Современная математика. Фундаментальные направления. Том 65, № 4 (2019). С. 547–556

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-547-556 УДК 517.929

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСПОКОЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

© 2019 г. **А. Ш. АДХАМОВА, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. Рассматривается система управления, описываемая системой дифференциальных уравнений нейтрального типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Показана связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование и единственность обобщенного решения краевой задачи.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория управляемых систем с последействием изучалась многими авторами [2, 3, 5, 8–10].

Широко известно, что обратная связь в системе управления может привести к задержке сигнала, см. рис. 2.

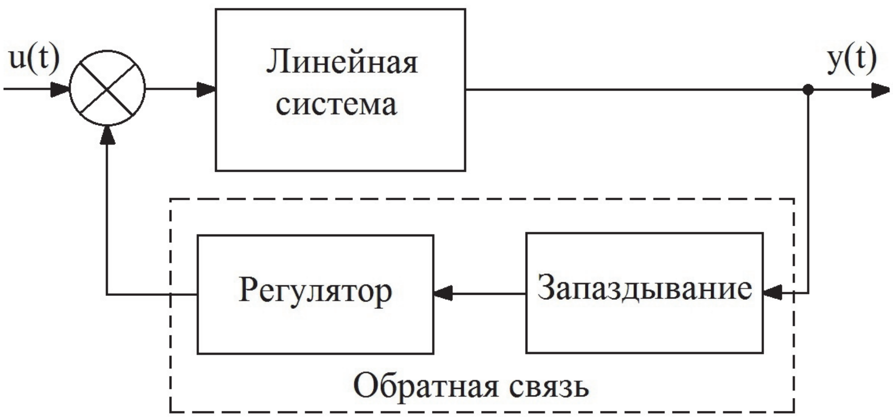

Рис. 1

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» (теорема 2.1) и гранта РФФИ № 17-01-00401 (теорема 3.1).

Обычно предполагалось, что функционально-дифференциальные уравнения, описывающие систему, имеют запаздывающий или нейтральный тип, при этом в случае нейтрального типа старшие члены с запаздыванием имели достаточно малые коэффициенты. Задача об успокоении системы управления с последействием, описываемая системой дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием, рассматривалась Н. Н. Красовским [2]. Предполагалось, что имеется одно постоянное запаздывание, а коэффициенты системы — также постоянные. В работах [1, 6, 11] эта задача обобщалась на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [4, 7].

В данной работе рассматривается задача об успокоении многомерной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с переменными матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Установлена связь между вариационной задачей для нелокального функционала, описывающей многомерную систему управления с запаздываниями, и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений. Доказаны существование и единственность обобщенного решения этой задачи.

1. Постановка задачи

В данной работе мы рассмотрим линейную нестационарную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T, \tag{1.1}$$

где $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ — вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления,

$$A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1\dots,n}, \quad B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1\dots,n}$$

— матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = \mathrm{const} > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы определяется начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0], \tag{1.2}$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ — заданная вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (1.1), (1.2) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{1.3}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Из всевозможных управлений мы будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2 dt \to \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы получим вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int\limits_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) \right|^2 dt \to \min. \tag{1.4}$$

2. Связь между вариационной и краевой задачами

Введем некоторые вещественные функциональные пространства.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой:

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}$ — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$, со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть

$$\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0,\ldots,k-1\}.$$

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^n L_2(a,b), \quad W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^n W_2^k(a,b), \quad \mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^n \mathring{W}_2^k(a,b),$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{L_2(a,b)},$$

$$(v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\ldots,v_n)^T,\ w = (w_1,\ldots,w_n)^T$.

Покажем, что вариационная задача (1.2)–(1.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ — решение вариационной задачи (1.2)–(1.4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Часто мы будем отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2(0, T - M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y + sv$ принадлежит $W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ и удовлетворяет краевым условиям (1.2), (1.3) для каждого $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$J(y + sv) = F(s).$$

Поскольку

$$J(y + sv) \geqslant J(y)\ (s \in \mathbb{R}),$$

мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0. \tag{2.1}$$

Положим

$$B(y,v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^M A_m(t) y'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t) y(t - m\tau) \right)^T \times$$

$$\times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t)v'(t-l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t)v(t-l\tau) \right) d\tau. \tag{2.2}$$

Из (2.1) следует, что

$$B(y,v)=0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{2.3}$$

Проведем преобразования одного из слагаемых, полученных при раскрытии скобок. Обозначим

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_0^T \big(A_m(t)y'(t-m\tau) + B_m(t)y(t-m\tau)\big)^T \times$$
$$\times \big(A_l(t)v'(t-l\tau) + B_l(t)v(t-l\tau)\big)\, d\tau.$$

В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной

$$\xi = t - l\tau.$$

Получим

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_m(\xi+l\tau)y'(\xi+(l-m)\tau) + B_m(\xi+l\tau)\times$$
$$\times y(\xi+(l-m)\tau))^T(A_l(\xi+l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi+l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Вернемся к старой переменной t, полагая $t=\xi$. Учитывая, что $v(t)=0$ при $t \in (-M\tau,0)\cup(T-M\tau,T)$, будем иметь

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} (A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) + B_m(t+l\tau)\times$$
$$\times y(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t) + B_l(t+l\tau)v(t))dt. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.2), получим:

$$\begin{aligned} B(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{&(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t))+\\ &+[(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau)-\\ &-((B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T A_l(t+l\tau))'+\\ &+(B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau)]v(t)\}dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0,T-M\tau). \tag{2.6}$$

В силу (2.6), подставляя (2.5) в (2.3), мы можем произвести интегрирование по частям. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} &-(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))'+\\ &+\sum_{l,m=0}^{M} \{B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)-\\ &-(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))'+\\ &+\sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\} = 0 \ (t \in (0,T-M\tau). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (2.7) почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$.

Определение 2.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.7), (1.2), (1.3), если выполняется условие (2.6), $y(t)$ почти всюду на $(0, T - M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (2.7), а также краевым условиям (1.2), (1.3).

Очевидно, следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 2.1.

Определение 2.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.7), (1.2), (1.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} B(y,v) = \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} (A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T v'(t)dt+ \\ + \int\limits_0^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T- \\ -((A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))')^T+ \\ +(B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T\}v(t)dt = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

для всех $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ и краевым условиям (1.2), (1.3).

Таким образом, мы доказали, что, если вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ является решением вариационной задачи (1.2)–(1.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (2.7), (1.2), (1.3).

Докажем обратное утверждение.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ — обобщенное решение краевой задачи (2.7), (1.2), (1.3). Тогда для всех $v \in \widetilde{W}$ мы получаем

$$J(y+v) = J(y) + J(v) + 2B(y,v),$$

где $J(v)$ — неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку y — обобщенное решение задачи (2.7), (1.2), (1.3), то

$$B(y,v) = 0.$$

Следовательно,

$$J(y+v) \geqslant J(y)$$

для всех $v \in \widetilde{W}$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. *Функция* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *доставляет минимум функционалу* (1.4) *с краевыми условиями* (1.2), (1.3) *тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (2.7), (1.2), (1.3).

3. Разрешимость краевой задачи

В этом разделе мы докажем однозначную разрешимость краевой задачи (2.7), (1.2), (1.3).

Введем оператор $R_0 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T)$ по формуле

$$(R_0 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} A_k(t) v(t - k\tau). \tag{3.1}$$

Рассмотрим функционал:

$$J_0(v) = \int\limits_0^T ((R_0 v')(t))^2 dt, \;\; v \in \widetilde{W}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Пусть*

$$\det A_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$

$$J_0(w) \geqslant c_0 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.3}$$

где $c_0 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. 1. Предположим противное: для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J_0(w_k) \leqslant \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}. \tag{3.4}$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что

$$||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Тогда в силу компактности вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0,T-M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\} \subset \widetilde{W}$, сходящаяся в $L_2^n(0,T-M\tau)$ при $m \to \infty$ к некоторой вектор-функции $w_0 \in L_2^n(0,T-M\tau)$.

2. Пусть $0 < t < \tau$. Тогда выражение $(R_0 w'_{k_m})(t)$ имеет вид

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t).$$

Следовательно, в силу невырожденности матрицы $A_0(t)$ и неравенства (3.4) имеем $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(0,\tau)$ при $m \to \infty$.

3. Пусть теперь $\tau < t < 2\tau$. Тогда

$$(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t) w'_{k_m}(t) + A_1(t) w'_{k_m}(t-\tau).$$

Отсюда в силу неравенства (3.4) и п. 2 доказательства имеем

$$(R_0 w'_{k_m})(t) \to 0 \text{ *и* } A_1(t) w'_{k_m}(t-\tau) \to 0 \text{ *в* } L_2^n(\tau, 2\tau) \text{ при } \; m \to \infty.$$

Следовательно, поскольку матрица $A_0(t)$ — невырождена, то $w'_{k_m} \to 0$ в $L_2^n(\tau, 2\tau)$ при $m \to 0$.

4. Аналогично за конечное число шагов мы докажем, что

$$w'_{k_m} \to 0 \quad \text{в} \quad L_2^n(l\tau, L)$$

для любого $l \in \mathbb{N}$ такого, что $2\tau \leqslant l\tau < L$, где

$$L = \min\{(l+1)\tau, T - M\tau\}.$$

Таким образом, $w_0 \in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$ и $w_0 = \mathrm{const} \neq 0$. Мы получили противоречие, которое доказывает лемму 3.1. □

Лемма 3.2. *Пусть*

$$\det A_0(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для всех $w \in \widetilde{W}$

$$J(w) \geqslant c_1 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{3.5}$$

где $c_1 > 0$ — *постоянная, не зависящая от* w.

Доказательство. Предположим противное: неравенство (3.5) не выполняется. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $w_k \in \widetilde{W}$ такое, что

$$J(w_k) \leqslant \frac{1}{k} ||w_k||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что

$$||w_k||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Тогда мы имеем

$$J(w_k) \leqslant \frac{1}{k}. \tag{3.6}$$

Введем оператор $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T - M\tau)$ по формуле

$$(R_1 v)(t) = \sum_{k=0}^{M} B_k(t) v(t - k\tau). \tag{3.7}$$

Из неравенства

$$\alpha^2 \leqslant 2(\alpha + \beta)^2 + 2\beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

леммы 3.1 и ограниченности оператора $R_1 : \widetilde{L} \to L_2^n(0, T - M\tau)$ для любого $v \in \widetilde{W}$ мы получим

$$c_0 ||v||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant J_0(v) \leqslant 2J(v) + 2 \int\limits_0^{T-M\tau} ((R_1 v)(t))^2 dt \leqslant \tag{3.8}$$

$$\leqslant 2J(v) + k_1 ||v||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)},$$

где $c_0, k_1 > 0$ — постоянные, не зависящие от v.

В силу компактности оператора вложения $\widetilde{W}$ в $L_2^n(0, T - M\tau)$ существует подпоследовательность $\{w_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой вектор-функции w_0 в пространстве $L_2^n(0, T - M\tau)$. Таким образом, из (3.6), (3.8) следует, что

$$c_0 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant 2J(w_{k_m} - w_{k_l}) + k_1 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{k_m} + \frac{4}{k_l} + k_1 ||w_{k_m} - w_{k_l}||^2_{L_2^n(0,T-M\tau)} \to 0 \quad \text{при} \quad l, m \to \infty.$$

Следовательно, $w_{k_m} \to w_0$ в $\widetilde{W}$ и

$$||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

Поэтому в силу (3.6) мы имеем

$$J(w_0) = \int\limits_0^{T-M\tau} |\sum_{m=0}^{M} A_m(t) w_0'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) w_0(t - m\tau)|^2 dt = 0,$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t) w_0'(t - m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) w_0(t - m\tau) = 0, \ t \in (0, T - M\tau). \tag{3.9}$$

Поскольку $w_0 \in \widetilde{W}$, вектор-функция w_0 удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0, \ t \in [-M\tau, 0]. \tag{3.10}$$

Тогда, если $0 < t \leqslant \tau$, система уравнений (3.9) примет вид

$$A_0(t) w_0'(t) + B_0(t) w_0(t) = 0, \tag{3.11}$$

при этом в силу (3.10)

$$w_0(0) = 0.$$

Следовательно,

$$w_0(t) = 0, \ t \in [0, \tau]. \tag{3.12}$$

В силу (3.10), (3.12) для $\tau < t \leqslant 2\tau$ система уравнений (3.9) примет вид (3.11), при этом в силу (3.12) $w_0(\tau) = 0$. Решая полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуинтервале $(\tau, 2\tau]$, имеем $w_0(t) = 0, \ t \in (\tau, 2\tau]$, и т. д.

Таким образом, $w_0(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T - M\tau]$. Это противоречит равенству

$$||w_0||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1.$$

□

Теорема 3.1. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$ *существует единственное обобщенное решение краевой задачи* (2.7), (1.2), (1.3) $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$, *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{3.13}$$

где $c > 0$ — *постоянная, не зависящая от* φ.

Доказательство. Обозначим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad -M\tau \leqslant t \leqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad T - M\tau \leqslant t \leqslant T; \\ \varphi(0) - \varphi(0)t/(T - M\tau), & \text{если} \quad 0 < t < T - M\tau. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Phi \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$. Кроме того, в силу непрерывности оператора вложения $W_2^1(-M\tau, T)$ в $C[-M\tau, 0]$ имеем

$$||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)} \leqslant k_1||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{3.14}$$

где $k_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от φ.

Пусть $x = y - \Phi$, тогда $x \in \widetilde{W}$. Интегральное тождество (2.3) примет вид

$$B(\Phi, v) + B(x, v) = 0, \ v \in \widetilde{W}. \tag{3.15}$$

Поскольку $B(v, v) = J(v), v \in \widetilde{W}$, по лемме 3.2 в пространстве $\mathring{W}_2^1(0, T - M\tau)$ мы можем ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = B(x, v). \tag{3.16}$$

Следовательно, тождество (3.15) может быть записано в виде

$$B(\Phi, v) + (x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0. \tag{3.17}$$

Для фиксированного $\Phi \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ функционал $B(\Phi, v)$ линеен по $v \in \widetilde{W}$. Используя неравенство Коши—Буняковского и неравенства (3.14), (3.5) мы получаем

$$\begin{aligned} |B(\Phi, v)| &\leqslant k_2||\Phi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)}||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant \\ &\leqslant k_3||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}||v||_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant \\ &\leqslant k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}||v||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

где $k_2, k_3, k_4 > 0$ — постоянные, не зависящие от φ и v.

Таким образом, при фиксированном Φ функционал $B(\Phi, v)$ ограничен по v на $\widetilde{W}$. В силу неравенства (3.18) норма функционала $B(\Phi, v)$ на $\mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ не превышает $k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}$. Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, существует функция $F \in \widetilde{W}$ такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)}$$

и

$$||F||'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \leqslant k_4||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}. \tag{3.19}$$

Эта функция единственна. Таким образом, тождество (3.17) можно записать в виде

$$(x, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} + (F, v)'_{\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 0.$$

Следовательно, задача (2.7), (1.2), (1.3) имеет единственное обобщенное решение $y = \Phi - F$, при этом в силу (3.14) и (3.19) выполняется неравенство (3.13). Это доказывает теорему. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Диф. уравн. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.
2. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
3. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
4. *Леонов Д. Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 28–37.
5. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
6. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
7. *Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L.* Damping problem for multidimensional control system with delays// В сб.: «Distributed computer and communication networks. 19th international conference, DCCN 2016, Moscow, Russia, November 21–25, 2016. Revised selected papers». — Cham: Springer, 2016. — C. 612–623.
8. *Banks H. T., Kent G. A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// SIAM J. Control Optim. — 1972. — *10*, № 4. — С. 567–593.
9. *Halanay A.* Optimal controls for systems with time lag// SIAM J. Control Optim. — 1968. — *6*. — С. 213–234.
10. *Kent G. A.* A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 4. — С. 565–570.
11. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

А. Ш. Адхамова
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: ami_adhamova@mail.ru

А. Л. Скубачевский
Российский университет дружбы народов,
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: skublector@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2019-65-4-547-556 UDC 517.929

On One Damping Problem for a Nonstationary Control System with Aftereffect

© 2019 **A. S. Adkhamova, A. L. Skubachevskii**

Abstract. We consider a control system described by the system of differential-difference equations of neutral type with variable matrix coefficients and several delays. We establish the relation between the variational problem for the nonlocal functional describing the multidimensional control system with delays and the corresponding boundary-value problem for the system of differential-difference equations. We prove the existence and uniqueness of the generalized solution of this boundary-value problem.

REFERENCES

1. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, “K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol’kimi starshimi chlenami” [To the formulation of boundary-value problems for differential equations with delayed argument and several higher-order terms], *Dif. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
2. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
3. A. V. Kryazhimskiy, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [On positional modelling in dynamical systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
4. D. D. Leonov, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On a stabilization problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
5. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On stabilization of controllable systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
6. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
7. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Damping problem for multidimensional control system with delays,” In: *Distributed computer and communication networks. 19th international conference, DCCN 2016, Moscow, Russia, November 21–25, 2016. Revised selected papers*, Springer, Cham, 2016, pp. 612–623.
8. H. T. Banks and G. A. Kent, “Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space,” *SIAM J. Control Optim.*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
9. A. Halanay, “Optimal controls for systems with time lag,” *SIAM J. Control Optim.*, 1968, **6**, 213–234.
10. G. A. Kent, “A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
11. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

A. S. Adkhamova
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: ami_adhamova@mail.ru

A. L. Skubachevskii
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
E-mail: skublector@gmail.com