi)} G_2(t_1) - e^{\alpha(t_3 + \Delta t_*^{II})} G_2(t_3 + \Delta t_*^{II}) \geq 0, \quad (2.20)$$

где Δt_*^{II} зависит от параметров задачи и находится из уравнения (2.18). Таким образом, если параметры k , μ и α принадлежат области, заданной неравенствами (2.14) и (2.20), то в момент времени t_1 корпус начнёт движение в положительном направлении, пройдёт без остановки верхнюю зону замедления и остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in (t_3, t_4]$. Затем корпус изменит направление движения и будет перемещаться до новой остановки, которая произойдёт в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in (t_4, t_1 + 2\pi]$, когда внутренняя масса будет находиться в нижней зоне замедления. После остановки корпус будет оставаться в состоянии покоя до момента времени $t_1 + 2\pi$. Это означает, что при движении корпуса с остановкой только в нижней зоне замедления, его скорость будет 2π -периодически меняющейся функцией времени. Область пространства параметров, заданную неравенствами (2.14) и (2.20), будем называть областью II.

Покажем теперь, что для значений параметров из области II корпус за один период изменения скорости, т. е. за время полного оборота внутренней массы по окружности, перемещается в положительном направлении.

Используя тождество (2.5), нетрудно показать, что для произвольного τ выполняется равенство

$$\sin(t_1 + \tau) - k(\mu + \cos(t_1 + \tau)) = -\sin(t_3 + \tau) - k(\mu + \cos(t_3 + \tau)). \quad (2.21)$$

Из выражения (2.21), следует, что при $\tau > \Delta t_*^{II}$ справедливо равенство

$$\dot{u}(t_1 + \tau) + \alpha u(t_1 + \tau) = -\dot{u}(t_3 + \tau) - \alpha u(t_3 + \tau). \quad (2.22)$$

Введём обозначение

$$g(\tau) = u(t_1 + \tau) + u(t_3 + \tau). \quad (2.23)$$

Тогда равенство (2.22) переписется в следующей эквивалентной форме:

$$\dot{g} = \alpha g. \quad (2.24)$$

Интегрируя уравнение (2.24) при $\tau > \Delta t_*^{II}$, получим

$$g(\tau) = g(\Delta t_*^{II}) e^{\alpha(\tau - \Delta t_*^{II})}, \quad (2.25)$$

или, учитывая обозначения (2.23),

$$u(t_1 + \tau) + u(t_3 + \tau) = e^{\alpha(\tau - \Delta t_*^{II})} u(t_1 + \Delta t_*^{II}). \quad (2.26)$$

Полагая в (2.26) $\tau = \Delta t_{**}^{II}$, имеем

$$u(t_1 + \Delta t_{**}^{II}) = e^{\alpha(\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II})} u(t_1 + \Delta t_*^{II}). \quad (2.27)$$

Поскольку в момент времени $t_1 + \Delta t_*^{II}$ скорость корпуса положительна, то на основании последнего равенства она будет положительна и в момент времени $t_1 + \Delta t_{**}^{II}$. Поэтому первая остановка корпуса произойдёт после момента времени $t_1 + \Delta t_{**}^{II}$, т. е. будет справедливым неравенство

$$t_1 + \Delta t_{**}^{II} < t_3 + \Delta t_*^{II},$$

которое можно переписать как

$$\Delta t_{**}^{II} < t_3 + \Delta t_*^{II} - t_1. \quad (2.28)$$

Нетрудно заметить, что выражение в правой части неравенства (2.28) задаёт время движения корпуса в положительном направлении. Поскольку в отрицательном направлении корпус будет двигаться в течение промежутка времени $\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II}$, то из неравенства (2.28) сразу следует, что время движения в положительном направлении превосходит время движения в отрицательном направлении. Вычислим путь, пройденный корпусом за период 2π :

$$x(t_1 + 2\pi) - x(t_1) = x(t_3 + \Delta t_{**}^{II}) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_3 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt - x(t_1). \quad (2.29)$$

Без ограничения общности можно положить $x(t_1) = 0$. Преобразуем интеграл в правой части (2.29):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_3 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt &= \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + \int_{t_1 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt + \int_{t_1 + \Delta t_{**}^{II}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + \int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_3 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + \int_{t_1 + \Delta t_{**}^{II}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + \int_{\Delta t_*^{II}}^{\Delta t_{**}^{II}} u(t + t_1) dt + \int_{\Delta t_*^{II}}^{\Delta t_{**}^{II}} u(t + t_3) dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Учитывая (2.26), последнее выражение можно переписать так:

$$\int_{t_1}^{t_3 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + \int_{t_1 + \Delta t_{**}^{II}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + u(t_1 + \Delta t_*^{II}) \frac{e^{\alpha(\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II})} - 1}{\alpha} > 0. \quad (2.31)$$

Все слагаемые в правой части (2.31), очевидно, положительны, поэтому корпус будет совершать периодическое движение с залипанием только в нижней зоне замедления, а перемещение корпуса за период будет положительным.

Движение с остановками вне зон замедления. Теперь предположим, что условие (2.20) не выполнено, т. е. справедливо следующее неравенство:

$$e^{\alpha(t_1 + 2\pi)} G_2(t_1) - e^{\alpha(t_3 + \Delta t_*^{II})} G_2(t_3 + \Delta t_*^{II}) < 0. \quad (2.32)$$

Тогда тело, начав движение в момент времени t_1 с положительной скоростью, остановится на промежутке (t_3, t_4) и сразу начнёт движение в отрицательном направлении до остановки на промежутке $(t_1 + 2\pi, t_2 + 2\pi)$. В этом случае движение корпуса не будет периодическим. За период времени 2π корпус дважды меняет направление движения на противоположное. Изменение направления движения с положительного на отрицательное происходит в моменты времени $2\pi n + t_*^{(n)}$, а

с отрицательного на положительное — в моменты времени $2\pi n + t_{**}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При заданных k , μ и α величины $t_*^{(n)}$ и $t_{**}^{(n)}$ определяются следующим образом. Сначала из уравнения

$$G_1(t_1)e^{\alpha t_1} - G_1(t_*^{(0)})e^{\alpha t_*^{(0)}} = 0$$

находится момент первой остановки $t_*^{(0)}$. Моменты следующих остановок определяются в результате последовательного решения уравнений

$$\begin{aligned} G_1(t_{**}^{(n)})e^{\alpha t_{**}^{(n)}} - G_1(t_*^{(n)})e^{\alpha t_*^{(n)}} &= 0, \\ G_2(t_*^{(n+1)})e^{\alpha(2\pi + t_*^{(n+1)})} - G_2(t_{**}^{(n)})e^{\alpha t_{**}^{(n)}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (2.32) движение корпуса не будет периодическим ни по скорости, ни по координате. Область пространства параметров, заданную неравенством (2.32) и неравенствами $\mu \geq 1$, $k > 0$, будем называть областью III.

Ниже будет показано, что при значениях параметров из области III движение будет асимптотически приближаться к некоторому единственному периодическому режиму движения без остановок в зонах замедления трением, а перемещение корпуса за период будет положительным.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КОРПУСА

Уравнение (1.4), описывающее движение корпуса, имеет при $u = 0$ разрыв в правой части и не удовлетворяет условию Липшица, поэтому к нему неприменимы классические теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Общие выводы о существовании, единственности и непрерывности решения уравнения (1.4) можно получить на основании теории, развитой для систем с разрывной правой частью [20, 21]. В частности, можно показать, что для уравнения (1.4) имеет место правосторонняя единственность решения, т. е. при $t > t_0$ всегда существует единственное решение, удовлетворяющее начальному условию $u(t_0) = u_0$. Также нетрудно показать, что при $t > t_0$ решение уравнения (1.4) непрерывно зависит от t , начального условия и параметров задачи k , μ . В данном разделе мы установим некоторые общие свойства решений уравнения (1.4), которые будут использованы ниже при анализе движения корпуса с произвольной начальной скоростью.

Покажем сначала, что если функция $u(t)$ является решением уравнения (1.4), то последовательность её значений $u(t + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$ обладает свойством монотонности. С этой целью рассмотрим два решения $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ уравнения (1.4). Эти решения являются непрерывными функциями t и при $t \geq t_1$ однозначно определяются своими начальными условиями

$$u^{(1)}(t_1) = u_0^{(1)}, \quad u^{(2)}(t_1) = u_0^{(2)}.$$

Пусть

$$u_0^{(1)} < u_0^{(2)},$$

тогда возможны два случая:

- либо $u^{(1)}(t) \neq u^{(2)}(t)$ при всех $t \geq t_1$ и из непрерывности функций $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ сразу следует, что $u^{(1)}(t) < u^{(2)}(t)$;
- либо существует такой момент времени t^* , что $u^{(1)}(t^*) = u^{(2)}(t^*) = 0$ и $u^{(1)}(t) \neq u^{(2)}(t)$ при $t_1 \leq t < t^*$.

В последнем случае из непрерывности $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ следует, что $u^{(1)}(t) < u^{(2)}(t)$ при $t_1 \leq t < t^*$, а из правосторонней единственности решения уравнения (1.4) с начальным условием $u(t^*) = 0$ следует, что при $t \geq t^*$ выполняется тождественное равенство $u^{(1)}(t) \equiv u^{(2)}(t)$. Таким образом, если $u_0^{(1)} < u_0^{(2)}$, то при всех $t \geq t_1$ имеет место неравенство $u^{(1)}(t) \leq u^{(2)}(t)$ и, в частности,

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi) \leq u^{(2)}(t_1 + 2\pi). \tag{3.1}$$

Предположим теперь, что

$$u^{(1)}(t_1) < u^{(1)}(t_1 + 2\pi).$$

В этом случае, выбирая начальное условие, определяющее решение $u^{(2)}(t)$, так, что

$$u^{(2)}(t_1) = u^{(1)}(t_1 + 2\pi),$$

в силу 2π -периодичности правой части уравнения (1.4) приходим к тождественному равенству

$$u^{(2)}(t) \equiv u^{(1)}(t + 2\pi),$$

которое позволяет переписать неравенство (3.1) в виде

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi) \leq u^{(1)}(t_1 + 4\pi). \quad (3.2)$$

Продолжая далее по индукции, имеем

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi n) \leq u^{(1)}(t_1 + 2\pi(n + 1)), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.3)$$

Таким образом, последовательность значений $u^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ является неубывающей.

Аналогично можно показать, что в случае

$$u^{(1)}(t_1) > u^{(1)}(t_1 + 2\pi)$$

будет выполнено неравенство

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi n) \geq u^{(1)}(t_1 + 2\pi(n + 1)), \quad n \in \mathbb{N},$$

т. е. последовательность значений $u^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ будет невозрастающей.

В предельном случае $u^{(1)}(t_1) = u^{(1)}(t_1 + 2\pi)$ начальные условия решений $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ совпадают, поэтому в силу единственности решения уравнения (1.4) при $t > t_1$ тождественно равны и сами эти решения

$$u^{(1)}(t) \equiv u^{(2)}(t).$$

С другой стороны, как было показано выше,

$$u^{(2)}(t) \equiv u^{(1)}(t + 2\pi),$$

поэтому при всех $t > t_1$ справедливо равенство

$$u^{(1)}(t) = u^{(1)}(t + 2\pi), \quad (3.4)$$

которое означает, что $u^{(1)}(t)$ является периодической функцией t .

Приведенные выше рассуждения остаются в силе, если в качестве начального момента времени выбрать не t_1 , а любое произвольное значение $t^* \geq t_1$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.1. Пусть функция $u(t)$, заданная на промежутке $[t_1; +\infty)$, является решением уравнения (1.4), тогда её значения $u(t^* + 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{N}$, образуют монотонную последовательность при любом $t^* \geq t_1$.

Исследуем теперь вопрос о существовании 2π -периодических решений уравнения (1.4), описывающих движение корпуса без залипания. Предположим, что уравнение (1.4) допускает указанное 2π -периодическое решение, которое далее будем обозначать $u_*(t)$. Покажем, что на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$ функция $u_*(t)$ дважды обращается в нуль и меняет свой знак. Действительно, рассуждая от противного, будем считать, что $u_*(t) \neq 0$ на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$, и для определённости положим $u_*(t) > 0$. Тогда из уравнения (1.6) имеем

$$u_*(t_1 + 2\pi) = e^{-\alpha(t_1 + 2\pi)} \int_{t_1}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_1(t) dt + e^{-2\pi\alpha} u_*(t_1). \quad (3.5)$$

Учитывая, что функция $f_1(t)$ принимает положительные значения при $t \in (t_1, t_2)$ и отрицательные при $t \in (t_2, t_1 + 2\pi)$, оценим интеграл в правой части (3.5):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_1(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_2}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_1(t) dt < \\ &< \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha t_2} f_1(t) dt + \int_{t_2}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t_2} f_1(t) dt = e^{\alpha t_2} \int_{t_1}^{t_1 + 2\pi} f_1(t) dt = -2\pi k \mu e^{\alpha t_2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_1(t) dt < -2\pi k \mu e^{\alpha t_2}. \quad (3.7)$$

Из (3.5) и (3.7), учитывая, что $e^{-2\pi\alpha} < 1$, приходим к неравенству

$$u_*(t_1 + 2\pi) < u_*(t_1) - 2\pi k \mu e^{-\alpha(t_1+2\pi-t_2)}. \quad (3.8)$$

Последнее противоречит условию 2π -периодичности $u_*(t)$. Поэтому функция $u_*(t)$ обязательно обратится в нуль и поменяет знак на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$. Кроме того, из непрерывности и 2π -периодичности $u_*(t)$ следует, что на указанном интервале $u_*(t)$ изменит свой знак чётное число раз.

Поскольку функция $u_*(t)$ описывает движение корпуса без залипания, то она может обратиться в нуль лишь на интервалах $[t_1; t_2]$ и $[t_3; t_4]$. Покажем, что на каждом из этих интервалов она может обратиться в нуль только один раз.

Пусть в момент времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ корпус покоился или двигался в положительном направлении, тогда на интервале от $t = t_0$ до первой остановки его скорость определяется в результате решения уравнения (1.6) и имеет следующий явный вид:

$$u(t) = e^{-\alpha t} \int_{t_0}^t e^{\alpha t} f_1(t) dt + e^{-\alpha(t-t_0)} u(t_0). \quad (3.9)$$

По предположению $u(t_0) \geq 0$, поэтому выражение (3.9) положительно на всём интервале $[t_1, t_2]$, т. е. двигаясь в момент времени t_0 с положительной скоростью, корпус на интервале $[t_1, t_2]$ сохранит направление своего движения, а его скорость не обратится в нуль.

Предположим теперь, что в момент времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ корпус двигался в отрицательном направлении. В этом случае на интервале времени от $t = t_0$ до первой остановки его скорость находится из уравнения (1.7). Правая часть этого уравнения на интервале $[t_1, t_2]$ положительна, поэтому его решения являются возрастающими функциями времени и при подходящем выборе начального условия $u(t_0) < 0$ обращаются в нуль на указанном интервале.

Из сказанного выше следует, в частности, что периодическое решение $u_*(t)$ уравнения (1.4) может обратиться в нуль на интервале $[t_1, t_2]$ только один раз, причём будет выполнено условие $u_*(t_1) < 0$. Аналогично можно показать, что и на интервале $[t_3, t_4]$ периодическое решение $u_*(t)$ уравнения (1.4) также может обратиться в нуль только один раз и в этом случае выполняется условие $u_*(t_3) > 0$.

Моменты времени $t_* \in [t_1, t_2]$ и $t_{**} \in [t_3, t_4]$, при которых периодическое решение $u_*(t)$ обращается в нуль, находятся из условий

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^{t_{**}} e^{\alpha t} f_1(t) dt &= 0, \\ \int_{t_{**}}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Условия (3.10) можно переписать явно в виде системы из двух уравнений относительно t_* и t_{**} :

$$\begin{aligned} G_1(t_*)e^{\alpha t_*} - G_1(t_{**})e^{\alpha t_{**}} &= 0, \\ G_2(t_{**})e^{\alpha t_{**}} - G_2(t_*)e^{\alpha(t_*+2\pi)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Система уравнений (3.11) имеет решение не при всех допустимых значениях параметров k, μ, α . Найдём необходимое условие существования решения системы (3.11), а именно, покажем от противного, что система (3.11) может иметь решение только для значений параметров из области III.

Пусть при значениях параметров k, μ, α из области I система уравнений (3.11) имеет решение, тогда величины t_* и t_{**} однозначно определяют периодическое движение корпуса без залипания в зонах замедления. Наряду с этим периодическим движением рассмотрим движение корпуса с

нулевой начальной скоростью $u(t_1) = 0$. Ранее было показано, что в этом случае корпус, начав движение в положительном направлении, останавливается в верхней зоне замедления, т. е. на интервале (t_2, t_3) . Момент $t_1 + \Delta t_*^I$ остановки корпуса определится из условия

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_*^I} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.12)$$

Функция $f_1(t)$ положительна на интервале (t_1, t_2) и отрицательна на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$, поэтому функция

$$F_1(t) = \int_{t_1}^t e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau$$

возрастает на интервале (t_1, t_2) и убывает на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$. Аналогично функция

$$F_1^*(t) = \int_{t_*}^t e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau$$

возрастает на интервале (t_*, t_2) и убывает на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$.

Принимая во внимание равенство

$$F_1(t) = F_1^*(t) + \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau$$

и учитывая, что в силу (3.12) $F_1(t_1 + \Delta t_*^I) = 0$, приходим к неравенству

$$F_1^*(t_1 + \Delta t_*^I) = - \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau < 0,$$

из которого следует, что на интервале $(t_2, t_1 + \Delta t_*^I)$ функция $F_1^*(t)$ непрерывна, монотонна и принимает значения противоположных знаков на границах этого интервала. Следовательно, она обращается в нуль в единственной точке данного интервала. С другой стороны, в силу (3.10) выполняется равенство $F_1^*(t_{**}) = 0$, поэтому $t_{**} \in (t_2, t_1 + \Delta t_*^I)$. Таким образом,

$$t_2 < t_{**} < t_1 + \Delta t_*^I < t_3,$$

т. е. корпус, начав движение в момент времени $t = t_*$, остановится в верхней зоне замедления. Последнее противоречит предположению о существовании периодического режима движения без залипания. Из данного противоречия следует, что в области I система (3.11) не имеет решений и периодического режима движения корпуса без залипаний не существует.

Предположим теперь, что система уравнений (3.11) имеет решение для значений параметров задачи из области II. Напомним, что в этой области существует периодический режим движения с залипанием в нижней зоне замедления, т. е. корпус, начав движение с нулевой начальной скоростью, остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II}$ на интервале $[t_3, t_4]$, который находится из условия

$$\int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.13)$$

Ранее было показано (см. (2.19)), что в области II

$$\int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt \geq 0. \quad (3.14)$$

Знак равенства в (3.14) имеет место на границе, разделяющей области II и III. Также как это было сделано для области I, можно показать, что в области II будут выполнены неравенства

$$t_{**} < t_3 + \Delta t_*^{II} < t_1 + 2\pi,$$

с учётом которых второе уравнение системы (3.10) можно переписать в виде

$$\int_{t_{**}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_1 + 2\pi}^{t_* + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = 0, \quad (3.15)$$

или в виде

$$\int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = - \int_{t_{**}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t) dt - \int_{t_1 + 2\pi}^{t_* + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt. \quad (3.16)$$

Оценим теперь знак правой части (3.16). С этой целью перепишем условие (3.13) в виде

$$\int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_*}^{t_{**}} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.17)$$

С учётом первого из уравнений (3.10), последнее равенство принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.18)$$

Заметим, теперь, что при любом t выполняется неравенство $f_2(t) > f_1(t)$, поэтому

$$\int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_{**}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t) dt > \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.19)$$

Учитывая теперь очевидное неравенство

$$\int_{t_1 + 2\pi}^{t_* + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt > \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_2(t) dt, \quad (3.20)$$

имеем

$$\int_{t_1 + 2\pi}^{t_* + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_{**}}^{t_3 + \Delta t_*^{II}} e^{\alpha t} f_2(t) dt > 0. \quad (3.21)$$

В силу (3.16) и (3.21) приходим к следующему неравенству:

$$\int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt < 0. \quad (3.22)$$

Таким образом, для существования решения системы (3.10) необходимо выполнение неравенства (3.22), что невозможно в силу (3.14). Следовательно, в области II система (3.10) действительных решений не имеет и периодического режима движения без залипания не существует. На основании проведенного исследования можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Для значений параметров вне подобласти III периодических решений уравнения (1.4), описывающих движение корпуса без залипания, не существует.*

Отметим, что в области III неравенство (3.22) выполняется. Численный анализ системы уравнений (3.10) показал, что в области III она имеет действительное решение. Аналитически этот факт будет установлен ниже в разделе 6. Здесь же покажем единственность указанного решения.

Пусть система (3.10) имеет два различных решения, т. е. существуют две пары $t_*^{(1)}, t_{**}^{(1)}$ и $t_*^{(2)}, t_{**}^{(2)}$, удовлетворяющие равенствам

$$\int_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0, \quad \int_{t_{**}^{(1)}}^{t_*^{(1)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = 0 \quad (3.23)$$

и

$$\int_{t_*^{(2)}}^{t_{**}^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0, \quad \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = 0. \quad (3.24)$$

Далее для определённости положим $t_*^{(2)} > t_*^{(1)}$. Тогда, очевидно, будет выполнено неравенство $t_{**}^{(1)} > t_{**}^{(2)}$, а из условий (3.23) и (3.24) имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt &= 0, \\ \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_*^{(1)}+2\pi}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$\int_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} [f_2(t) - f_1(t)] dt + \int_{t_*^{(1)}+2\pi}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt - \int_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.26)$$

После несложных преобразований последнее равенство можно представить в виде

$$2 \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} k(\mu + \cos t) dt + (e^{2\pi\alpha} - 1) \int_{t_*^{(1)}}^{t_*^{(2)}} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(2)}} e^{\alpha t} [f_2(t) - f_1(t)] dt = 0. \quad (3.27)$$

Все слагаемые выражения (3.27) всегда неотрицательны. Причём одновременно обратиться в нуль они могут только при $t_*^{(1)} = t_*^{(2)}$ и $t_{**}^{(1)} = t_{**}^{(2)}$, что и доказывает единственность решения системы уравнений (3.10).

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Уравнение (1.4) может иметь периодическое решение, описывающее движение корпуса без залипания, только при значениях параметров из области III. Если такое решение существует, то оно единственно.*

Отметим ещё свойства монотонности решений уравнения (1.4) на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$. Несложный анализ показывает, что правая часть уравнения (1.6) положительна на промежутке $(t_1; t_2)$ и отрицательна на промежутке $(t_2; t_1 + 2\pi)$, а правая часть уравнения (1.7) положительна на промежутках $[t_1; t_3)$, $(t_4; t_1 + 2\pi)$ и отрицательна на промежутке $(t_3; t_4)$. Поэтому справедливо следующее, важное для исследования общего характера движения корпуса, утверждение.

Лемма 3.4. *Пусть функция $u(t)$, заданная на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$, является решением уравнения (1.4), тогда:*

1. Если $u(t_1) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всём промежутке $[t_1; t_2]$ до значения $u(t_2) \leq 0$, либо она возрастает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_1; t_2]$, а затем принимает только положительные значения до конца указанного промежутка. Если же $u(t_1) > 0$, то функция $u(t)$ принимает положительные значения на всём промежутке $[t_1; t_2]$.
2. Если $u(t_2) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всём промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \geq 0$, либо она убывает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.
3. Если $u(t_2) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всём промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \leq 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.
4. Если $u(t_3) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всём промежутке $[t_3; t_4]$ до значения $u(t_4) \geq 0$, либо она убывает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_3; t_4]$, а затем принимает только отрицательные значения до конца указанного промежутка. Если же $u(t_3) < 0$, то функция $u(t)$ принимает отрицательные значения на всём промежутке $[t_3; t_4]$.
5. Если $u(t_4) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всём промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + 2\pi) \geq 0$, либо она убывает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.
6. Если $u(t_4) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всём промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + 2\pi) \leq 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.

Замечание. Из леммы 3.4 следует, что решения уравнения (1.4) не меняют своего знака на промежутках $[t_2; t_3]$ и $[t_4; t_1 + 2\pi]$.

4. АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ КОРПУСА В ОБЛАСТИ I

Полагая, что параметры k и μ принимают значения из области I, исследуем характер движения корпуса при отличной от нуля начальной скорости. Обозначим через $u_0(t)$ решение уравнения (1.4) с начальным условием

$$u_0(t_1) = 0,$$

которому соответствует периодическое движение корпуса с залипанием как в верхней, так и в нижней зонах замедления.

Для получения качественных выводов о движении корпуса при ненулевой начальной скорости исследуем поведение интегральных кривых уравнения (1.4) на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$. Определяющую роль здесь играют интегральные кривые, которым соответствует движение корпуса с остановкой на одной из границ верхней или нижней зоны замедления. В пространстве решений (t, u) уравнения (1.4) эти кривые являются границами областей, в которых решения имеют качественно различный характер.

Рассмотрим движение корпуса с остановкой в момент времени $t = t_2$. Решение уравнения (1.4), описывающее такое движение, будем обозначать через $u^{(2)}(t)$. При движении с положительной скоростью корпус на интервале времени от t_1 до t_2 сохраняет направление своего движения (лемма 3.4), поэтому остановка на указанном интервале возможна только при движении в отрицательном направлении. Таким образом, внутри промежутка $[t_1, t_2]$ функция $u^{(2)}(t)$ принимает только отрицательные значения и обращается в нуль на его правой границе. На промежутке $(t_2, t_3]$ функция $u^{(2)}(t)$ тождественно обращается в нуль, поэтому

$$u^{(2)}(t_3) = u_0(t_3) = 0.$$

Поскольку для уравнения (1.4) имеет место правосторонняя единственность решений, то при всех $t > t_3$ выполняется тождественное равенство

$$u^{(2)}(t) \equiv u_0(t).$$

Учитывая, что

$$u^{(2)}(t_2) = 0,$$

нетрудно найти начальное условие, определяющее решение $u^{(2)}(t)$:

$$u^{(2)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_2-t_1)}G_2(t_2). \quad (4.1)$$

Используя свойство монотонности решений на интервале $[t_2, t_3]$ (лемма 3.4), можно показать, что остановка корпуса в момент времени t_3 возможна как при движении в положительном направлении, так и при движении в отрицательном направлении. В первом случае движение описывается решением $u_+^{(3)}(t)$ уравнения (1.4) с начальным условием

$$u_+^{(3)}(t_1) = G_1(t_1) - e^{\alpha(t_3-t_1)}G_1(t_3), \quad (4.2)$$

а во втором случае — решением $u_-^{(3)}(t)$ с начальным условием

$$u_-^{(3)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_3-t_1)}G_2(t_3). \quad (4.3)$$

В силу правосторонней единственности решений уравнения (1.4), на интервале $[t_1, t_3]$ выполняются очевидные неравенства

$$u_+^{(3)}(t) > u_0(t), \quad u_-^{(3)}(t) < u_2(t),$$

поэтому функция $u_+^{(3)}(t_1)$ положительна на всём указанном интервале, а функция $u_-^{(3)}(t_1)$ — отрицательна. При всех $t > t_3$ имеют место тождественные равенства

$$u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t), \quad u_-^{(3)}(t) \equiv u_0(t).$$

Обозначим через $u_3^-(t)$ и $u_3^+(t)$ решения уравнения (1.4), заданные начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам

$$u_-^{(3)}(t_1) < u_3^-(t_1) < u^{(2)}(t_1), \quad u^{(2)}(t_1) < u_3^+(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$$

соответственно.

Поскольку

$$u_3^-(t_1) < 0,$$

то решение $u_3^-(t)$ возрастает на промежутке $(t_1, t_2]$, и принимает на его правой границе отрицательное значение. По лемме 3.4 это решение также возрастает и на промежутке $(t_2, t_3]$, обращается в нуль в некоторой его внутренней точке и сохраняет нулевое значение до его правой границы.

Начальное значение решения $u_3^+(t)$ может быть как положительным, так и отрицательным. Если

$$u_3^+(t_1) > 0,$$

то решение $u_3^+(t)$ положительно на всём промежутке $(t_1, t_2]$. Если же

$$u_3^+(t_1) < 0,$$

то решение $u_3^+(t)$ возрастает и обращается в нуль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_1, t_2]$, а затем до конца этого промежутка принимает только положительные значения. По лемме 3.4 решение $u_3^+(t)$ убывает на промежутке $(t_2, t_3]$, обращается в нуль в некоторой его внутренней точке и сохраняет нулевое значение до его правой границы. В силу правосторонней единственности решений уравнения (1.4), при всех $t > t_3$ выполняются тождественные равенства

$$u_3^-(t) \equiv u_0(t), \quad u_3^+(t) \equiv u_0(t).$$

В пространстве решений уравнения (1.4) интегральные кривые $u_-(t)$ лежат в области, ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$, а интегральные кривые $u_+(t)$ лежат в области, ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$. При $t \geq t_3$ эти области вырождаются в кривую $u_0(t)$. Таким образом, если в момент времени $t = t_1$ скорость корпуса находится в диапазоне значений от $u_-^{(3)}(t_1)$ до $u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус останавливается в верхней зоне замедления $[t_2, t_3]$ и остается в покое до момента времени $t = t_3$, а затем начинает совершать периодическое движение, которое описывается решением $u_0(t)$, т. е. при $t > t_3$ корпус движется возвратно поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

Пусть $u^{(4)}(t)$ — решение уравнения (1.4), описывающее движение корпуса с остановкой в момент времени t_4 . Покажем, что

$$u^{(4)}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t < t_4,$$

т. е. остановка корпуса в момент времени $t = t_4$ возможна лишь при движении корпуса в положительном направлении. Действительно, рассуждая от противного, предположим сначала, что при некотором $t^* < t_3$ выполняется

$$u^{(4)}(t^*) < 0.$$

Тогда, если

$$u_-^{(3)}(t^*) < u^{(4)}(t^*) < 0,$$

то, как показано выше, при всех $t > t_3$ выполняется тождественное равенство

$$u^{(4)}(t) \equiv u_0(t)$$

и, в частности,

$$u^{(4)}(t_4) \equiv u_0(t_4) < 0.$$

Если же

$$u^{(4)}(t^*) < u_-^{(3)}(t^*),$$

то при всех $t > t^*$ выполняется неравенство

$$u^{(4)}(t) \leq u_-^{(3)}(t),$$

а значит,

$$u^{(4)}(t_4) \leq u_-^{(3)}(t_4) = u_0(t_4) < 0.$$

В обоих случаях приходим к противоречию с условием

$$u^{(4)}(t_4) = 0.$$

Пусть теперь

$$t_3 < t^* < t_4 \quad \text{и} \quad u^{(4)}(t^*) < 0,$$

тогда, интегрируя уравнение (1.7) на интервале от t^* до t_4 с начальным условием

$$u(t_*) = u^{(4)}(t_*) < 0,$$

имеем

$$u^{(4)}(t_4) = e^{-\alpha t_4} \int_{t^*}^{t_4} e^{\alpha t} f_2(t) dt + e^{-\alpha(t_4-t^*)} u^{(4)}(t^*). \quad (4.4)$$

Функция $f_2(t)$ принимает на интервале (t_3, t_4) только отрицательные значения, поэтому правая часть выражения (4.4) отрицательна. Следовательно, и в этом случае приходим к противоречию с условием

$$u^{(4)}(t_4) = 0.$$

Таким образом,

$$u^{(4)}(t) > 0$$

на всём интервале t_1, t_4 и поэтому является решением уравнения (1.6) на указанном интервале. Несложные вычисления показывают, что это решение задаётся следующим начальным условием:

$$u^{(4)}(t_1) = G_1(t_1) - e^{\alpha(t_4-t_1)} G_1(t_4). \quad (4.5)$$

Обозначим через $u_4^+(t)$ решения уравнения (1.4) с начальными значениями из диапазона от $u_+^{(3)}(t_1)$ до $u^{(4)}(t_1)$. На интервале $[t_1, t_3]$ для этих решений выполнено неравенство

$$u_4^+(t) > u_+^{(3)}(t)$$

и, в частности,

$$u_4^+(t_3) > 0.$$

Поэтому по лемме 3.4 решение $u_4^+(t)$ сначала убывает на интервале $[t_3, t_4]$, обращается в нуль в некоторой внутренней точке и сохраняет отрицательное значение до конца этого интервала, т. е.

$$u_4^+(t_4) < 0.$$

Следовательно, снова применяя лемму 3.4, приходим к заключению, что решения $u_4^+(t)$ возрастают при $t > t_4$ и, в силу неравенства

$$u_4^+(t) > u_+^{(3)}(t)$$

с учётом непрерывности и правосторонней единственности, обращаются в нуль в некоторой внутренней точке интервала $(t_4, t_1 + 2\pi)$, а затем остаются тождественно равными нулю до момента времени $t_1 + 2\pi$. Таким образом, при $t > t_1 + 2\pi$ справедливо тождественное равенство

$$u_4^+(t) \equiv u_0(t).$$

Из сказанного выше следует, что, если в момент времени t_1 скорость корпуса имела значение из диапазона от $u_+^{(3)}(t_1)$ до $u^{(4)}(t_1)$, то, двигаясь в положительном направлении, корпус остановится на интервале (t_3, t_4) и сразу начнёт движение в отрицательном направлении до остановки в нижней зоне замедления, после чего он будет оставаться в покое до момента времени $t_1 + 2\pi$, т. е. выйдет на периодический режим движения.

Пусть $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ — решения уравнения (1.4), описывающие движение корпуса, при котором он, двигаясь в положительном и отрицательном направлениях соответственно, совершит остановку в момент времени $t_1 + 2\pi$. Как было показано ранее, решения $u_+^{(4)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$ не меняют знака на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi]$, поэтому в силу очевидных неравенств

$$u_+^{(4)}(t_1) < u_+^{(1)}(t), \quad u_-^{(3)}(t) > u_-^{(1)}(t)$$

решения $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ также не меняют знака на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi]$. Таким образом, на всём интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ функции $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ являются решениями уравнений (1.6) и (1.7) соответственно. Можно показать, что $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ определяются начальными условиями

$$u_+^{(1)}(t_1) = (1 - e^{2\pi\alpha})G_1(t_1), \quad (4.6)$$

$$u_-^{(1)}(t_1) = (1 - e^{2\pi\alpha})G_2(t_1). \quad (4.7)$$

Поскольку обе функции $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ обращаются в нуль в момент времени $t = t_1 + 2\pi$, то

$$u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi) = u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi) = u_0(t_1 + 2\pi) = 0$$

и, следовательно, при всех $t > t_1 + 2\pi$ выполняются тождественные равенства

$$u_+^{(1)}(t) \equiv u_0(t), \quad u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t).$$

Обозначим через $u_1^+(t)$ и $u_1^-(t)$ решения с начальными условиями, удовлетворяющими $u^{(4)}(t_1) < u_1^+(t_1) < u_+^{(1)}(t_1)$ и $u_-^{(1)}(t_1) < u_1^-(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$. В силу правосторонней единственности решения уравнения (1.4) будут справедливы следующие неравенства:

$$u^{(4)}(t) \leq u_1^+(t) \leq u_+^{(1)}(t), \quad u_-^{(1)}(t) \leq u_1^-(t) \leq u_-^{(3)}(t).$$

Учитывая теперь, что при $t > t_1 + 2\pi$ выполняются равенства

$$u^{(4)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t) \equiv u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t),$$

приходим к тождественным равенствам

$$u_1^+(t) \equiv u_1^-(t) \equiv u_0(t),$$

которые также будут справедливы при $t > t_1 + 2\pi$.

Таким образом, если начальная скорость корпуса лежит в диапазоне от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_-^{(3)}(t_1)$ или от $u^{(4)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус, двигаясь в отрицательном или положительном направлениях соответственно, остановится в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до её правой границы, а затем начнёт совершать периодические возвратно-поступательные движения с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

Объединяя результаты проведенного исследования, можно утверждать, что если начальная скорость принадлежит диапазону значений от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$, то в течение промежутка времени $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус выйдет на вышеуказанный периодический режим движения.

Остается рассмотреть случай движения корпуса, когда его начальная скорость лежит вне диапазона значений от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$. Пусть

$$u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1),$$

тогда в силу правосторонней единственности решения уравнения (1.4) функция $u(t)$ будет сохранять положительный знак на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi)$. В этом случае скорость корпуса за один оборот внутренней массы по окружности уменьшится на конечную величину. Действительно, интегрируя уравнение (1.6) на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$, имеем

$$u(t_1 + 2\pi) = e^{-2\pi\alpha}u(t_1) + (1 - e^{-2\pi\alpha})G_1(t_1). \quad (4.8)$$

Из (4.8) получаем следующую оценку изменения скорости корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$:

$$u(t_1 + 2\pi) - u(t_1) < u(t_1 + 2\pi) - e^{-2\pi\alpha}u(t_1) = (1 - e^{-2\pi\alpha})G_1(t_1) = -e^{-2\pi\alpha}u_+^{(1)}(t_1). \quad (4.9)$$

Аналогичное утверждение справедливо и для случая движения без остановок в отрицательном направлении. В частности, если

$$u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

то имеет место следующая оценка изменения скорости корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$:

$$u(t_1 + 2\pi) - u(t_1) > u(t_1 + 2\pi) - e^{-2\pi\alpha}u(t_1) = (1 - e^{-2\pi\alpha})G_2(t_1) = -e^{-2\pi\alpha}u_-^{(1)}(t_1). \quad (4.10)$$

Таким образом, если в начальный момент $t = t_1$ скорость корпуса меньше $u_-^{(1)}(t_1)$ или больше $u_+^{(1)}(t_1)$, то за один оборот внутренней массы по окружности она уменьшится по модулю на конечную величину. Поэтому через конечное число оборотов значение скорости попадет в диапазон значений от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$. Следовательно, в течение конечного промежутка времени движение корпуса выйдет на периодический режим, который описывается решением $u_0(t)$.

На рис. 3 сверху представлено пространство решений уравнения (1.4), построенное на основе проведенного выше анализа и позволяющее получить полную качественную картину движения корпуса для значений параметров из области I. Часть пространства решений, ограниченная горизонтальными пунктирными прямыми линиями, показана в нижней части рис. 3 в увеличенном масштабе. Жирными линиями изображены интегральные кривые, разделяющие пространство решений на области, для которых движение корпуса имеет качественно различный характер. В частности, интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$ ограничивают область, соответствующую движению корпуса, при котором он на интервале времени $[t_1; t_1 + 2\pi]$ совершит остановку в зоне замедления и выйдет на периодический режим.

Суммируя результаты данного раздела, можно сделать следующий вывод. *Если параметры задачи принимают значения из области I, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в периодический режим, т. е. будет двигаться возвратно-поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.*

5. О КАЧЕСТВЕННОМ ХАРАКТЕРЕ ДВИЖЕНИЯ КОРПУСА В ОБЛАСТИ II

Анализ движения корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ для значений параметров из области II можно выполнить так же, как это было сделано в предыдущем разделе для значений параметров из области I. Не останавливаясь на деталях этого анализа, опишем его основные результаты. Здесь возможны два качественно различных случая:

$$u_-^{(3)}(t_1) > u_-^{(1)}(t_1)$$

и

$$u_-^{(3)}(t_1) < u_-^{(1)}(t_1).$$

Уравнение $u_-^{(3)}(t_1) = u_-^{(1)}(t_1)$ разделяет область II на две подобласти IIa и IIb. При $\alpha = 0,25$ они изображены на рис. 4.

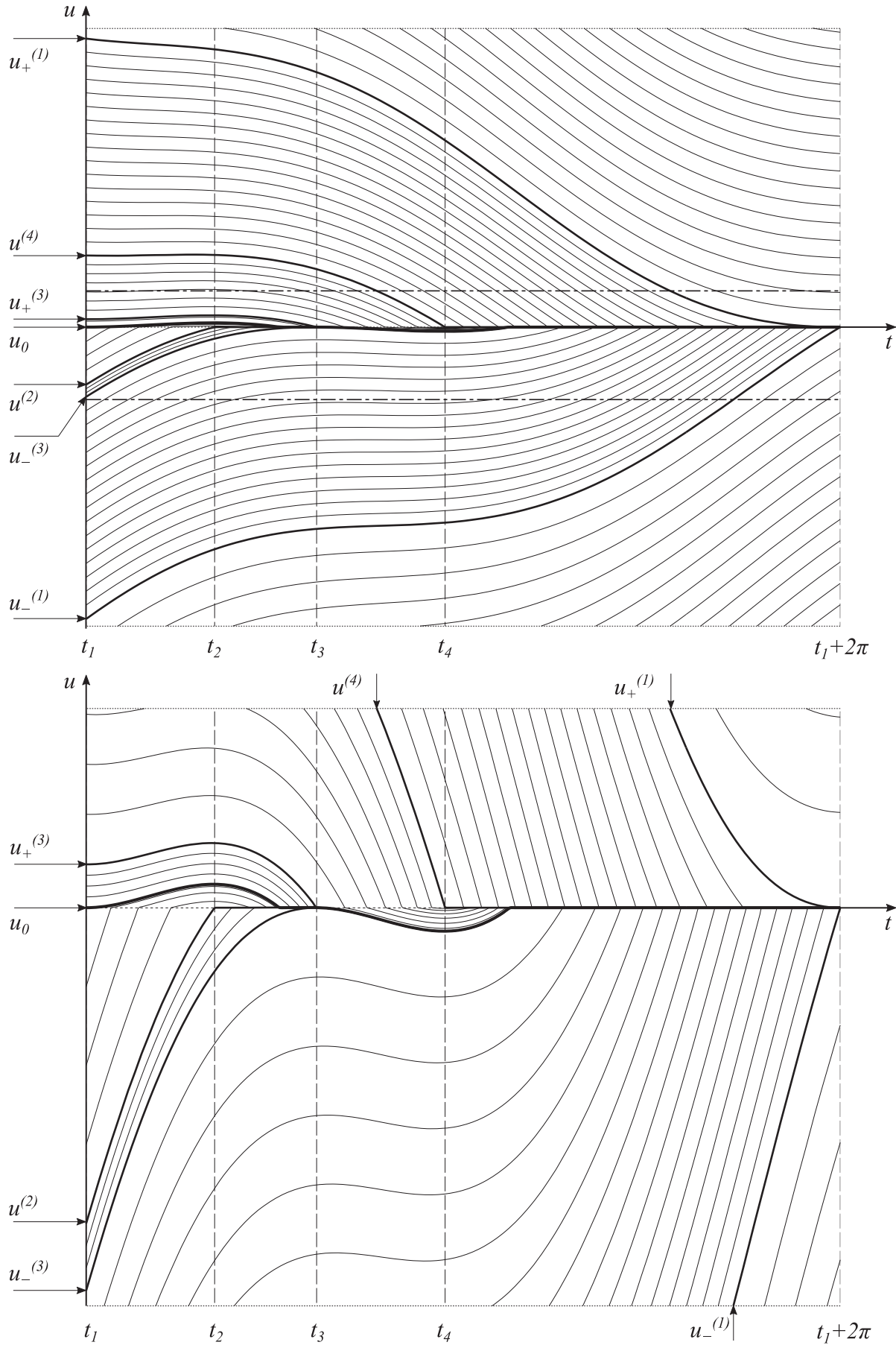


Рис. 3. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти I ($k = 0,7, \mu = 1,5, \alpha = 0,3$).

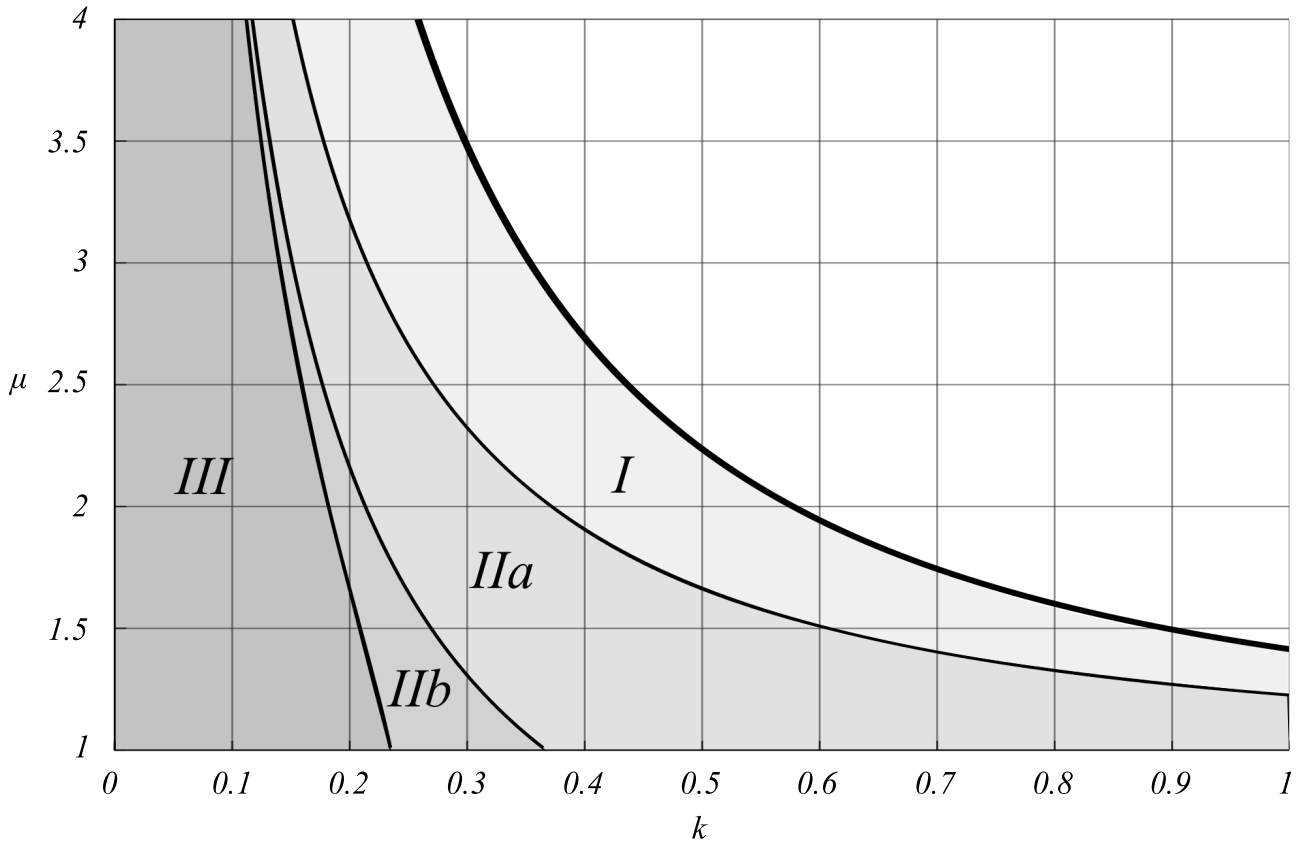


Рис. 4. Области возможных режимов движения.

Если выполняется неравенство

$$u_{-}^{(3)}(t_1) > u_{-}^{(1)}(t_1),$$

где величины $u_{-}^{(3)}(t_1)$, $u_{-}^{(1)}(t_1)$ вычисляются по формулам (4.3), (4.7), то, как и для значений параметров из области I, при начальной скорости $u(t_1) \notin [u_{-}^{(1)}(t_1), u_{+}^{(1)}(t_1)]$, корпус на всём интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться без остановки, а его скорость на указанном интервале уменьшится на конечную величину. Если же $u(t_1) \in [u_{-}^{(1)}(t_1), u_{+}^{(1)}(t_1)]$, то на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус совершит остановку в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до конца этого интервала, после чего начнёт двигаться 2π -периодически, останавливаясь и залипая только в нижней зоне замедления. На рис. 5 представлено пространство решений уравнения (1.4), которое даёт полную характеристику движения корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ в описанном выше случае.

Если выполнено неравенство

$$u_{-}^{(3)}(t_1) < u_{-}^{(1)}(t_1),$$

т. е. значения параметров принадлежат подобласти IIb, то решение $u_{-}^{(3)}(t)$ описывает движение корпуса в отрицательном направлении с остановкой в момент времени $t = t_3$ и без остановки в нижней зоне замедления. Поэтому при начальной скорости

$$u(t_1) < u_{-}^{(3)}(t_1)$$

корпус на всём интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении без остановок, и за время движения его скорость по модулю уменьшится на конечную величину. В пространстве решений уравнения (1.4), представленном на рис. 6, такому движению соответствуют интегральные кривые, расположенные ниже кривой $u_{-}^{(3)}(t)$.

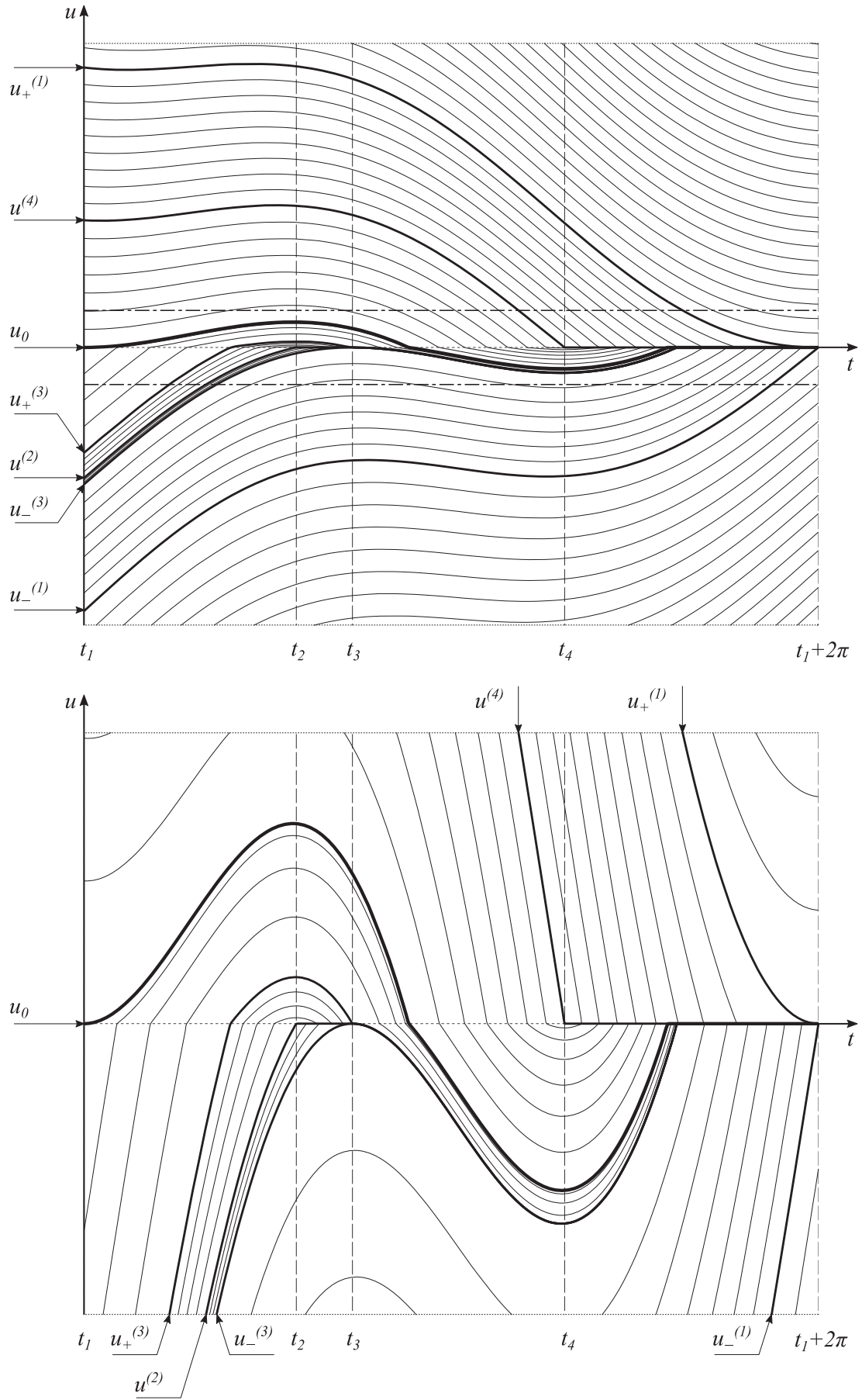


Рис. 5. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти IIa ($k = 0,35, \mu = 1,5$).

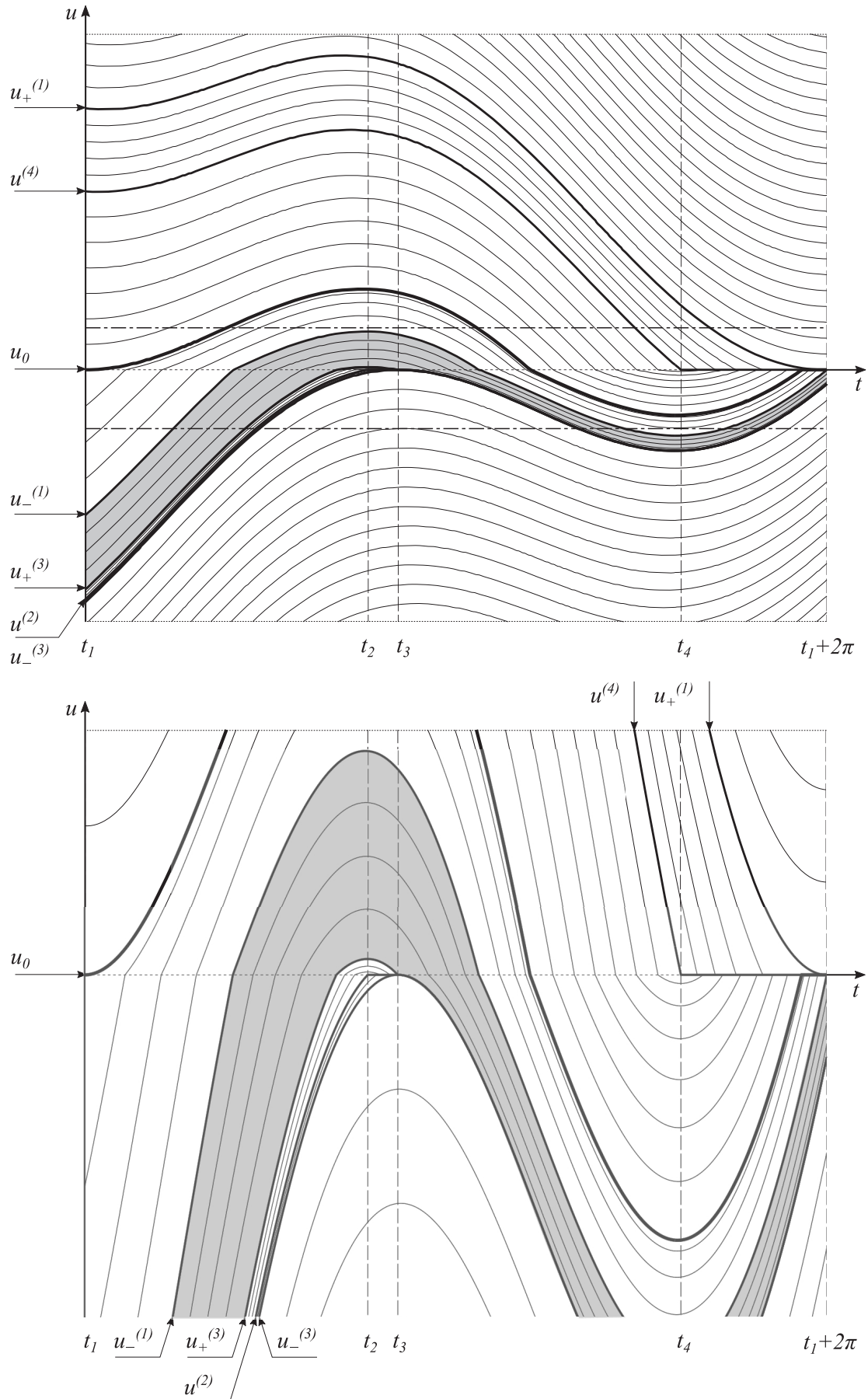


Рис. 6. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти IIb ($k = 0,225, \mu = 1,5, \alpha = 0,25$).

При

$$u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$$

корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении, также без остановок, а его скорость уменьшится на конечную величину. Этому движению соответствует область пространства решений, расположенная выше интегральной кривой $u_+^{(1)}(t)$ (см. рис. 6).

Предположим теперь, что в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq u_+^{(1)}(t_1).$$

Этому неравенству, в частности, удовлетворяет решение $u_-^{(1)}(t)$, которое на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ описывает движение корпуса с тремя остановками: в моменты времени $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$ на промежутках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_4]$ соответственно, а также в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. После каждой остановки корпус начинает движение в противоположном направлении. Можно показать, что при значениях параметров из подобласти IIb решение $u_-^{(1)}(t)$ задаётся начальным условием

$$u_-^{(1)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_*^{(1)} - t_1)} G_2(t_*^{(1)}), \quad (5.1)$$

где величина $t_*^{(1)}$ определяется в результате решения системы уравнений

$$\begin{aligned} e^{\alpha t_{**}^{(1)}} G_1(t_{**}^{(1)}) - e^{\alpha t_*^{(1)}} G_1(t_*^{(1)}) &= 0, \\ e^{\alpha(t_1 + 2\pi)} G_2(t_1) - e^{\alpha t_{**}^{(1)}} G_2(t_{**}^{(1)}) &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

относительно $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$.

Отметим, что при $t > t_1 + 2\pi$ интегральная кривая $u_-^{(1)}(t)$ описывает периодическое движение с залипанием в нижней зоне замедления, т. е.

$$u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t),$$

где, как и ранее, через $u_0(t)$ обозначено периодическое решение уравнения (1.4), заданное начальным условием $u_0(t_1) = 0$.

Заметим ещё, что в отличие от области I в области II интегральная кривая $u_+^{(3)}(t)$ описывает движение с отрицательной начальной скоростью, которая определяется по формуле

$$u_+^{(3)}(t_1) = G_2(t_1) - e^{\alpha(t_*^{(3)} - t_1)} G_2(t_*^{(3)}), \quad (5.3)$$

где $t_*^{(3)} \in (t_1, t_2)$ — момент остановки и изменения направления движения корпуса. Величина $u_+^{(3)}(t_1)$ находится из уравнения

$$e^{\alpha t_3} G_1(t_3) - e^{\alpha t_*^{(3)}} G_1(t_*^{(3)}) = 0. \quad (5.4)$$

На основе анализа поведения интегральных кривых (см. рис. 6) можно сделать следующие выводы.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < u_+^{(1)}(t_1),$$

то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$, после чего начнёт двигаться 2π -периодически с залипанием только в нижней зоне замедления. На рис. 6 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$; при $t > t_1 + 2\pi$ она вырождается в кривую $u_0(t)$.

2. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановок в зонах замедления, и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На рис. 6

такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$. Она выделена серым цветом.

3. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u^{(2)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1),$$

то корпус, двигаясь с отрицательной скоростью, остановится на интервале (t_1, t_2) и, изменив направление скорости, начнёт движение в положительном направлении до остановки в верхней зоне замедления, где он будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$. Затем он начнёт движение в отрицательном направлении. На рис. 6 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_+^{(3)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$; при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u^{(2)}(t) \equiv u_+^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

4. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u^{(2)}(t_1),$$

то корпус, двигаясь с отрицательной скоростью, остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнёт движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На рис. 6 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$; при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u^{(2)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

Докажем теперь, что для значений параметров из подобласти IIb независимо от величины начальной скорости корпус за конечное время выйдет на периодический режим движения, соответствующий интегральной кривой $u_0(t)$. Для этого достаточно показать, что если

$$u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

то через конечный промежуток времени корпус остановится в нижней зоне замедления.

Рассмотрим функцию, зависящую от k , μ и α :

$$\Delta(k, \mu, \alpha) = u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) - u_+^{(3)}(t_1) = \int_{t_3}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} f_2(t_1) dt - u_+^{(3)}(t_1). \quad (5.5)$$

На границе, разделяющей область II на подобласти IIa и IIb, выполнено равенство

$$u_-^{(3)}(t_1) = u_-^{(1)}(t_1).$$

Нетрудно показать, что данное равенство можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$u_-^{(3)}(t_1 + 2\pi) = 0 \quad \text{или} \quad u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) = 0.$$

Следовательно, если параметры k , μ и α лежат на границе, разделяющей подобласти IIa и IIb, то

$$\Delta(k, \mu, \alpha) = -u_+^{(3)}(t_1) > 0, \quad (5.6)$$

т. е. функция $\Delta(k, \mu, \alpha)$ принимает только положительные значения. Покажем, что в самой подобласти IIb она не может принимать отрицательные значения. Действительно, $\Delta(k, \mu, \alpha)$ непрерывно зависит от своих аргументов k , μ и α , поэтому, если она в подобласти IIb при некоторых значениях параметров примет отрицательное значение, то в подобласти IIb должен существовать такой набор значений k_0 , μ_0 , α_0 при котором функция $\Delta(k, \mu, \alpha)$ обращается в нуль. Это означает, что в данном случае будет выполнено условие

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) = u_+^{(3)}(t_1). \quad (5.7)$$

Условие (5.7) задаёт периодический режим движения без заливок, но как было показано ранее, в области II такого режима движения не существует. Данное противоречие доказывает положительность функции $\Delta(k, \mu, \alpha)$ в подобласти IIb и, как следствие, выполнение неравенства

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) > u_+^{(3)}(t_1). \quad (5.8)$$

На основании леммы 3.1 значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{N}$ образуют монотонную последовательность, а в силу последнего неравенства эта последовательность является неубывающей. Последовательность является ограниченной, а именно

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) \leq 0,$$

т.к. в противном случае

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) > u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

что невозможно в силу правосторонней единственности и непрерывности решений уравнения (1.4).

В силу монотонности и ограниченности последовательность $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ имеет предел. Покажем, что этот предел равен нулю. Действительно, если это не так, то существует предельный режим движения корпуса с 2π -периодически изменяющейся скоростью, при котором корпус не останавливается ни в нижней, ни в верхней зоне замедления, т. е. движется без залипания. Последнее противоречит лемме 3.2, на основании которой указанного режима движения корпуса в области Π не существует, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) = 0.$$

Более того, начиная с некоторого $n = N$, все члены последовательности $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ обращаются в нуль, так как в противном случае существует предельный 2π -периодический режим движения с остановкой корпуса на правой границе нижней зоны замедления, что невозможно в силу существования периодического режима движения с остановкой внутри нижней зоны замедления. Следовательно,

$$u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$$

при $t > t_1 + 2\pi N$.

Если начальная скорость $u(t_1)$ удовлетворяет неравенству

$$u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1),$$

то при $t > t_3$ корпус будет двигаться со скоростью $u_+^{(3)}(t)$. Последнее означает, что в данном случае при $t > t_1 + 2\pi N$ корпус выйдет на режим движения с 2π -периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

Если же начальная скорость корпуса лежит в интервале значений

$$u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1),$$

то в силу правосторонней единственности и непрерывности решений уравнения (1.4) при $t > t_1$ будет выполнено неравенство

$$u_+^{(3)}(t) \leq u(t) \leq u_-^{(1)}(t).$$

Поэтому

$$u(t) \equiv u_0(t)$$

при $t > t_1 + 2\pi N_*$, где N_* — некоторое натуральное число ($1 \leq N_* \leq N$). Следовательно, и в этом случае корпус за конечный промежуток времени выйдет на режим движения с 2π -периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

На основании результатов данного раздела приходим к следующему выводу. *Если параметры задачи принимают значения из области Π , то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в 2π -периодический режим, т. е. будет двигаться с 2π -периодически меняющейся скоростью, залипая только в нижней зоне замедления и перемещаясь за период в положительном направлении.*

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОРПУСА В ОБЛАСТИ III

Характер движения корпуса для значений параметров из области III можно исследовать так же, как это было сделано для областей I и II. В частности, при начальной скорости

$$u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$$

корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении, и за время движения его скорость по модулю уменьшится на конечную величину, а при

$$u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$$

корпус на указанном интервале будет двигаться в положительном направлении, и его скорость также уменьшится на некоторую конечную величину. Если же начальная скорость корпуса лежит в диапазоне

$$u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq u_+^{(1)}(t_1),$$

то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ он будет совершать остановки, меняя направление движения на противоположное или залипая в зонах замедления. Рассмотрим этот случай более подробно.

На рис. 7 изображено пространство решений уравнения (1.4), построенное для значений параметров из области III. Как и в области II, определяющую роль здесь играют интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$, $u_+^{(3)}(t)$, $u_-^{(3)}(t)$. На рис. 7 они выделены жирными линиями. Заметим только, что в отличие от области II, в области III интегральной кривой $u_-^{(1)}(t)$ соответствует движение корпуса с двумя остановками: в момент времени $t_*^{(1)}$ на промежутке $[t_3, t_4]$ и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. В области III эта интегральная кривая задаётся начальным условием

$$u_-^{(1)}(t_1) = G_1(t_1) - e^{\alpha(t_*^{(1)} - t_1)} G_1(t_*^{(1)}), \tag{6.1}$$

где $t_*^{(1)}$ — корень уравнения

$$e^{\alpha(t_1 + 2\pi)} G_2(t_1) - e^{\alpha t_*^{(1)}} G_2(t_*^{(1)}) = 0, \tag{6.2}$$

принадлежащий промежутку $[t_3, t_4]$. Начальные условия, определяющие интегральные кривые $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$ вычисляются по формулам (4.3) и (5.3) соответственно.

На основе анализа поведения интегральных кривых (1.4) можно сделать следующие выводы о движении корпуса на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) \leq u_+^{(1)}(t_1),$$

то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$. На рис. 7 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$; при $t \geq t_1 + 2\pi$ эти интегральные кривые совпадают ($u_-^{(1)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t)$), и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

2. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq u_-^{(1)}(t_1),$$

то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления, и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На рис. 7 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

3. Если в начальный момент выполнено неравенство

$$u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1),$$

то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнёт движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$.

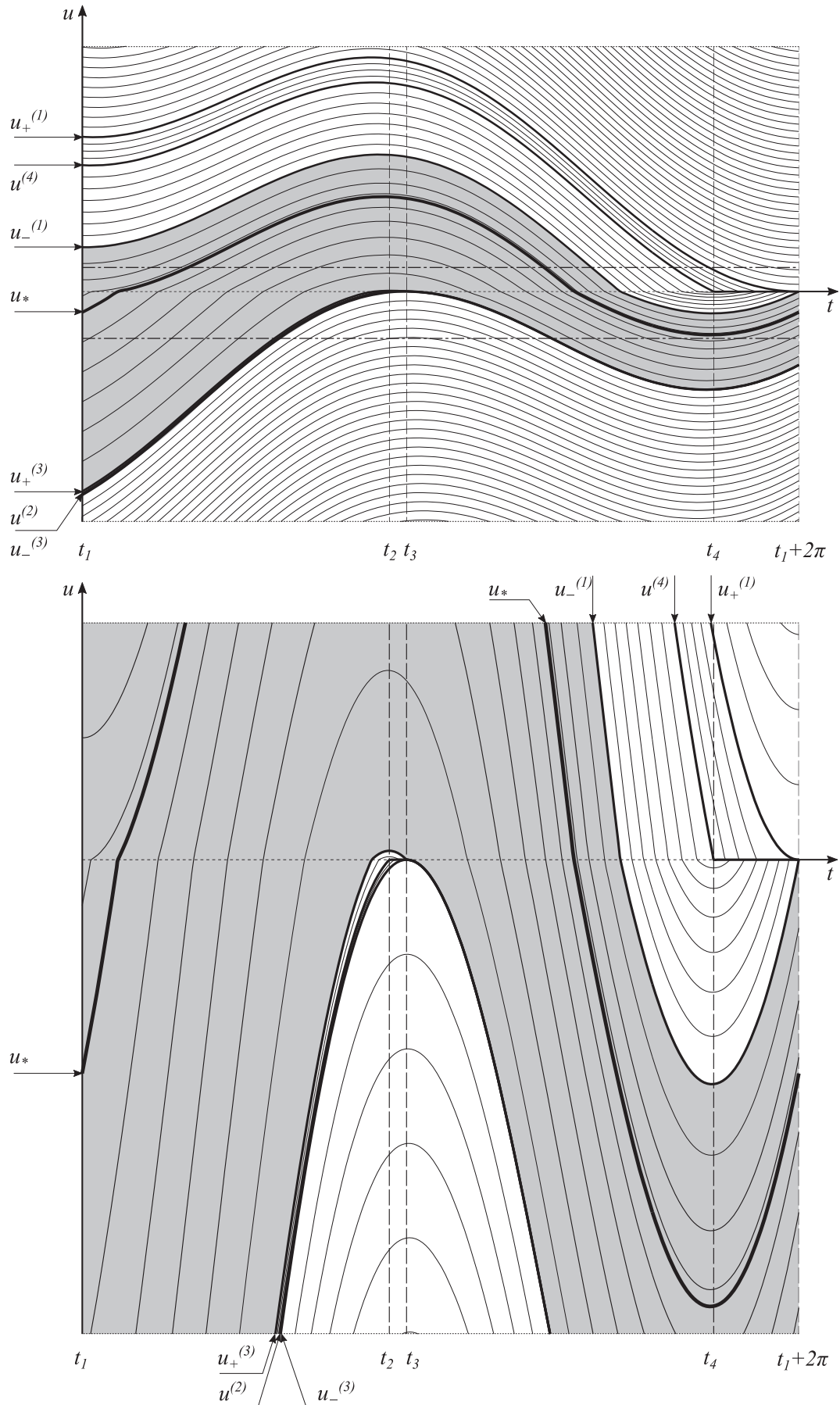


Рис. 7. Пространство решений уравнения (1.4) в подобласти III ($k = 0,15$, $\mu = 1,5$, $\alpha = 0,25$).

На рис. 7 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$; при $t \geq t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$), и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

Сформулированные выше утверждения позволяют сделать важные выводы о движении корпуса на бесконечном интервале времени. В частности, если в начальный момент времени

$$u(t_1) \geq u_-^{(1)}(t_1),$$

то при некотором натуральном n либо выполняется равенство

$$u(t_1 + 2\pi n) = u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

т. е. при $t \geq t_1 + 2\pi n$ движение корпуса будет описываться решением $u_-^{(1)}(t)$, либо выполняется неравенство

$$u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n).$$

Аналогично, если

$$u(t_1) \leq u_+^{(3)}(t_1),$$

то при некотором целом неотрицательном m , либо будет выполнено равенство

$$u(t_3 + 2\pi m) = u_+^{(3)}(t_3 + 2\pi m),$$

т. е. при $t \geq t_3 + 2\pi m$ движение корпуса будет описываться решением $u_+^{(3)}(t)$, либо будет выполнено неравенство

$$u_+^{(3)}(t) < u(t_3 + 2\pi m) < u_-^{(1)}(t_3 + 2\pi m).$$

Таким образом, чтобы получить выводы о предельном характере движения корпуса, необходимо исследовать поведение решений уравнения (1.4), заданных начальными условиями из промежутка

$$u_+^{(3)}(t) \leq u(t_1 + 2\pi n) \leq u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

на неограниченном интервале времени. Исследуем сначала свойства монотонности решения $u_+^{(3)}(t)$. В частности, покажем, что выполняется неравенство

$$u_+^{(3)}(t_1) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi). \tag{6.3}$$

Решение $u_+^{(3)}(t)$ описывает движение, при котором корпус в некоторый момент времени $t_*^{(3)} > t_1$ начинает движение в положительном направлении и движется до остановки в момент времени t_3 . Затем он сразу начинает движение в противоположном направлении. Покажем, что следующая остановка корпуса произойдёт в некоторый момент времени $t_{**}^{(3)} < t_*^{(3)} + 2\pi$. Поскольку на интервале времени $(t_*^{(3)}, t_3)$ функция $u_+^{(3)}(t)$ определяется в результате решения уравнения (1.6) с нулевым начальным условием, то условие остановки при $t = t_3$ имеет вид

$$\int_{t_*^{(3)}}^{t_3} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = 0. \tag{6.4}$$

Скорость движения корпуса в отрицательном направлении при $t > t_3$ определяется в результате решения уравнения (1.7) с нулевым начальным условием и имеет вид

$$u_+^{(3)}(t) = e^{-\alpha t} \int_{t_3}^t e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau. \tag{6.5}$$

Покажем, что интеграл в правой части (6.5), вычисленный при $t = t_*^{(3)} + 2\pi$, больше нуля. С этой целью воспользуемся тождеством (2.21), которое перепишем в виде

$$f_1(t + \tau) = -f_2(t_3 + \tau). \tag{6.6}$$

Используя соотношение (6.6) и учитывая, что $t_3 = 2\pi - t_2$, нетрудно показать справедливость следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \int_{t_3}^{t_*^{(3)}+2\pi} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau &= \int_0^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3} e^{\alpha(\tau+t_3)} f_2(t_3 + \tau) d\tau = \\ &= -e^{\alpha t_3} \int_0^{t_*^{(3)}+t_2} e^{\alpha\tau} f_1(t_1 + \tau) d\tau = -e^{\alpha(t_3-t_1)} \int_{t_1}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Заметим теперь, что в силу (2.4) имеют место неравенства

$$t_*^{(3)} + t_1 + t_2 > \pi + t_*^{(3)} > t_3. \quad (6.8)$$

Поэтому интеграл в выражении (6.7) можно представить в виде

$$\int_{t_1}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_*^{(3)}}^{t_3} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau, \quad (6.9)$$

а учитывая (6.4), его можно переписать как

$$\int_{t_1}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau. \quad (6.10)$$

Поскольку имеют место неравенства

$$t_3 < t_1 + \pi < t_*^{(3)} + \pi < t_*^{(3)} + t_2 + t_1, \quad (6.11)$$

то второе слагаемое (6.10) можно представить в виде

$$\int_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_3}^{t_1+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_1+\pi}^{t_*^{(3)}+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_*^{(3)}+\pi}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau. \quad (6.12)$$

Учитывая теперь, что

$$\int_{t_1+\pi}^{t_*^{(3)}+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha(\pi+\tau)} f_1(\pi + \tau) d\tau,$$

и подставляя (6.12) в (6.10), имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_3}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau &= \int_{t_3}^{t_1+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_*^{(3)}+\pi}^{t_*^{(3)}+t_2+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} [(e^{\alpha\pi} - 1)f_1(\tau + \pi) + (f_1(\tau + \pi) + f_1(\tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Заметим теперь, что функция $f_1(t)$ на интервалах $[t_3, t_1 + \pi]$ и $[t_*^{(3)} + \pi, t_*^{(3)} + t_2 + t_1]$ отрицательна, поэтому первые два слагаемых в (6.13) меньше нуля. Кроме того заметим, что функция $f_1(\tau + \pi)$ отрицательна при $\tau \in (t_1, t_*^{(3)})$ и имеет место равенство

$$f_1(\tau + \pi) + f_1(\tau) = -2k\mu,$$

поэтому третье слагаемое в (6.13) также отрицательно. Следовательно, интеграл в левой части (6.13) строго меньше нуля. Последнее означает, что интеграл в правой части (6.5), вычисленный при $t = t_*^{(3)} + 2\pi$, больше нуля. Из этого следует, что решение $u_+^{(3)}(t)$ уравнения (1.4) обращается в нуль внутри интервала $(t_3, t_*^{(3)} + 2\pi)$, т. е. $t_{**}^{(3)} < t_*^{(3)} + 2\pi$.

Интегрируя уравнение (1.4) на интервалах $[t_1 + 2\pi, t_{**}^{(3)}]$ и $[t_1, t_*^{(3)}]$ и учитывая, что

$$u_+^{(3)}(t_{**}^{(3)}) = 0, \quad u_+^{(3)}(t_*^{(3)}) = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} u_+^{(3)}(t_1) &= -e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int_{t_1+2\pi}^{t_*^{(3)}+2\pi} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau, \\ u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) &= -e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int_{t_1+2\pi}^{t_{**}^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Сравнивая последние два выражения, приходим к неравенству

$$u_+^{(3)}(t_1) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi).$$

Поэтому на основании леммы 3.1 значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ образуют монотонно возрастающую последовательность. Аналогично можно показать, что в области III значения $u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ образуют монотонно убывающую последовательность.

Поскольку

$$u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n) > u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n),$$

то последовательность значений $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ ограничена сверху, а последовательность $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ ограничена снизу. Следовательно каждая из указанных последовательностей должна иметь предел. Это означает, что решение $u_+^{(3)}(t)$ асимптотически приближается к некоторому периодическому режиму. Тот же вывод можно сделать и о решении $u_-^{(1)}(t)$. В силу единственности периодического режима движения (см. лемму 3.3) указанные последовательности имеют один и тот же предел, соответствующий периодическому движению корпуса без залипаний в верхней и нижней зонах замедления.

Поскольку решения $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ в пространстве решений ограничивают область интегральных кривых, заданных начальным условием из интервала

$$u_+^{(3)}(t_1) < u(t_1 + 2\pi) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n),$$

то все интегральные кривые из этой области асимптотически приближаются к интегральной кривой, отвечающей периодическому режиму движения.

На основании результатов данного раздела приходим к следующему выводу. *В подобласти III существует периодический режим движения без остановок в зонах замедления трением, и при произвольной начальной скорости движение корпуса будет асимптотически приближаться к этому периодическому режиму.*

7. ВЫВОДЫ

Пространство параметров задачи k, μ, α разделяется на три области I, II и III, в каждой из которых существует единственный режим движения с 2π -периодически меняющейся скоростью. В указанных областях периодическое движение имеет качественно различный характер.

В области I корпус, двигаясь с 2π -периодически меняющейся скоростью, на интервале времени 2π дважды совершает остановку, после которой остается в покое в течении конечного промежутка времени (залипает), а затем продолжает движение в противоположном направлении. При этом периодически меняется как скорость корпуса, так и его координата, так, что за период времени 2π корпус совершает нулевое перемещение. Интервалы покоя корпуса имеют место при прохождении

внутренней массой так называемых (верхней и нижней) зон замедления, в которых горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная к внутренней массе, не превосходит силы трения скольжения, приложенной к корпусу. Независимо от величины начальной скорости корпуса, его движение за конечный промежуток времени перейдёт в указанный периодический режим.

В области II корпус, двигаясь с 2π -периодически меняющейся скоростью, не останавливается при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления, поэтому за период времени 2π залипание корпуса происходит только один раз, когда внутренняя масса находится в нижней зоне замедления. В этом случае координата корпуса уже не является периодической функцией времени, а корпус за время полного оборота внутренней массы по окружности совершает перемещение в положительном направлении. Как и в области I, независимо от величины начальной скорости корпуса, его движение за конечный промежуток времени перейдёт в указанный периодический режим.

В области III движение корпуса с 2π -периодически меняющейся скоростью характеризуется тем, что он совершает остановки вне зон замедления. После каждой остановки корпус не залипает, а сразу же начинает движение в противоположную сторону, совершая за время полного оборота внутренней массы по окружности перемещение в положительном направлении. Указанное периодическое движение имеет характер предельного режима, к которому движение корпуса асимптотически приближается независимо от величины его начальной скорости.

Благодарности. Исследование выполнено в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00116). Авторы благодарят за помощь в подготовке иллюстративного материала А. А. Рачкова, инженера кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» МАИ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бардин Б. С. О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы// В сб.: «Труды XVIII Межд. симп. “Динамика виброударных сильно нелинейных систем” (DYVIS-2015)». — 2015. — С. 42–49.
2. Бардин Б. С., Панёв А. С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности// Тр. МАИ. — 2015. — 84.
3. Бильченко Г. Г. Влияние подвижного груза на движение носителя// В сб.: «Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Межд. Четаевской конференции». — 2017. — С. 37–44.
4. Болотник Н. Н., Зейдис И. М., Циммерманн К., Яцун С. Ф. Динамика управляемых движений вибрационных систем// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2006. — № 5. — С. 157–167.
5. Болотник Н. Н., Нунупаров А. М., Чащухин В. Г. Капсульный вибрационный робот с электромагнитным приводом и возвратной пружиной: динамика и управление движением// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2016. — № 6. — С. 146–160.
6. Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю. Оптимальное управление прямолинейным движением твёрдого тела по шероховатой плоскости посредством перемещения двух внутренних масс// Прикл. мат. мех. — 2008. — 72, № 2. — С. 216–229.
7. Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю., Черноусько Ф. Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы// Прикл. мат. мех. — 2012. — 71, № 1. — С. 3–22.
8. Болотник Н. Н., Черноусько Ф. Л. Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2010. — 16, № 5. — С. 213–222.
9. Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Моделирование плоского управляемого движения трёхмассовой вибрационной системы// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2012. — № 6. — С. 122–141.
10. Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Изучение закономерностей движения прыгающего робота при различных положениях точки закрепления ноги// Нелин. динамика. — 2013. — 9, № 2. — С. 327–342.
11. Голицына М. В. Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению// Прикл. мат. мех. — 2018. — 82, № 1. — С. 3–15.
12. Голицына М. В., Самсонов В. А. Оценка области допустимых параметров системы управления вибрационным роботом// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2018. — № 2. — С. 85–101.
13. Иванов А. П. Основы теории систем с трением. — Ижевск: Ижевский ин-т комп. иссл., 2011.
14. Иванов А. П., Сахаров А. В. Динамика твёрдого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости// Нелин. динамика. — 2012. — 8, № 4. — С. 763–772.
15. Панёв А. С. О движении твёрдого тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности в вязкой среде// Тр. МАИ. — 2018. — 98.

16. *Соболев Н. А., Сорокин К. С.* Экспериментальное исследование модели виброробота с вращающимися массами// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2007. — № 5. — С. 161–170.
17. *Сорокин К. С.* Перемещение механизма по наклонной шероховатой плоскости за счёт движения внутренних осциллирующих масс// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2009. — № 6. — С. 150–158.
18. *Черноусько Ф. Л.* О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу// Докл. РАН. — 2005. — 405, № 1. — С. 56–60.
19. *Фигурина Т. Ю.* Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2007. — № 2. — С. 65–71.
20. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью// Мат. сб. — 1960. — 51, № 1. — С. 99–128.
21. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
22. *Черноусько Ф. Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы// Прикл. мат. мех. — 2006. — 70, № 6. — С. 915–941.
23. *Черноусько Ф. Л.* Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс// Докл. РАН. — 2016. — 470, № 4. — С. 406–410.
24. *Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление движением двухмассовой системы// Докл. РАН. — 2018. — 480, № 5. — С. 528–532.
25. *Яцун С. Ф., Безмен П. А., Сапронов К. А., Рублев С. Б.* Динамика мобильного вибрационного робота с внутренней подвижной массой// Изв. Курск. гос. техн. ун-та. — 2010. — 31, № 2. — С. 21–31.
26. *Яцун С. Ф., Волкова Л. Ю.* Моделирование динамических режимов вибрационного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением// Спецтехн. и связь. — 2012. — № 3. — С. 25–29.
27. *Яцун С. Ф., Лупехина И. В., Сапронов К. А.* Моделирование движения прыгающего вибрационного микроробота// Изв. Курск. гос. техн. ун-та. — 2009. — 27, № 2. — С. 25–31.
28. *Яцун С. Ф., Мищенко В. Я., Сафаров Д. И.* Исследование движения двухмассового вибрационного робота// Изв. вузов. Сер. Машин. — 2006. — № 5. — С. 32–42.
29. *Яцун С. Ф., Разинькова А. В., Гранкин А. Н.* Исследование движения виброробота с электромагнитным приводом// Изв. вузов. Сер. Машин. — 2007. — № 5. — С. 53–64.
30. *Bardin B., Panev A.* On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle// Vibroeng. Procedia. — 2016. — 8. — С. 135–141.
31. *Bardin B. S., Panev A. S.* On the motion of a rigid body with an internal moving point mass on a horizontal plane// AIP Conf. Proc. — 2018. — 1959. — 030002.
32. *Bardin B. S., Panev A. S.* On the motion of a body with a moving internal mass on a rough horizontal plane// Russ. J. Nonlin. Dyn. — 2018. — 14, № 4. — С. 519–542.
33. *Fang H., Xu J.* Stick-slip effect in a vibration-driven system with dry friction: Sliding bifurcations and optimization// J. Appl. Mech. — 2014. — 81, № 5. — 061001.
34. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators// J. Dyn. Syst. Meas. Control. Trans. ASME. — 2006. — 128, № 1. — С. 122–133.
35. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Analysis and experiments on the force capabilities of centripetal-force-actuated microrobotic platforms// IEEE Trans. Robot. — 2008. — 24. — С. 588–599.
36. *Vartholomeos P., Papadopoulos E., Vlachos K.* Analysis and motion control of a centrifugal-force microrobotic platform// IEEE Trans. Automat. Sci. Eng. — 2013. — 10. — С. 545–553.
37. *Vlachos K., Papadimitriou D., Papadopoulos E.* Vibration-driven microrobot positioning methodologies for nonholonomic constraint compensation// Engineering. — 2015. — 1. — С. 66–72.
38. *Wang Q. M., Zhang W. M., Ju J. C.* Kinematics and dynamics analysis of a micro-robotic platform driven by inertial-force propulsion// Appl. Mech. Mater. — 2015. — 733. — С. 531–534.
39. *Xiong Z., Jian X.* Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration controlled internal masses// Adv. Mech. Eng. — 2015. — 7. — С. 1–12.

Б. С. Бардин

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4;

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,
101990, Москва, Малый Харитоньевский переулок, д. 4

E-mail: bsbardin@yandex.ru

А. С. Панёв

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: a.s.panev@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-557-592

UDC 531.384

On Translational Rectilinear Motion of a Solid Body Carrying a Movable Inner Mass

2019 **B. S. Bardin, A. S. Panev**

Abstract. We consider the motion of the mechanical system consisting of the case (a solid body) and the inner mass (a material point). The inner mass circulates inside the case on a circle centered at the center of mass of the case. We suppose that absolute value of the velocity of circular motion of the inner mass is constant. The case moves translationally and rectilinearly on a flat horizontal surface with forces of viscous friction and dry Coulomb friction on it. The inner mass moves in vertical plane.

We perform the full qualitative investigation of the dynamics of this system. We prove that there always exist a unique motion of the case with periodic velocity. We study all possible types of such a periodic motion. We establish that for any initial velocity, the case either reaches the periodic mode of motion in a finite time or asymptotically approaches to it depending on the parameters of the problem.

REFERENCES

1. B. S. Bardin, "O bezudarnykh pryzhkakh tela, nesushchego podvizhnyye massy" [On shock-free jumps of the body carrying movable masses], In: *Tr. XVIII Mezhd. simp. "Dinamika vibroudarnykh sil'no nelineynykh sistem" (DYVIS-2015)* [Proc. XVIII Int. Symp. "Dynamics of Vibroimpact Strongly Nonlinear Systems" (DYVIS-2015)], 2015, pp. 42–49 (in Russian).
2. B. S. Bardin and A. S. Panev, "O periodicheskikh dvizheniyakh tela s podvizhnoy vnutrenney massoy po gorizontally'noy poverkhnosti" [On periodic motions of a body with movable inner mass on horizontal surface], *Tr. MAI* [Proc. Moscow Aviation Inst.], 2015, **84** (in Russian).
3. G. G. Bil'chenko, "Vliyaniye podvizhnogo gruzha na dvizheniye nositelya" [Influence of a movable load on the motion of the carrier], In: *Analiticheskaya mekhanika, ustoychivost' i upravleniye. Tr. XI Mezhd. Chetaevskoy konferentsii* [Analytical Mechanics, Stability, and Control. Proc. XI Int. Chetaev Conf.], 2017, pp. 37–44 (in Russian).
4. N. N. Bolotnik, I. M. Zeydis, K. Tsimmermann, and S. F. Yatsun, "Dinamika upravlyaemykh dvizheniy vibratsionnykh sistem" [Dynamics of controllable motions of vibrational systems], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2006, No. 5, 157–167 (in Russian).
5. N. N. Bolotnik, A. M. Nunuparov, and V. G. Chashchukhin, "Kapsul'nyy vibratsionnyy robot s elektromagnitnym privodom i vozvratnoy pruzhinoy: dinamika i upravleniye dvizheniem" [Capsular vibrational robot with electromagnetic gear and return spring: dynamics and motion control], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2016, No. 6, 146–160 (in Russian).
6. N. N. Bolotnik and T. Yu. Figurina, "Optimal'noe upravleniye pryamolineynym dvizheniem tverdogo tela po sherokhovatoy ploskosti posredstvom peremeshcheniya dvukh vnutrennikh mass" [Optimal control of rectilinear motion of a solid body on rugged surface by means of transition of two inner masses], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2008, **72**, No. 2, 216–229 (in Russian).
7. N. N. Bolotnik, T. Yu. Figurina, and F. L. Chernous'ko, "Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyаемого posredstvom podvizhnoy vnutrenney massy" [Analysis and optimization of motion of the body controlled by a movable inner mass], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2012, **71**, No. 1, 3–22 (in Russian).
8. N. N. Bolotnik and F. L. Chernous'ko, "Mobil'nye roboty, upravlyaemye dvizheniem vnutrennikh tel" [Mobile robots controlled by movement of inner bodies], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2010, **16**, No. 5, 213–222 (in Russian).
9. L. Yu. Volkova and S. F. Yatsun, "Modelirovaniye ploskogo upravlyаемого dvizheniya trekhmassovoy vibratsionnoy sistemy" [Modelling of flat controllable motion of three-mass vibrational system], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2012, No. 6, 122–141 (in Russian).

10. L. Yu. Volkova and S. F. Yatsun, “Izuchenie zakonornostey dvizheniya prygayushchego robota pri razlichnykh polozheniyakh tochki zakrepleniya nogi” [Study of regularities of motion of the jumping robot for different positions of mounting point of the leg], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2013, **9**, No. 2, 327–342 (in Russian).
11. M. V. Golitsyna, “Periodicheskiy rezhim dvizheniya vibratsionnogo robota pri ogranichenii po upravleniyu” [Periodical mode of motion of the vibrational robot under constraints of control], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2018, **82**, No. 1, 3–15 (in Russian).
12. M. V. Golitsyna and V. A. Samsonov, “Otsenka oblasti dopustimyykh parametrov sistemy upravleniya vibratsionnym robotom” [Estimate of area of admissible parameters for the control system of the vibrational robot], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2018, No. 2, 85–101 (in Russian).
13. A. P. Ivanov, *Osnovy teorii sistem s treniem* [Essentials of the Theory of Systems with Friction], Izhevskiy in-t komp. issl., Izhevsk, 2011 (in Russian).
14. A. P. Ivanov and A. V. Sakharov, “Dinamika tverdogo tela s podvizhnymi vnutrennimi massami i rotorom na sherokhovatoy ploskosti” [Dynamics of the solid body with movable inner masses and the rotor on a rugged surface], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2012, **8**, No. 4, 763–772 (in Russian).
15. A. S. Panev, “O dvizhenii tverdogo tela s podvizhnoy vnutrenney massoy po gorizontal’noy poverkhnosti v vyazkoy srede” [On the motion of the solid body with movable inner mass on horizontal surface in a viscous media], *Tr. MAI* [Proc. Moscow Aviation Inst.], 2018, **98**, (in Russian).
16. N. A. Sobolev and K. S. Sorokin, “Eksperimental’noe issledovanie modeli vibrorobota s vrashchayushchimisya massami” [Experimental study of the model of vibrorobot with rotating masses], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2007, No. 5, 161–170 (in Russian).
17. K. S. Sorokin, “Peremeshchenie mekhanizma po naklonnoy sherokhovatoy ploskosti za schet dvizheniya vnutrennikh ostsilliruyushchikh mass” [Motion of a mechanism on an inclined rugged plane by means of inner oscillating masses], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2009, No. 6, 150–158 (in Russian).
18. F. L. Chernous’ko, “O dvizhenii tela, sodержashchego podvizhnuyu vnutrennyuyu massu” [On the motion of body containing movable inner mass], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **405**, No. 1, 56–60 (in Russian).
19. T. Yu. Figurina, “Optimal’noe upravlenie dvizheniem sistemy dvukh tel po pryamoy” [Optimal motion control for the system of two bodies on an axis], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Syst.], 2007, No. 2, 65–71 (in Russian).
20. A. F. Filippov, “Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu” [Differential equations with discontinuous right-hand side], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1960, **51**, No. 1, 99–128 (in Russian).
21. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
22. F. L. Chernous’ko, “Analiz i optimizatsiya dvizheniya tela, upravlyаемого posredstvom podvizhnoy vnutrenney massy” [Analysis and optimization of the motion of the body controlled by the movable inner mass], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2006, **70**, No. 6, 915–941 (in Russian).
23. F. L. Chernous’ko, “Dvizhenie tela po ploskosti pod vliyaniem podvizhnykh vnutrennikh mass” [Motion of a body on a plane by means of movable inner masses], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2016, **470**, No. 4, 406–410 (in Russian).
24. F. L. Chernous’ko, “Optimal’noe upravlenie dvizheniem dvukhmassovoy sistemy” [Optimal motion control for a two-masses system], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2018, **480**, No. 5, 528–532 (in Russian).
25. S. F. Yatsun, P. A. Bezmen, K. A. Saponov, and S. B. Rublev, “Dinamika mobil’nogo vibratsionnogo robota s vnutrenney podvizhnoy massoy” [Dynamics of the mobile vibrational robot with inner movable mass], *Izv. Kursk. gos. tekhn. un-ta* [Bull. Kursk State Tech. Univ.], 2010, **31**, No. 2, 21–31 (in Russian).
26. S. F. Yatsun and L. Yu. Volkova, “Modelirovanie dinamicheskikh rezhimov vibratsionnogo robota, peremeshchayushchegosya po poverkhnosti s vyazkim soprotivleniem” [Modelling of dynamical regimes of the vibrational robot moving on a surface with viscous friction], *Spetstekhn. i soyaz’* [Spec. Tech. Comm.], 2012, No. 3, 25–29 (in Russian).
27. S. F. Yatsun, I. V. Lupekhina, and K. A. Saponov, “Modelirovanie dvizheniya prygayushchego vibratsionnogo mikrorobota” [Modelling of the motion of the jumping vibrational micro-robot], *Izv. Kursk. gos. tekhn. un-ta* [Bull. Kursk State Tech. Univ.], 2009, **27**, No. 2, 25–31 (in Russian).
28. S. F. Yatsun, V. Ya. Mishchenko, and D. I. Safarov, “Issledovanie dvizheniya dvukhmassovogo vibratsionnogo robota” [Investigation of the motion of two-masses vibrational robot], *Izv. vuzov. Ser. Mashin.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Engineering], 2006, No. 5, 32–42 (in Russian).

29. S. F. Yatsun, A. V. Razin'kova, and A. N. Grankin, "Issledovanie dvizheniya vibrorobota s elektromagnitnym privodom" [Investigation of the motion of the vibrorobot with electromagnetic gear], *Izv. vuzov. Ser. Mashin.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Engineering], 2007, No. 5, 53–64 (in Russian).
30. B. Bardin and A. Panev, "On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle," *Vibroeng. Procedia*, 2016, **8**, 135–141.
31. B. S. Bardin and A. S. Panev, "On the motion of a rigid body with an internal moving point mass on a horizontal plane," *AIP Conf. Proc.*, 2018, **1959**, 030002.
32. B. S. Bardin and A. S. Panev, "On the motion of a body with a moving internal mass on a rough horizontal plane," *Russ. J. Nonlin. Dyn.*, 2018, **14**, No. 4, 519–542.
33. H. Fang and J. Xu, "Stick-slip effect in a vibration-driven system with dry friction: Sliding bifurcations and optimization," *J. Appl. Mech.*, 2014, **81**, No. 5, 061001.
34. P. Vartholomeos and E. Papadopoulos, "Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators," *J. Dyn. Syst. Meas. Control. Trans. ASME*, 2006, **128**, No. 1, 122–133.
35. P. Vartholomeos and E. Papadopoulos, "Analysis and experiments on the force capabilities of centripetal-force-actuated microrobotic platforms," *IEEE Trans. Robot.*, 2008, **24**, 588–599.
36. P. Vartholomeos, E. Papadopoulos, and K. Vlachos, "Analysis and motion control of a centrifugal-force microrobotic platform," *IEEE Trans. Automat. Sci. Eng.*, 2013, **10**, 545–553.
37. K. Vlachos, D. Papadimitriou, and E. Papadopoulos, "Vibration-driven microrobot positioning methodologies for nonholonomic constraint compensation," *Engineering*, 2015, **1**, 66–72.
38. Q. M. Wang, W. M. Zhang, and J. C. Ju, "Kinematics and dynamics analysis of a micro-robotic platform driven by inertial-force propulsion," *Appl. Mech. Mater.*, 2015, **733**, 531–534.
39. Z. Xiong and X. Jian, "Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration controlled internal masses," *Adv. Mech. Eng.*, 2015, **7**, 1–12.

B. S. Bardin

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia;

Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: bsbardin@yandex.ru

A. S. Panev

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

E-mail: a.s.panev@gmail.com