Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 689–702

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-689-702 УДК 517.984.52

# ОПЕРАТОР ТИПА КАЛЬДЕРОНА—ЗИГМУНДА И ЕГО СВЯЗЬ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2017 г. **А. М. САВЧУК**

Аннотация. Изучается задача об оценке выражений вида $\Upsilon(\lambda) = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right|$. В частности, для случая $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, доказана оценка $\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_p}$ для любого $q > p'$, где $1/p + 1/p' = 1$. Такая же оценка получена для пространства $L_q(d\mu)$, где $d\mu$ — произвольная мера Карлесона в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Кроме того, проведены оценки более сложных выражений типа $\Upsilon(\lambda)$, возникающих при изучении асимптотики фундаментальной системы решений систем вида $\mathbf{y}' = B\mathbf{y} + A(x)\mathbf{y} + C(x,\lambda)\mathbf{y}$ размера $n$ при $|\lambda| \to \infty$ в подходящих секторах комплексной плоскости.

## ОГЛАВЛЕНИЕ



## 1. Введение

Для произвольной суммируемой на отрезке $[0,1]$ функции $f$ положим

$$\upsilon(x,\lambda) := \int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda t}\,dt, \tag{1.1}$$

где $x \in [0,1]$, а $\lambda$ — вещественный или комплексный параметр. Дискретный аналог такого преобразования имеет вид

$$f \mapsto \{\upsilon_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}, \qquad \text{где } \upsilon_n := \int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda_n t}\,dt. \tag{1.2}$$

Нас будет интересовать связь между степенью суммируемости функции $f$ и функции $\upsilon(x,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$. Наряду с функцией $\upsilon(x,\lambda)$ рассмотрим более общую ситуацию

$$\upsilon(x,\lambda;\omega) := \int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda\omega(t)}\,dt, \tag{1.3}$$

где фазовая функция $\omega(t)$ имеет положительную почти всюду на $[0,1]$ производную $\omega' = \rho \in L_1[0,1]$ (для сокращения записи мы не будем указывать зависимость от функции $\rho$, если это ясно из контекста).

Нашим основным побудительным мотивом для такой постановки задачи являются вопросы об асимптотическом поведении резольвенты, собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов порядка $n \geqslant 2$ на отрезке $x \in [0,1]$ (см. [2, 13]). При этом

Исследования поддержаны грантом РНФ 17-11-00754.

задача оценки выражений типа (1.1) возникает в теории обыкновенных дифференциальных операторов еще на стадии получения асимптотических формул для фундаментальной системы решений соответствующего дифференциального уравнения вида $l(y) = \lambda y$ или системы дифференциальных уравнений того же вида. Библиография этой тематики весьма обширна и восходит к классическим работам Биркгофа [7] и Тамаркина [14]. Впрочем, выражения типа (1.2) возникают в этой теории вне зависимости от метода вывода асимптотических формул (по поводу сравнения методов, основанных на асимптотике фундаментальной системы решений, и методов, связанных с абстрактной теорией возмущений, см. [6]). Например (см. [3]), для оператора Штурма—Лиувилля, порождаемого выражением $l(y) = -y'' + qy$ и краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(1) = 0$, асимптотическое представление собственных функций имеет вид

$$y_n(x) = \sin(\pi nx) + \sin(\pi nx)\left(-\int_0^x u(t)\cos(2\pi nt)dt + \int_0^1 u(t)\,(1-t)\cos(2\pi nt)dt\right) +$$
$$+\cos(\pi nx)\left(-x\int_0^1 u(t)\sin(2\pi nt)dt + \int_0^x u(t)\sin(2\pi nt)dt\right) + \psi_n(x),$$

где $u(x) = \int_0^x q(t)\,dt$, а слагаемые $\psi_n(x)$ имеют больший порядок малости, чем первые члены представления. Что касается обобщений вида (1.3), то они естественным образом возникают при рассмотрении весовых задач типа $l(y) = \lambda\rho(x)y$.

В случае, когда точка $x$ фиксирована, мы возвращаемся к классическому преобразованию Фурье. Хорошо известно, что если $f \in L_p[0,1]$, $p \in [1,2]$, то $\upsilon_x(\lambda) \in L_{p'}(\mathbb{R})$, где $1/p + 1/p' = 1$, а выходя в комплексную плоскость, получаем $\upsilon_x \in H^{p'}(\mathbb{C}_+)$ — пространство Харди в верхней полуплоскости. При этом преобразование $f \mapsto \upsilon$ является ограниченным линейным оператором между соответствующими пространствами. В данной работе мы покажем, в какой мере эти результаты переносятся на случай преобразования (1.1). Более точно, нас будет интересовать вывод перечисленных результатов для функций

$$\Upsilon_p(\lambda) := \left(\int_0^1 |\upsilon(x,\lambda)|^p\,dx\right)^{1/p},\ p \in [1,\infty); \qquad \Upsilon(\lambda) := \max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\upsilon(x,\lambda)|. \tag{1.4}$$

При этом оценки для последовательностей $\{\Upsilon(\lambda_n)\}$ вытекают, в силу известной теоремы Карлесона (см. точные формулировки ниже), из оценок для нормы $\|\upsilon(x,\cdot)\|$ в соответствующем пространстве Харди.

Сформулированные выше задачи естественным образом ведут к исследованию одномерных операторов типа Кальдерона—Зигмунда. Пусть, например, $f \in L_2[0,1]$. Для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ определим функцию $\varphi(\lambda) := \inf\{x \in [0,1] : |\upsilon(x,\lambda)| = \Upsilon(\lambda)\}$. Несложно проверить, что эта функция измерима (более того, она является борелевской). Тогда

$$\Upsilon(\lambda) = |\upsilon(\varphi(\lambda),\lambda)| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(t)\chi_{[0,\varphi(\lambda)]}(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| = |(\hat f * \hat\chi)(\lambda)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \hat f(\lambda-\mu)\frac{e^{i\mu\varphi(\mu)}-1}{\mu}\,d\mu\right|.$$

Поскольку $g = \hat f \in L_2(\mathbb{R})$, а оператор Гильберта ограничен в $L_2(\mathbb{R})$, то $\Upsilon(\lambda) \in L_2(\mathbb{R})$ в точности тогда, когда оператор

$$T:\ g \mapsto \int_{\mathbb{R}} g(\lambda-\mu)\frac{e^{i\mu\varphi(\mu)}}{\mu}\,d\mu \tag{1.5}$$

ограниченно действует в $L_2(\mathbb{R})$. Изучению такого рода операторов посвящена обширная литература. Подробный обзор можно найти в монографиях [8–10]. Тем не менее, найти в литературе подходящий результат нам не удалось. Ограниченность оператора Гильберта и его многомерных аналогов вида $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\lambda-\mu)\dfrac{\omega(\mu)}{|\mu|}\,d\mu$ выводится с использованием однородности и «нечетности» функции $\omega(\mu)$ (равенства нулю интеграла $\int\limits_{S^n}\omega(\mu)\,d\mu$ по единичной сфере), см. монографию Стейна [4]. Методы, описанные в [10], позволяют изучать более общие операторы вида $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(\mu)K(\lambda,\mu)\,d\mu$ с ядром, имеющим особенность порядка $|\mu-\lambda|^{-n}$ на диагонали, но, так или иначе, требуют оценок на производные $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}K(\lambda,\mu)$ и $\dfrac{\partial}{\partial\mu}K(\lambda,\mu)$. Ясно, что в нашем случае такие оценки не выполнены в силу произвольности функции $\varphi(\mu)$. В этой работе мы получим в данном направлении только простые результаты, связанные с оценками модуля интегрального ядра. В результате мы приходим к сингулярному интегральному оператору вида $\int\limits_{\mathbb{R}} k(x-y)f(y)\,dy$. Таким операторам (их часто называют операторами конволюции) также посвящена обширная литература (см. монографии [8, 9] и библиографию в них). Применив теорему Юнга о свертке, мы докажем ограниченность оператора вида (1.5) $T: L_p(\mathbb{R})\to L_{p+\varepsilon}(\mathbb{R})$ для произвольного $\varepsilon>0$. Продвинуться дальше и доказать окончательный результат (с $\varepsilon=0$) пока не удалось[1]. При этом условие $\varepsilon>0$ нельзя опустить, если речь идет об операторе, полученном *после* оценки модуля интегрального ядра.

## 2. Случай $n=2$

Задача об оценке функций $\upsilon(x,\lambda)$, $\Upsilon(\lambda)$ и $\Upsilon_p(\lambda)$ в верхней полуплоскости возникает при асимптотическом анализе системы обыкновенных дифференциальных уравнений размера $n=2$ типа системы Дирака. В общем случае ситуация сложнее — мы разберем ее в следующем разделе.

**Теорема 2.1.** *Пусть функции $f(x)$ и $\rho(x)$ суммируемы на $[0,1]$, $\rho(x)>0$ почти всюду, а $\omega(x):=\int\limits_0^x\rho(t)\,dt$. Тогда функция*

$$\Upsilon(\lambda)=\sup_{x\in[0,1]}\int\limits_0^x f(t)e^{i\lambda\omega(t)}\,dt$$

*непрерывна и ограничена в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$ и убывает к нулю при $\lambda\to\infty$ в этой полуплоскости.*

*Доказательство.* Поскольку функция $\upsilon(x,\lambda)$ является непрерывной функцией двух аргументов $x$ и $\lambda$, то непрерывна и функция $\Upsilon(\lambda)=\sup\limits_{x\in[0,1]}|\upsilon(x,\lambda)|$. Докажем ограниченность $\Upsilon(\lambda)$. Функция $\omega(t)$ абсолютно непрерывна и монотонно возрастает на $[0,1]$, а значит, имеет абсолютно непрерывную обратную функцию $\omega^{-1}$. Положим $a:=\omega(1)$ и сделаем замену $\xi=\omega(t)\in[0,a]$, откуда

$$\Upsilon(\lambda)=\sup_{y\in[0,a]}\int\limits_0^y f(\omega^{-1}(\xi))e^{i\lambda\xi}\cdot\frac{d\xi}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}.$$

Обозначим $g(\xi)=\dfrac{f(\omega^{-1}(\xi))}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}$ и заметим, что в силу той же замены,

$$\int\limits_0^a|g(\xi)|\,d\xi=\int\limits_0^1|f(t)|\,dt,$$

[1]В процессе подготовки статьи к печати автору удалось доказать, что результат остается верен и при $\varepsilon=0$. При $n=2$ этот факт требует применения известной теоремы Карлесона—Ханта, а при $n>2$ дополнительных рассуждений, связанных с определенной технической работой. Кроме того, соответствующие оценки удалось получить и для случая пространств Харди $T: L_p\to H^p$. Полные доказательства этих теорем будут опубликованы в следующих работах автора.

так что $g(\xi) \in L_1[0,a]$. Тогда

$$|\Upsilon(\lambda)| \leqslant \int\limits_0^a |g(\xi)|\,d\xi$$

при $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$, а доказательство убывания к нулю функции $\Upsilon(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ совпадает с доказательством леммы Римана—Лебега. Действительно, для данного $\varepsilon > 0$ найдем непрерывно дифференцируемую функцию $\widetilde{g}(\xi)$ такую, что $\int\limits_0^a |g(\xi) - \widetilde{g}(\xi)|\,d\xi < \varepsilon/2$. Тогда

$$|\Upsilon(\lambda)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{x\in[0,a]}\left|\int\limits_0^x \widetilde{g}(\xi)e^{i\lambda\xi}\,d\xi\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{|\lambda|}\sup_{x\in[0,a]}\left|\widetilde{g}(x)e^{i\lambda x} - \widetilde{g}(0) - \int\limits_0^x \widetilde{g}'(x)e^{i\lambda x}\,dx\right| \leqslant \varepsilon$$

при достаточно большом $|\lambda|$. $\square$

Напомним, что пространство Харди $H^p(\mathbb{C}_+)$, $p \in [1,\infty)$, состоит из аналитических в открытой верхней полуплоскости функций $F(\lambda)$, с конечной нормой

$$\|F(\lambda)\|_{H^p} = \sup_{\tau\geqslant 0}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |F(\sigma + i\tau)|^p\,d\sigma\right)^{1/p}.$$

Теорема Пэли—Винера утверждает, что одностороннее преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t}f(t)\,dt$ любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $p \in [1,2]$, есть функция пространства Харди $H^{p'}$ с сопряженным индексом $p' = p/(p-1)$ (для краткости дальнейших формулировок договоримся везде далее обозначать штрихом сопряженный индекс). Конечно, функция $\Upsilon(\lambda)$ не может лежать в пространстве Харди, поскольку она не аналитична по переменной $\lambda \in \mathbb{C}_+$, но свойства аналитичности и гладкости функции $\Upsilon(\lambda)$ нас не интересуют. Напомним, что эта функция нужна нам для оценивания остаточных членов в асимптотических формулах, возникающих в теории обыкновенных дифференциальных операторов (см., например, [3,12,13]). Таким образом, нам интересен «характер убывания» функции $\Upsilon(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ в $\mathbb{C}_+$. Оказывается, что в этом отношении свойства функции $\Upsilon(\lambda)$ полностью повторяют свойства функций пространства Харди $H^{p'}(\mathbb{C}_+)$.

**Теорема 2.2.** *Пусть функция $\rho(x)$ суммируема на $[0,1]$ и $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in[0,1]}\rho(x) > 0$. Тогда для любой $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, справедлива оценка*

$$\sup_{\tau\geqslant 0}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \Upsilon^q(\sigma + i\tau)\,d\tau\right)^{1/q} \leqslant C\|f\|_{L_p} \tag{2.1}$$

*для произвольного $q > p'$, где величина $C$ зависит только от функции $\rho(x)$ и выбора $q$.*

*Доказательство.* Вновь положим $\xi = \omega(t) \in [0,a]$, $g(\xi) = \dfrac{f(\omega^{-1}(\xi))}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}$ и заметим, что

$$\int\limits_0^a |g(\xi)|^p\,d\xi = \int\limits_0^1 |f(t)|^p\,\frac{dt}{|\rho(t)|^{p-1}} \leqslant C\|f\|_{L_p}^p,$$

поскольку функция $\dfrac{1}{|\rho(t)|^{p-1}}$ измерима и ограничена. Теперь

$$\upsilon(x,\lambda) = \int\limits_0^y g(\xi)e^{i\lambda\xi}\,d\xi = \int\limits_0^a \chi_y(\xi)g(\xi)e^{i\lambda\xi}\,d\xi, \qquad \text{где}\quad y := \omega(x),$$

а $\chi_y(\xi)$ — характеристическая функция отрезка $[0,y]$. Пусть $\lambda\in\mathbb{R}+i\tau$, где $\tau\geqslant 0$ фиксировано. Положим $\lambda=\sigma+i\tau$ и обозначим $h(\xi)=g(\xi)e^{-\tau\xi}$,

$$\hat h = F[h] = \int\limits_0^a f(\xi)e^{i\sigma\xi}\,d\xi = \upsilon(1,\sigma+i\tau)$$

— преобразование Фурье функции $h$. Легко видеть, что

$$\upsilon(x,\lambda)=F[\chi_y\cdot h]=F[\chi_y]*F[h], \qquad \text{где}\ \ F[\chi_y](\mu)=\frac{e^{iy\mu}-1}{i\mu}.$$

Теперь заметим, что $|F[\chi_y](\mu)|\leqslant\varphi(\mu)$, где через $\varphi(\mu)$ мы обозначили функцию

$$\min\{a,\frac{2}{|\mu|}\}=\begin{cases} a, & \text{если}\ \ |\mu|\leqslant 2/a,\\ 2/|\mu|, & \text{если}\ \ |\mu|\geqslant 2/a.\end{cases}$$

В силу классической теоремы Пэли—Винера функция $\upsilon(1,\lambda)$ переменной $\lambda\in\mathbb{C}^+$ лежит в пространстве $H^{p'}$. При этом

$$\|\upsilon(1,\lambda)\|_{H^{p'}}\leqslant C\|g\|_{L_p}\leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина $C$ зависит только от функции $\rho$. По определению пространства Харди,

$$\|\upsilon(1,\sigma+i\tau)\|_{L_{p'}}\leqslant C\|f\|_{L_p}$$

(здесь $\tau\geqslant 0$ фиксировано), где $C$ не зависит от выбора числа $\tau\geqslant 0$. Далее,

$$|\upsilon(x,\sigma+i\tau)|\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(\sigma-\mu)|\upsilon(1,\mu+i\tau)|\,d\mu$$

для любого $x\in[0,1]$, и задача сводится к оценке нормы оператора свертки с функцией $\varphi$. Мы воспользуемся здесь теоремой Юнга о свертке:

**Теорема** (Юнг). *Оператор свертки с функцией $k$, лежащей в $L_\rho(\mathbb{R})$, $1\leqslant\rho\leqslant\infty$, ограниченно действует из $L_r$ в $L_q$, если $1\leqslant r\leqslant\rho'$, $1/q=1/r-1/\rho'$.*

В нашем случае $r=p'$, $q>p'$, $1/\rho=1/q+1/p$, так что $\rho\in(1,p)$, $\rho'\in(p',\infty)$ и все условия теоремы Юнга выполнены. То, что функция $\varphi$ суммируема в любой степени $\rho>1$, следует из ее определения. Итак, для любого фиксированного $\tau\geqslant 0$ имеем

$$\Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}}\Upsilon^q(\sigma+i\tau)\,d\sigma\Biggr)^{1/q} = \Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}}\sup_{x\in[0,1]}|\upsilon(x,\sigma+i\tau)|^q\,d\sigma\Biggr)^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}}\Biggl(\int\limits_{bR}\varphi(\sigma-\mu)|\upsilon(1,\mu+i\tau)\,d\mu\Biggr)^q d\sigma\Biggr)^{1/q}\leqslant C(q)\Biggl(\int\limits_{\mathbb{R}}|\upsilon(1,\mu+i\tau)|^{p'}\,d\mu\Biggr)^{1/p'}\leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина $C$ зависит только от функции $\rho$ и выбора $q$. Переходя к максимуму по $\tau\geqslant 0$, получаем утверждение теоремы. $\square$

Для формулировки дальнейших результатов напомним следующее классическое определение.

**Определение.** Положительная мера $\mu$ с носителем в $\mathbb{C}_+$ называется *мерой Карлесона*, если величина

$$\gamma:=\sup_{x\in\mathbb{R},\,y>0}\mu(Q_{x,y})y^{-1}, \qquad Q_{x,y}=\{z:\operatorname{Re}z\in(x,x+y),\ \operatorname{Im}z\in(0,y)\}, \tag{2.2}$$

конечна.

Если $\mu$ — мера Карлесона, то (см., например, [1, теорема II.3.9])

$$\forall f\in H^r(\mathbb{C}_+):\quad \int|f|^r\,d\mu\leqslant C\|f\|^r_{H^r}, \quad \text{где}\ \ C=C(\gamma), \tag{2.3}$$

для любого $r\in[1,\infty)$.

**Теорема 2.3.** *Пусть функция $\rho(x)$ суммируема на $[0,1]$ и $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in[0,1]}\rho(x) > 0$. Тогда для любой $f\in L_p[0,1]$, $p\in(1,2]$, и для любой меры Карлесона $\mu$ справедлива оценка*

$$\|\Upsilon\|_{L_q(\mu)} \leqslant C\|f\|_{L_p}$$

*для произвольного $q>p'$, где величина $C$ зависит только от функции $\rho(x)$, выбора $q$ и характеристики $\gamma$ меры $d\mu$.*

*Доказательство.* Мы уже доказали, что функция $\Upsilon(\lambda)$ интегрируема в степени $q>p'$ по каждой горизонтальной прямой, лежащей в замкнутой верхней полуплоскости. Заметим теперь, что $\Upsilon(\lambda)$ субгармонична в открытой верхней полуплоскости. Действительно, пусть точка $\lambda_0$ лежит в $\mathbb{C}_+$ вместе со своей окрестностью радиуса $\delta$. Зафиксируем $x\in[0,1]$ и запишем формулу среднего значения для голоморфной функции переменной $\lambda$:

$$\upsilon(x,\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\upsilon(x,\lambda+\delta e^{i\theta})\,d\theta.$$

Тогда

$$|\upsilon(x,\lambda)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\upsilon(x,\lambda+\delta e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Upsilon(\lambda+\delta e^{i\theta})\,d\theta,$$

и остается перейти к супремуму по $x\in[0,1]$. Поскольку функция $\Upsilon(t)$, $t\in\mathbb{R}$, суммируема в степени $q$, то интеграл Пуассона

$$u(\lambda)=\int_{\mathbb{R}}P_\tau(\sigma-t)\Upsilon(t)\,dt,\quad \lambda=\sigma+i\tau,\qquad P_\tau(\xi)=\frac{1}{\pi}\frac{\tau}{\xi^2+\tau^2},$$

корректно определяет гармоническую в $\mathbb{C}_+$ функцию $u(\lambda)$. Эта функция непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}_+$ и совпадает с $\Upsilon(\lambda)$ при $\lambda\in\mathbb{R}$, а значит, является гармонической мажорантой: $\Upsilon(\lambda)\leqslant|u(\lambda)|$ для всех $\lambda\in\overline{\mathbb{C}}_+$. Поскольку $\Upsilon(t)\in L_q(\mathbb{R})$, то $u(\lambda)\in H^q$ (см. [1, теорема I.3.5]), откуда $u\in L_q(d\mu)$ (см. [1, теорема II.3.9]), а значит, и $\Upsilon(\lambda)\in L_q(d\mu)$ с соответствующей оценкой на норму $\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(d\mu)}\leqslant C\|\Upsilon(t)\|_{L_q(\mathbb{R})}$, где величина $C$ зависит только от характеристики меры — числа $\gamma$. Оценка (2.1) завершает доказательство. □

Для приложений полученного результата рассмотрим следующий частный случай.

**Определение.** Назовем последовательность точек $\lambda_n$, $n\in\mathbb{N}$, *несгущающейся*, если

1. $\alpha_1<\operatorname{Im}\lambda_n<\alpha_2$ для некоторых $\alpha_1$ и $\alpha_2$, $0<\alpha_1<\alpha_2$;
2. найдется число $\beta>0$ такое, что в любом прямоугольнике $\operatorname{Re}\lambda\in[x,x+1]$, $\operatorname{Im}\lambda\in[\alpha_1,\alpha_2]$ заключено не более $\beta$ элементов последовательности.

**Следствие 2.1.** *Пусть $\{\lambda_n\}$ — несгущающаяся последовательность. Тогда для любой функции $f\in L_p[0,1]$, $p\in(1,2]$, справедлива оценка*

$$\|\{\Upsilon(\lambda_n)\}\|_{l_q}\leqslant C\|f\|_{L_p}$$

*для произвольного $q>p'$, где величина $C$ зависит только от функции $\rho$, выбора $q$ и последовательности $\{\lambda_n\}$.*

*Доказательство.* Достаточно заметить, что мера $d\mu=\sum\delta(\lambda-\lambda_n)$ является мерой Карлесона. Действительно, для каждого прямоугольника $Q_{x,y}$ имеем

$$\mu(Q_{x,y})\leqslant\begin{cases}\beta(y+1), & \text{если } y\geqslant\alpha_1,\\ 0, & \text{если } y\in(0,\alpha_1).\end{cases}$$

Остается воспользоваться теоремой 2.3. □

Видно, что функция $\varphi$, введенная в доказательстве теоремы 2.2, не суммируема на $\mathbb{R}$, чем и продиктован выбор индекса $q \gneq p'$. Не помогает здесь и тот факт, что функция $\varphi$ лежит в слабом пространстве $L_1(\mathbb{R})$ — пространстве Лоренца[1] $L_{1,\infty}(\mathbb{R})$, поскольку в хорошо известной теореме О'Нейла (см., например, [5, 1.18.9]): *оператор свертки с функцией $k$, лежащей в $L_{\rho,\infty}(\mathbb{R})$, $1<\rho<\infty$, ограниченно действует из $L_r$ в $L_q$, если $1<r<\rho'$, $1/q = 1/r - 1/\rho'$* — не выполнено условие $\rho > 1$. Нам не известно, справедливы ли утверждения теорем 2.2 и 2.3 для $q = p'$. Тем не менее, выбрать $q = p'$ можно, если ослабить норму $\|\cdot\|_{L_\infty}$, вычисляемую по переменной $x \in [0,1]$.

**Теорема 2.4.** *Пусть функция $\rho(x)$ суммируема на $[0,1]$ и $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in[0,1]} \rho(x) > 0$. Тогда для любой $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, для функции*

$$\Upsilon_{p'}(\lambda) = \left( \int_0^1 \left| \int_0^x f(t) e^{i\lambda\omega(t)}\, dt \right|^{p'} dx \right)^{1/p'}$$

*справедлива оценка*

$$\sup_{\tau \geqslant 0} \left( \int_{\mathbb{R}} \big(\Upsilon_{p'}(\sigma + i\tau)\big)^{p'} d\tau \right)^{1/p'} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

*где величина $C$ зависит только от функции $\rho(x)$. Далее, пусть $d\mu$ — карлесонова мера в $\mathbb{C}_+$. Тогда $\Upsilon_{p'} \in L_{p'}(d\mu)$ и*

$$\|\Upsilon_{p'}\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

*где величина $C$ зависит только от функции $\rho(x)$ и характеристики $\gamma$ меры $d\mu$.*

*Доказательство.* Пусть $\xi = \omega(t)$, $g(\xi) = \dfrac{f(\omega^{-1}(\xi))}{\rho(\omega^{-1}(\xi))}$, $\lambda = \sigma + i\tau$, где $\tau \geqslant 0$ фиксировано, $h(\xi) = g(\xi)e^{-\tau\xi}$. В силу теоремы Пэли—Винера при каждом фиксированном $x \in [0,1]$ имеем

$$\|\upsilon(x, \sigma + i\tau)\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C\|\chi_y(\xi) h(\xi)\|_{L_p} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где $C$ зависит только от функции $\rho$. Применяя теорему Фубини к неотрицательной функции $|\upsilon(x,\sigma)|^{p'}$, имеем

$$\int_{\mathbb{R}} \big(\Upsilon_{p'}(\sigma + i\tau)\big)^{p'}\, d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 |\upsilon(x, \sigma + i\tau)|^{p'}\, dx\, d\sigma =$$

$$= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} |\upsilon(x, \sigma + i\tau)|^{p'}\, d\sigma\, dx = \int_0^1 \|\upsilon(x, \sigma + i\tau)\|^{p'}_{L_{p'}(\mathbb{R})}\, dx \leqslant C\|f\|^{p'}_{L_p}.$$

Остается перейти к максимуму по $\tau \geqslant 0$, и первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения проверим, что функция $\big(\Upsilon_{p'}(\lambda)\big)^{p'}$ субгармонична в $\mathbb{C}_+$. Пусть точка $\lambda_0$ лежит в $\mathbb{C}_+$ вместе со своей окрестностью радиуса $\delta$. Зафиксируем $x \in [0,1]$ и, применив формулу среднего значения для голоморфной функции переменной $\lambda$, получим оценку

$$|\upsilon(x, \lambda_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\upsilon(x, \lambda_0 + \delta e^{i\theta})|\, d\theta \leqslant (2\pi)^{\frac{1}{p}-1} \left( \int_0^{2\pi} |\upsilon(x, \lambda_0 + \delta e^{i\theta})|^{p'} d\theta \right)^{1/p'}.$$

[1] Напомним, что пространство Лоренца $L_{\rho,\infty}(\mathbb{R})$ состоит из измеримых функций, норма которых конечна:

$$\|f\|_{L_{\rho,\infty}} := \sup_h \Big( h \,(\mathrm{mes}(\{x : |f(x)| > h\})^{1/\rho} \Big).$$

После возведения в степень $p'$ и интегрирования по $x \in [0,1]$, имеем

$$\left(\Upsilon_{p'}(\lambda_0)\right)^{p'} = \int\limits_0^1 |\upsilon(x,\lambda_0)|^{p'} dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} |\upsilon(x,\lambda_0+\delta e^{i\theta}|^{p'}\, d\theta\, dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(\Upsilon_{p'}(\lambda_0+\delta e^{i\theta})\Big)^{p'}\, d\theta.$$

Определим гармоническую в $\mathbb{C}_+$, непрерывную в $\overline{\mathbb{C}}_+$ и совпадающую с $\left(\Upsilon_{p'}(\lambda)\right)^{p'}$ на $\mathbb{R}$ функцию $u(x)$ интегралом Пуассона

$$u(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} P_\tau(\sigma - t)\left(\Upsilon_{p'}(t)\right)^{p'} dt, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \qquad P_\tau(\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\tau}{\xi^2+\tau^2}.$$

В силу субгармоничности $\left(\Upsilon_{p'}(\lambda)\right)^{p'}$ имеем $\left(\Upsilon_{p'}(\lambda)\right)^{p'} \leqslant |u(\lambda)|$ везде в $\mathbb{C}_+$. Поскольку функция $\left(\Upsilon_{p'}(t)\right)^{p'}$ суммируема на $\mathbb{R}$, то $u \in H^1(\mathbb{C}_+)$ (см. [1, теорема I.3.5]). Тогда для любой меры Карлесона $d\mu$ в $\mathbb{C}_+$ имеем $u \in L_1(d\mu)$ (см. [1, теорема II.3.9]) с оценкой $\|u\|_{L_1(d\mu)} \leqslant C\|u\|_{H^1}$, где величина $C$ зависит только от числа $\gamma$ — характеристики меры $d\mu$. Отсюда

$$\|\Upsilon_{p'}\|_{L_{p'}(d\mu)} = \|(\Upsilon_{p'})^{p'}\|^{1/p'}_{L_1(d\mu)} \leqslant \|u\|^{1/p'}_{L_1(d\mu)} \leqslant C\|u\|^{1/p'}_{H^1} \leqslant$$
$$\leqslant C\|u\|^{1/p'}_{L_1(\mathbb{R})} = C\|\left(\Upsilon_{p'}(t)\right)^{p'}\|^{1/p'}_{L_1(\mathbb{R})} = C\|\Upsilon_{p'}\|_{L_{p'}(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

где величина $C$ зависит только от характеристики $\gamma$ меры $d\mu$ и функции $\rho(x)$. □

## 3. Случай $n > 2$

Асимптотические оценки для систем размера $n \times n$, $n > 2$, дифференциальных уравнений вида

$$\mathbf{y}'(x,\lambda) = \lambda\rho(x)B\mathbf{y}(x,\lambda) + A(x)\mathbf{y}(x,\lambda) + C(x,\lambda)\mathbf{y}(x,\lambda) \tag{3.1}$$

с постоянной матрицей $B$, суммируемой матрицей $A(x)$ и «малой по порядку» матрицей $C(x,\lambda)$ связаны с оценкой остаточных членов более сложного вида. При этом системы вида (3.1) естественным образом возникают при изучении обыкновенных дифференциальных операторов высокого порядка $n = 2m$ с коэффициентами-распределениями (см. [13]) и полиномиальных пучков (см. [11]). В первом случае матрица $B$ диагональна, причем ее диагональные элементы $b_j$, $j = 1, \dots, n$ — корни порядка $n$ из $(-1)^m$.

Мы будем предполагать, что $b_j$, $j = 1, \dots, n$ — набор попарно различных ненулевых комплексных чисел. Определим семейство секторов $\Gamma_\kappa = \{\lambda : \arg\lambda \in (\alpha_{\kappa-1}, \alpha_\kappa)\}$, $\kappa = 1, \dots, J$, следующим образом. Зафиксируем два произвольных индекса $1 \leqslant k < l \leqslant n$ и рассмотрим уравнение

$$\mathrm{Re}(b_k\lambda) = \mathrm{Re}(b_l\lambda) \iff \mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda) = 0. \tag{3.2}$$

Легко видеть, что решением этого уравнения является некоторая прямая, проходящая через начало координат. Общее число уравнений вида (3.2) равно $n(n-1)/2$, так что в результате получаем разбиение комплексной плоскости на $1 \leqslant J \leqslant (n^2 - n)$ секторов. При $J > 1$ каждый сектор ограничен двумя полярными лучами, которые мы занумеруем по возрастанию аргумента $\alpha_0 \leqslant 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{J-1} < \alpha_J = \alpha_0 + 2\pi$. Именно при $\lambda \in \Gamma_\kappa$ система (3.1) имеет матрицу фундаментальных решений $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ с подходящим асимптотическим поведением при $|\lambda| \to \infty$. При этом наибольший интерес для дальнейшего изучения представляют *критические полуполосы*, сосредоточенные вдоль лучей, ограничивающих сектор $\Gamma_\kappa$. Именно в этих полуполосах лежат (в случае регулярности по Биркгофу краевых условий) собственные значения соответствующего дифференциального оператора. Поэтому разумно искать асимптотические формулы для матрицы-функции $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ в «расширенных» секторах.

Определим сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ как результат параллельного переноса сектора $\Gamma_\kappa$ вдоль его биссектрисы (точнее, вдоль продолжения этой биссектрисы за пределы $\Gamma_\kappa$):

$$\widetilde{\Gamma}_\kappa = \widetilde{\Gamma}_\kappa(r) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda + re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)} \in \Gamma_\kappa\},$$

где $r > 0$ фиксировано.

Заметим, что для любой пары индексов $1 \leqslant k, l \leqslant n$ в секторе $\Gamma_\kappa$ выполнено следующее свойство: либо $\mathrm{Re}(b_k\lambda) > \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma_\kappa$, либо $\mathrm{Re}(b_k\lambda) < \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ для всех $\lambda \in \Gamma_\kappa$. Пусть $\nu$ — число различных чисел $b_j$. Перенумеруем числа $b_j$ так, что

$$\mathrm{Re}(b_1\lambda) > \mathrm{Re}(b_2\lambda) > \dots > \mathrm{Re}(b_n\lambda) \quad \forall \lambda \in \Gamma_\kappa. \tag{3.3}$$

В секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ неравенства (3.3), естественно, не выполнены.

**Лемма 3.1.** *Найдутся такие числа $h > 0$ и $\lambda_0 > 0$ (они зависят от величины сдвига $r$), что в области $\mathcal{D}om_{\kappa,\lambda_0} := \{\lambda \in \widetilde{\Gamma}_\kappa, \ |\lambda| > \lambda_0\}$ справедливы неравенства*

$$\mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda) > -h, \quad 1 \leqslant k < l \leqslant n. \tag{3.4}$$

*Доказательство.* Прежде всего, заметим, что сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ ограничен лучом $\ell_1$ вида $\lambda = -re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)} + te^{i\alpha_{\kappa-1}}$, $t > 0$, параллельным лучу $\arg\lambda = \alpha_{\kappa-1}$, и лучом $\ell_2$ вида $\lambda = -re^{\frac{i}{2}(\alpha_{\kappa-1}+\alpha_\kappa)} + te^{\,i\alpha_\kappa}$, $t > 0$, параллельным лучу $\arg\lambda = \alpha_\kappa$. Очевидно, что луч $\ell$ вида $\lambda = a + te^{i\varphi}$, $t > 0$, начиная с некоторого $t$, не попадает в сектор $\Gamma = \{\lambda : \arg\lambda \in (\varphi_0, \varphi_1)\}$, если $\varphi \notin [\varphi_0, \varphi_1]$. Таким образом, луч $\ell_1$ лежит, начиная с некоторого $t = t_1$, либо в секторе $\Gamma_\kappa$, либо в соседнем секторе $\Gamma_{\kappa-1}$ (мы считаем, что $\Gamma_0 := \Gamma_J$, а $\Gamma_{J+1} := \Gamma_1$). Первое невозможно, поскольку по определению $\widetilde{\Gamma}_\kappa \supset \Gamma_\kappa$. Аналогично, луч $\ell_2$ лежит, начиная с некоторого $t = t_2$, в секторе $\Gamma_{\kappa+1}$. Выбрав число $\lambda_0$ равным максимуму из $|\ell_1(t_1)|$ и $|\ell_2(t_2)|$, получим, что область $D_{\kappa,\lambda_0}$ вложена в объединение секторов $\Gamma_{\kappa-1} \cup \overline{\Gamma_\kappa} \cup \Gamma_{\kappa+1}$.

Зафиксируем теперь произвольную пару индексов $1 \leqslant k < l \leqslant n$ и найдем такое число $h_{kl}$, что неравенство $\mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda) > -h_{kl}$ выполнено всюду в $D_{\kappa,\lambda_0}$. Для этого рассмотрим $\mathbb{R}$-линейную функцию $w_{kl}(\lambda) = \mathrm{Re}((b_k - b_l)\lambda)$. Будем считать, что $b_k \neq b_l$, иначе мы положим $h_{kl} = 0$. В силу (3.3) эта функция положительна при $\lambda \in \Gamma_\kappa$. Возможны четыре случая: эта функция может оказаться положительной и в $\Gamma_{\kappa-1}$, и в $\Gamma_{\kappa+1}$. В этом случае мы положим $h_{kl} = 0$ и придем к неравенству $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ при $\lambda \in D_{\kappa,\lambda_0}$. Функция $w_{kl}$ может оказаться положительной в $\Gamma_{\kappa-1}$ и в $\Gamma_\kappa$, но равной нулю на луче $\arg\lambda = \alpha_\kappa$. Тогда $w_{kl}$ отрицательна в $\Gamma_{\kappa+1}$, а так как луч $\ell_2$ параллелен лучу $\arg\lambda = \alpha_\kappa$, то $w_{kl}$ постоянна на $\ell_2$. В этом случае мы положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_2}$. Тогда на каждом параллельном $\ell_2$ луче, лежащем в полосе между лучами $\ell_2$ и $\arg\lambda = \alpha_\kappa$, функция $w_{kl}$ также постоянна и принимает значения в промежутке $(-h_{kl}, 0)$. Отсюда следует неравенство $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ в $D_{\kappa,\lambda_0}$. Функция $w_{kl}$ может оказаться положительной в $\Gamma_\kappa$ и в $\Gamma_{\kappa+1}$, но отрицательной в $\Gamma_{\kappa-1}$ — эта ситуация аналогична предыдущей, мы положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_1}$ и вновь придем к неравенству $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ всюду в $D_{\kappa,\lambda_0}$. Наконец, возможен случай, когда $w_{kl}$ положительна только в секторе $\Gamma_\kappa$, а в секторах $\Gamma_{\kappa-1}$ и $\Gamma_{\kappa+1}$ отрицательна. Тогда $w_{kl} = 0$ и на луче $\arg\lambda = \alpha_\kappa$, и на луче $\arg\lambda = \alpha_{\kappa-1}$. В силу линейности $w_{kl}$ это возможно только тогда, когда эти лучи параллельны. Поскольку $\alpha_\kappa \neq \alpha_{\kappa-1}$, то $\alpha_\kappa = \alpha_{\kappa-1} + \pi$. В этом случае сектор $\Gamma_\kappa$ превращается в полуплоскость, а значит лучи $\ell_1$ и $\ell_2$ составляют одну прямую. Положим $h_{kl} = -w_{kl}|_{\ell_1} = -w_{kl}|_{\ell_2}$ и вновь получим $w_{kl}(\lambda) > -h_{kl}$ в $D_{\kappa,\lambda_0}$. Остается обозначить $h = \max\limits_{1 \leqslant k < l \leqslant n} h_{kl}$. $\square$

Далее будем считать сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ фиксированным. При асимптотическом анализе поведения фундаментальной матрицы решений системы дифференциальных уравнений в секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ возникает задача оценивания следующих выражений:

$$v_{jkl}(s, x, \lambda) = (\pm)_{jk}(\pm)_{lk} \int q_{jl}(t) e^{(b_l - b_k)\lambda(\omega(t) - \omega(s)) + (b_j - b_k)\lambda(\omega(x) - \omega(t))}\, dt, \tag{3.5}$$

где пределы интегрирования равны (мы считаем, что интеграл равен нулю, если нижний предел больше верхнего)

$$\begin{cases} \text{от } x \text{ до } s & \text{при } j, l < k; \\ \text{от } \max\{x, s\} \text{ до } 1 & \text{при } j < k \leqslant l; \\ \text{от } 0 \text{ до } \min\{x, s\} & \text{при } l < k \leqslant j; \\ \text{от } s \text{ до } x & \text{при } k \leqslant j, l. \end{cases} \tag{3.6}$$

Здесь $q_{jl}$ — элементы матрицы $\mathrm{Q}(x) = \mathrm{M}^{-1}(x)(\mathrm{A}(x) - \mathrm{D}(x))\mathrm{M}(x)$, $\mathrm{D}(x) = \mathrm{diag}\{a_{11}(x), \dots, a_{nn}(x)\}$ — диагональная часть матрицы A, а $\mathrm{M}(x)$ также диагональна и равна

$$\mathrm{M}(x) = \mathrm{diag}\left\{\exp\left\{\int\limits_0^x a_{1,1}(t)\,dt\right\}, \dots, \exp\left\{\int\limits_0^x a_{n,n}(t)\,dt\right\}\right\}.$$

Для нас сейчас главное то, что функции $q_{jl}$ суммируемы на отрезке $x \in [0,1]$. Для оценки остатков в асимптотических формулах для функции $\mathrm{Y}(x,\lambda)$ будем использовать функции

$$\Upsilon(\lambda) = \Upsilon_\infty(\lambda) = \max_{j,\,k,\,l,\,s,\,x} |\upsilon_{jkl}(s,x,\lambda)|, \qquad \Upsilon(x,\lambda) = \max_{j,\,k} |\upsilon_{jkk}(0,x,\lambda)|,$$

$$\Upsilon_\mu(\lambda) = \max_{j,\,k,\,l}\left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x,\lambda)|^\mu\,ds\,dx\right)^{1/\mu} + \max_{j,\,k}\left(\int\limits_0^1 |\upsilon_{jkk}(0,x,\lambda)|^\mu dx\right)^{1/\mu}, \tag{3.7}$$

где $\mu \in [1,\infty)$. Легко видеть, что $\Upsilon_\mu(\lambda) \leqslant \Upsilon(\lambda)$ и $\Upsilon(x,\lambda) \leqslant \Upsilon(\lambda)$ для любого $x \in [0,1]$.

Условимся называть меру $d\mu$ с носителем в $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ *допустимой*, если она является мерой Карлесона в каждой полуплоскости $\{z : \mathrm{Re}((\beta_k - \beta_l)z) > -h\}$, $k < l$. По определению, среди пар индексов $k < l$ найдутся две пары, для которых $\mathrm{Re}((\beta_k - \beta_l)z) = 0$ на левой и правой границе сектора $\Gamma_\kappa$ соответственно. Это означает, что мера $d\mu$ является допустимой в $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ в точности тогда, когда величина $y^{-1}d\mu(Q_{x,y})$ ограничена сверху величиной, не зависящей от $x$, в то время как квадрат $Q_{x,y}$ со стороной $y$ скользит по сторонам сектора.

Приведем важный для нас пример допустимой меры. Пусть $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность точек сектора $\widetilde{\Gamma}_\kappa$. Эта последовательность называется *несгущающейся*, если конечна величина $\omega = \sup\limits_{t>0}(n(t+1) - n(t))$. Здесь $n(t)$ — количество точек последовательности, лежащих в пересечении сектора $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ и круга $|z| \leqslant t$ (т. е. $n(\cdot)$ — считающая функция последовательности). Положим $d\mu = \sum\limits_{n=1}^\infty \delta_{z_n}$, где $\delta_a$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $a$. Тогда $d\mu$ — допустимая мера. Действительно, легко видеть, что $\sup\limits_{t>0}(n(t+r) - n(t)) \leqslant \omega(r+1)$. Теперь, поскольку любой квадрат $Q_{x,y}$ в комплексной плоскости вкладывается в кольцо ширины $y\sqrt{2}$, то $d\mu(Q_{x,y}) \leqslant n(t + y\sqrt{2}) - n(t) \leqslant \sqrt{2}\omega(r+1)$.

**Теорема 3.1.** *Пусть все функции $q_{jl}$ лежат в пространстве $L_p[0,1]$ для некоторого $p \in [1,2]$. Зафиксируем некоторую допустимую меру $d\mu$ в секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ с носителем в области $\mathcal{D}om_{\kappa,\lambda_0} = \{\lambda \in \widetilde{\Gamma} : |\lambda| > \lambda_0\}$. Тогда при любых $1 \leqslant j,\, k,\, l \leqslant n$ и $0 \leqslant s,\, x \leqslant 1$ функция $\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)$ переменной $\lambda$, определенная выше, принадлежит пространству $L_{p'}(d\mu)$, $1/p + 1/p' = 1$. При этом*

$$\|\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|q_{jl}\|_{L_p[0,1]}, \tag{3.8}$$

*где величина $C$ не зависит от $q$, $j$, $k$, $l$, $x$ и $s$ (при этом функцию $\rho$, меру $d\mu$ и числа $h$, $\lambda_0$, введенные в лемме 3.1, мы считаем фиксированными). Похожая оценка справедлива для функции $\mathrm{Y}(\lambda)$:*

$$\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(d\mu)} \leqslant C\max_{j,l}\|q_{jl}\|_{L_p[0,1]} \tag{3.9}$$

*для любого $q > p'$, где $C$ зависит только от функции $\rho$, меры $d\mu$, чисел $h$ и $\lambda_0$, а также от выбора индекса $q > p'$.*

*Доказательство.* Рассмотрим несколько случаев.

1. $\mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$ и $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$. В этом случае индексы располагаются в порядке $j < k \leqslant l$. Сделаем замену $\xi = \omega(t) - \omega(x)$. Тогда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_x^1 q_{jl}(t)e^{(b_l-b_k)\lambda(\omega(t)-\omega(s))+(b_j-b_k)\lambda(\omega(x)-\omega(t))}\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^{\omega(1)-\omega(x)} f(\xi)e^{\lambda(b_l-b_j)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_l-b_k)(\omega(x)-\omega(s))},$$

где $f(\xi) = q_{jl}(t(\xi))/\rho(\omega^{-1}(\xi))$ (через $\omega^{-1}$ обозначено обратное к $\omega$ отображение). Заметим сразу же, что функция $e^{\lambda(b_l-b_k)(\omega(x)-\omega(s))}$ ограничена в секторе $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ величиной $e^{hp}$, поскольку $\mathrm{Re}(\lambda(b_l - b_k))) \leqslant h$ (см. лемму 3.1). Далее, по условию,

$$\|f(\xi)\|_{L_p}^p = \int\limits_0^1 |q_{jl}(t)|^p|\rho(t)|^{1-p}\,dt < \infty.$$

В силу теоремы Пэли—Винера, функция $\int\limits_0^{\omega(1)-\omega(x)} f(\xi)e^{\lambda(b_l-b_j)\xi}\,d\xi$ лежит в пространстве Харди $H^{p'}$ в полуплоскости $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda(b_l - b_j)) \leqslant h\}$. Из леммы 3.1 следует, что сектор $\widetilde{\Gamma}_\kappa$ вложен в эту полуплоскость, а значит $d\mu$ — мера Карлесона в ней. Учитывая (2.3), приходим к (3.8). В случае функции $\Upsilon(\lambda)$ воспользуемся теоремой 2.3, согласно которой

$$\left\|\sup_x\left|\int\limits_0^{\omega(1)-\omega(x)} f(\xi)e^{\lambda(b_l-b_j)\xi}\,d\xi\right|\right\|_{L_q(d\mu)} \leqslant C\|f\|_{L_p},$$

поскольку $d\mu$ — мера Карлесона в полуплоскости $\{\lambda : \mathrm{Re}(\lambda(b_l - b_j)) \leqslant h\}$. Остальные случаи разбираются аналогично — кратко перечислим их.

2. $\mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$ и $0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1$. В этом случае вновь $j < k \leqslant l$, но замена иная: $\xi = \omega(t) - \omega(s)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = -\int\limits_0^{\omega(1)-\omega(s)} f(\xi)e^{\lambda(b_l-b_j)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_k-b_j)(\omega(s)-\omega(x))}.$$

Дальнейшие рассуждение те же.

3. $\mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$. Здесь $j < l < k$, функция $\upsilon_{jkl}$ отлична от нуля только при $x < s$, $\xi := \omega(t) - \omega(x)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(s)-\omega(x)} f(\xi)e^{\lambda(b_l-b_j)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_k-b_l)(\omega(s)-\omega(x))}.$$

4. $\mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_l\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$. Здесь $k \leqslant j < l$, функция $\upsilon_{jkl}$ отлична от нуля только при $x > s$, $\xi := \omega(t) - \omega(s)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)-\omega(s)} f(\xi)e^{\lambda(b_l-b_j)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_j-b_k)(\omega(x)-\omega(s))}.$$

5. $\mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_j\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$. Здесь $k \leqslant l \leqslant j$, функция $\upsilon_{jkl}$ отлична от нуля только при $x > s$, $\xi := \omega(x) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)-\omega(s)} f(\xi)e^{\lambda(b_j-b_l)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_l-b_k)(\omega(x)-\omega(s))}.$$

6. $\mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_j\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$. Здесь $l \leqslant j < k$, функция $\upsilon_{jkl}$ отлична от нуля только при $x < s$, $\xi := \omega(s) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)-\omega(s)} f(\xi)e^{\lambda(b_j-b_l)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_k-b_j)(\omega(s)-\omega(x))}.$$

7. $\mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_j\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$, $0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1$. Здесь $l < k \leqslant j$, $\xi := \omega(s) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(s)} f(\xi)e^{\lambda(b_j-b_l)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_j-b_k)(\omega(x)-\omega(s))}.$$

8. $\mathrm{Re}(b_l\lambda) > \mathrm{Re}(b_k\lambda) \geqslant \mathrm{Re}(b_j\lambda)$ в $\Gamma_\kappa$, $0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1$. Здесь снова $l < k \leqslant j$, $\xi := \omega(x) - \omega(t)$, откуда

$$\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda) = \int\limits_0^{\omega(x)} f(\xi)e^{\lambda(b_j-b_l)\xi}\,d\xi \cdot e^{\lambda(b_k-b_l)(\omega(s)-\omega(x))}.$$

Легко проверить, что здесь разобраны все возможные ситуации. □

**Следствие 3.1.** *В условиях теоремы* 3.1 *при любых* $1 \leqslant j,\, k,\, l \leqslant n$

$$\begin{gathered}
\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left\| \left( \int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,ds \right)^{1/p'} \right\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}, \\
\sup_{0\leqslant s\leqslant 1}\left\| \left( \int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,dx \right)^{1/p'} \right\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}, \\
\left\| \left( \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,ds\,dx \right)^{1/p'} \right\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C\|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}
\end{gathered} \tag{3.10}$$

*с константами, не зависящими от* $j$, $k$ *и* $l$. *Из последнего неравенства следует, что*

$$\|\Upsilon_{p'}(\lambda)\|_{L_{p'}(d\mu)} \leqslant C \max_{1\leqslant j,\, l\leqslant n} \|f_{jl}\|_{L_p[0,a]}.$$

*Доказательство.* Достаточно воспользоваться теоремой Тонелли (вариант теоремы Фубини).

**Теорема** (Тонелли). *Пусть* $f$ — *неотрицательная* $\mu\otimes\nu$*-измеримая функция на* $X\times Y$, *где* $\mu$ *и* $\nu$ — $\sigma$*-конечные неотрицательные меры. Тогда из условия*

$$\int\limits_Y \left( \int\limits_X f(x,y)\mu(dx) \right) \nu(dy) < \infty$$

*следует, что* $f \in L_1(\mu\otimes\nu)$, *причем*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\otimes\nu) \leqslant \int\limits_Y \left( \int\limits_X f(x,y)\mu(dx) \right) \nu(dy).$$

Действительно, докажем, например, первое неравенство в (3.10). Из определения легко видеть, что функция $\upsilon_{jkl}$ непрерывна по переменным $s$, $x$ и $\lambda$. Обозначив через $K$ носитель меры $d\mu$, а через $\mu_L$ меру Лебега на $[0,1] \ni s$, имеем

$$\int\limits_{[0,1]\times K} |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,d(\mu_L\otimes d\mu) \leqslant \int\limits_0^1 \left( \int\limits_K |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,d\mu \right) ds \leqslant C,$$

где $C$ не зависит от $x$, $j$, $k$ и $l$. Применяя теперь классическую теорему Фубини, получим

$$\left\| \int_0^1 |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,ds \right\|_{L_{p'}(d\mu)}^{p'} = \int_{[0,1]\times K} |\upsilon_{jkl}(s,x;\lambda)|^{p'}\,d(\mu_L \otimes d\mu) \leqslant C.$$

$\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.
2. *Мирзоев К. А., Шкаликов А. А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами — распределениями// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 5. — С. 788–793.
3. *Савчук А. М., Шкаликов А. А.* Операторы Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2003. — *64*. — С. 159–219.
4. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
5. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
6. *Шкаликов А. А.* Возмущения самосопряженных и нормальных операторов с дискретным спектром// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5 (431). — С. 113–174.
7. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear diferential equations containing a parameter// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*. — C. 21–231.
8. *Grafakos L.* Classical Fourier analysis. — Springer Science+Business Media, LLC, 2008.
9. *Grafakos L.* Modern Fourier analysis. — Springer Science+Business Media, LLC, 2009.
10. *Meyer Y., Coifman R.* Wavelets Calderon—Zygmund and multilinear operators. — Cambridge Univ. Press, 1997.
11. *Rykhlov V. S.* Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order// Result. Math. — 1999. — *36*. — C. 342–353.
12. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — C. 3–36.
13. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* Asymptotic formulas for fundamental system of solutions of high order ordinary differential equations with coefficients-distributions// arXiv:1704.02736, 04/2017.
14. *Tamarkin J. D.* On some general problems of the theory of ordinary linear differential operators and on expansion of arbitrary functions into series. — Petrograd, 1917.



А. М. Савчук
Россия, Москва, Ленинские горы, д.1
E-mail: artem_savchuk@mail.ru


DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-689-702 UDC 517.984.52

# The Calderon–Zygmund Operator and Its Relation to Asymptotic Estimates for Ordinary Differential Operators

© 2017 **A. M. Savchuk**


**Abstract**. We consider the problem of estimating of expressions of the kind $\Upsilon(\lambda) = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t)e^{i\lambda t}\,dt \right|$. In particular, for the case $f \in L_p[0,1]$, $p \in (1,2]$, we prove the estimate $\|\Upsilon(\lambda)\|_{L_q(\mathbb{R})} \leqslant C\|f\|_{L_p}$ for any $q > p'$, where $1/p + 1/p' = 1$. The same estimate is proved for the space $L_q(d\mu)$, where $d\mu$ is an arbitrary Carleson measure in the upper half-plane $\mathbb{C}_+$. Also, we estimate more complex expressions of the kind $\Upsilon(\lambda)$ arising in study of asymptotics of the fundamental system of solutions for systems of the kind $\mathbf{y}' = B\mathbf{y} + A(x)\mathbf{y} + C(x,\lambda)\mathbf{y}$ with dimension $n$ as $|\lambda| \to \infty$ in suitable sectors of the complex plane.

## REFERENCES


1. J. Garnett, *Ogranichennye analiticheskie funktsii* [Bounded Analytic Functions], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
2. K. A. Mirzoev and A. A. Shkalikov, "Differentsial'nye operatory chetnogo poryadka s koeffitsientami-raspredeleniyami" [Even-order differential operators with distributions as coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 5, 788–793 (in Russian).
3. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Operatory Shturma—Liuvillya s potentsialami-raspredeleniyami" [Sturm–Liouville operators with distributions as potentials], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2003, **64**, 159–219 (in Russian).
4. E. M. Stein, *Singulyarnye integraly i differentsial'nye svoystva funktsiy* [Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions], Mir, Moscow, 1973 (Russian translation).
5. H. Triebel, *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory* [Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
6. A. A. Shkalikov, "Vozmushcheniya samosopryazhennykh i normal'nykh operatorov s diskretnym spektrom" [Perturbations of self-adjoin operators with discrete spectrum], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5 (431), 113–174 (in Russian).
7. G. D. Birkhoff, "On the asymptotic character of the solutions of certain linear diferential equations containing a parameter," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1908, **9**, 21–231.
8. L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Springer Science+Business Media, 2008.
9. L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, Springer Science+Business Media, 2009.
10. Y. Meyer, R. Coifman, *Wavelets Calderon—Zygmund and Multilinear Operators*, Cambridge Univ. Press, 1997.
11. V. S. Rykhlov, "Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order," *Result. Math.*, 1999, **36**, 342–353.
12. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "The Dirac operator with complex-valued summable potential," *Math. Notes*, 2014, **96**, No. 5, 3–36.
13. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, "Asymptotic formulas for fundamental system of solutions of high order ordinary differential equations with coefficients-distributions," *arXiv:1704.02736*, 04/2017.
14. J. D. Tamarkin, *On Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Operators and on Expansion of Arbitrary Functions into Series*, Petrograd, 1917.


A. M. Savchuk
Lomonosov Moscow State University, 1 Leninskiye Gory, 119992 Moscow, Russia
E-mail: artem_savchuk@mail.ru