Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 627–677

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-627-677 УДК 517.98, 517.955, 532.5

О КОЛЕБАНИЯХ ДВУХ СОЧЛЕНЕННЫХ МАЯТНИКОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© 2017 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, В. И. ВОЙТИЦКИЙ, З. З. СИТШАЕВА**

Аннотация. Рассматривается линеаризованная задача о малых колебаниях двух маятников, присоединенных один к другому с помощью сферического шарнира. Каждый маятник имеет полость, частично заполненную несжимаемой жидкостью. В работе изучается начально-краевая проблема, а также соответствующая спектральная проблема о нормальных движениях гидромеханической системы. Доказаны теоремы о корректной разрешимости задачи на произвольном отрезке времени как для случая идеальных, так и вязких жидкостей в полостях, а также изучены соответствующие спектральные вопросы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. История вопроса

1.1. Вклад отечественных ученых. Первой работой, посвященной задаче о малых колебаниях твердого тела с полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, была работа Н. Е. Жуковского [13]. В ней впервые были введены вспомогательные функции, зависящие только от формы полости, которые сейчас называют потенциалами Жуковского. С их помощью удается задачу динамики тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, заменить на задачу о движении эквивалентного твердого тела с видоизмененным тензором инерции.

Если жидкость заполняет полость лишь частично, то гидромеханическая система имеет уже бесконечное число степеней свободы. Эта проблема исследовалась в пятидесятые-шестидесятые годы прошлого века весьма интенсивно многими авторами, так как она была связана с началом космических полетов, в частности, с проблемой колебаний жидкого топлива в баке космической ракеты. Среди первых отметим работы Н. Н. Моисеева (1952), затем Г. С. Нариманова, Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича и Л. Н. Сретенского (1956).

Начиная с работ Н. Н. Моисеева и совместной работы С. Г. Крейна и Н. Н. Моисеева [22], исследование этих проблем проводится, в частности, методами функционального анализа и теории операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Это позволяет в простой и весьма прозрачной форме представить и изучить проблему, а также установить общие свойства ее решений.

В шестидесятые и семидесятые годы появилось достаточно много работ и монографий, посвященных задачам динамики тела с полостью, содержащей жидкость: Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. (1965), Моисеев Н. Н., Петров А. А. (1966), Рапопорт И. М. (1967), Микишев Г. Н., Рабинович Б. И. (1968), Черноусько Ф. Л. (1968), Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. (1969), Луковский И. А. (1975), Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. (1977), а также другие монографии.

Что касается задач динамики твердого тела с полостью, содержащей вязкую жидкость и частично ее заполняющую, то здесь пионерскими работами, использующими методы функционального анализа, являются статьи С. Г. Крейна (1964), а также С. Г. Крейна и его учеников (1968), а затем работы Н. Д. Копачевского (1966–1980), Нго Зуй Кана (1968–1981). Эти исследования отражены в монографии Н. Д. Копачевского, С. Г. Крейна и Нго Зуй Кана [16], а затем в двухтомной монографии Н. Д. Копачевского и С. Г. Крейна [30, 31]. В настоящее время направление исследований методами функционального анализа задач динамики твердого тела с полостью, заполненной идеальной либо вязкой жидкостью, продолжает активно развиваться.

Далее, в работах П. В. Харламова (1972) изучался вопрос о совместных движениях сочлененных твердых тел (маятников), соединенных сферическими шарнирами. Затем Ю. Н. Кононов (1997–2006) исследовал движения тела и системы связанных твердых тел с полостями, содержащими жидкость. Наконец в последнее время Э. И. Батыр и Н. Д. Копачевский (см. [4–8]) изучали проблему малых движений системы сочлененных твердых тел (гиростатов), соединенных сферическими шарнирами и имеющих полости, целиком заполненные идеальной либо вязкой жидкостью.

1.2. О содержании работы. В данной работе используются как методы функционального анализа, развитые С. Г. Крейном и позже Н. Д. Копачевским (см. монографии [16,30,31]), так и новые рассмотрения (см. [10, 15]).

В первой части работы изучается задача о малых колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными идеальной жидкостью. В разделе 2 дается постановка задачи и на ее основе выводится закон баланса полной энергии для классического решения проблемы. Далее (в разделе 3) применяется операторный подход к ее исследованию, и возникает задача Коши в некотором гильбертовом пространстве, естественно связанном с изучаемой задачей. В разделе 4 доказывается теорема о разрешимости задачи Коши, а на ее основе — теорема о корректной разрешимости исходной задачи на произвольном отрезке времени. Наконец, в разделе 5 исследуется проблема собственных колебаний гидромеханической системы в случае отсутствия трения в шарнирах. Для нахождения статической устойчивости системы доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

По такой же схеме в части II исследована проблема малых движений и нормальных колебаний системы в случае, когда жидкости в полостях маятников являются вязкими (разделы 6–9). Здесь также доказана теорема о корректной разрешимости задачи, исследован спектр нормальных колебаний (пучок С. Г. Крейна), доказано обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. Отметим, что эта задача изучалась также в статье [10] с использованием другого операторного подхода и неизвестных полей перемещений жидкостей. Также в этой работе приведен подробный вывод уравнений изменения кинетического момента.

Данная работа выполнена при финансовой поддержке первого из соавторов грантом Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037).

Часть 1

СЛУЧАЙ ИДЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛОСТЯХ

2. Постановка задачи

2.1. Основные уравнения, краевые и начальные условия. Будем считать, что имеется гидромеханическая система, состоящая из двух твердых тел G_{01} и G_{02}, у которых плотности равны соответственно ρ_{01} и ρ_{02}. Эти тела (маятники) последовательно соединены сферическими шарнирами: первое тело закреплено в неподвижной точке O_1, а второе аналогичным образом соединено с первым телом в точке O_2. Предполагаем также, что оба тела имеют полости, частично заполненные идеальными однородными несжимаемыми жидкостями с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно.

Будем считать, что на данную систему действует однородное гравитационное поле постоянной интенсивности. Тогда в состоянии покоя гидромеханической системы точки подвеса O_1 и O_2 этих тел находятся на одной вертикальной оси, а центры масс C_1 и C_2 этих тел — также на этой оси. При этом жидкости в полостях (в состоянии равновесия) занимают области Ω_1 и Ω_2 соответственно, причем границы этих областей состоят из твердых стенок S_1 и S_2, а также свободных поверхностей Γ_1 и Γ_2 соответственно, которые являются горизонтальными, т. е. перпендикулярными действию однородного гравитационного поля.

Приведем теперь постановку задачи о малых движениях данной гидромеханической системы, близких к состоянию покоя. Для описания этих движений введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$, так, чтобы ускорение гравитационного поля $\vec{g}=-g\vec{e}^{\,3}$, $g>0$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ $(k=1,2)$, жестко связанные с телами G_{0k}, с единичными векторами $\vec{e}_k^{\,j}$, $j=\overline{1,3}$. Наконец, в состоянии покоя считаем, что подвижная система координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ совпадает с неподвижной системой $O_1x^1x^2x^3$, а подвижная система $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ получается переносом по вертикальной оси системы $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ из точки O_1 в точку O_2. (Напомним, что в состоянии покоя точки O_1, O_2, C_1 и C_2 находятся на одной оси O_1x^3.)

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ $(k=1,2)$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t)=\sum_{j=1}^{3}\delta_k^j(t)\vec{e}_k^{\,j},\quad k=1,2.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_{0k} будет, очевидно, равна $\vec{\omega}_k=d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела равно $d^2\vec{\delta}_k/dt^2=d\vec{\omega}_k/dt$.

Приведем теперь для каждого из тел (маятников) линеаризованные уравнения изменения кинетического момента относительно точки $O_k, k=1,2$, а также следствия из этих уравнений.

Вид этих уравнений можно найти в [10], см. также [5] и [16, с. 129–132, 145, 136]. Кроме того, в данной постановке учитываются отклонения свободных границ Γ_1 и Γ_2 в процессе малых движений системы (см. [16, с. 143–145]). Наконец, отметим еще такой факт. Из уравнений изменения кинетических моментов тел следует, что левые и правые части последующего (второго) уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего (первого) уравнения. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также второе уравнение, приходим к следующим уравнениям изменения кинетических моментов для двух сочлененных маятников.

Первое уравнение:

$$\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}\,d\Omega_1+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2+\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}\right)dm_2+$$
$$+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+m_2h_1\right)P_2\vec{\delta}_1-g\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1=$$
$$=\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1\,dm_1+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\vec{f}_2\,dm_2=:\vec{M}_1(t).\quad(2.1)$$

Здесь $G_k=G_{0k}\cup\Omega_k$ — область, занятая твердым телом и жидкостью для данного маятника, $k=1,2$, $\vec{r}_k$ — радиус-вектор точки в G_k, причем использовано обозначение

$$\int\limits_{G_k}(\ldots)\,dm_k:=\rho_{0k}\int\limits_{G_{0k}}(\ldots)\,d\Omega_k+\rho_k\int\limits_{\Omega_k}(\ldots)\,d\Omega_k.\quad(2.2)$$

Далее, через $\vec{u}_k(t,x)$ обозначено поле относительной скорости жидкости в области Ω_k, $\vec{h}_1=\overrightarrow{O_1O_2}$, $\alpha_k>0$, $k=1,2,$ — коэффициенты трения в шарнирах, $h_1=|\overrightarrow{O_1O_2}|$, $x_k^3=\zeta_k(t,x_k^1,x_k^2)$,

$(x_k^1, x_k^2) \in \Gamma_k$, — отклонения свободных поверхностей жидкостей в процессе малых движений маятников, m_k — масса маятника с жидкостью, $l_k = |\overrightarrow{O_k C_k}|$,

$$P_2 \vec{\delta}_k = \sum_{j=1}^{2} \delta_k^j \vec{e}_k^{\,j} \tag{2.3}$$

является проекцией на плоскость Γ_k вектора углового перемещения $\vec{\delta}_k$. Наконец, предполагается, что в процессе малых движений системы на нее действует поле, мало отклоняющееся от гравитационного, т. е. поле

$$-g\vec{e}^{\,3} + \vec{f}, \quad \vec{f}_1 := \vec{f}|_{G_1}, \; \vec{f}_2 := \vec{f}|_{G_2}. \tag{2.4}$$

Уравнение изменения кинетического момента для второго маятника таково:

$$\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2)\, dm_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1)\, dm_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\, d\Omega_2 + \alpha_2(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1) +$$

$$+ g m_2 l_2 P_2 \vec{\delta}_2 - g\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_2\, d\Gamma_2 = \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times \vec{f}_2\, dm_2 =: \vec{M}_2(t). \tag{2.5}$$

Здесь обозначения те же, что были введены выше.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения жидкостей в полостях, а также граничные условия на твердых стенках S_k и свободных поверхностях Γ_k, $k = 1, 2$.

Уравнения движения для идеальных жидкостей (уравнения Эйлера) имеют вид

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \right) + \nabla p_1 = \rho_1 \vec{f}_1, \quad \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{2.6}$$

$$\rho_2 \left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \right) + \nabla p_2 = \rho_2 \vec{f}_2, \quad \operatorname{div} \vec{u}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{2.7}$$

где через $p_k = p_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$, обозначено отклонение давления в области Ω_k от равновесного давления в этой области в состоянии покоя.

Далее, в процессе движения идеальных жидкостей на твердых стенках S_k полостей Ω_k должны выполняться условия непротекания:

$$\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad k = 1, 2, \tag{2.8}$$

где $\vec{n}_k$ — (внешняя) нормаль к $\partial\Omega_k$.

В исследуемой задаче должны выполняться также кинематические условия следующего вида:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\left(P_2 \vec{\delta}_k\right) = P_2 \vec{\omega}_k, \quad \frac{d}{dt} \vec{\delta}_k^{\,3} = \vec{\omega}_k^{\,3}, \\ \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} = u_k^3 = \vec{u}_k \cdot \vec{n}_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = 1, 2. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Здесь для удобства последующих построений связь $d\vec{\delta}_k/dt = \vec{\omega}_k$ расщеплена на две, так как в уравнения движения, а также в граничные условия на Γ_k входит лишь $P_2 \vec{\delta}_k$ (см. ниже).

Эти динамические условия имеют следующий вид:

$$p_k = \rho_k g(\zeta_k + (P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k), \; k = 1, 2. \tag{2.10}$$

Отметим еще, что из свойства несжимаемости жидкостей следуют условия сохранения объемов жидкостей:

$$\int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k\, d\Gamma_k = 0, \; k = 1, 2. \tag{2.11}$$

Наконец, для полной постановки начально-краевой задачи к уравнениям (2.1), (2.5)–(2.7) и краевым условиям (2.8)–(2.11) следует добавить начальные условия

$$\begin{aligned} \vec{u}_k(0,x) = \vec{u}_k^0(x), \quad x \in \Omega_k, \\ \zeta_k(0,x) = \zeta^0(x), \quad x \in \Gamma_k, \\ \vec{\omega}_k(0) = \vec{\omega}_k^0, \quad \vec{\delta}_k(0) = \vec{\delta}_k^0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.2. Закон баланса полной энергии гидромеханической системы. Будем считать, что задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет классическое решение при $t \geqslant 0$, и выведем закон баланса полной энергии.

С этой целью умножим (скалярно) обе части уравнения (2.6) на $\vec{u}_1$ и проинтегрируем по Ω_1. Будем иметь

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{f}_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1. \tag{2.13}$$

Здесь в силу граничных условий (2.9)–(2.11)

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \vec{u}_1 \, d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} \operatorname{div}(p_1 \vec{u}_1) \, d\Omega_1 = \int\limits_{\Gamma_1} p_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1) \, d\Gamma_1 = \int\limits_{\Gamma_1} \rho_1 g (\zeta_1 + (P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \, d\Gamma_1 = \\ = \frac{1}{2} \rho_1 g \frac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_1|^2 \, d\Gamma_1 + \rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} ((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} \, d\Gamma_1. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Умножая теперь обе части (2.7) на $\vec{u}_2$ и интегрируя по Ω_2, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1) \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2) \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 + \int\limits_{\Omega_2} \nabla p_2 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 = \\ = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{f}_2 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2, \end{aligned} \tag{2.15}$$

причем

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_1} \nabla p_2 \cdot \vec{u}_2 \, d\Omega_2 = \ldots = \int\limits_{\Gamma_2} p_2 (\vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2) \, d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \rho_2 g (\zeta_2 + (P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \, d\Gamma_2 = \\ = \frac{1}{2} \rho_2 g \frac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_2} |\zeta_2|^2 \, d\Gamma_2 + \rho_2 g \int\limits_{\Gamma_2} ((P_2 \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \frac{\partial \zeta_2}{\partial t} \, d\Gamma_2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Далее, умножение обеих частей (2.1) на $\vec{\omega}_1$ с учетом обозначения (2.2) дает соотношение

$$\begin{aligned} \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \Big(\vec{r}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1)\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \Big(\vec{r}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1)\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_1 + \\ + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \Big(\vec{r}_1 \times \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_1 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \Big(\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{\partial t} \times \vec{r}_2)\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_{02} + \\ + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \Big(\vec{h}_1 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{\partial t} \times \vec{r}_2 + \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t})\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Omega_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)|\vec{\omega}_1|^2 - \\ - \alpha_2 \vec{\omega}_2 \cdot \vec{\omega}_1 + g(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \vec{\delta}_1 \cdot \vec{\omega}_1 - g\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} \Big((\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_1\Big) \cdot \vec{\omega}_1 \, d\Gamma_1 = \vec{M}_1(t) \cdot \vec{\omega}_1. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Соответственно при умножении обеих частей (2.5) на $\vec{\omega}_2$ получаем

$$\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_2+$$
$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\Big(\vec{r}_2\times\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_2+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t}\times\vec{h}_1)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_{02}+$$
$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\Big(\vec{r}_2\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{\partial t}\times\vec{h}_1)\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Omega_2+\alpha_2(|\vec{\omega}_2|^2-\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_2)+gm_2l_2P_2\vec{\delta}_2\cdot\vec{\omega}_2-$$
$$-g\rho_2\int\limits_{\Gamma_2}\Big((\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_2\Big)\cdot\vec{\omega}_2\,d\Gamma_2=\vec{M}_2(t)\cdot\vec{\omega}_2. \quad (2.18)$$

Учитывая свойства сохранения объема (2.11), введем для удобства записи дальнейших формул ортопроекторы

$$\theta_k:\ L_2(\Gamma_k)\to L_{2,\Gamma_k}:=L_2(\Gamma_k)\ominus\{1_k\},\quad k=1,2, \quad (2.19)$$

на подпространства L_{2,Γ_k} функций из $L_2(\Gamma_k)$, ортогональных к единичной функции $1_k\equiv 1$, заданной на Γ_k.

Складывая теперь левые и правые части в (2.13), (2.15), (2.17), (2.18) и учитывая (2.14), (2.16), после преобразований (с учетом свойств смешанного произведения векторов) приходим к тождеству

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2\,d\Omega_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02}+$$
$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2\,d\Omega_2\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\Big\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}\Big(|\zeta_k+\theta_k((P_2\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2-|\theta_k((P_2\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2\Big)\,d\Gamma_k\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{(m_1l_1+m_2h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2+m_2l_2|P_2\vec{\delta}_2|^2\Big\}=$$
$$=-\Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2\Big)+\sum_{k=1}^{2}\vec{M}_k(t)\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k\,d\Omega_k. \quad (2.20)$$

Это соотношение — закон баланса полной энергии системы в дифференциальной форме. Здесь слева в первых фигурных скобках стоит удвоенная кинетическая энергия гидромеханической системы, состоящая из суммы кинетических энергий твердых тел и кинетических энергий жидкостей в полостях маятников. При этом $\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1$ — поле абсолютной скорости жидкости в первой полости, а $\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2$ — поле абсолютной скорости во второй полости. Далее, вторая фигурная скобка после умножения на g дает потенциальную энергию системы, отвечающую возмущениям ζ_k свободной поверхности Γ_k в процессе малых движений; в частности, если $\zeta_k\equiv 0$, то это выражение дает нулевой вклад в потенциальную энергию. Наконец, последняя фигурная скобка после умножения на g соответствует изменению потенциальной энергии системы, отвечающему перемещению энергии системы из состояния покоя на углы поворота $\vec{\delta}_1$ и $\vec{\delta}_2$ для тел.

Справа в (2.20) стоит мощность сил трения в шарнирах (первое слагаемое), а также мощность внешних сил, отвечающих действию внешнего дополнительного поля $\vec{f}$ (см. (2.4)) в жидкостях и твердых телах.

Таким образом, соотношение (2.20) означает, что изменение со временем полной энергии гидромеханической системы равно мощности внутренних и внешних сил, действующих на систему.

При $\vec{f}_k \equiv \vec{0}$, $k = 1, 2$, с учетом определений $\vec{M}_k(t)$ (см. (2.1), (2.5)), получаем из (2.20) закон сохранения полной энергии изучаемой системы.

3. Операторный подход к исследованию начально-краевой задачи

В этом разделе вводятся функциональные пространства, позволяющие применить к задаче (2.1), (2.5)–(2.12) операторный подход, основные идеи которого изложены, например, в [16]. Именно, к этой задаче применяется метод ортогонального проектирования на введенные ниже подпространства, и на этой основе получена задача Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором гильбертовом пространстве, равносильная исходной начально-краевой задаче (2.1), (2.5)–(2.12). В целом примененный здесь подход отличается от подходов, изложенных в [22], [16, с. 143–158], и является развитием подходов из статьи [15].

3.1. Выбор функциональных пространств. Так как кинетическая энергия жидкостей в полостях Ω_k в любой момент времени должна быть конечной, то из (2.20) следует, что поля относительных скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ должны быть функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$ со скалярными произведениями

$$(\vec{u}_k, \vec{v}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} := \int_{\Omega} \vec{u}(x) \cdot \overline{\vec{v}_k}\, d\Omega. \tag{3.1}$$

Опираясь на свойство соленоидальности $\vec{u}_k$ и граничные условия исследуемой проблемы, воспользуемся ортогональным разложением пространства $\vec{L}_2(\Omega_k)$ на подпространства, естественно возникающие в этой задаче (см. [16, с. 106]):

$$\vec{L}_2(\Omega_k) = \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{J}_0(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1, 2, \tag{3.2}$$

где

$$\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) := \{\nabla\varphi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \varphi_k = 0 \quad (\text{на } \Gamma_k)\}, \tag{3.3}$$

$$\vec{J}_0(\Omega_k) := \Big\{\vec{w}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \operatorname{div}\vec{w}_k = 0 \quad (\text{в} \quad \Omega_k), \quad \vec{w}_k \cdot \vec{n}_k = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)\Big\}, \tag{3.4}$$

$$\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) := \big\{\nabla\Phi_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \Delta\Phi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \ (\text{на } S_k), \ \int_{\Gamma_k} \Phi_k d\Gamma_k = 0\big\}. \tag{3.5}$$

Здесь $\vec{n}_k$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega_k$, а операции вычисления дивергенции и производной по нормали понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [16, п. 2.1], а также [19]. Отметим еще, что границы $\partial\Omega_k$ предполагаются липшицевыми, причем S_k и Γ_k — липшицевы куски этих границ (см. [19, 20]).

Так как потенциальная энергия жидкостей (и всей гидромеханической системы) также должна быть конечной в любой момент времени $t \geqslant 0$, то снова в силу (2.20) следует считать, что $\zeta_k(t,x), x \in \Gamma_k$, являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $L_2(\Gamma_k)$ со скалярным произведением

$$(\zeta_k, \eta_k)_{L_2(\Gamma_k)} := \int_{\Gamma_k} \zeta_k \overline{\eta_k}\, d\Gamma_k, \quad k = 1, 2. \tag{3.6}$$

Тогда из условий сохранения объемов жидкостей при колебаниях, т. е. из условий (2.11), следует, что в рассматриваемой задаче

$$\zeta_k \in L_{2,\Gamma_k} = L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_k\}, \tag{3.7}$$

см. (2.19).

3.2. Применение метода ортогонального проектирования. Опираясь на приведенные выше соображения, применим метод ортогонального проектирования на подпространства (3.3)–(3.5) уравнений движения (2.6), (2.7).

Так как $\operatorname{div}\vec{u}_k = 0$ в Ω_k и $\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k = 0$ на S_k, то в силу разложения (3.2) имеем

$$\vec{u}_k = \vec{w}_k + \nabla\Phi_k, \quad \vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k),\ \nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,\,S_k}(\Omega_k), \quad k = 1,2. \tag{3.8}$$

Далее заметим, что давления $p_k(t,x)$, $x \in \Omega_k$, определены с точностью до произвольной функции t. Поэтому, используя условия (2.11) и вводя ортопроекторы θ_k (см. (2.19)),

$$\theta_k\zeta_k = \zeta_k - |\Gamma_k|^{-1}\int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k\, d\Gamma_k, \quad \forall\zeta_k \in L_2(\Gamma_k), \tag{3.9}$$

перепишем условия (2.10) в виде

$$p_k = \rho_k g(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k)\,, \quad \int\limits_{\Gamma_k} p_k\, d\Gamma_k = 0, \tag{3.10}$$

где теперь p_k — нормированные давления, $k = 1,2$. Поэтому в силу (3.3)–(3.5)

$$\nabla p_k = \nabla\widetilde{p_k} + \nabla\varphi_k, \quad \nabla\widetilde{p_k} \in \vec{G}_{h,\,S_k}(\Omega_k),\ \nabla\varphi_k \in \vec{G}_{0,\,\Gamma_k}(\Omega_k). \tag{3.11}$$

Пусть P_{0,Γ_k}, $P_{0,k}$ и P_{h,S_k} — ортопроекторы на соответствующие подпространства (3.3)–(3.5). Тогда, подставляя представления (3.8) и (3.11) при $k = 1$ в уравнение (2.6) и действуя этими ортопроекторами на обе части (2.6), приходим к соотношениям

$$\rho_1 P_{0,\Gamma_1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) + \nabla\varphi_1 = \rho_1 P_{0,\Gamma_1}\vec{f}_1, \tag{3.12}$$

$$\rho_1\frac{d\vec{w}_1}{dt} + \rho_1 P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = \rho_1 P_{0,1}\vec{f}_1, \tag{3.13}$$

$$\rho_1\frac{d}{dt}\nabla\Phi_1 + \rho_1 P_{h,S_1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) + \nabla\widetilde{p_1} = \rho_1 P_{h,S_1}\vec{f}_1. \tag{3.14}$$

Здесь производные $\partial/\partial t$ у векторных полей скоростей заменены на d/dt, так как эти поля и поля градиентов давлений считаем функциями переменной t со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.

Аналогичная процедура проектирования для уравнения движения (2.7) приводит к соотношениям

$$\rho_2 P_{0,\Gamma_2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) + \nabla\varphi_2 = \rho_2 P_{0,\Gamma_2}\vec{f}_2, \tag{3.15}$$

$$\rho_2\frac{d\vec{w}_2}{dt} + \rho_2 P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2, \tag{3.16}$$

$$\rho_2\frac{d}{dt}\nabla\Phi_2 + \rho_2 P_{h,S_2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) + \nabla\widetilde{p_2} = \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2. \tag{3.17}$$

Отметим теперь, что в силу нормировки (3.10) для p_k и определения $\vec{G}_{0,\,\Gamma_k}(\Omega_k)$ (см. (3.2)) граничные условия (3.10) можно переписать в виде

$$\widetilde{p_k} = \rho_k g(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k)\,, \quad k = 1,2. \tag{3.18}$$

Далее, кинематические условия (2.9) для ζ_k с учетом (3.8) теперь переписываются следующим образом:

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k := \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} \quad (\text{на } \Gamma_k)\,, \tag{3.19}$$

где $\gamma_{n,k}$ — операция взятия нормальной компоненты поля на Γ_k:

$$\gamma_{n,k}\vec{u}_k = (\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k)_{\Gamma_k}, \quad k = 1,2. \tag{3.20}$$

Отметим теперь важное обстоятельство: поле $\nabla\varphi_1$ не входит в систему уравнений (3.13), (3.14), а $\nabla\varphi_2$ — в систему уравнений (3.16), (3.17). Поэтому эти поля могут быть найдены по известным решениям $\vec{\omega}_k(t)$ и заданным $\vec{f}_k$ из формул (3.12), (3.15). Далее, векторы $\vec{\delta}_k^3(t) = \delta_k^3(t)\vec{e}_k^{\,3}$, $k = 1,2$, также не входят в эти уравнения и находятся по $\vec{\omega}_k^3(t) = \omega_k^3(t)\vec{e}_k^{\,3}$, $k = 1,2$, и начальным условиям. Поэтому в дальнейшем достаточно исследовать начально-краевую задачу (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), (2.1), (2.5), (2.11), (3.18), (3.19) при соответствующих начальных условиях.

3.3. Переход к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве. Рассмотрим сначала две вспомогательные краевые задачи Зарембы, помогающие в дальнейшем исключить давления $\widetilde{p_k}$ в областях Ω_k, выразив их через ζ_k и $P_2\vec{\delta}_k$. Эти задачи таковы:

$$\Delta\widetilde{p_k} = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\widetilde{p_k}}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \widetilde{p_k} = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \psi_k \, d\Gamma_k = 0. \tag{3.21}$$

Для области Ω_k с липшицевой границей $\partial\Omega_k$, разбитой на липшицевы куски S_k и Γ_k, задача (3.21) имеет единственное слабое решение

$$\widetilde{p_k} \in H^1_{h,S_k}(\Omega_k) := \Big\{\widetilde{p_k} \in H^1(\Omega_k) : \ \Delta\widetilde{p_k} = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \frac{\partial\widetilde{p_k}}{\partial n_k} = 0 \quad (\text{на } S_k), \ \widetilde{p_k} = \psi_k \quad (\text{на } \Gamma_k)\Big\} \tag{3.22}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\psi_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k} := H^{1/2}(\Gamma_k) \cap L_{2,\Gamma_k}, \tag{3.23}$$

(см., например, [16, с. 45-46], а также [19,20]). Поэтому можно считать, что

$$\nabla\widetilde{p_k} = V_k\psi_k, \quad V_k \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_k}; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)). \tag{3.24}$$

(Заметим, что между элементами $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ из (3.5) и $H^1_{h,S_k}(\Omega_k)$ с квадратом нормы

$$\|\widetilde{p_k}\|^2_{H^1_{h,S_k}(\Omega_k)} := \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\widetilde{p_k}|^2 \, d\Omega_k, \quad \int\limits_{\Gamma_k} \widetilde{p_k} \, d\Gamma_k = 0, \tag{3.25}$$

имеет место изометрический изоморфизм.)

С помощью введенных операторов V_k вместо граничных условий (3.18) будем иметь соотношения

$$\nabla\widetilde{p_k} = \rho_k g V_k(\zeta_k + \theta_k(P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}) \quad (\text{на } \Gamma_k), \quad k = 1,2. \tag{3.26}$$

Опираясь на эти факты, получим дифференциально-операторную связь между искомыми функциями в исследуемой проблеме. С этой целью введем в качестве искомых объектов наборы элементов

$$z := (z_1; z_2)^\tau, \ z_1 := (z_{1,1}; z_{1,2})^\tau, \ z_{1,1} = (\vec{w}_1; \nabla\Phi_1; \vec{\omega}_1)^\tau, \ z_{1,2} = (\vec{w}_2; \nabla\Phi_2; \vec{\omega}_2)^\tau,$$
$$z_2 := (z_{2,1}; z_{2,2})^\tau, \ z_{2,1} = (\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1)^\tau, \ z_{2,2} = (\zeta_2; P_2\vec{\delta}_2)^\tau, \tag{3.27}$$

и будем считать, что они являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 = (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3),$$
$$\mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2). \tag{3.28}$$

Тогда уравнения (3.13), (3.14), (2.1), (3.16), (3.17), (2.5) с учетом (3.8) и (3.26) можно в векторно-матричной форме переписать в терминах (3.27) в следующем виде:

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t). \tag{3.29}$$

Здесь C_1, A_1 и B_{12} — операторные матрицы размера 6×6, 6×6 и 6×4, отвечающие ортогональным разложениям (3.28). При этом

$$C_1 z_1 = \Big(\rho_1\vec{w}_1 + \rho_1 P_{0,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1); \quad \rho_1\nabla\Phi_1 + \rho_1 P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1);$$

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \vec{w}_1)\, d\Omega_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \nabla\Phi_1)\, d\Omega_1 + \vec{J}_1\omega_1 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2 +$$
$$+ \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \vec{w}_2\, dm_2 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times \nabla\Phi_2\, dm_2 + \int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\, dm_2;$$
$$\rho_2\vec{w}_2 + \rho_2 P_{0,2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) + \rho_2 P_{0,2}(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2); \rho_2\nabla\Phi_2 + \rho_2 P_{h,S_2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1) + \rho_2 P_{h,S_2}(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2);$$
$$\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{r}_2 \times \vec{w}_2)\, d\Omega_2 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{r}_2 \times \nabla\Phi_2)\, d\Omega_2 + \vec{J}_2\vec{\omega}_2 + \int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2\Big)^{\tau}, \qquad (3.30)$$

где $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ — тензоры инерции маятников вместе с жидкостью:

$$\vec{J}_k\vec{\omega}_k := \rho_{0k} \int\limits_{\Omega_{0k}} \vec{r}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\, d\Omega_{0k} + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{r}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\, d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \qquad (3.31)$$

Далее, операторная матрица A_1 из (3.29) имеет ненулевые элементы лишь следующего вида

$$A_{1,33} = \alpha_1 + \alpha_2, \quad A_{1,36} = -\alpha_2 = A_{1,63}, \quad A_{1,66} = \alpha_2. \qquad (3.32)$$

Наконец, операторная матрица B_{12} действует по закону

$$B_{12}z_2 = \Big(0;\ \rho_1 V_1(\zeta_1 + \theta_1(P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}); -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1 + (m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2\vec{\delta}_1;$$
$$0;\ \rho_2 V_2(\zeta_2 + \theta_2(P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}); -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\zeta_2\, d\Gamma_2 + m_2 l_2 P_2\vec{\delta}_2\Big)^{\tau}. \qquad (3.33)$$

Лемма 3.1. *Операторная матрица C_1 из* (3.30) *является ограниченным самосопряженным и положительно определенным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1$. Квадратичная форма $(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1}$ равна удвоенной кинетической энергии гидромеханической системы (см.* (2.20)*), т. е. C_1 является оператором кинетической энергии.*

Доказательство. Очевидно, каждый элемент матрицы C_1 из (3.30) является ограниченным оператором, действующим из одного пространства в другое (см. (3.28)), так что область определения оператора C_1 есть все пространство $\mathcal{H}_1$.

Покажем, что $C_1 = C_1^*$. Из (3.30) видим, что диагональные элементы C_1 являются самосопряженными и положительно определенными операторами, так как $\vec{J}_k : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ положительно определенные, $k = 1, 2$, и, кроме того $\int\limits_{G_2} \vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2 = m_2 h_1^2 P_2 \vec{\omega}_1$. Поэтому

$$C_{1,0} := \operatorname{diag}(\rho_1 I; \rho_1 I; \vec{J}_1 + m_2 h_1^2 P_2; \rho_2 I; \rho_2 I; \vec{J}_2) \gg 0. \qquad (3.34)$$

Проверим теперь, что соответствующие внедиагональные элементы в C_1 взаимно сопряжены. Этот факт основан на тождествах

$$(P_{0,1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1), \vec{w}_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \int\limits_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \overline{\vec{w}_1}\, d\Omega_1 = \vec{\omega}_1 \cdot \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \overline{\vec{w}_1})\, d\Omega_1,$$
$$(P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1), \nabla\Phi_1)_{\vec{L}_2(\Omega_1)} = \int\limits_{\Omega_1} (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1 = \vec{\omega}_1 \cdot \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \overline{\nabla\Phi_1})\, d\Omega_1,$$

а также на аналогичных формулах с индексом 2.

Далее устанавливаем также, что

$$\int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times \vec{w}_2)\, dm_2 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{h}_1 \times \vec{w}_2) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_2 = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{w}_2 \cdot (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1)\, d\Omega_2 = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{w}_2 \cdot \overline{P_{0,2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)}\, d\Omega_2,$$
$$\int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times \nabla\Phi_2)\, dm_2 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{h}_1 \times \nabla\Phi_2) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Omega_2 =$$

$$
\begin{gathered}
= \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \nabla\Phi_2 \cdot (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1)\, d\Omega_2 = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \nabla\Phi_2 \cdot \overline{P_{h,S_2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)}\, d\Omega_2, \\
\int\limits_{G_2} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2))\, dm_2 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \int\limits_{G_2} (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1) \cdot (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\, dm_2 = \\
= \int\limits_{G_2} (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \cdot (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{h}_1)\, dm_2 = \vec{\omega}_2 \cdot \overline{\int\limits_{G_2} \vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1)\, dm_2}.
\end{gathered}
$$

Из приведенных тождеств и следует свойство самосопряженности операторной матрицы C_1. Следствием этих же формул является тождество

$$
\begin{gathered}
(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \Big[\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{w}_1 + \nabla\Phi_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_1 + \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2\, d\Omega_{01}\Big] + \\
+ \Big[\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{w}_2 + \nabla\Phi_2 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_2 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2\, d\Omega_{02}\Big], \quad (3.35)
\end{gathered}
$$

откуда следует, что C_1 — положительный оператор, причем правая часть равна удвоенной кинетической энергии системы. Так как C_1 равен сумме положительно определенного оператора $C_{1,0}$ из (3.34) и конечномерного оператора, образованного внедиагональными элементами, то C_1 положительно определен в $\mathcal{H}_1$. □

Лемма 3.2. *Операторная матрица* A_1 *с элементами* (3.32) *является ограниченным самосопряженным неотрицательным оператором. Квадратичная форма оператора* A_1 *равна*

$$
(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 \geqslant 0, \tag{3.36}
$$

и потому A_1 *можно назвать оператором диссипации энергии гидромеханической системы.*

Лемма 3.3. *Оператор* $B_{12}: \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$, *определенный формулой* (3.33), *является блочно-диагональным неограниченным оператором, заданным на области определения*

$$
\mathcal{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2), \tag{3.37}
$$

плотной в $\mathcal{H}_2$.

Доказательство. Оно следует из того, что операторы V_k, дающие решения вспомогательных задач Зарембы (3.21), заданы на $\mathcal{D}(V_k) = H^{1/2}_{\Gamma_k}$ и $H^{1/2}_{\Gamma_k}$ плотно в L_{2,Γ_k}, причем $V_k \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_k}; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k))$ и область значений $\mathcal{R}(V_k) = \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$. □

Дальнейшее применение операторного подхода в исследуемой задаче основано на том, что кинематические условия на Γ_k (см. (2.9), (3.19), (3.20)), т. е. условия

$$
\frac{d\zeta_k}{dt} = \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k, \quad \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_k = P_2 \vec{\omega}_k, \quad k = 1, 2, \tag{3.38}
$$

можно переписать в эквивалентной форме, позволяющей ввести в рассмотрение оператор потенциальной энергии системы.

Очевидно, если выполнены условия (3.38), то справедливы также условия

$$
\begin{gathered}
\rho_1 g \frac{d\zeta_1}{dt} + \rho_1 g \frac{d}{dt}(\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1)) - \rho_1 g \gamma_{n,1} \nabla\Phi_1 - \rho_1 g \theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}^{\,3}_1) = 0, \\
-\rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1) \frac{d\zeta_1}{dt}\, d\Gamma_1 + g(m_1 l_1 + m_2 h_1) \frac{d}{dt} P_2 \vec{\delta}_1 + \\
+\rho_1 g \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1) \gamma_{n,1} \nabla\Phi_1\, d\Gamma_1 - g(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \vec{\omega}_1 = 0, \\
\rho_2 g \frac{d\zeta_2}{dt} + \rho_2 g \frac{d}{dt}(\theta_2((P_2\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}^{\,3}_2)) - \rho_2 g \gamma_{n,2} \nabla\Phi_2 - \rho_2 g \theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}^{\,3}_2) = 0,
\end{gathered}
$$

$$-\rho_2 g\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\frac{d\zeta_2}{dt}\,d\Gamma_2+gm_2l_2\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2+\rho_2 g\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\gamma_{n,2}\nabla\Phi_2\,d\Gamma_2-gm_2l_2P_2\vec{\omega}_2=0. \tag{3.39}$$

Коротко эти условия можно переписать в виде

$$gC_2\frac{d\zeta_2}{dt}+gB_{21}z_1=0, \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}C_2z_2=\Big(&\rho_1\zeta_1+\rho_1\theta_1((P_2\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3});\ -\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\zeta_1\,d\Gamma_1+(m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\delta}_1;\\&\rho_2\zeta_2+\rho_2\theta_2((P_2\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3});\ -\rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\zeta_2\,d\Gamma_2+m_2l_2P_2\vec{\delta}_2\Big)^{\tau},\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}B_{21}z_1=\Big(&-\rho_1\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1-\rho_1\theta_1((P_2\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3});\ \rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1\,d\Gamma_1-(m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\omega}_1;\\&-\rho_2\gamma_{n,2}\nabla\Phi_2-\rho_2\theta_2((P_2\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3});\ \rho_2\int\limits_{\Gamma_2}(\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\nabla\Phi_2\,d\Gamma_2-m_2l_2P_2\vec{\omega}_2\Big)^{\tau}.\end{aligned} \tag{3.42}$$

Здесь оператор $C_2:\ (L_{2,\Gamma_1}\oplus\mathbb{C}^2)\oplus(L_{2,\Gamma_2}\oplus\mathbb{C}^2)=\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ — блочно диагональный, а оператор $B_{21}:\ \mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_1$ — аналогичного вида с размерами матрицы 4×6.

Лемма 3.4. *Оператор $C_2:\ \mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_2$ — ограничен и самосопряжен. Квадратичная форма $g(C_2z_2,z_2)_{\mathcal{H}_2}$ равна удвоенной потенциальной энергии гидромеханической системы.*

Доказательство. Оно основано на непосредственном подсчете квадратичной формы. Выражение для потенциальной энергии системы приведено в (2.20): это умноженное на g выражение во второй фигурной скобке, причем ниже в тексте объяснен физический смысл отдельных слагаемых. □

Выясним теперь, когда соотношения (3.38) и (3.39) эквивалентны. Введем обозначения, имеющие смысл осевых моментов инерции:

$$\beta_{jl}^{(k)}:=\int\limits_{\Gamma_k}x_j^1(\theta_kx_l^1)\,d\Gamma_k=\beta_{lj}^{(k)},\quad j,l=1,2,\quad k=1,2. \tag{3.43}$$

Введем также определители:

$$\begin{aligned}\Delta_2^{(1)}&:=\det\begin{pmatrix}m_1l_1+m_2h_1-\rho_1\beta_{22}^{(1)} & \rho_1\beta_{21}^{(1)}\\ \rho_1\beta_{12}^{(1)} & (m_1l_1+m_2h_1)-\rho_1\beta_{11}^{(1)}\end{pmatrix},\\ \Delta_2^{(2)}&:=\det\begin{pmatrix}m_2l_2-\rho_2\beta_{22}^{(2)} & \rho_2\beta_{21}^{(1)}\\ \rho_2\beta_{12}^{(1)} & m_2l_2-\rho_2\beta_{11}^{(2)}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Лемма 3.5. *Если выполнены условия общего положения*

$$\Delta_2^{(1)}\neq0,\quad \Delta_2^{(2)}\neq0, \tag{3.45}$$

то соотношения (3.38) *и* (3.39) *эквивалентны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что из (3.39) следуют соотношения (3.38) при выполнении условий (3.45).

Перепишем соотношения (3.39) в виде

$$\varphi_1+\theta_1((\vec{\psi}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3})=0,\quad -\rho_1\int\limits_{\Gamma_1}(\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\varphi_1\,d\Gamma_1+(m_1l_1+m_2h_1)\vec{\psi}_1=\vec{0}, \tag{3.46}$$

$$\varphi_1:=\frac{d\zeta_1}{dt}-\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1,\quad \vec{\psi}_1:=\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_1-P_2\vec{\omega}_1;$$

$$\varphi_2 + \theta_2((\vec{\psi}_2 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) = 0, \quad -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\varphi_2 \, d\Gamma_2 + m_2 l_2 \vec{\psi}_2 = \vec{0}, \tag{3.47}$$

$$\varphi_2 := \frac{d\zeta_2}{dt} - \gamma_{n,2}\nabla\Phi_2, \quad \vec{\psi}_2 := \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_2 - P_2\vec{\omega}_2,$$

и докажем, что из первого условия (3.45) следует, что задача (3.46) имеет лишь тривиальное решение.

Подставляя выражение для φ_1 из первого уравнения (3.46) во второе, приходим к векторному уравнению в $\mathbb{C}^2$:

$$(m_1 l_1 + m_2 h_1)\vec{\psi}_1 + \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \cdot \theta_1((\vec{\psi}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \, d\Gamma_1 = \vec{0}. \tag{3.48}$$

Представим $\vec{\psi}_1$ в виде $\vec{\psi}_1 = \sum\limits_{j=1}^{2} \psi_{1,j} \, \vec{e}_1^{\,j}$. Тогда

$$\theta_1((\vec{\psi}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) = \psi_{1,1}(\theta_1 x_1^2) - \psi_{1,2}(\theta_1 x_1^1), \quad \vec{r}_1 = \sum_{j=1}^{3} x_1^j \vec{e}_1^{\,j},$$

и из (3.48) получаем систему двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned} &(m_1 l_1 + m_2 h_1)\psi_{1,1} - \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} x_1^2(\psi_{1,1}(\theta_1 x_1^2) - \psi_{1,2}(\theta_1 x_1^1)) \, d\Gamma_1 = 0, \\ &(m_1 l_1 + m_2 h_1)\psi_{1,2} + \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} x_1^1(\psi_{1,1}(\theta_1 x_1^2) - \psi_{1,2}(\theta_1 x_1^1)) \, d\Gamma_1 = 0. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Нетрудно видеть, что определитель этой однородной системы уравнений относительно $\psi_{1,1}$, $\psi_{1,2}$ равен $\Delta_2^{(1)}$ и потому в силу первого условия (3.45) он ненулевой. Отсюда следует, что $\vec{\psi}_1 = \vec{0}$, а потому и $\varphi_1 = 0$.

Для системы уравнений (3.47) доказательство такое же. □

Далее будем предполагать, что в исследуемой проблеме выполнены условия общего положения (3.45). Тогда исходная начально-краевая задача о малых колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными идеальными жидкостями, будет равносильна совокупности соотношений (3.11), (3.15), тривиальным связям (см. (2.9))

$$\frac{d\delta_k^3}{dt} = \omega_k^3, \quad k = 1, 2, \tag{3.50}$$

а также задаче Коши для системы уравнений (см. (3.29), (3.40))

$$\begin{aligned} C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \\ gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \\ z_1 = \Big(\vec{w}_1; \nabla\Phi_1; \vec{\omega}_1; \vec{w}_2; \nabla\Phi_2; \vec{\omega}_2\Big)^\tau \in \mathcal{H}_1, \quad z_2 = \Big(\zeta_1; P_2\vec{\delta}_1; \zeta_2; P_2\vec{\delta}_2\Big)^\tau \in \mathcal{H}_2. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Дальнейшее изучение свойств решений исходной задачи основано на изучении свойств решений задачи Коши (3.51).

3.4. Свойства матричных операторных коэффициентов задачи Коши. Рассмотрим дополнительные свойства оператора потенциальной энергии C_2, а также операторов B_{12} и B_{21}. Для оператора C_2 выяснение этих свойств проводится по схеме из [16, с. 151-152].

Воспользуемся ортогональным разложением

$$\mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2) = \mathcal{H}_{21} \oplus \mathcal{H}_{22}, \tag{3.52}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_{21} = \mathcal{H}_{21,1} \oplus \mathcal{H}_{21,2}, \quad \mathcal{H}_{21,k} := \Big\{(\zeta_k; 0)^\tau : \int\limits_{\Gamma_k} \zeta_k x_k^j \, d\Gamma_k = 0, \ j = 1,2\Big\}, k = 1,2, \\ \mathcal{H}_{22} = \mathcal{H}_{22,1} \oplus \mathcal{H}_{22,2}, \quad \mathcal{H}_{22,k} := \mathrm{Lin}\Big\{(0; \vec{e}_k^{\,1})^\tau; (0; \vec{e}_k^{\,2})^\tau; (\theta_k x_k^1; 0)^\tau; (\theta_k x_k^2; 0)^\tau\Big\},\end{gathered} \tag{3.53}$$

где Lin — обозначение линейной оболочки элементов.

Лемма 3.6. *Если выполнено первое условие* (3.45)*, т. е. условие*

$$\Delta_2^{(1)} = (m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1 \beta_{22}^{(1)})(m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1 \beta_{11}^{(1)}) - \rho_1^2 |\beta_{12}^{(1)}|^2 \neq 0, \tag{3.54}$$

то оператор C_{21} из блочно-диагонального представления (3.41)

$$C_2 = \mathrm{diag}(C_{21}; C_{22})$$

ограниченно обратим и обладает следующими свойствами.

1°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{21,1}$ из* (3.53) *оператор C_{21} положительно определен*:

$$(C_{21} z_2, z_2)_{\mathcal{H}_{21}} = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} |\eta_1|^2 \, d\Gamma_1 = \rho_1 \|z_2\|^2_{\mathcal{H}_{21}}, \quad \forall z_2 = (\eta_1; 0)^\tau \in \mathcal{H}_{21,1}. \tag{3.55}$$

2°. *Оператор C_{21} неотрицателен на подпространстве $\mathcal{H}_{21,2}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1^{(1)} := m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1 \beta_{11}^{(1)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(1)} \geqslant 0, \tag{3.56}$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1^{(1)} > 0, \quad \Delta_2^{(1)} > 0. \tag{3.57}$$

Аналогичные свойства имеют место для оператора C_{22} из (3.54).

1°. *На подпространстве $\mathcal{H}_{22,1}$ оператор C_{22} положительно определен*:

$$(C_{22} z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2} = \rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} |\eta_2|^2 \, d\Gamma_2 = \rho_2 \|z_2\|^2_{\mathcal{H}_{22}}, \quad \forall z_2 = (\eta_2; 0)^\tau \in \mathcal{H}_{22,1}. \tag{3.58}$$

2°. *Оператор C_{22} неотрицателен на подпространстве $\mathcal{H}_{22,2}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\Delta_1^{(2)} := m_2 l_2 - \rho_2 \beta_{11}^{(2)} \geqslant 0, \quad \Delta_2^{(2)} \geqslant 0, \tag{3.59}$$

и положительно определен, если и только если

$$\Delta_1^{(2)} > 0, \quad \Delta_2^{(2)} > 0. \tag{3.60}$$

Доказательство. То, что оператор C_{21} обратим, следует из определения (3.41) для оператора C_2 (первый блок) и того факта, что система уравнений (3.46) (см. также (3.48), (3.49)) имеет лишь тривиальные решения при первом условии (3.45). Далее, так как оператор C_{21} равен сумме положительно определенного оператора

$$\mathrm{diag}(\rho_1 I_1; (m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2), \tag{3.61}$$

действующего в $L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2$, и конечномерного, то обратный оператор $(C_{21})^{-1}$ ограничен.

1°. На подпространстве $\mathcal{H}_{21,1}$ оператор C_{21}, как легко видеть, действует по закону $C_{21} z_2 = \rho_1 z_2$, откуда следует свойство (3.55). Так как C_{21} самосопряжен и $\mathcal{H}_{21,1}$ инвариантно для C_{21}, то $\mathcal{H}_{21,2}$ также инвариантно для C_{21}.

2°. На четырехмерном подпространстве $\mathcal{H}_{21,2}$ оператор C_{21}, очевидно, ограничен снизу. Выясним, когда он будет неотрицательным на $\mathcal{H}_{21,2}$.

Представим произвольный элемент $z_{21} = (\zeta_1; P_2 \vec{\delta}_1)^\tau$ из $\mathcal{H}_{21}$ в виде

$$\begin{gathered} z_{21} = z_{21,1} + z_{21,2}, \quad z_{21,1} = (\zeta_{11}; 0)^\tau, \quad \zeta_{11} = \zeta_1 + \theta_1((P_2 \vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}), \\ z_{21,2} = (-\theta_1((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}); P_2 \vec{\delta}_1)^\tau. \end{gathered} \tag{3.62}$$

Тогда (см. (3.41))

$$C_{21}z_{21,1} = (0;\ (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2\vec{\delta}_1 + \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\theta_1(\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)) \cdot ((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})\, d\Gamma_1)^\tau,$$

$$C_{21}z_{21,2} = (\rho_1\zeta_{11};\ -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_{11}\, d\Gamma_1)^\tau. \tag{3.63}$$

Отсюда получаем, что

$$(z_{21,1}, C_{21}z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = (C_{21}z_{21,1}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = 0,$$

так как подпространства $\mathcal{H}_{21,1}$ и $\mathcal{H}_{21,2}$ инвариантны для C_{21}, а также свойство

$$(C_{21}z_{21}, z_{21})_{\mathcal{H}_{21}} = (C_{21}z_{21,1}, z_{21,1})_{\mathcal{H}_{21}} + (C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} |\zeta_{11}|^2\, d\Gamma_1 + (C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}}.$$

Значит, C_{21} будет неотрицательным на $\mathcal{H}_{21,2}$ тогда и только тогда, когда при некотором $c \geqslant 0$ будет выполнено неравенство

$$(C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} \geqslant c\|z_{21,2}\|^2_{\mathcal{H}_{21}}, \quad z_{21,2} \in \mathcal{H}_{21,2}.$$

Из (3.41), (3.62), (3.63) имеем, используя определение (3.43),

$$(C_{21}z_{21,2}, z_{21,2})_{\mathcal{H}_{21}} = (m_1 l_1 + m_2 h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 - \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1(\delta_{1,2}x_1^1 - \delta_{1,1}x_1^2)|^2\, d\Gamma_1 =$$

$$= (m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1\beta_{22}^{(1)})|\delta_{1,1}|^2 + 2\rho_1\beta_{12}^{(1)}\mathrm{Re}(\delta_{1,1}, \overline{\delta_{1,2}}) + (m_1 l_1 + m_2 h_1 - \rho_1\beta_{11}^{(1)})|\delta_{1,2}|^2,$$

$$P_2\vec{\delta}_1 = \sum_{j=1}^{2} \delta_{1,j}\vec{e}_1^{\,j}. \tag{3.64}$$

Отсюда, используя критерий Сильвестра, получаем, что для неотрицательности оператора C_{21} на подпространстве $\mathcal{H}_{21,2}$, а значит и на всем пространстве $\mathcal{H}_{21}$, необходимо и достаточно выполнения условий (3.56). Соответственно для положительной определенности C_{21} на $\mathcal{H}_{21,2}$ требуется выполнение условий (3.57).

Вторая часть доказательства леммы повторяет выкладки и рассуждения из первой части, однако теперь применительно ко второму блоку из (3.41). Поэтому она здесь не приводится. □

Из доказательства леммы 3.6 следует, что ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2z_1, z_2)_{\mathcal{H}_2}$ не может превышать $\varkappa = 4$, т. е. в $\mathcal{H}_2$ может быть не более чем четырехмерное подпространство элементов, на котором квадратичная форма принимает отрицательные значения.

Определение 3.1. Будем говорить, что рассматриваемая гидромеханическая система *статически устойчива по линейному приближению*, если оператор C_2 потенциальной энергии системы положительно определен, и тогда выполнены условия (3.57), (3.60).

Формулы (3.44) и (3.56), (3.59), определяющие $\Delta_1^{(k)}$ и $\Delta_2^{(k)}$, $k = 1, 2$, показывают, что условия статической устойчивости системы выполнены для тел достаточно большой массы с расположенными достаточно далеко от точек подвеса центрами масс этих тел-маятников.

Перейдем теперь к изучению свойств операторных матриц B_{12} из (3.33) и B_{21} из (3.42). Напомним (лемма 3.3), что оператор B_{12} задан на области определения (3.37), он неограничен и действует из плотной в $\mathcal{H}_2$ области определения $\mathcal{D}(B_{12})$ на пространство $\mathcal{H}_1$. При этом в матричном представлении (3.33) оператора B_{12} все элементы-операторы, кроме V_1 и V_2, являются ограниченными двумерными операторами и потому $\mathcal{D}(B_{12})$ имеет вид (3.37). Так как операторы $V_k :\ H^{1/2}_{\Gamma_k} \to \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, замкнуты, то оператор B_{12} также замкнут на $\mathcal{D}(B_{12})$.

Что касается матричного оператора B_{21} из (3.42), то он также неограничен, поскольку неограниченными являются операторы $\gamma_{n,k}$, $k = 1, 2$. Поэтому естественно B_{21} задать на области определения

$$\mathcal{D}(B_{21}) = (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^3). \tag{3.65}$$

Здесь под $\gamma_{n,k}$ понимается оператор нормального следа (см. (3.19), (3.20)), суженный на подпространство $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$.

Лемма 3.7. *Задача Неймана*

$$\Delta\Phi_k = 0 \quad (\textit{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = 0 \quad (\textit{на } S_k),$$
$$\frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k} = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \psi_k \quad (\textit{на } \Gamma_k), \quad \int\limits_{\Gamma_k} \Phi_k \, d\Gamma_k = 0, \tag{3.66}$$

имеет единственное слабое решение $\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi_k \in (H^{1/2}_{\Gamma_k})^* = \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_k}$. *Если* ψ_k — *любой элемент из* L_{2,Γ_k}, *то* $\nabla\Phi_k \in \mathcal{D}(\gamma_{n,k})$, *т. е.*

$$\mathcal{D}(\gamma_{n,k}) = \{\nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) : \ \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \frac{\partial\Phi_k}{\partial n_k}|_{\Gamma_k} = \psi_k, \ \forall\psi_k \in L_{2,\Gamma_k}\}. \tag{3.67}$$

При этом оператор $\gamma_{n,k}$, *заданный на области определения* (3.67), *является замкнутым неограниченным оператором, действующим из* $\mathcal{D}(\gamma_{n,k})$ *на* L_{2,Γ_k}. *Его область определения* $\mathcal{D}(\gamma_{n,k})$ *плотна в* $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, *а элементы* $\nabla\Phi_k$ *являются обобщенными решениями задачи* (3.66).

Доказательство. Задача (3.66) достаточно подробно изучена в произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, разбитой на липшицевы куски S и Γ (см., например, [16, с. 137-138], а также [19, 20]). При ее исследовании используют обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа в следующем виде:

$$(\eta, \Phi)_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \int\limits_\Omega \nabla\eta \cdot \nabla\Phi \, d\Omega = \langle \eta, -\Delta\Phi \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial\Phi}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial\Phi}{\partial n} \rangle_{L_2(S)}, \quad \eta, \Phi \in \breve{H}^1_\Gamma(\Omega). \tag{3.68}$$

Здесь $\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)$ — пространство с квадратом нормы

$$\|\eta\|^2_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} := \int\limits_\Omega |\nabla\eta|^2 \, d\Omega, \quad \int\limits_\Gamma \eta \, d\Gamma = 0,$$

$$\gamma\eta := \eta|_{\partial\Omega}, \quad (\gamma\eta)|_\Gamma \in H^{1/2}_\Gamma, \quad (\gamma\eta)|_S \in H^{1/2}_S,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma \in \widetilde{H}^{-1/2}_\Gamma, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_S \in \widetilde{H}^{-1/2}_S, \quad -\Delta\Phi \in (\breve{H}^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

а косыми скобками обозначено значение функционала из сопряженного пространства (второй сомножитель) на элементе из основного пространства (первый сомножитель).

В частности, для задачи (3.66) слабое решение определяется посредством тождества

$$(\eta, \Phi)_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} = \langle \gamma\eta, \psi_k \rangle_{L_{2,\Gamma_k}} \quad \forall\eta_k \in \breve{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k), \tag{3.69}$$

а обобщенное решение — тождеством

$$(\eta, \Phi)_{\breve{H}^1_\Gamma(\Omega)} = (\gamma\eta, \psi_k)_{L_{2,\Gamma_k}} \quad \forall\eta_k \in \breve{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k). \tag{3.70}$$

Отсюда и следуют утверждения леммы. В частности, $\nabla\Phi_k = (\gamma_{n,k})^{-1}\psi_k$, и оператор $(\gamma_{n,k})^{-1}$ для обобщенных решений ограниченно действует из L_{2,Γ_k} в $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$. □

Следующее свойство оказывается весьма важным в исследуемой проблеме.

Лемма 3.8. *Операторы*

$$V_k : \ \mathcal{D}(V_k) = H^{1/2}_{\Gamma_k} \subset L_{2,\Gamma_k} \to \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$$

и

$$\gamma_{n,k} : \ \mathcal{D}(\gamma_{n,k}) \subset \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \to L_{2,\Gamma_k}, \quad k = 1, 2,$$

см. (3.24), (3.19), (3.20), *взаимно сопряжены*:

$$(V_k\zeta_k, \nabla\Phi_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = (\zeta_k, \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k)_{L_{2,\Gamma_k}} \quad \forall\zeta_k \in \mathcal{D}(V_k), \ \forall\nabla\Phi_k \in \mathcal{D}(\gamma_{n,k}), \quad k = 1, 2.$$

Доказательство. Для вспомогательной задачи Зарембы (3.22)–(3.24) с заданной функцией $\zeta_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k}$ и $\nabla\Phi_k \in \mathcal{D}(\gamma_{n,k})$ имеем в силу (3.70), (3.66)

$$(V_k\zeta_k, \nabla\Phi_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \nabla\widetilde{p}_k \cdot \nabla\overline{\Phi_k}\, d\Omega_k = (\widetilde{p}_k, \Phi_k)_{\breve{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k)} = (\zeta_k, \psi_k)_{L_{2,\Gamma_k}} = (\zeta_k, \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k)_{L_{2,\Gamma_k}}.$$

□

Опираясь на лемму 3.8, теперь легко установить следующее основное свойство операторных матриц B_{12} и B_{21}.

Лемма 3.9. *Операторы* B_{12} *и* B_{21}*, заданные формулами* (3.33), (3.42) *на областях определения* (3.37) *и* (3.65) *соответственно, являются кососамосопряженными*: $B_{12}^* = -B_{21}$, *т. е.*

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} \quad \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}),\ \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{3.71}$$

Доказательство. Напомним, что B_{12} и B_{21} имеют блочно-диагональный вид,

$$B_{12} = \mathrm{diag}(B_{12,1}; B_{12,2}), \quad B_{21} = \mathrm{diag}(B_{21,1}; B_{21,2}), \tag{3.72}$$

и проверим свойство (3.71) на соответствующих элементах этих блоков.

Пусть

$$z_{1,1} = (\vec{w}_1;\ \nabla\Phi_1;\ \vec{\omega}_1)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21,1}), \quad z_{2,1} = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12,1}).$$

Тогда для $\nabla\Psi_1 = V_1\zeta_1$ имеем:

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (V_1\zeta_1) \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1,$$

$$-\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} \zeta_1(\gamma_{n,1}\overline{\nabla\Phi_1})\, d\Gamma_1 = -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} \Psi_1 \overline{\frac{\partial\Phi_1}{\partial n}}\, d\Gamma_1 = -\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1,$$

т. е. для выбранных операторных элементов из (3.33) и (3.42) свойство кососамосопряженности выполнено.

Аналогично для $\nabla\Psi_1 = V_1(\theta_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}))$ получаем

$$-\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1 \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\zeta_1 \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\, d\Gamma_1 =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{r}_1 \times \vec{e}_1^{\,3}) \cdot \overline{\vec{\omega}_1}\zeta_1\, d\Gamma_1 = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}\zeta_1\, d\Gamma_1,$$

$$-\rho_1 \overline{\int\limits_{\Gamma_1} \theta_1((\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})\zeta_1\, d\Gamma_1} = -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\overline{\vec{\omega}_1} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}\zeta_1\, d\Gamma_1.$$

Далее имеем также

$$\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (V_1((P_2\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})) \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \overline{\nabla\Phi_1}\, d\Omega_1,$$

$$\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\gamma_{n,1}\nabla\Phi_1\, d\Gamma_1 \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_1} = \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} ((\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1) \cdot \overline{P_2\vec{\delta}_1}) \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\, d\Gamma_1 =$$

$$= -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\theta_1(\overline{P_2\vec{\delta}_1} \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\, d\Gamma_1 = -\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Phi_1 \cdot \overline{\nabla\Psi_1}\, d\Omega_1.$$

Из приведенных тождеств следует, что

$$B_{12,1}^* = -B_{21,1}.$$

Свойство $B_{12,2}^* = -B_{21,2}$ аналогично проверяется на элементах

$$z_{1,2} = (\vec{w}_2;\ \nabla\Phi_2;\ \vec{\omega}_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21,2}), \quad z_{2,2} = (\zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12,2}).$$

□

Итогом рассмотрения свойств операторных матриц изучаемой задачи является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Исходная задача о малых колебаниях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными идеальными жидкостями, равносильна, после отделения тривиальных соотношений* (3.12)*,* (3.15)*,* (2.9) *(для* δ_k^3*), задаче Коши*

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad f(t) = (f_1(t); 0)^\tau, \tag{3.73}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$*, где*

$$C = \mathrm{diag}(C_1; gC_2) = C^* \in \mathcal{L}(H) \tag{3.74}$$

— оператор полной энергии гимдромеханической системы,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} = -B^*, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}), \tag{3.75}$$

— оператор обмена между кинетической и потенциальной энергиями,

$$0 \leqslant A = \mathrm{diag}(A_1; 0) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \tag{3.76}$$

— оператор диссипации энергии, учитывающий трение в шарнирах.

Если выполнено условие (3.45)*, то оператор* C *ограниченно обратим, а если система статически устойчива по линейному приближению* ($C_2 \gg 0$)*, т. е. выполнены условия* (3.60)*, то оператор* C *положительно определен.*

4. Теорема об однозначной разрешимости начально-краевой задачи

4.1. О разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения. В этом разделе доказывается теорема об однозначной разрешимости задачи Коши (3.73)–(3.76), а на ее основе — теорема существования и единственности сильного решения исходной начально-краевой гидромеханической задачи.

Перейдем к исследованию задачи Коши (3.73) как в случае статической устойчивости по линейному приближению, так и при ее отсутствии.

Определение 4.1. *Сильным решением* задачи Коши (3.73) на отрезке $[0;T]$ назовем такую функцию $z(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$, для которой выполнены следующие условия.

1°. При любом $t \in [0;T]$ элемент $z(t) \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12})$ и функция $Bz(t)$ непрерывна по t, т. е. $Bz(t) \in C([0;T];\mathcal{H})$.

2°. Функция dz/dt непрерывна по t, т. е. $z(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H})$.

3°. При любом $t \in [0;T]$ выполнено уравнение (3.73), а также выполнено начальное условие.

Заметим, что необходимыми условиями существования сильного решения задачи (3.73) на отрезке на отрезке $[0;T]$ являются условия

$$z^0 \in \mathcal{D}(B), \quad f(t) \in C([0;T];\mathcal{H}). \tag{4.1}$$

Теорема 4.1. *Пусть для исследуемой гидромеханической системы выполнены условия* (3.57)*,* (3.60) *статической устойчивости по линейному приближению, а также условия*

$$z^0 \in \mathcal{D}(B), \quad f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}). \tag{4.2}$$

Тогда задача (3.73) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. В силу условий теоремы оператор C полной энергии ограничен и положительно определен (леммы 3.1, 3.4, 3.6) и поэтому имеет ограниченный обратный положительно определенный оператор C^{-1}. Поэтому задача (3.73) равносильна задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} = -C^{-1}Az - gC^{-1}Bz + C^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.3}$$

Для ее исследования введем в рассмотрение гильбертово пространство $\mathcal{H}_C$ со скалярным произведением

$$(u,v)_C := (Cu,v)_{\mathcal{H}} = (C^{1/2}u, C^{1/2}v)_{\mathcal{H}}, \quad u,v \in \mathcal{H}, \tag{4.4}$$

и нормой, эквивалентной норме пространства $\mathcal{H}$. В новом скалярном произведении оператор $C^{-1}B$ определен на множестве

$$\mathcal{D}(C^{-1}B) = \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}_C = \mathcal{H} \tag{4.5}$$

и обладает свойством кососамосопряженности. В самом деле, при любых u и v из $\mathcal{D}(B)$ имеем

$$(C^{-1}Bu,v)_C = (Bu,v)_{\mathcal{H}} = (u,B^*v)_{\mathcal{H}} = -(u,Bv)_{\mathcal{H}} = -(Cu,C^{-1}Bv)_{\mathcal{H}} = -(u,C^{-1}Bv)_C. \tag{4.6}$$

Отсюда следует (см. [21, с. 110–112]), что оператор $C^{-1}B$ является консервативным оператором, т. е.

$$\mathrm{Re}(C^{-1}Bz,z)_C = 0 \quad \forall z \in \mathcal{D}(B), \tag{4.7}$$

и потому — генератором группы унитарных операторов $U(t) := \exp(-tC^{-1}B)$, действующих в $\mathcal{H}_C$.

Далее, аналогично устанавливаем, что оператор $C^{-1}A$ является (конечномерным) ограниченным неотрицательным оператором, действующим в $\mathcal{H}_C$. Отсюда следует, что оператор $-C^{-1}(A+gB)$ является генератором сжимающей полугруппы операторов

$$V(t) = \exp(-tC^{-1}(A+gB)), \tag{4.8}$$

действующей в $\mathcal{H}_C$.

Если выполнены условия (4.2), то $z^0 \in \mathcal{D}(C^{-1}(A+gB))$, $C^{-1}f(t) \in C^1([0;T];\mathcal{H}_C)$, и потому (см. [21, с. 166]) задача Коши (4.3) имеет единственное сильное решение

$$z(t) = V(t)z^0 + \int\limits_0^t V(t-s)z(s)\,ds. \tag{4.9}$$

Отсюда и следует утверждение теоремы. □

Следствием теоремы 4.1 является такой факт: для сильного решения $z(t)$ задачи (3.73) выполнен закон баланса полной энергии (в дифференциальной форме):

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(Cz(t),z(t))_{\mathcal{H}} = -(Az,z)_{\mathcal{H}} + \mathrm{Re}(f(t),z(t))_{\mathcal{H}}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению, и для нее выполнены лишь условия (3.45).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (3.45) *и условия* (4.2). *Тогда задача* (3.73) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0;T]$.

Доказательство. Если выполнены условия (3.45), то согласно леммам 3.1, 3.4, 3.5, 3.6 оператор $C = C^*$ ограничен, обратим, причем его квадратичная форма может быть индефинитной и иметь не более четырех отрицательных квадратов. Поэтому C допускает представление

$$C = J_\varkappa|C| = |C|^{1/2}J_\varkappa|C|^{1/2} = |C|J_\varkappa, \quad J_\varkappa = J_\varkappa^* = J_\varkappa^{-1}, \quad |C| = (C^2)^{1/2} \gg 0, \tag{4.11}$$

где $\varkappa$ — ранг индефинитности оператора канонической симметрии $J_\varkappa$, причем $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$.

Применяя к обеим частям (3.73) оператор $C^{-1} = J_\varkappa|C|^{-1}$, приходим к задаче Коши

$$\frac{dz}{dt} = -J_\varkappa|C|^{-1}Az - gJ_\varkappa|C|^{-1}Bz + J_\varkappa|C|^{-1}f(t), \quad z(0) = z^0. \tag{4.12}$$

Введем, как и выше, энергетическое пространство $\mathcal{H}_{|C|}$ с дефинитным скалярным произведением

$$(u,v)_{|C|} := (|C|u,v)_{\mathcal{H}} = (|C|^{1/2}u, |C|^{1/2}v)_{\mathcal{H}} \tag{4.13}$$

и нормой, эквивалентной норме пространства $\mathcal{H}$, а также пространство Л. С. Понтрягина $\Pi_\varkappa$ с индефинитным скалярным произведением

$$[u,v] := (J_\varkappa u,v)_{|C|} = (|C|J_\varkappa u,v)_{\mathcal{H}} = (J_\varkappa|C|^{1/2}u, |C|^{1/2}v)_{\mathcal{H}}. \tag{4.14}$$

В скалярном произведении (4.14) оператор $J_\varkappa|C|^{-1}B$, заданный на области определения $\mathcal{D}(B)$, является $J_\varkappa$-кососамосопряженным, т. е. выполнено свойство

$$[J_\varkappa|C|^{-1}Bu, v] = -[u, J_\varkappa|C|^{-1}Bv] \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(B). \tag{4.15}$$

В самом деле,

$$[J_\varkappa|C|^{-1}Bu, v] = (|C|^{-1}Bu, v)_{|C|} = (Bu, v)_{\mathcal{H}} =$$
$$= -(u, Bv)_{\mathcal{H}} = -(u, |C|^{-1}Bv)_{|C|} = -[u, J_\varkappa|C|^{-1}Bv].$$

Поэтому, как следует из работы [25] (см. также [3]), пространство $\Pi_\varkappa$ допускает $J_\varkappa$-ортогональное разложение на два подпространства, инвариантные относительно $J_\varkappa|C|^{-1}B$:

$$\Pi_\varkappa = \Pi_+[\oplus]\Pi_-, \quad \dim \Pi_+ = \infty, \quad \dim \Pi_- = 2\varkappa. \tag{4.16}$$

При этом сужение оператора $J_\varkappa|C|^{-1}B$ на Π_+ является кососамосопряженным оператором (и потому удовлетворяет построениям, проведенным в теореме 4.1), а Π_- не более чем $2\varkappa$-мерно.

Учитывая эти факты, будем разыскивать решение задачи (4.12) в виде

$$z = (z_+; z_-)^\tau, \quad z_+ \in \mathcal{D}((J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_+}) \subset \Pi_+, \quad z_- \in \Pi_-,$$

и подействуем ортопроекторами P_+ и P_-, $J_\varkappa = P_+ - P_-$, на обе части уравнения (4.12). Тогда возникает задача Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_+}{dt} = -P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+} z_+ - P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} z_- -$$
$$- gP_+(J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_+} z_+ + P_+(J_\varkappa|C|^{-1}f(t)), \quad z_+(0) = z_+^0 = P_+z^0, \tag{4.17}$$

$$\frac{dz_-}{dt} = -P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+} z_+ - P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} z_- -$$
$$- gP_-(J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_-} z_- + P_-(J_\varkappa|C|^{-1}f(t)), \quad z_-(0) = z_-^0 = P_-z^0, \tag{4.18}$$

Так как Π_- не более чем конечномерно ($2\varkappa$-мерно), то из (4.18) можно выразить $z_-(t)$ через $z_+(t)$:

$$z_-(t) = \exp(-tP_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) z_-^0 +$$
$$+ \int_0^t \exp(-(t-s)P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) \left[-P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+} z_+(s) + P_-(J_\varkappa|C|^{-1}f(s))\right] ds. \tag{4.19}$$

Подставляя это решение в (4.17), придем к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения первого порядка следующего вида:

$$\frac{dz_+}{dt} = A_0 z_+ + \int_0^t G(t,s)A_1 z_+(s)\, ds + f_+(t), \quad z_+(0) = z_+^0 = P_+z^0, \tag{4.20}$$

$$A_0 := -gP_+(J_\varkappa|C|^{-1}B)\Big|_{\Pi_+} - P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+};$$

$$G(t,s)A_1 := -P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} \exp(-(t-s)(P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}))(P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_+}),$$

$$f_+(t) := -P_+(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-} \Big\{\exp(-tP_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) z_-^0 +$$
$$+ \int_0^t \exp(-(t-s)P_-(J_\varkappa|C|^{-1}A)\Big|_{\Pi_-}) P_-(J_\varkappa|C|^{-1}f(s))ds\Big\} + P_+(J_\varkappa|C|^{-1}f(t)).$$

Здесь в силу установленного выше, оператор A_0 является генератором сжимающей полугруппы в Π_+, а оператор A_1 ограничен. Опираясь на эти факты, воспользуемся следующим утверждением о разрешимости задачи Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка (см., например, [18, теорема 1.3.2]). Если оператор A_0 является генератором C_0-полугруппы, $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(A_1)$, оператор-функция $G(t,s)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по t в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, то при выполнении условий $z_+^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $f_+(t) \in C^1([0;T];\Pi_+)$ уравнение (4.20) имеет сильное решение на отрезке $[0;T]$.

Нетрудно видеть, что при выполнении условий (4.2) выполнены условия разрешимости задачи (4.20), приведенные выше. Поэтому задача (4.20), а вместе с ней и исходная задача (4.12) имеют сильное решение на отрезке $[0;T]$. Отсюда и следует утверждение теоремы. □

Замечание 4.1. Если трение в шарнирах отсутствует, то оператор A в (4.12) нулевой, и задача (4.17), (4.18) распадается на две независимые задачи Коши, каждая из которых при выполнении условий (4.2) имеет сильное решение. При этом в приведенных выше формулах везде следует положить $A = 0$.

4.2. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях гидромеханической системы. Установленные выше общие теоремы позволяют доказать теорему о существовании и единственности решений исходной начально-краевой задачи (2.1), (2.5)–(2.12).

Определение 4.2. Будем говорить, что задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет *сильное по переменной t решение* на отрезке $[0;T]$, если выполнены следующие условия.

1°. Функции $\vec{u}_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, функции $\nabla p_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{G}(\Omega_k))$, а $\vec{\omega}(t) \in C^1([0;T];\mathbb{C}^3)$.

2°. Функции $\zeta_k(t,x_1,x_2) \in C^1([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, $(x_1,x_2) \in \Gamma_k$, а $\vec{\delta}_k(t) \in C^2([0;T];\mathbb{C}^3)$.

3°. При любом $t \in [0;T]$ выполнены первые уравнения Эйлера (2.6) и (2.7), где слагаемые непрерывны по t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_k)$ соответственно; выполнены соотношения (2.10), где слагаемые из $C^1([0;T];H^{1/2}_{\Gamma_k})$; выполнены кинематические условия для ζ_k из (2.9), где слагаемые из $C^1([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, а также кинематические условия для $\vec{\delta}_k$, где слагаемые из $C^1([0;T];\mathbb{C}^3)$.

4°. При любом $t \in [0;T]$ выполнены уравнения (2.1), (2.5), где слагаемые-элементы из $C([0;T];\mathbb{C}^3)$.

5°. Выполнены начальные условия (2.12).

Подведем теперь итог изучения исходной начально-краевой задачи.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия*

$$\begin{gathered}\vec{u}_k^0 \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k), \quad P_{h,S_k}\vec{u}_k^0 =: \nabla\Phi_k^0 \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k): \ \frac{\partial\Phi_k^0}{\partial n_k}\Big|_{\Gamma_k} \in L_{2,\Gamma_k}, \\ \zeta_k^0 \in H^{1/2}_{\Gamma_k}, \quad \vec{\omega}_k^0 \in \mathbb{C}^3, \quad \vec{\delta}_k^0 \in \mathbb{C}^3, \quad \vec{f}_k(t,x) \in C^1([0;T];\vec{L}_2(\Omega_k)), \quad k = 1,2.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Тогда начально-краевая задача (2.1), (2.5)–(2.12) *о малых движениях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными тяжелой однородной идеальной жидкостью, имеет единственное сильное по t решение на отрезке* $[0;T]$. *Для этого решения выполнен закон баланса полной энергии в форме* (2.20)*, где все слагаемые являются непрерывными функциями переменной t.*

Доказательство. Если выполнены условия (4.21), то в задаче Коши (3.73)–(3.76) выполнены условия

$$\begin{gathered}z^0 = (z_1^0;z_2^0)^\tau = (\vec{w}_1^0;\ \nabla\Phi_1^0;\ \vec{\omega}_1^0;\ \vec{w}_2^0;\ \nabla\Phi_2^0;\ \vec{\omega}_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{11}) = \mathcal{D}(B), \\ f(t) = (f_1(t);0)^\tau = (\rho_1 P_{0,1}\vec{f}_1;\ \rho_1 P_{h,S_1}\vec{f}_1;\ \vec{M}_1;\ 0;\ 0;\ \rho_2 P_{0,2}\vec{f}_2;\ \rho_2 P_{h,S_2}\vec{f}_2;\ \vec{M}_2;\ 0;\ 0)^\tau \in \\ \in C^1([0;T];\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2) = C^1([0;T];\mathcal{H}),\end{gathered} \tag{4.22}$$

см. (3.26), (3.28), (3.33), (3.51), (3.37), (3.65), (3.67), (3.75). Поэтому по теореме 4.1 (либо 4.2) задача Коши (3.73)–(3.76) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0;T]$, т. е. выполнены уравнения системы (3.51), где каждое слагаемое является непрерывной функцией t со значениями в H_1 и H_2 соответственно. Отсюда следует, что выполнены уравнения (3.39) с теми же свойствами решений. Далее по лемме 3.5 в силу (3.45) приходим к условиям (3.38), где в первом соотношении (при выбранном k) все слагаемые из $C([0;T];L_{2,\Gamma_k})$, а во втором — из $C([0;T];\mathbb{C}^2)$. Теперь из (3.26) получаем, что $\nabla\widetilde{p_k}\in C^1([0;T];\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k))$, а также выполнены уравнения (3.13), (3.14), (3.16), (3.17), где все слагаемые — непрерывные функции t со значениями в соответствующих пространствах. Определяя еще $\nabla\varphi_k$ из (3.12), (3.15) и $d\vec{\delta}_3/dt$ из (2.9), приходим к выводу, что

$$\nabla\varphi_k\in C^1([0;T];\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)),\quad \vec{\delta}_3(t)\in C^1([0;T];\mathbb{C}).$$

Поэтому из (3.11) имеем

$$\nabla p_k=\nabla\widetilde{p_k}+\nabla\varphi_k\in C^1([0;T];\vec{G}(\Omega_k)),$$

а из (3.12)–(3.14), (3.15)–(3.17) получаем, что выполнены первые уравнения (2.6), (2.7), где все слагаемые — из $C([0;T];\vec{L}_2(\Omega_k))$, а также кинематические соотношения (2.9), причем в соотношении для ζ_k слагаемые из $C^1([0;T];H^{1/2}_{\Gamma_k})$, а для $P_2\vec{\delta}_k$ — в $C^1([0;T];\mathbb{C}^2)$. Наконец, выполнены также соотношения (2.1), (2.5), где все слагаемые из $C([0;T];\mathbb{C}^3)$, и начальные условия (2.12).

Таким образом, задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет сильное решение на отрезке $[0;T]$. Для него выполнен закон баланса полной энергии в виде (2.20). Доказательство этого факта повторяет соответствующие выкладки из пункта 2.2. $\square$

Замечание 4.2. В качестве следствия из теоремы 4.3 отметим такой факт. Если выполнены условия

$$\vec{u}_k^0\in\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)=\vec{J}_0(\Omega_k)\oplus\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k),\quad \zeta_k^0\in L_{2,\Gamma_k},\ \vec{\omega}_k^0\in\mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}_k\in\mathbb{C}^3,\vec{f}_k(t,x)\in C([0;T];\vec{L}_2(\Omega_k)),\tag{4.23}$$

то задача (2.1), (2.5)–(2.12) имеет обобщенное решение с непрерывной полной энергией: для этого решения выполнен закон баланса полной энергии в форме

$$\begin{aligned}
&\frac12\Big\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2\,d\Omega_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02}+\\
&\qquad+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2\,d\Omega_2\Big\}+\\
&+\frac12 g\Big\{\sum_{k=1}^2\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}\Big(|\zeta_k+\theta_k((P_2\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2-|\theta_k((P_2\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2\Big)\,d\Gamma_k\Big\}+\\
&\qquad+\frac12\Big\{(m_1l_1+m_2h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2+m_2l_2|P_2\vec{\delta}_2|^2\Big\}=\\
&=\frac12\Big\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1^0\times\vec{r}_1|^2\,d\Omega_{01}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1^0\times\vec{r}_1+\vec{u}_1^0|^2\,d\Omega_1+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1^0\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2^0\times\vec{r}_2|^2\,d\Omega_{02}+\\
&+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1^0\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2^0\times\vec{r}_2+\vec{u}_2^0|^2\,d\Omega_2\Big\}+\frac12\Big\{(m_1l_1+m_2h_1)|P_2\vec{\delta}_1^0|^2+m_2l_2|P_2\vec{\delta}_2^0|^2\Big\}+\\
&+\frac12 g\Big\{\sum_{k=1}^2\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}\Big(|\zeta_k^0+\theta_k((P_2\vec{\delta}_k^0\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2-|\theta_k((P_2\vec{\delta}_k^0\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2\Big)\,d\Gamma_k\Big\}=\\
&=-\int_0^t\Big(\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2\Big)\,dt+\sum_{k=1}^2\int_0^t(\vec{M}_k(t)\cdot\vec{\omega}_k)\,dt+\sum_{k=1}^2\rho_k\int_0^t\Big(\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k\,d\Omega_k\Big)\,dt.
\end{aligned}\tag{4.24}$$

В самом деле, для сильных решений соотношение (4.24) есть следствие тождества (2.20), а для обобщенных оно получается предельным переходом в процессе, когда от условий (4.2) по замыканию переходим к условиям (4.23).

5. Проблема собственных колебаний

В этом разделе рассматривается задача о собственных колебаниях сочлененных маятников с полостями, частично заполненными однородной идеальной жидкостью, в случае, когда отсутствует трение в шарнирах и потому система становится консервативной. Исследуются свойства спектра и системы собственных функций задачи как при условии статической устойчивости по линейному приближению, так и при отсутствии этого условия.

5.1. Случай нулевого собственного значения. Рассмотрим решения однородной задачи (3.73) при $A = 0$, зависящие от t по закону

$$z(t) = e^{i\lambda t} z, \quad z \in \mathcal{H}, \tag{5.1}$$

где λ — частота колебаний гидромеханической системы, а $z = (z_1; z_2)^\tau$ — амплитудный элемент. Для элементов z_1, z_2 с учетом формул (3.74), (3.75) приходим к системе уравнений

$$gB_{12}z_2 + i\lambda C_1 z_1 = 0, \quad gB_{21}z_1 + i\lambda g C_2 z_2 = 0, \tag{5.2}$$

$$z_1 = (\vec{w}_1;\ \nabla\Phi_1;\ \vec{\omega}_1;\ \vec{w}_2;\ \nabla\Phi_2;\ \vec{\omega}_2)^\tau, \quad z_2 = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1;\ \zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau.$$

Отметим предварительно, что операторные блоки B_{12}, B_{22} и C_2 обладают следующими свойствами:

$$\begin{gathered} B_{12} = \operatorname{diag}(B_{12,1}; B_{12,2}), \quad B_{21} = \operatorname{diag}(B_{21,1}; B_{21,2}), \\ B_{12,k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widetilde{B}_{12,k} \end{pmatrix}, \quad B_{21,k} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{B}_{21,k} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \end{gathered} \tag{5.3}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{B}_{12,1} = \begin{pmatrix} \rho_1 V_1(\ldots) & \rho_1 V_1(\theta_1((\ldots) \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \\ -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)(\ldots)\, d\Gamma_1 & (m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2(\ldots) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{B}_{12,2} = \begin{pmatrix} \rho_2 V_2(\ldots) & \rho_2 V_2(\theta_2((\ldots) \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \\ -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)(\ldots)\, d\Gamma_2 & m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.4}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{B}_{21,1} = \begin{pmatrix} -\rho_1 \gamma_{n,1}(\ldots) & -\rho_1 \theta_1(((\ldots) \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \\ \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)\gamma_{n,1}(\ldots)\, d\Gamma_1 & -(m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2(\ldots) \end{pmatrix}, \\ \widetilde{B}_{21,2} = \begin{pmatrix} -\rho_2 \gamma_{n,2}(\ldots) & -\rho_2 \theta_2(((\ldots) \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \\ \rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)\gamma_{n,2}(\ldots)\, d\Gamma_2 & -m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{5.5}$$

$$\begin{gathered} C_2 = \operatorname{diag}(C_{21}; C_{22}), \\ C_{21} = \begin{pmatrix} \rho_1 I_1 & \rho_1 \theta_1(((\ldots) \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3}) \\ -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3} \times \vec{r}_1)(\ldots)\, d\Gamma_1 & (m_1 l_1 + m_2 h_1) P_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_{21,1} = -C_{21}\widetilde{\gamma}_{n,1}, \\ C_{22} = \begin{pmatrix} \rho_2 I_2 & \rho_2 \theta_2(((\ldots) \times \vec{r}_2) \cdot \vec{e}_2^{\,3}) \\ -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3} \times \vec{r}_2)(\ldots)\, d\Gamma_2 & m_2 l_2 P_2 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{B}_{21,2} = -C_{22}\widetilde{\gamma}_{n,2}, \\ \widetilde{\gamma}_{n,1} := \operatorname{diag}(\gamma_{n,1}; P_2), \quad \widetilde{\gamma}_{n,2} := \operatorname{diag}(\gamma_{n,2}; P_2), \end{gathered} \tag{5.6}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{B}_{12,1} = \widetilde{V}_1 C_{21}, \quad \widetilde{B}_{12,2} = \widetilde{V}_2 C_{22}, \\ \widetilde{V}_1 = \operatorname{diag}(V_1; I_1), \quad \widetilde{V}_2 = \operatorname{diag}(V_2; I_1). \end{gathered} \tag{5.7}$$

Эти формулы непосредственно следуют из определений (3.33), (3.41), (3.42) операторных матриц B_{12}, B_{21} и C_1.

Лемма 5.1. *Спектральная задача* (5.2) *имеет бесконечнократное нулевое собственное значение, которому отвечают решения вида*

$$z_1 = (\vec{w}_1;\ \vec{0};\ \vec{0};\ \vec{w}_2;\ \vec{0};\ \vec{0})^\tau, \quad z_2 = (\zeta_1;\ P_2\vec{\delta}_1;\ \zeta_2;\ P_2\vec{\delta}_2)^\tau = 0 \quad \forall \vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad \forall \delta_1^3,\ \delta_2^3 \in \mathbb{C}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Напомним сначала, что в исследуемой проблеме имеется еще тривиальная связь (3.50), которая в спектральной задаче дает соотношение

$$w_k^3 = i\lambda\delta_k^3, \quad k = 1, 2. \tag{5.9}$$

Полагая теперь в (5.2) $\lambda = 0$, получаем

$$B_{12}z_2 = 0, \quad B_{21}z_1 = 0. \tag{5.10}$$

Здесь первое соотношение в силу (5.3) приводит к условию $\widetilde{B}_{12}z_2 = 0$, а поэтому, в силу (5.7) и обратимости операторов $\widetilde{V}_k$ и C_2 (см. начало пункта 3.3 и лемм 3.5, 3.6), $z_2 = 0$.

Второе соотношение (5.10) с использованием свойств (5.5), (5.6) дает уравнения

$$-C_{2k}\widetilde{\gamma}_{n,k}\widetilde{z}_{1,k} = 0, \quad \widetilde{z}_{1,k} = (\nabla\Phi_k; \vec{\omega}_k)^\tau, \tag{5.11}$$

отсюда заключаем, что

$$\nabla\Phi_k = \vec{0}, \quad P_2\omega_k = \vec{0}, \quad k = 1, 2.$$

Наконец, из (5.9) при $\lambda = 0$ получаем, что $\omega_k^3 = 0$.

Отсюда и следуют свойства (5.8) для решений, отвечающих $\lambda = 0$. □

Замечание 5.1. Решениям вида (5.8) отвечают стационарные по времени движения идеальной жидкости в каждой полости маятников без отклонения свободных поверхностей Γ_k. При этом тела остаются неподвижными, т. е. маятники с полостями не покачиваются.

5.2. Собственные колебания при условиях статической устойчивости. Рассмотрим теперь в задаче (5.2) случай $\lambda \neq 0$ в предположении, что выполнены условия (3.57), (3.60) статической устойчивости по линейному приближению.

Первое уравнение (5.2) с учетом (5.7) и формулы (3.30) приводит к соотношению

$$\vec{w}_k = -P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k), \quad k = 1, 2, \tag{5.12}$$

а также связи

$$g\widetilde{V}_k C_{2k} z_{2,k} + i\lambda\widetilde{C}_{1k}\widetilde{z}_{1,k} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{5.13}$$

$$\widetilde{C}_{1k}\widetilde{z}_{1,k} = \begin{pmatrix} \rho_k\nabla\Phi_k + \rho_k P_{h,S_k}(\omega_k \times \vec{r}_k) \\ \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times \nabla\Phi_k)\, d\Omega_k + (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k \end{pmatrix}, \tag{5.14}$$

где уже учтены соотношения (5.12) и определения присоединенных элементов инерции (см., например, [16, с. 141–143]):

$$\vec{J}_k\vec{\omega}_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k = (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k =$$

$$= \vec{J}_{t,k}\vec{\omega}_k + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k - \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k =$$

$$= \vec{J}_{t,k}\vec{\omega}_k + \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{r}_k \times (I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k))\, d\Omega_k = (\vec{J}_{t,k} + \vec{J}_{pr,k})\vec{\omega}_k. \tag{5.15}$$

Здесь $\vec{J}_{t,k}$ — момент инерции для k-го тела, а $\vec{J}_{pr,k}$ — присоединенный момент инерции для k-й жидкости.

Второе уравнение (5.2) с учетом (5.5), (5.6) приводит к уравнению

$$\widetilde{\gamma}_{n,k}\widetilde{z}_{1,k} = i\lambda z_{2k}, \quad k = 1, 2, \tag{5.16}$$

так как $C_2 = \operatorname{diag}(C_{21}; C_{22})$ обратим. Таким образом, при $\lambda \neq 0$ следует рассматривать систему уравнений (5.13), (5.16).

Лемма 5.2. *Операторная матрица* $\widetilde{C}_1 = \operatorname{diag}(\widetilde{C}_{1,1}; \widetilde{C}_{1,2})$ (*см.* (5.14)) *является ограниченным положительно определенным оператором, действующим в пространстве*

$$\widetilde{\mathcal{H}}_1 := (\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3) =: \widetilde{\mathcal{H}}_{1,1} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{1,2}. \tag{5.17}$$

Доказательство. Напомним, что операторная матрица C_1 согласно лемме 3.1 является положительно определенным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1 = (\vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{1,1}) \oplus (\vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{1,2})$. Однако можно непосредственно проверить, что

$$(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = (\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}, \quad z_1 = (\vec{w}_1;\ \nabla\Phi_1;\ \vec{\omega}_1;\ \vec{w}_2;\ \nabla\Phi_2;\ \vec{\omega}_2)^\tau, \tag{5.18}$$

если $\vec{w}_k$ и $\vec{\omega}_k$ связаны соотношениями (5.12). Поэтому

$$(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}_1}} \geqslant c^2 \|z_1\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant c^2 \|\widetilde{z}_1\|^2_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}, \quad c^2 > 0.$$

□

Замечание 5.2. Для проверки тождества (5.18) воспользуемся формулой (3.35) при связи (5.12). Тогда

$$(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \left[\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1 + (I_1 - P_{0,1})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)|^2 \, d\Omega_1 + \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01}\right] +$$

$$\left[\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + (I_2 - P_{0,2})(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)|^2 \, d\Omega_1 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 \, d\Omega_{02}\right]. \tag{5.19}$$

Далее, из (5.14) при $k = 1$ имеем, используя также свойство (5.15),

$$(\widetilde{C}_{1,1} \widetilde{z}_{1,1}, \widetilde{z}_{1,1})_{\widetilde{\mathcal{H}}_{1,1}} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 \, d\Omega_1 + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)) \cdot \overline{\nabla\Phi_1} \, d\Omega_1 +$$

$$+\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \nabla\Phi_1) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} \, d\Omega_1 + ((\vec{J}_{t,1} + \vec{J}_{pr,1})\vec{\omega}_1) \cdot \overline{\vec{\omega}_1} = \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01} +$$

$$+\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \left[|\nabla\Phi_1|^2 + 2\mathrm{Re}(\nabla\Phi_1 \cdot (P_{h,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1))) + ((I_1 - P_{0,1})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)) \cdot (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)|^2\right] d\Omega_1 =$$

$$= \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1 + (I_1 - P_{0,1})(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)|^2 \, d\Omega_1,$$

т. е. первую группу слагаемых в (5.19). Аналогично проверяем

$$(\widetilde{C}_{1,2} \widetilde{z}_{1,2}, \widetilde{z}_{1,2})_{\widetilde{\mathcal{H}}_{1,2}} = \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + (I_2 - P_{0,2})(\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)|^2 \, d\Omega_2 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 \, d\Omega_{02},$$

и потому тождество (5.18) имеет место.

Возвращаясь к системе уравнений (5.13), (5.16), исключим в них переменную $z_2 = (z_{2,1}; z_{2,2})^\tau$ (при $\lambda \neq 0$). Это дает уравнение

$$\widetilde{V} C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1 = \mu \widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \quad \mu := \lambda^2 / g, \tag{5.20}$$

$$\widetilde{V} := \mathrm{diag}(\widetilde{V}_1; \widetilde{V}_2), \quad \widetilde{\gamma}_n := \mathrm{diag}(\widetilde{\gamma}_{n,1}; \widetilde{\gamma}_{n,2}). \tag{5.21}$$

Здесь $\widetilde{V}$ и $\widetilde{\gamma}_n$, в силу леммы 3.8, — это неограниченные взаимно сопряженные операторы, а C_2 и $\widetilde{C}_1$, согласно леммам 3.7 и 5.2, — ограниченные положительно определенные операторы, так как выполнены условия (3.57), (3.60).

Из (5.20) следует, что по решению $\widetilde{z}_1$ число μ можно найти по формуле

$$\mu = \frac{(C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1, \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2}}{(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}}, \tag{5.22}$$

где знаменатель вычисляется по формуле (5.19), а числитель — по формуле (2.20), т. е.

$$(C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} = \rho_1 \Big[\int\limits_{\Gamma_1} |\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_1} + \theta_1((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \, d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1((P_2 \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \, d\Gamma_1 \Big] +$$

$$+\rho_2 \left[\int\limits_{\Gamma_2} |\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} + \theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2 \, d\Gamma_2 - \int\limits_{\Gamma_2} |\theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2 \, d\Gamma_2 \right] +$$

$$+(m_1 l_l + m_2 h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2 + m_2 l_2 |P_2\vec{\omega}_2|^2. \tag{5.23}$$

Введем еще в рассмотрение потенциальные поля и соответствующие потенциалы Н. Е. Жуковского $\psi_{k,j},\ j=1,2,3,\ k=1,2$ (см. [13]). Так как $\operatorname{div}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k) = 0$, то поле $\nabla\psi_k = (I_k - P_{0,k})(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)$ находится с помощью решения задачи

$$\Delta\psi_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n_k} = (\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\cdot \vec{n}_k \quad (\text{на } \partial\Omega_k). \tag{5.24}$$

Тогда

$$P_{0,k}(\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k) = \vec{\omega}_k \times \vec{r}_k - \nabla\psi_k, \quad \nabla\psi_k = \sum_{j=1}^{3} \omega_{k,j} \nabla\psi_{k,j}, \tag{5.25}$$

$$\Delta\psi_{k,j} = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \psi_{k,j}}{\partial n_k} = (\vec{e}_k^{\,j} \times \vec{r}_k)\cdot \vec{n}_k \ (\text{на } \partial\Omega_k), \quad j=1,2,3,\ k=1,2. \tag{5.26}$$

Решение каждой из задач (5.26) зависит лишь от формы области Ω_k, заполненной жидкостью.

С помощью потенциалов Жуковского квадратичная форма оператора $\widetilde{C}_1$ представляется в виде (см. (5.19))

$$(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1} = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1 + \sum_{j=1}^{3} \omega_{1,j} \nabla\psi_{1,j}|^2 \, d\Omega_1 + \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01} +$$

$$+\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + \sum_{j=1}^{3} \omega_{2,j} \nabla\psi_{2,j}|^2 \, d\Omega_2 + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 \, d\Omega_{02}, \tag{5.27}$$

поэтому соотношение (5.22) принимает форму

$$\mu = \Big\{ \rho_1 \left[\int\limits_{\Gamma_1} |\frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} + \theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)\cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \, d\Gamma_1 - \int\limits_{\Gamma_1} |\theta_1((P_2\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1)\cdot \vec{e}_1^{\,3})|^2 \, d\Gamma_1 \right] +$$

$$+\rho_2 \left[\int\limits_{\Gamma_2} |\frac{\partial \Phi_2}{\partial n_2} + \theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2 \, d\Gamma_2 - \int\limits_{\Gamma_2} |\theta_2((P_2\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2)\cdot \vec{e}_2^{\,3})|^2 \, d\Gamma_2 \right] +$$

$$+(m_1 l_l + m_2 h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2 + m_2 l_2 |P_2\vec{\omega}_2|^2 \Big\} \ / \ \Big\{ \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1 + \sum_{j=1}^{3} \omega_{1,j} \nabla\psi_{1,j}|^2 \, d\Omega_1 +$$

$$+\rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 \, d\Omega_{01} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \nabla\Phi_2 + \sum_{j=1}^{3} \omega_{2,j} \nabla\psi_{2,j}|^2 \, d\Omega_2 +$$

$$+\rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 \, d\Omega_{02} \Big\}. \tag{5.28}$$

Теорема 5.1. *Задача* (5.20), (5.21) *имеет дискретный спектр* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, *состоящий из конечнократных положительных собственных значений* μ_j *с предельной точкой* $\mu = +\infty$. *Соответствующая им система собственных элементов* $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$, $\widetilde{z}_{1,j} = (\nabla\Phi_{1,j};\ \vec{\omega}_{1,j};\ \nabla\Phi_{2,j};\ \vec{\omega}_{2,j})_{j=1}^{\tau}$, *образует базис в пространстве* $\widetilde{\mathcal{H}}_1 = \widetilde{\mathcal{H}}_{1,1} \oplus \widetilde{\mathcal{H}}_{1,2} = (\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3)$, *ортогональный по формам* (5.23), (5.27).

Собственные значения и собственные элементы задачи (5.20), (5.21) *можно найти, рассматривая последовательные минимумы вариационного отношения* (5.28) *или последовательные минимумы функционала* (5.23) *при дополнительном условии, что функционал* (5.27) *равен единице. При этом для функций сравнения Φ_k должны иметь место соотношения*

$$\Delta\Phi_k = 0 \ (\textit{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k} = 0 \ (\textit{на } S_k), \quad \int_{\Gamma_k} \Phi_k \, d\Gamma_k = 0, \quad k = 1, 2. \tag{5.29}$$

Для нахождения приближенных решений задачи (5.20), (5.21) *можно применить метод Ритца к функционалу*

$$F(\widetilde{z}_1) := (C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1, \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_1)_{\mathcal{H}_2} - \mu(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}_1}, \tag{5.30}$$

и этот метод сходится.

Наконец, асимптотическое поведение собственных значений μ_j при $j \to \infty$ таково:

$$\mu_j = \left(\frac{1}{4\pi} (|\Gamma_1| + |\Gamma_2|)^{-1/2} \right) j^{1/2} [1 + o(1)]. \tag{5.31}$$

Доказательство. Заметим сначала, что совокупность элементов $\widetilde{z}_1$, для которых при условиях (5.29) конечна квадратичная форма (5.27), компактна в $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, а так как норма, задаваемая формой (5.27), эквивалентна стандартной норме пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_1$, то указанная совокупность элементов компактна и по форме (5.27). Поэтому по теореме С.Г. Михлина (см., например, [24]) задача (5.20), (5.21) имеет дискретный положительный спектр $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\mu_j \to +\infty$ $(j \to \infty)$, а система собственных элементов $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающая собственным значениям $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$, образует ортогональный базис как по форме (5.27), так и по форме (5.23). В частности, при соответствующей нормировке выполнены свойства

$$(\widetilde{C}_1 \widetilde{z}_{1,j}, \widetilde{z}_{1,l})_{\widetilde{\mathcal{H}}_1} = \delta_{jl}, \quad (C_2 \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_{1,j}, \widetilde{\gamma}_n \widetilde{z}_{1,l})_{\mathcal{H}_2} = \mu_j \delta_{jl}. \tag{5.32}$$

Остальные утверждения теоремы также следуют из [24]. Наконец, последнее утверждение (асимптотика спектра) следует из такого рассуждения. Квадратичная форма (5.23) отличается от «невозмущенной» квадратичной формы

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Gamma_k} \Big|\frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k}\Big|^2 \, d\Gamma_k \tag{5.33}$$

тем, что (5.23) является расширением невозмущенной формы (5.33) на дополнительное конечномерное (шестимерное) пространство. Далее, аналогично, квадратичная форма (5.27) является расширением формы

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 \, d\Omega_k \tag{5.34}$$

на это же дополнительное пространство. Отсюда и из общих результатов М.Ш. Бирмана и М.З. Соломяка (см., например, [9]) следует, что асимптотическое поведение чисел μ_j такое же, как для вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Gamma_k} \Big|\frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k}\Big|^2 \, d\Gamma_k \ \Big/ \ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 \, d\Omega_k \tag{5.35}$$

при дополнительных условиях (5.29). Однако этому отношению отвечают две независимые спектральные задачи для отношений

$$\int_{\Gamma_k} \Big|\frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k}\Big|^2 \, d\Gamma_k \ \Big/ \ \int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 \, d\Omega_k, \quad k = 1, 2,$$

или, что равносильно, для отношений

$$\int_{\Omega_k} |\nabla \Phi_k|^2 \, d\Omega_k \ \Big/ \ \int_{\Gamma_k} |\Phi_k|^2 \, d\Gamma_k, \quad k = 1, 2,$$

при условиях (5.29).

Отсюда, а также из результатов И. Л. Вулис и М. З. Соломяка (см. [11, 12]) получаем, что для задачи (5.20), (5.21) имеет место асимптотическая формула (5.31). □

Замечание 5.3. Вариационная задача (5.28), (5.29) обобщает задачу (5.35), (5.29), которая соответствует проблеме собственных колебаний идеальных жидкостей в двух неподвижных сосудах, т. е. в полостях без маятников. При $\vec{\omega}_1 = \vec{0}$, $\vec{\omega}_2 = \vec{0}$ первая проблема переходит во вторую.

5.3. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. Будем теперь считать, что условия (3.57), (3.60) статической устойчивости по линейному приближению не выполнены, и снова рассмотрим спектральную задачу (5.20), (5.21):

$$\widetilde{V}C_2\widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_1 = \mu\widetilde{C}_1\widetilde{z}_1, \quad \mu := \lambda^2/g, \quad \widetilde{z}_1 \in \widetilde{\mathcal{H}}_1, \quad \widetilde{V} = \operatorname{diag}(\widetilde{V}_1; \widetilde{V}_2), \quad \widetilde{\gamma}_n = \operatorname{diag}(\widetilde{\gamma}_{n,1}; \widetilde{\gamma}_{n,2}). \tag{5.36}$$

Здесь все операторы, кроме C_2, имеют прежние свойства, а оператор C_2, согласно лемме 3.6, при выполнении условий (3.45), а также из замечаний после ее доказательства, ограниченно обратим, причем ранг индефинитности квадратичной формы $(C_2z_2, z_2)_{\mathcal{H}_2}$ равен $\varkappa$, $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$.

Отсюда следует, что при доказательстве теоремы 4.2

$$C_2 = J_\varkappa|C_2| = |C_2|^{1/2}J_\varkappa|C_2|^{1/2}, \quad J_\varkappa = J_\varkappa^{-1} = J_\varkappa^*, \quad 0 \ll |C_2| \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2), \tag{5.37}$$

где $J_\varkappa$—каноническая симметрия.

Отметим еще, что в (5.36) операторы $\widetilde{\gamma}_n$ и $\widetilde{V}$ взаимно сопряжены и имеют ограниченные (и даже компактные) обратные. Учитывая эти свойства, выполним в (5.36) замену по формуле

$$|C_2|^{1/2}\widetilde{\gamma}_n\widetilde{z}_1 =: v \in \mathcal{H}_2. \tag{5.38}$$

Тогда вместо (5.36) придем к задаче

$$v = \mu J_\varkappa Cv, \quad C := |C_2|^{-1/2}\widetilde{V}^{-1}\widetilde{C}_1\widetilde{\gamma}_n^{-1}|C_2|^{-1/2}, \tag{5.39}$$

где C— компактный положительный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2)$. Свойство положительности оператора C проверяется непосредственно с учетом того, что $\widetilde{C}_1 \gg 0$ (лемма 5.2) и $(\widetilde{V})^* = \widetilde{\gamma}_n$.

Теорема 5.2. *Задача* (5.36) *имеет дискретный спектр, состоящий из конечнократных собственных значений $\mu_j \in \mathbb{R}$ с предельной точкой $\mu = +\infty$. При этом первые $\varkappa$ собственных значений отрицательны, а остальные положительны. Собственные элементы $\{\widetilde{z}_{1,j}\}_{j=1}^\infty$ задачи* (5.36) *образуют базис, ортогональный по форме $(\widetilde{C}_1\widetilde{z}_1, \widetilde{z}_1)_{\widetilde{\mathcal{H}}}$. При этом выполнены формулы ортогональности* (5.32)*, где теперь $\mu_j < 0$ при $j \leqslant \varkappa$, $\mu_j > 0$, $j \geqslant \varkappa + 1$.*

Асимптотическое поведение собственных значений μ_j при $j \to \infty$ по-прежнему имеет вид (5.31).

Доказательство. Так как в (5.39) оператор $J_\varkappa C$ является $J_\varkappa$— самосопряженным компактным положительным оператором, т. е.

$$[J_\varkappa Cv, v] = (J_\varkappa(J_\varkappa C)v, v)_{\mathcal{H}_2} = (Cv, v)_{\mathcal{H}_2} > 0, \quad v \neq 0, \tag{5.40}$$

то по теореме Л. С. Понтрягина из [25], а также из [3], получаем, что задача (5.39) имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений, а остальные положительны и (в силу компактности оператора C) образуют счетное множество конечнократных собственных значений с предельной точкой $\mu = +\infty$. Кроме того, собственные элементы задачи (5.39) образуют базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}_2$, и этот базис является $J_\varkappa$— ортогональным:

$$(Cv_j, v_l)_{\mathcal{H}_2} = \delta_{jl}, \quad (J_\varkappa v_j, v_l)_{\mathcal{H}_2} = \mu_j\delta_{jl}. \tag{5.41}$$

Осуществляя здесь обратную замену (5.38), приходим к выводу, что справедливы последние утверждения теоремы и выполнены формулы ортогональности (5.32) с новыми свойствами для собственных значений μ_j. □

Следствием установленных фактов является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия* (3.45) *и не выполнены условия* (3.57), (3.60), *т. е. изучаемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Тогда она является и динамически неустойчивой, т. е. имеются решения однородной начально-краевой задачи* (2.1), (2.5)–(2.12), *экспоненциально возрастающие по t при $t \to +\infty$.*

Доказательство. Оно очевидно, так как в этом случае спектральная задача (5.36) при $\varkappa \geqslant 1$ имеет отрицательные собственные значения $\mu = \lambda^2/g$ (не более четырех), и тогда числа λ являются чисто мнимыми, что с учетом (5.1) приводит к экспоненциальной неустойчивости гидромеханической системы. □

Часть 2

СЛУЧАЙ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛОСТЯХ

6. Постановка задачи, закон баланса полной энергии

6.1. К постановке задачи. Будем теперь считать, что жидкости в полостях тел-маятников являются не идеальными, а вязкими с коэффициентом динамической вязкости μ_k, $k = 1, 2$. В этом случае уравнения движения маятников не изменяются и по-прежнему имеют вид (2.1), (2.5). Поэтому ниже будут приведены лишь линеаризованные уравнения движения вязких жидкостей в полостях, а также краевые и начальные условия.

Прежде всего, вместо (2.6), (2.7) теперь имеем уравнения движения в Ω_1 и Ω_2 в подвижных системах координат $O_k x_k^1 x_k^2 x_k^3$, $k = 1, 2$, в следующей форме:

$$\begin{aligned} &\rho_1\left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) + \nabla p_1 - \mu_1 \Delta \vec{u}_1 = \rho_1 \vec{f}_1,\ \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \ (\text{в}\ \ \Omega_1), \\ &\rho_2\left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) + \nabla p_2 - \mu_2 \Delta \vec{u}_2 = \rho_2 \vec{f}_2,\ \ \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0 \ (\text{в}\ \ \Omega_2), \end{aligned} \tag{6.1}$$

учитывающей действие вязких сил в исследуемой системе. Здесь, как и ранее в части 1, $\rho_k > 0$ — плотности жидкостей, $\vec{u}_k(t,x)$ — поля относительных скоростей в каждой полости, $p_k(t,x)$ — динамические добавки к стационарным давлениям в полостях, $\vec{f}_k(t,x)$ — малые добавки к основному гравитационному полю сил, действующему «сверху вниз» с ускорением $g > 0$. Далее, $\vec{\omega}_k$ — угловые скорости тел, Δ — векторный оператор Лапласа, $\vec{r}_k$ — радиус-векторы, идущие в подвижных системах координат от O_k в заданную точку.

В процессе движения вязких жидкостей на твердых стенках S_k полостей теперь должны выполняться условия прилипания:

$$\vec{u}_k = \vec{0} \ \ (\text{на}\ \ S_k), \quad k = 1, 2. \tag{6.2}$$

Кинематические условия (2.9) по-прежнему сохраняют свой вид, а динамические условия преобразуются следующим образом. После линеаризации они записываются на Γ_k и состоят в том, что касательные напряжения на Γ_k равны нулю, а нормальное напряжение компенсируется скачком гравитационных сил, возникших при линеаризации задачи. Поэтому динамические условия принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &\mu_k \tau_{j3}(\vec{u}_3) := \mu_k\left(\frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^j} + \frac{\partial u_k^j}{\partial x_k^3}\right) = 0, \quad j = 1, 2, \\ &-p_k + 2\mu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = -\rho_k g(\zeta_k + (P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3}), \quad k = 1, 2 \ \ (\text{на}\ \ \Gamma_k), \end{aligned} \tag{6.3}$$

где

$$\tau_{jl}(\vec{u}_k) := \frac{\partial u_k^l}{\partial x_k^j} + \frac{\partial u_k^j}{\partial x_k^l}, \quad j, l = \overline{1, 3}, \quad k = 1, 2, \tag{6.4}$$

— элементы тензора деформаций в вязкой жидкости, $P_2\vec{\delta}_k$ — проекция вектора углового перемещения $\vec{\delta}_k$ на равновесную поверхность Γ_k, а ζ_k — отклонения от Γ_k границы подвижной жидкости перпендикулярно к Γ_k.

Эти функции, как и ранее, удовлетворяют условиям сохранения объема каждой жидкости в процессе малых колебаний системы, т. е. условиям (2.11). Наконец, начальные условия по-прежнему имеют вид (2.12).

Таким образом, в случае вязких жидкостей в полостях маятников следует изучать начально-краевую задачу (2.1), (2.5), (6.1)–(6.4), (2.9), (2.11), (2.12).

6.2. Закон баланса полной энергии. Как и в пункте 2.2, будем считать, что поставленная задача имеет классическое решение при $t \geqslant 0$, и выведем закон баланса полной энергии, учитывающий не только действие сил трения в шарнирах, но и действие диссипативных сил в жидкостях.

С этой целью проделаем в задаче те же преобразования, которые для случая идеальных жидкостей были осуществлены в пункте 2.2 (см. (2.13)–(2.18)). Что касается нового слагаемого в уравнениях движения (6.1), а также условий прилипания (6.2) и динамических условий (6.3), то здесь следует воспользоваться формулой Грина для векторного оператора Лапласа, которая имеет место в задачах о движении вязкой жидкости в сосуде при наличии свободной поверхности (см. [16, с. 115]). Именно, если поля $\vec{v}_k$ и $\vec{u}_k$ соленоидальные и удовлетворяют условию прилипания на твердой стенке S_k, то имеет место тождество

$$\int\limits_{\Omega_k} \vec{v}_k \cdot (-\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k) d\Omega_k = \mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) - \int\limits_{\Gamma_k} \sum_{j=1}^{3} v_k^j (\mu_k \tau_{j3}(\vec{u}_k) - p_k \delta_{j3}) d\Gamma_k, \tag{6.5}$$

$$\mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = \frac{1}{2}\mu_k \int\limits_{\Omega_k} \Big[\sum_{j,l=1}^{3} \tau_{jl}(\vec{v}_k)\tau_{jl}(\vec{u}_k) \Big] d\Omega_k. \tag{6.6}$$

При этом квадратичный функционал

$$\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) \tag{6.7}$$

равен скорости диссипации энергии в вязкой жидкости, находящейся в области Ω_k.

Учитывая (6.5), получаем, что вместо (2.14), (2.16) теперь будем иметь соотношения

$$\int\limits_{\Omega_k} \vec{u}_k \cdot (-\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k) d\Omega_k = \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \frac{1}{2}\rho_k g \frac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_k} |\zeta_k|^2 d\Gamma_k + \rho_k g \int\limits_{\Gamma_k} ((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})) \frac{\partial \zeta_k}{\partial t}\, d\Gamma_k. \tag{6.8}$$

Поэтому закон баланса полной энергии системы при наличии вязких жидкостей в полостях маятников выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{ \Big[\rho_{0,1} \int\limits_{\Omega_{0,1}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1|^2 d\Omega_{0,1} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 d\Omega_1 \Big] + \\
&\qquad + \Big[\rho_{0,2} \int\limits_{\Omega_{0,2}} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2|^2 d\Omega_{0,2} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2 d\Omega_2 \Big] \Big\} + \\
&\quad + \frac{g}{2}\frac{d}{dt}\Big\{ \sum_{k=1}^{2} \rho_k \Big[\int\limits_{\Gamma_k} |\zeta_k + \theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})|^2 d\Gamma_k - \int\limits_{\Gamma_k} |\theta_k((P_2\vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})|^2\, d\Gamma_k \Big] + \\
&\qquad\qquad + (m_1 l_1 + m_2 h_1)|P_2\vec{\delta}_1|^2 + m_2 l_2 |P_2\vec{\delta}_2|^2 \Big\} = \\
&= -\Big\{ \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2 \Big\} + \sum_{k=1}^{2} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} \vec{f}_k \cdot \vec{u}_k\, d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \vec{M}_k \cdot \vec{\omega}_k.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Здесь справа по отношению к закону баланса полной энергии (2.20) для идеальных жидкостей в сосудах добавлены слагаемые, дающие скорости диссипации энергии в вязких жидкостях.

7. Операторный подход

7.1. Выбор функциональных пространств. В процессе движения вязкой жидкости в области Ω_k не только ее кинетическая и потенциальная энергии должны быть конечны, как следует из (2.20) и (6.9), но также и скорость диссипации энергии, т. е. поле скорости $\vec{u}(t,x)$ должно быть функцией переменной t с конечной $E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k)$ (см. (6.7), (6.6)).

Учитывая этот факт, введем в рассмотрение функциональные пространства, следующие из (3.2)–(3.5):

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) := \Big\{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \vec{u}_k\cdot\vec{n}_k = 0 \ (\text{на } S_k)\Big\}, \ \ k=1,2, \tag{7.1}$$

а также пространства с конечной скоростью диссипации энергии

$$\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k) := \Big\{\vec{u}_k \in \vec{H}^1(\Omega_k) : \ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_k)\Big\}, \ \ k=1,2. \tag{7.2}$$

Как отмечено в [16, с. 114-115], подпространство $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$ пространства $\vec{H}^1(\Omega_k)$ является плотным множеством в подпространстве $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ и имеет место неравенство Корна в следующей форме:

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} := E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}\Big(\sum_{j,l=1}^{3}|\tau_{jl}(\vec{u}_k)|^2\Big)d\Omega_k \geqslant \widetilde{c}_k\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{H}^1(\Omega_k)} \geqslant$$
$$\geqslant c_k\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = c_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2 d\Omega_k, \quad c_k>0. \tag{7.3}$$

Поскольку неравенство противоположного смысла очевидно, то норма (7.3) в $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$ эквивалентна стандартной норме $\vec{H}^1(\Omega_k)$, и потому в силу теорем вложения всякое множество, ограниченное в $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$, компактно в $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$.

Из этих рассуждений следует, что пространства $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$ и $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ образуют гильбертову пару пространств $(\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k);\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, причем оператор этой пары, рассматриваемой на области определения из $\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)\subset\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ с областью значений $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, является самосопряженным положительно определенным оператором, имеющим компактный обратный оператор, действующий в $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$.

Для удобства дальнейших преобразований обозначим этот оператор символом A_{kk} и будем считать далее, что он действует в оснащенном гильбертовом пространстве

$$\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)\subset\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)\subset(\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k))^* \tag{7.4}$$

и имеет область определения $\mathcal{D}(A_{kk}) = \vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а область значений $\mathcal{R}(A_{kk}) = (\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k))^*$. Тогда

$$A^{1/2}_{kk} : \vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k)\to\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k), \ \ A^{1/2}_{kk} : \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)\to(\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k))^* \tag{7.5}$$

— ограниченные операторы, причем

$$(\vec{v}_k,\vec{u}_k)_{\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)} = E_k(\vec{v}_k,\vec{u}_k) = (A^{1/2}_{kk}\vec{v}_k, A^{1/2}_{kk}\vec{u}_k)_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} = \langle\vec{v}_k, A_{kk}\vec{u}_k\rangle_{\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)} \ \ \forall\vec{v}_k,\vec{u}_k\in\vec{J}^{1}_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{7.6}$$

Здесь символом $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_0}$ обозначено значение функционала, представленного элементом на втором месте, действующим на элемент, стоящий на первом месте, если имеется оснащение $H_+\hookrightarrow H_0\hookrightarrow H_- = (H_+)^*$.

В этой части работы будем по-прежнему считать, что границы $\partial\Omega_k$ областей $\Omega_k\subset\mathbb{R}^3$ разбиты на липшицевы куски S_k и Γ_k, имеющие, в свою очередь, липшицевы границы ∂S_k и $\partial\Gamma_k$. В этом случае, как доказано в [19,20], имеет место следующая обобщенная формула Грина для векторного оператора Лапласа:

$$\begin{gathered}\mu_k E_k(\vec{v}_k, \vec{u}_k) = \langle \vec{v}_k, -\mu_k \Delta \vec{u}_k + \nabla p_k \rangle_{\vec{L}_2(\Omega_k)} + \sum_{j=1}^{3} \langle \gamma_k v_k^j, \mu_k \tau_{j3}(\vec{u}_k) - p_k \delta_{j3} \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \\ \vec{v}_k = \sum_{j=1}^{3} v_k^j \vec{e}_k^{\,j}, \quad \vec{v}_k,\ \vec{u}_k \in \vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k),\ \ \nabla p_k \in \vec{G}(\Omega_k) = \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k),\end{gathered} \tag{7.7}$$

где $\gamma_k \varphi := \varphi|_{\Gamma_k}$ $\forall \varphi \in H^1(\Omega_k)$, а подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$ и $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ определены в (3.3), (3.5).

7.2. Переход к дифференциально-операторным уравнениям в гильбертовом пространстве. Опираясь на закон баланса полной энергии (6.9) и формулу Грина (7.7), будем далее считать, что искомые поля скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ являются функциями переменной t со значениями в $\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а ∇p_k — функциями t со значениями в $\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k) \oplus \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$.

Далее, введем ортопроекторы $P_{0,\Gamma_k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$, а также $P_{0,S_k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, $P_{0,\Gamma_k} + P_{0,S_k} = I_k$, $k = 1,2$, и применим к уравнениям движения (6.1) процедуру проектирования на взаимно ортогональные подпространства $\vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k)$ и $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, считая, что $\vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а

$$\nabla p_k = \nabla \widetilde{p}_k + \nabla \varphi_k,\ \ \nabla \widetilde{p}_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k),\ \ \nabla \varphi_k \in \vec{G}_{0,\Gamma_k}(\Omega_k). \tag{7.8}$$

Тогда возникает система соотношений

$$\begin{gathered}\rho_1 \left(\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_{0,S_1}\Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \Big) \right) + \nabla \widetilde{p}_1 - \mu_1 P_{0,S_1} \Delta \vec{u}_1 = \rho_1 P_{0,S_1} \vec{f}_1, \\ \rho_2 \left(\frac{d\vec{u}_2}{dt} + P_{0,S_2}\Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \Big) \right) + \nabla \widetilde{p}_2 - \mu_2 P_{0,S_2} \Delta \vec{u}_2 = \rho_2 P_{0,S_2} \vec{f}_2,\end{gathered} \tag{7.9}$$

$$\begin{gathered}\rho_1 P_{0,\Gamma_1}\Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 \Big) + \nabla \varphi_1 - \mu_1 P_{0,\Gamma_1} \Delta \vec{u}_1 = \rho_1 P_{0,\Gamma_1} \vec{f}_1, \\ \rho_2 P_{0,\Gamma_2}\Big(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 \Big) + \nabla \varphi_2 - \mu_2 P_{0,\Gamma_2} \Delta \vec{u}_2 = \rho_2 P_{0,\Gamma_2} \vec{f}_2,\end{gathered} \tag{7.10}$$

из которой видно, что поля $\nabla \varphi_1$ и $\nabla \varphi_2$ находятся из (7.10), если известны поля $\vec{u}_k$ и $\nabla \widetilde{p}_k$, а также угловые скорости $\vec{\omega}_k$, $k = 1,2$. Поэтому в дальнейшем будем принимать во внимание лишь уравнения (7.9), а также законы изменения кинетических моментов, видоизмененные краевые и начальные условия.

В частности, поскольку $\varphi_k = 0$ на Γ_k, то $p_k = \widetilde{p}_k$ на Γ_k. Кроме того, как показано, например, в [16, с. 115], в задаче о движении вязких несжимаемых жидкостей выполнены условия

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3}\, d\Gamma_k = 0,\ \ k = 1,2. \tag{7.11}$$

Эти факты позволяют переписать последние условия в (6.3) в виде

$$-\widetilde{p}_k + 2\mu_k \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3} = -\rho_k g(\zeta_k + \theta_k((P_2 \vec{\delta}_k \times \vec{r}_k) \cdot \vec{e}_k^{\,3})), \quad k = 1,2, \tag{7.12}$$

где $\theta_k : L_2(\Gamma_k) \to L_{2,\Gamma_k}$ — ортопроекторы на подпространство $L_{2,\Gamma_k} = L_2(\Gamma_k) \ominus \{1_{\Gamma_k}\}$ (см. (3.9)).

Заметим еще, что кинематические соотношения на Γ_k (см. (3.19), (3.20)) теперь переписываются в виде

$$\frac{d\zeta_k}{dt} = \gamma_{n,k} \vec{u}_k := (\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k)_{\Gamma_k}, \quad k = 1,2. \tag{7.13}$$

Введем далее в качестве искомых объектов наборы элементов

$$z = (z_1; z_2)^\tau,\ \ z_1 = (\vec{u}_1; \vec{\omega}_1; \vec{u}_2; \vec{\omega}_2)^\tau,\ \ z_2 = (\zeta_1; P_2 \vec{\delta}_1; \zeta_2; P_2 \vec{\delta}_2)^\tau, \tag{7.14}$$

и будем считать, что они являются функциями переменной t со значениями в пространстве

$$\begin{gathered}\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2,\ \ \mathcal{H}_1 = (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3), \\ \mathcal{H}_2 = (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2).\end{gathered} \tag{7.15}$$

Здесь, в отличие от построений пункта 3.3 (см. (3.28)), сумма подпространств $\vec{J}_0(\Omega_k)\oplus\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$ объединена в одно:

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)=\{\vec{u}_k\in\vec{L}_2(\Omega_k):\operatorname{div}\vec{u}_k=0\ \ (\text{в }\Omega_k),\ \ \vec{u}_k\cdot\vec{n}_k=0\ \ (\text{на }\partial\Omega_k)\},\ k=1,2. \tag{7.16}$$

Поэтому дальнейшие построения несколько отличаются от схемы преобразований, примененной для идеальных жидкостей в пункте 3.3, однако проводятся по тому же плану.

Наша цель — получить видоизмененные уравнения движений вязких жидкостей и уравнения изменения кинетических моментов в виде дифференциального уравнения вида (3.29) с учетом тех особенностей, которые возникают в исследуемой задаче ввиду наличия вязких жидкостей в полостях.

Реализуя эту схему, рассмотрим так называемую первую вспомогательную краевую задачу, которая систематически использовалась С. Г. Крейном при изучении малых движений вязкой жидкости в открытом неподвижном сосуде (см. [16, с. 277–279]).

Это задача вида

$$\begin{aligned}&-\mu_k P_{0,S_k}\Delta\vec{u}_k+\nabla\widetilde{p}_{k1}=\vec{f}_k,\quad \operatorname{div}\vec{u}_k=0\ \ (\text{в }\ \Omega_k),\\&\vec{u}_k=\vec{0}\ \ (\text{на }\ S_k),\quad \mu_k\tau_{j3}(\vec{u}_k)=0,\quad j=1,2,\\&-\widetilde{p}_{k1}+2\mu_k\frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3}=0\ \ (\text{на }\ \Gamma_k).\end{aligned} \tag{7.17}$$

Определение 7.1. Назовем *обобщенным решением* задачи (7.17) такую функцию $\vec{u}_k\in\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k)$, для которой при любом $\vec{v}_k\in\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k)$ выполнено тождество

$$\mu_k E_k(\vec{v}_k,\vec{u}_k)=(\vec{v}_k,\vec{f}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)}, \tag{7.18}$$

и *слабым решением* этой задачи, если

$$\mu_k E_k(\vec{v}_k,\vec{u}_k)=\langle\vec{v}_k,\vec{f}_k\rangle_{\vec{L}_2(\Omega_k)}\quad \forall\vec{v}_k\in\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{7.19}$$

(Заметим, что в определении обобщенного и слабого решений используется формула Грина (7.7), причем в первом слагаемом справа стоит дополнительный множитель P_{0,S_k}, который переброшен слева от сомножителя $\vec{v}_k=P_{0,S_k}\vec{v}_k$.)

Обе задачи (7.18) и (7.19) равносильны операторному уравнению

$$\mu_k A_{kk}\vec{u}_k=\vec{f}_k, \tag{7.20}$$

где A_{kk} — оператор гильбертовой пары пространств $(\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k);\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$. При этом для $\vec{f}_k\in\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$ задача (7.17) имеет единственное обобщенное решение

$$\vec{u}_k=(\mu_k A_{kk})^{-1}\vec{f}_k\in\mathcal{D}(A_{kk})\subset\mathcal{D}(A_{kk}^{1/2})=\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k), \tag{7.21}$$

а при $\vec{f}_k\in(\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k))^*$ — слабое решение, выражаемое той же формулой, однако здесь $\mathcal{D}(A_{kk})=\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k)$, а $\mathcal{R}(A_{kk})=(\vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k))^*$.

Опираясь на приведенные факты, будем разыскивать решения краевых задач (7.9), (7.12), (6.3) (первые два условия), (6.2) в виде суммы решений двух вспомогательных задач, первая из которых имеет вид (7.17) с заменой $\vec{f}_k$ на

$$\begin{aligned}\widehat{\vec{f}_k}&=\rho_k P_{0,S_k}\vec{f}_k-\rho_k\Big(\frac{d\vec{u}_k}{dt}+P_{0,S_k}\Big(\frac{d\vec{\omega}_k}{dt}\times\vec{r}_k\Big)\Big)-\nabla\widetilde{p}_{k2},\\\nabla\widetilde{p}_k&=\nabla\widetilde{p}_{k1}+\nabla\widetilde{p}_{k2},\quad \nabla\widetilde{p}_{ki}\in\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k),\quad i=1,2,\end{aligned} \tag{7.22}$$

а для потенциалов $\widetilde{p}_{k2}$ возникает скалярная задача

$$\begin{aligned}&\Delta\widetilde{p}_{k2}=0\ \ (\text{в }\ \Omega_k),\quad \frac{\partial\widetilde{p}_{k2}}{\partial n_k}=0\ \ (\text{на }\ S_k),\\&\widetilde{p}_{k2}=\rho_k g(\zeta_k+\theta_k(((P_2\vec{\delta}_k)\times\vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3}))=:\psi_k\ \ (\text{на }\ \Gamma_k).\end{aligned} \tag{7.23}$$

Тогда решение задачи (7.22) имеет вид (см. (7.21))

$$\vec{u}_k=(\mu_k A_{kk})^{-1}\widehat{\vec{f}_k}, \tag{7.24}$$

а для задачи (7.23) получаем (см. (3.21)–(3.24))

$$\nabla\widetilde{p}_{k2} = V_k\psi_k, \quad V_k \in \mathcal{L}(H^{1/2}_{\Gamma_k}; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)). \tag{7.25}$$

Из (7.24), (7.25) и обозначений для $\widehat{\vec{f}_k}$ и ψ_k приходим к следующим дифференциальным уравнениям первого порядка:

$$\rho_k\Big(\frac{d\vec{u}_k}{dt} + P_{0,S_k}\Big(\frac{d\vec{\omega}_k}{dt} \times \vec{r}_k\Big)\Big) + \mu_k A_{kk}\vec{u}_k + \rho_k g V_k(\zeta_k + \theta_k(((P_2\vec{\delta}_k) \times \vec{r}_k)\cdot \vec{e}^{\,3}_k)) = \rho_k P_{0,S_k}\vec{f}_k \tag{7.26}$$

в пространствах $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$, $k = 1, 2$.

Заметим теперь, что уравнения изменения кинетических моментов (уравнения движения маятников), как уже упоминалось, для случая вязких жидкостей в полостях имеют тот же вид, что и для идеальных, т. е. имеют место соотношения (2.1), (2.5). Таким образом, возникает задача Коши на базе уравнений (7.26), (2.1), (2.5), которую в векторно-матричной форме можно переписать в виде одного дифференциального уравнения первого порядка, близкого к (3.29):

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z_1^0, \tag{7.27}$$

в пространстве $\mathcal{H}_1$ (см. (7.15)).

Здесь, в отличие от (3.30), операторная матрица C_1 имеет размер 4×4 и действует по закону

$$C_1 z_1 = \begin{pmatrix} \rho_1\vec{u}_1 + \rho_1 P_{0,S_1}(\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) \\ \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} (\vec{r}_1 \times \vec{u}_1)\, d\Omega_1 + \vec{J}_1\vec{\omega}_1 + \int\limits_{G_1} (\vec{h}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{u}_2))\, dm_1 \\ \rho_2\vec{u}_2 + \rho_2 P_{0,S_2}(\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) \\ \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (\vec{r}_2 \times \vec{u}_2)\, d\Omega_2 + \vec{J}_2\vec{\omega}_2 + \int\limits_{G_2} (\vec{r}_2 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{h}_1))\, dm_2 \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

где $\vec{J}_k$ — момент инерции k-го тела с жидкостью.

Далее, оператор A_1 (оператор диссипации системы) теперь имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1+\alpha_2 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(A_1) = (\mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\mathcal{D}(A_{22}) \oplus \mathbb{C}^3), \tag{7.29}$$

а оператор B_{12} действует по закону (сравните с (5.4), (3.33))

$$B_{12}z_2 = \begin{pmatrix} \rho_1 V_1\zeta_1 + \rho_1 V_1(\theta_1(((P_2\vec{\delta}_1) \times \vec{r}_1)\cdot\vec{e}^{\,3}_1)) \\ -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1 + (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2\vec{\delta}_1 \\ \rho_2 V_2\zeta_2 + \rho_2 V_2(\theta_2((P_2\vec{\delta}_2) \times \vec{r}_2)\cdot\vec{e}^{\,3}_2) \\ -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}^{\,3}_2 \times \vec{r}_2)\zeta_2\, d\Gamma_2 + m_2 l_2 P_2\vec{\delta}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1}) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2}) \oplus \mathbb{C}^2). \tag{7.30}$$

Проведем теперь преобразование кинематических условий (2.9) по той же схеме, которая соответствовала переходу от (3.38) к (3.39): достаточно в (3.39) заменить $\gamma_{n,k}\nabla\Phi_k$ на $\gamma_{n,k}\vec{u}_k$. Тогда возникнет соотношение вида (3.40), а именно:

$$gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z_2^0, \tag{7.31}$$

где C_2 определено в (3.41):

$$C_2 z_2 = \begin{pmatrix} \rho_1\zeta_1 + \rho_1\theta_1(((P_2\vec{\delta}_1) \times \vec{r}_1)\cdot\vec{e}^{\,3}_1) \\ -\rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}^{\,3}_1 \times \vec{r}_1)\zeta_1\, d\Gamma_1 + (m_1 l_1 + m_2 h_1)P_2\vec{\delta}_1 \\ \rho_2\zeta_2 + \rho_2\theta_2(((P_2\vec{\delta}_2) \times \vec{r}_2)\cdot\vec{e}^{\,3}_2) \\ -\rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}^{\,3}_2 \times \vec{r}_2)\zeta_2\, d\Gamma_2 + m_2 l_2 P_2\vec{\delta}_2 \end{pmatrix}, \tag{7.32}$$

$$B_{21}z_1 = \begin{pmatrix} -\rho_1\gamma_{n,1}\vec{u}_1 - \rho_1\theta_1(((P_2\vec{\omega}_1)\times\vec{r}_1)\cdot\vec{e}_1^{\,3}) \\ \rho_1 \int\limits_{\Gamma_1} (\vec{e}_1^{\,3}\times\vec{r}_1)\gamma_{n,1}\vec{u}_1\,d\Gamma_1 - (m_1l_1+m_2h_1)P_2\vec{\omega}_1 \\ -\rho_2\gamma_{n,2}\vec{u}_2 - \rho_2\theta_2(((P_2\vec{\omega}_2)\times\vec{r}_2)\cdot\vec{e}_2^{\,3}) \\ \rho_2 \int\limits_{\Gamma_2} (\vec{e}_2^{\,3}\times\vec{r}_2)\gamma_{n,2}\vec{u}_2\,d\Gamma_2 - m_2l_2P_2\vec{\omega}_2 \end{pmatrix}. \tag{7.33}$$

Итогом проведенных построений является следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Исходная задача о малых движениях двух сочлененных маятников с полостями, частично заполненными вязкими жидкостями, равносильна, после отделения тривиальных соотношений* (7.10), (2.9) (*для* δ_k^3), *задаче Коши*

$$C\frac{dz}{dt} + Az + gBz = f(t), \quad z(0) = z^0, \quad f(t) := (f_1(t); 0)^\tau, \tag{7.34}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (*см.* (7.15)), *где*

$$C = \operatorname{diag}(C_1; gC_2), \quad A = \operatorname{diag}(A_1; 0), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}), \tag{7.35}$$

а операторные матрицы C_1, C_2, A_1, B_{12} *и* B_{21} *определены в* (7.28), (7.32), (7.29), (7.30) *и* (7.33) *соответственно.*

7.3. О свойствах матричных операторных коэффициентов. Приведем теперь свойства и физический смысл операторных коэффициентов (7.35), опираясь на соответствующие построения и леммы из пунктов 3.3-3.4.

Лемма 7.1. *Операторная матрица* C_1 *из* (7.28) *является ограниченным и положительно определенным оператором, действующим в* $\mathcal{H}_1$. *Квадратичная форма* $(C_1z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1}$ *равна удвоенной кинетической энергии гидромеханической системы, т. е.* C_1 *является оператором кинетической энергии.*

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в лемме 3.1. В частности, устанавливается, что

$$(C_1z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \Big[\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1 + \vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + \rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}} |\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2 d\Omega_{01}\Big] + \\ + \Big[\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{r}_2 + \vec{u}_2|^2 d\Omega_2 + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} |\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1 + \vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2 d\Omega_{02}\Big],$$

т. е. правая часть равна удвоенной кинетической энергии системы (см. (2.20)). Отсюда и следует утверждение леммы. □

Лемма 7.2. *Оператор* $C_2 : \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_2$ *есть оператор потенциальной энергии системы, он ограничен и самосопряжен. Если выполнены условия* (3.45), *то соотношения* (2.9) *и* (7.31) *эквивалентны. Если выполнены условия* (3.56), (3.59), *то оператор* C_2 *неотрицателен, а если выполнены условия* (3.57), (3.60), *то* C_2 *положительно определен.*

Доказательство. Оно непосредственно следует из лемм 3.4–3.6. □

Лемма 7.3. *Оператор* A_1, *заданный на области определения*

$$\mathcal{D}(A_1) = (\mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\mathcal{D}(A_{22}) \oplus \mathbb{C}^3), \tag{7.36}$$

плотной в $\mathcal{H}_1$, *является неограниченным положительно определенным оператором с положительным компактным обратным оператором* A_1^{-1}. *Его квадратичная форма равна мощности диссипативных сил* (*трение в шарнирах и в слоях вязкой жидкости*), *т. е.* A_1 *является оператором диссипации в системе.*

Доказательство. Используя непосредственный подсчет и тождество (3.36) из леммы 3.2 (там A_1 учитывает лишь трение в шарнирах), убеждаемся, что для A_1 из (7.29)

$$(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \sum_{k=1}^{2} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1 |\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2 |\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2, \tag{7.37}$$

т. е. правая часть есть мощность диссипативных сил (см. (6.9)). Отсюда непосредственно получаем, что A_1 положительно определен. Кроме того, отсюда следует также, что всякое множество, ограниченное в энергетическом пространстве этого оператора, т. е. в пространстве

$$\mathcal{D}(A_1^{1/2}) = (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3), \tag{7.38}$$

компактно в $\mathcal{H}_1 = (\vec{J}^{\,1}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}^{\,1}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3)$, и потому A_1^{-1} — компактный оператор. □

Для уточнения связи операторов B_{12} и B_{21} из (7.30), (7.33) предварительно докажем одно вспомогательное утверждение, связанное с расширением оператора нормального следа $\gamma_{n,k}$ на границах Γ_k, $k = 1, 2$.

Будем считать, что $\gamma_{n,k}$ задан не на плотном подмножестве (3.67) пространства $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, а на всем пространстве

$$\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) = \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \oplus \vec{J}_0(\Omega_k). \tag{7.39}$$

Именно, на $\vec{J}_0(\Omega_k)$, по определению этого подпространства (см. (3.2)–(3.5)), для любого $\vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k)$ нормальный след, т. е. $\vec{w}_k \cdot \vec{n}_k$ на Γ_k, равен нулю. Далее, так как любой $\vec{u}_k$ представим в виде $\vec{u}_k = \vec{w}_k + \nabla\Phi_k$, то тогда $\gamma_{n,k}\vec{u}_k = \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k$, и потому по лемме 3.7 этот след принадлежит пространству $\widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_k}$, сопряженному к $H^{1/2}_{\Gamma_k}$.

Напомним теперь, что оператор V_k, дающий решение вспомогательной задачи Зарембы (3.21), согласно (3.24), ограниченно действует из $H^{1/2}_{\Gamma_k}$ на $\vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k) \subset \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$. Поэтому можно формально считать, что область его значений есть $\vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k)$. Эти рассуждения показывают, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.4. *Операторы*

$$V_k : \mathcal{D}(V_k) = H^{1/2}_{\Gamma_k} \subset L_{2,\Gamma_k} \to \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \tag{7.40}$$

и

$$\gamma_{n,k} : \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k) \to \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_k} \supset L_{2,\Gamma_k} \tag{7.41}$$

взаимно сопряжены, т. е. имеет место тождество

$$(V_k\zeta_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = \langle \zeta_k, \gamma_{n,k}\vec{u}_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall \zeta_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k}, \ \ \forall \vec{u}_k \in \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k). \tag{7.42}$$

Если

$$\vec{u}_k = \vec{w}_k + \nabla\Phi_k, \ \ \vec{w}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \ \ \nabla\Phi_k \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k), \ \ \gamma_{n,k}\nabla\Phi_k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial n_k} \in L_{2,\Gamma_k}, \tag{7.43}$$

то вместо (7.42) *имеем*

$$(V_k\zeta_k, \vec{u}_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)} = (\zeta_k, \gamma_{n,k}\vec{u}_k)_{L_2(\Gamma_k)}. \tag{7.44}$$

Доказательство. Утверждения леммы следуют из проведенных выше рассуждений и тождеств (3.69), (3.70), если заметить, что в этих тождествах

$$(n_k, \Phi_k)_{\breve{H}^1_{\Gamma_k}(\Omega_k)} = \int_{\Omega_k} \nabla\eta_k \cdot \overline{\nabla\Phi}_k \, d\Omega_k = (\nabla\eta_k, \nabla\Phi_k)_{\vec{L}_2(\Omega_k)}.$$

□

Следствием леммы 7.4 является такое утверждение.

Лемма 7.5. *Операторы* B_{12} *и* B_{21}, *заданные формулами* (7.30) *и* (7.33) *на областях определения*

$$\mathcal{D}(B_{12}) = (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2), \tag{7.45}$$

$$\mathcal{D}(B_{21}) = (\mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{D}(\gamma_{n,2}) \oplus \mathbb{C}^2), \tag{7.46}$$

являются кососамосопряженными:

$$(B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = -(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} \ \ \forall z_1 \in \mathcal{D}(B_{21}), \ \ \forall z_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{7.47}$$

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в лемме 3.9, однако на основе формул (7.30), (7.33) и с учетом утверждений леммы 7.4. □

Замечание 7.1. Если $\vec{u}_k \in \vec{J}^{\,1}_{0,S_k}(\Omega_k)$, то $\gamma_{n,k}\vec{u}_k \in H^{1/2}_{\Gamma_k} = \mathcal{D}(V_k)$ и потому для неположительного самосопряженного оператора $B_{12}B_{21} = -(B_{21})^* B_{21}$ имеем

$$\mathcal{D}(B^*_{12}B_{21}) = (\vec{J}^{\,1}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\vec{J}^{\,1}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^2). \tag{7.48}$$

8. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях сочлененных маятников с полостями, частично заполненными вязкой жидкостью

8.1. О разрешимости задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения. Опираясь на установленные факты, исследуем задачу Коши (7.34)-(7.35) и докажем теорему о ее разрешимости на произвольном отрезке времени $[0,T]$ сразу как для случая статической устойчивости системы по линейному приближению (определение 3.1), так и при отсутствии такой устойчивости.

Определение 8.1. Будем говорить, что задача (7.34)-(7.35) имеет *сильное решение* $z(t)$ на отрезке $[0,T]$, если выполнены следующие условия.

1°. Функция

$$\begin{gathered} z(t) \in C([0,T]); \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)) \cap C^1([0,T];\mathcal{H}), \\ \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_1) \oplus \mathcal{H}_2, \ \ \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(B_{21}) \oplus \mathcal{D}(B_{12}). \end{gathered} \tag{8.1}$$

2°. При любом $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (7.34), где все слагаемые являются элементами из $C([0,T];\mathcal{H})$.

3°. Выполнено начальное условие (7.34).

Замечание 8.1. Из этого определения следует, что необходимыми условиями сильной разрешимости задачи (7.34)-(7.35) являются условия

$$f(t) \in C([0,T];\mathcal{H}), \ \ z^0 \in \mathcal{D}(A). \tag{8.2}$$

Теорема 8.1. *Пусть в задаче* (7.34)-(7.35) *выполнены условия*

$$f(t) = (f_1(t);0)^\tau \in C^\beta([0,T];\mathcal{H}) \ \ (0 < \beta < 1), \qquad z^0 = (z^0_1; z^0_2), \ \ z^0_1 \in \mathcal{D}(A_1), \ \ z^0_2 \in \mathcal{D}(B_{12}). \tag{8.3}$$

Тогда эта задача имеет единственное сильное (*в смысле определения* 8.1) *решение на отрезке* $[0,T]$.

Доказательство. Перепишем задачу (7.34)-(7.35) снова в виде системы двух уравнений (7.27) и (7.31):

$$C_1\frac{dz_1}{dt} + A_1z_1 + gB_{12}z_2 = f_1(t), \quad z_1(0) = z^0_1, \tag{8.4}$$

$$gC_2\frac{dz_2}{dt} + gB_{21}z_1 = 0, \quad z_2(0) = z^0_2. \tag{8.5}$$

Так как выполнены условия (3.45), то согласно лемме 3.5 уравнение (8.5) равносильно соотношению

$$\frac{dz_2}{dt} = \widehat{\gamma}_n z_1 := (\gamma_{n,1}\vec{u}_1; P_2\vec{\omega}_1; \gamma_{n,2}\vec{u}_2; P_2\vec{\omega}_2)^\tau, \tag{8.6}$$

$$\mathcal{D}(\widehat{\gamma}_n) := (\mathcal{D}(\gamma_{n,1}) \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (\mathcal{D}(\gamma_{n,2}) \oplus \mathbb{C}^2) = \mathcal{D}(B_{21}). \tag{8.7}$$

Отсюда получаем, что

$$z_2(t) = z_2^0 + \int_0^t (\widehat{\gamma}_n z_1)(s)\, ds. \tag{8.8}$$

Подставляя это соотношение в (8.4), приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению Вольтерра первого порядка в пространстве $\mathcal{H}_1$:

$$C_1 \frac{dz_1}{dt} + A_1 z_1 + g \int_0^t (B_{12}\widehat{\gamma}_n) z_1(s)\, ds = f_1(t) - gB_{12}z_2^0, \quad z_1(0) = z_1^0. \tag{8.9}$$

Эта задача, в свою очередь, равносильна задаче

$$\frac{dz_1}{dt} + C_1^{-1}A_1 z_1 + gC_1^{-1} \int_0^t (B_{12}\widehat{\gamma}_n) z_1(s)\, ds = C_1^{-1}(f_1(t) - gB_{12}z_2^0), \quad z_1(0) = z_1^0, \tag{8.10}$$

поскольку C_1 — ограниченный положительно определенный оператор, действующий в $\mathcal{H}_1$ (лемма 3.1).

Введем в $\mathcal{H}_1$ новое скалярное произведение

$$[z_1, \eta_1] := (C_1 z_1, \eta_1)_{\mathcal{H}_1}, \tag{8.11}$$

порождающее эквивалентную норму, и рассмотрим задачу (8.10) в этом пространстве, которое обозначим через $\mathcal{H}_{C_1}$. Тогда $C_1^{-1}A_1$ — самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в $\mathcal{H}_{C_1}$ и заданный на области определения

$$\mathcal{D}(C_1^{-1}A_1) = \mathcal{D}(A_1). \tag{8.12}$$

Отсюда приходим к выводу, что оператор $-C_1^{-1}A_1$ является генератором аналитической сжимающей полугруппы операторов, действующей в $\mathcal{H}_{C_1}$.

Отметим теперь еще одно важное обстоятельство: в задаче (8.10) имеет место соотношение

$$\mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(B_{12}\widehat{\gamma}_n). \tag{8.13}$$

В самом деле, в силу (8.7), (7.48) и (7.41) получаем, что

$$\mathcal{D}(B_{12}\widehat{\gamma}_n) = \mathcal{D}(B_{12}B_{21}) = \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \supset \mathcal{D}(A_1). \tag{8.14}$$

Далее, если согласно условиям (8.3) $z_2^0 \in \mathcal{D}(B_{12})$, то справа в (8.10) $B_{12}z_2^0 \in \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{C_1}$, а также $f_1(t) \in C^\beta([0,T];\mathcal{H}_1)$, и тогда правая часть в (8.10) принадлежит $C^\beta([0,T];\mathcal{H}_{C_1})$. Поэтому из данного факта и (8.14) по теореме о разрешимости задачи (8.10) в пространстве $\mathcal{H}_{C_1}$ (см., например, [18, теорема 1.3.4, а также теорема 1.3.2]) получаем, что задача (8.10) имеет сильное решение $z_1(t)$ на отрезке $[0,T]$.

Для этого решения выполнено также уравнение (8.9), где все слагаемые являются непрерывными функциями $t \in [0,T]$ со значениями в $\mathcal{H}_1$. Если теперь ввести функцию $z_2(t)$ по формуле (8.8), то получаем, что выполнены соотношения (8.6), (8.7), а потому и (8.5). Значит, задача (7.34)-(7.35) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

□

8.2. О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях гидромеханической системы с вязкой жидкостью. Опираясь на теорему 8.1, докажем утверждение о корректной разрешимости исходной начально-краевой задачи (см. (2.1), (2.5), (6.1)–(6.4), (2.9), (2.11), (2.12)).

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия* 8.1, *т. е.*

$$f_1(t) := (\rho_1 P_{0,S_1}\vec{f}_1; \vec{M}_1(t); \rho_2 P_{0,S_2}\vec{f}_2; \vec{M}_2(t))^\tau \in C^\beta([0,T];\mathcal{H}_1), \quad 0 < \beta \leqslant 1, \tag{8.15}$$

$$\begin{aligned} z_1^0 = (\vec{u}_1^0; \vec{\omega}_1^0; \vec{u}_2^0; \vec{\omega}_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(A_1) = (\mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\mathcal{D}(A_{22}) \oplus \mathbb{C}^3) \subset \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = \\ = (\vec{J}_{0,S_1}^1(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}^1(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3), \end{aligned} \tag{8.16}$$

$$z_2^0 = (\zeta_1^0; P_2\vec{\delta}_1^0; \zeta_2^0; P_2\vec{\delta}_2^0)^\tau \in \mathcal{D}(B_{12}) = (H_{\Gamma_1}^{1/2} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H_{\Gamma_2}^{1/2} \oplus \mathbb{C}^2). \tag{8.17}$$

Тогда исходная начально-краевая задача (с вязкой жидкостью) имеет единственное решение на отрезке $[0,T]$, которое обладает следующими свойствами.

1°. *Функции*

$$z_1(t) = (\vec{u}_1(t,x); \vec{\omega}_1(t); \vec{u}_2(t,x); \vec{\omega}_2(t))^\tau \in$$
$$C^1([0,T]; (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3)) \cap C([0,T]; (\mathcal{D}(A_{11}) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\mathcal{D}(A_{22}) \oplus \mathbb{C}^3)), \quad (8.18)$$

$$z_2(t) = (\zeta_1(t,x); P_2\vec{\delta}_1(t); \zeta_2(t,x); P_2\vec{\delta}_2(t))^\tau \in$$
$$C^1([0,T]; (L_{2,\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (L_{2,\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2)) \cap C([0,T]; (H^{1/2}_{\Gamma_1} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus (H^{1/2}_{\Gamma_2} \oplus \mathbb{C}^2)). \quad (8.19)$$

2°. *При любом $t \in [0,T]$ выполнены уравнения* (7.26) *движения двух жидкостей в полостях, где все слагаемые являются элементами* $C([0,T]; \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$, $k = 1,2$.

3°. *При любом $t \in [0,T]$ выполнены уравнения* (2.1) *и* (2.5) *движения маятников, где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T]; \mathbb{C}^3)$.

4°. *Выполнены при любом $t \in [0,T]$ кинематические условия* (7.13)*, где слагаемые — элементы из* $C([0,T]; H^{1/2}_{\Gamma_k})$, $k = 1,2$, *а также кинематические условия* (2.9) *для угловых скоростей и угловых перемещений, где все слагаемые — элементы из* $C([0,T]; \mathbb{C}^3)$.

5°. *Выполнены начальные условия исходной задачи* (*см.* (2.12)).

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 8.1, то задача (7.34)-(7.35), согласно этой теореме, имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Это означает, что существуют единственные функции $z_1(t)$, $z_2(t)$, $t \in [0,T]$, обладающие свойствами (8.18) и (8.19), для которых выполнены уравнения (8.4) и (8.5), где все слагаемые — элементы из $C([0,T]; \mathcal{H}_k)$, $k = 1,2$. В частности, из (8.4) следует, что выполнены уравнения (7.26), где все слагаемые — элементы из $C([0,T]; \vec{J}_{0,S_k}(\Omega_k))$. Другая группа уравнений (8.4) дает соотношения (2.1) и (2.5), где все слагаемые — элементы из $C([0,T]; \mathbb{C}^3)$.

Далее, в силу условий (3.45) уравнение (8.5) равносильно соотношению (8.6), откуда следуют свойства (8.19). В частности, $d\zeta_k/dt = \gamma_{n,k}\vec{u}_k \in C([0,T]; H^{1/2}_{\Gamma_k})$, $k = 1,2$, поскольку $\vec{u}_k \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_{kk})) \subset C([0,T]; \mathcal{D}(A^{1/2}_{kk})) = C([0,T]; \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k))$. Из (8.6), (8.7) следует также, что $d(P_2\vec{\delta}_k)/dt = P_2\vec{\omega}_k \in C^1([0,T]; \mathbb{C}^2)$, а из тривиальной связи (см. (2.9)) $d\delta^3_k/dt = \omega^3_k \in C^1([0,T]; \mathbb{C})$.

Наконец, для сильного решения (7.34)-(7.35) выполнены начальные условия, если в (7.34) начальные данные принадлежат $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, т. е. справедливы соотношения (8.16), (8.17).

□

Замечание 8.2. Из доказанных свойств решений задачи следует также, что существуют поля давлений $\widetilde{p}_{k,2}$, являющиеся решениями вспомогательной задачи (7.23) и обладающие свойствами

$$\nabla\widetilde{p}_{k,2} \in C([0,T]; \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)), \quad k = 1,2, \quad (8.20)$$

поскольку функция $\psi_k \in C([0,T]; H^{1/2}_{\Gamma_k})$.

Установленные в теореме 8.2 свойства решений исходной задачи характерны для обобщенных решений задач подобного рода, рассматриваемых в областях с липшицевой границей $\partial\Omega_k$.

Замечание 8.3. Если $\partial\Omega_k$ почти гладкая (см. [2]), т. е. состоит из гладких кусков с гладкими $\partial\Gamma_k$ и ненулевыми внутренними и внешними углами между Γ_k и S_k, то решение может обладать свойствами

$$\vec{u}_k \in C([0,T]; \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \cap \vec{H}^2(\Omega_k)), \quad k = 1,2. \quad (8.21)$$

В этом случае в первой вспомогательной задаче (7.17) $\nabla\widetilde{p}_{k,1} \in \vec{G}_{h,S_k}(\Omega_k)$, так как

$$\nabla\widetilde{p}_{k,1} = 0 \ \ (\text{в } \Omega_k), \quad \frac{\partial\widetilde{p}_{k,1}}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_k), \quad \widetilde{p}_{k,1} = 2\mu_k\frac{\partial u^3_k}{\partial x^3_k} \in H^{1/2}_{\Gamma_k}. \quad (8.22)$$

При этом из (7.26) следует, что справедливы уравнения движения жидкостей в форме (7.8)–(7.10) с $\nabla\widetilde{p}_k = \nabla\widetilde{p}_{k,1} + \nabla\widetilde{p}_{k,2}$, а потому и в искомой форме (6.1), где все слагаемые — элементы из $C([0,T];\vec{L}_2(\Omega_k))$. Тогда касательные напряжения на Γ_k (см. (6.3)) являются элементами из $C([0,T];H^{1/2}(\Gamma_k))$, а нормальные напряжения — из $C([0,T];H^{1/2}_{\Gamma_k})$.

9. Проблема нормальных колебаний

9.1. Постановка задачи. Случай нулевого собственного значения. Рассмотрим решения однородной задачи (7.34)-(7.35), т. е. задачи (8.4), (8.5), зависящие от t по закону

$$z_k(t) = \exp(-\lambda t)z_k, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad k = 1,2, \tag{9.1}$$

где λ — комплексный декремент затухания, а $z_k \in \mathcal{H}_k$ — амплитудный элемент. Движения гидромеханической системы вида (9.1) называют нормальными свободными колебаниями.

Из (8.4), (8.5) для амплитудных элементов z_k приходим к спектральной проблеме

$$A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = \lambda C_1 z_1, \quad B_{21}z_1 = \lambda C_2 z_2. \tag{9.2}$$

Рассмотрим сначала вопрос о том, имеет ли задача (9.2) нулевое собственное значение. Полагая в (9.2) $\lambda = 0$, будем иметь систему уравнений

$$A_1 z_1 + gB_{12}z_2 = 0, \quad B_{21}z_1 = 0. \tag{9.3}$$

Отсюда получаем, что

$$(A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} + (B_{12}z_2, z_1)_{\mathcal{H}_1} = \|A_1^{1/2}z_1\|^2_{\mathcal{H}_1} - g(z_2, B_{21}z_1)_{\mathcal{H}_2} = \|A_1^{1/2}z_1\|^2_{\mathcal{H}_1} = 0,$$

поскольку $B_{12}^* = -B_{21}$ (см. (7.47)). Значит, $z_1 = 0$.

Далее, так как

$$\begin{aligned} &B_{12} = \operatorname{diag}(B_{12,1}; B_{12,2}), \quad C_2 = \operatorname{diag}(C_{2,1}; C_{2,2}), \\ &B_{12,k} = \widetilde{V}_k C_{2,k}, \quad \widetilde{V}_k := \operatorname{diag}(V_k; I_k), \end{aligned} \tag{9.4}$$

см. (7.30), (7.32), и операторы $C_{2,k}$ и $\widetilde{V}_k$ обратимы (см. (3.21)–(3.25)) и лемму 3.5), то оператор B_{12} обратим, и из первого условия (9.3), которое теперь имеет вид $B_{12}z_2 = 0$, следует, что $z_2 = 0$. Таким образом, при $\lambda = 0$ задача (9.2) имеет лишь тривиальное решение $z = (z_1; z_2)^\tau = 0$.

Заметим теперь, что второе соотношение (2.9) для нормальных движений системы приводит к связи

$$-\lambda\delta_k^3 = \omega_k^3, \quad k = 1,2. \tag{9.5}$$

откуда при $\lambda = 0$ следует ввиду свойства $\omega_k^3 = 0$, что $\delta_k^3 = 0$ — произвольный элемент из $\mathbb{C}$, $k = 1,2$.

Итогом проведенных рассуждений является следующее утверждение.

Лемма 9.1. *Собственному значению $\lambda = 0$ отвечает новое состояние покоя гидромеханической системы, которое получается из исходного состояния покоя поворотом маятников на произвольные углы $\delta_1^3\vec{e}_1^{\,3}$ и $\delta_2^3\vec{e}_2^{\,3}$ соответственно.*

9.2. Нормальные движения, отличные от состояния покоя. Переход к операторному пучку С. Г. Крейна. Рассмотрим теперь в задаче (9.2) вариант, когда $\lambda \neq 0$. Так как оператор C_2 обратим, то из второго уравнения (9.2) получаем, что $z_2 = \lambda^{-1}C_2^{-1}B_{21}z_1$. Подставляя z_2 в первое уравнение (9.2), имеем спектральную задачу

$$A_1 z_1 = \lambda C_1 z_1 + g\lambda^{-1}B_{21}^* C_2^{-1}B_{21}z_1, \tag{9.6}$$

где уже учтено, что $B_{12} = -B_{21}^*$.

Осуществляя еще в (9.6) замену

$$A_1^{1/2}z_1 = \varphi_1 \tag{9.7}$$

и действуя слева оператором $A_1^{-1/2}$, получаем спектральную задачу

$$L_1(\lambda)\varphi_1 = (I_1 - \lambda A_1^{-1/2}C_1A_1^{-1/2} - g\lambda^{-1}A_1^{-1/2}B_{21}^*C_2^{-1}B_{21}A_1^{-1/2})\varphi_1 = 0, \tag{9.8}$$

где спектральный параметр λ входит в первой и минус первой степенях.

Лемма 9.2. *В задаче* (9.8) *операторы*

$$\widetilde{A}_1 := A_1^{-1/2} C_1 A_1^{-1/2}, \;\; \widetilde{B}_1 := A_1^{-1/2} B_{21}^* C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2} \tag{9.9}$$

обладают следующими свойствами.

1°. *Оператор $\widetilde{A}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ является компактным положительным оператором.*

2°. *Если $C_2 \gg 0$ (система статически устойчива по линейному приближению), то оператор $\widetilde{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ является компактным неотрицательным оператором.*

Доказательство. 1°. Свойство неотрицательности $\widetilde{A}_1$ проверяется непосредственно. Так как C_1 ограничен и положительно определен (лемма 3.1), то $\widetilde{A}_1$ — положительный оператор, а так как $A_1^{-1/2} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ компактен, то $\widetilde{A}_1$ — компактный оператор. 2°. Учитывая, что

$$B_{21} = -C_2 \widehat{\gamma}_n \tag{9.10}$$

(см. (7.32), (7.33), (8.6), (9.10)), перепишем $\widetilde{B}_1$ в виде

$$\widetilde{B}_1 := -A_1^{-1/2} B_{12} C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2} = A_1^{-1/2} (B_{12} \widehat{\gamma}_n) A_1^{-1/2} \tag{9.11}$$

и заметим, что $(B_{12}\widehat{\gamma}_n) A_1^{-1/2} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — ограниченный оператор (см. (8.14)), а $A_1^{-1/2} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — компактен. Отсюда следует, что $\widetilde{B}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_1$ — компактный оператор. Его свойство неотрицательности проверяются непосредственно:

$$(\widetilde{B}_1 \varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} = (C_2^{-1} B_{21} A_1^{-1/2} \varphi_1, B_{21} A_1^{-1/2} \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0, \tag{9.12}$$

так как $C_2^{-1} \gg 0$.

□

Замечание 9.1. Если выполнено условие 2° леммы 9.2, то операторный пучок $L_1(\lambda)$ из (9.8) есть вариант хорошо изученного пучка С. Г. Крейна (см., например, [16, гл. 7, п. 1–3]).

9.3. Дальнейшие свойства операторных коэффициентов пучка С. Г. Крейна. Основываясь на формуле Метивье асимптотического поведения

$$\lambda_j(A_{kk}) = \rho_k \mu_k^{-1} \Big(\frac{|\Omega_k|}{3\pi^2} \Big)^{-2/3} j^{2/3} [1 + o(1)], \;\; j \to \infty, \;\; k = 1, 2, \tag{9.13}$$

собственных значений операторов A_{kk}, отвечающих вариационному отношению

$$\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) / (\rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k), \;\; \vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \tag{9.14}$$

(см. [32], а также [16, с. 279]), получим асимптотическую формулу для собственных значений оператора $\widetilde{A}_1$ из (9.9).

Лемма 9.3. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_j(\widetilde{A}_1) = \Big(\frac{1}{3\pi^2} \sum_{k=1}^{2} (\rho_k/\mu_k)^{3/2} |\Omega_k| \Big)^{2/3} j^{-2/3} [1 + o(1)], \;\; j \to \infty. \tag{9.15}$$

Доказательство. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $\widetilde{A}_1$:

$$\widetilde{A}_1 \varphi_1 := \widetilde{A}_1^{-1/2} C_1 \widetilde{A}_1^{-1/2} \varphi_1 = \lambda \varphi_1, \;\; \varphi_1 \in \mathcal{H}_1. \tag{9.16}$$

Эта задача равносильна задаче

$$C_1 z_1 = \lambda A_1 z_1, \;\; z_1 \in \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{H}_1. \tag{9.17}$$

Отсюда и из свойств операторов $\widetilde{A}_1$ и C_1 получаем, что собственные значения λ_j этих задач суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$(C_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1} / (A_1 z_1, z_1)_{\mathcal{H}_1},$$

которое с учетом определений этих операторов (см. (7.28), (7.29)) принимает вид

$$\Big\{\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1|^2d\Omega_{01}+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2|^2d\Omega_{02}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2d\Omega_1+$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2d\Omega_{02}\Big\}\Big/\Big\{\sum_{k=1}^{2}\mu_kE_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k)+\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2\Big\}. \quad (9.18)$$

Здесь, как и при доказательстве теоремы 5.1, убеждаемся, что в силу конечномерности подпространств $\mathbb{C}^3$, входящих в $\mathcal{H}_1$, и опираясь снова на работу [9], что асимптотическое поведение собственных значений λ_j для вариационного отношения (9.18) такое же, как и для вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2d\Omega_k\Big/\sum_{k=1}^{2}\mu_kE_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k). \quad (9.19)$$

Этому отношению, в свою очередь, отвечают две независимые спектральные задачи

$$\lambda\mu_kA_{kk}\vec{u}_k=\rho_k\vec{u}_k,\ \ k=1,2, \quad (9.20)$$

соответствующие колебаниям вязкой жидкости в неподвижных сосудах Ω_k. Поэтому для совокупности этих задач, опираясь на (9.13), приходим к выводу, что имеет место формула (9.15) (соответствующие выкладки см., например, в [17, с. 104-105]).

□

Рассмотрим теперь более подробно спектральные свойства оператора $\widetilde{B}_1$ из (9.9).

Лемма 9.4. *Пусть исследуемая гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению* (*выполнены лишь условия* (3.45)) *и квадратичная форма оператора потенциальной энергии C_2 индефинитна и имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов,* $1\leqslant\varkappa\leqslant4$ (*см. леммы* 3.5, 3.6). *Тогда оператор $\widetilde{B}_1$ имеет бесконечномерное ядро элементов вида*

$$\ker\,\widetilde{B}_1=\{\varphi_1=A_1^{1/2}z_1:\ z_1\in\mathcal{D}(A_1^{1/2})\subset\mathcal{H}_1,\ \ \widehat{\gamma}_nz_1=0\}, \quad (9.21)$$

а квадратичная форма оператора $\widetilde{B}_1$ также индефинитна и имеет ровно $\varkappa$ отрицательных квадратов, т. е. $\widetilde{B}_1$ имеет $\varkappa$ (*с учетом кратностей*) *отрицательных собственных значений, бесконечномерное нулевое собственное значение и счетное множество положительных собственных значений с предельной точкой $\lambda=0$.*

Доказательство. Заметим сначала, что при условиях данной леммы оператор $\widetilde{B}_1$ является компактным самосопряженным оператором, действующим в $\mathcal{H}_1$. Этот факт доказывается точно также, как свойство 2° в лемме 9.2.

Отсюда следует, что его положительные собственные значения находятся как последовательные максимумы вариационного отношения

$$(\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}/(\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1}, \quad (9.22)$$

а отрицательные — как последовательные минимумы этого отношения. Учитывая связь (9.10) и представление (9.9), получим из (9.22) вариационное отношение

$$\frac{(C_2\widehat{\gamma}_nz_1,\widehat{\gamma}_nz_1)_{\mathcal{H}_2}}{\|A_1^{1/2}z_1\|^2_{\mathcal{H}_1}},\ \ z_1=A_1^{-1/2}\varphi_1\in\mathcal{D}(A_1^{1/2})\subset\mathcal{H}_1. \quad (9.23)$$

Оно, очевидно, обращается в нуль на тех элементах из $\mathcal{D}(A_1^{1/2})$, для которых $\widehat{\gamma}_nz_1=0$. Совокупность таких элементов образует ядро оператора $\widetilde{B}_1$. Действительно, если $\widetilde{B}_1\varphi_1=0$, то $B_{12}\widehat{\gamma}_nz_1=0$, $z_1=A_1^{-1/2}\varphi_1$, и так как оператор B_{12} обратим (см. (9.4)), то $\widehat{\gamma}_nz_1=0$, и потому имеет место (9.21).

Далее, на элементах, для которых $\widehat{\gamma}_nz_1\neq0$, квадратичная форма в числителе (9.23) принимает отрицательные значения на подпространстве размерности $\varkappa$ и потому, на основе вариационного принципа для отрицательных собственных значений оператора $\widetilde{B}_1$, получаем, что этот оператор имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей).

Остальные собственные значения, кроме нулевого, положительны, и так как $\widetilde{B}_1$ компактен, то они образуют счетное множество конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = 0$.

$\square$

Замечание 9.2. Из определения (8.6), (8.7) оператора $\widehat{\gamma}_n$ следует, что

$$\ker \widehat{\gamma}_n = \{z_1 \in \mathcal{D}(\widehat{\gamma}_n) : \ \gamma_{n,k}\vec{u}_k = 0, \ \ P_2\vec{\omega}_k = \vec{0}, \ \ k = 1, 2\}, \tag{9.24}$$

причем здесь считаем, что

$$\mathcal{D}(\widehat{\gamma}_n) = \mathcal{D}(A_1^{1/2}) \subset \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{D}(A_1^{1/2}) = (\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1) \oplus \mathbb{C}^3) \oplus (\vec{J}_{0,S_2}(\Omega_2) \oplus \mathbb{C}^3). \tag{9.25}$$

Лемма 9.5. *Для ненулевых собственных значений оператора $\widetilde{B}_1$ имеет место асимптотическая формула*

$$\lambda_j(\widetilde{B}_1) = \Big(\frac{1}{16\pi}\sum_{k=1}^{2}\Big(\frac{\rho_k}{\mu_k}\Big)^2|\Gamma_k|\Big)^{1/2} j^{-1/2}[1 + o(1)] \ \ (j \to \infty). \tag{9.26}$$

Доказательство. Вариационное отношение (9.23) в силу определений (7.32) и (7.29) операторов C_2 и A_1 имеет вид

$$\Big\{\sum_{k=1}^{2}\rho_k\Big[\int\limits_{\Gamma_k}|\gamma_{n,k}\vec{u}_k + \theta_k((P_2\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2 d\Gamma_k - \int\limits_{\Gamma_k}|\theta_k((P_2\vec{\omega}_k \times \vec{r}_k)\cdot\vec{e}_k^{\,3})|^2 d\Gamma_k\Big] + \\ + (m_1l_1 + m_2h_1)|P_2\vec{\omega}_1|^2 + m_2l_2|P_2\vec{\omega}_2|^2\Big\}\Big/\Big\{\sum_{k=1}^{2}\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k) + \alpha_1|\vec{\omega}_1|^2 + \alpha_2|\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1|^2\Big\}, \tag{9.27}$$

и оно лишь конечномерными слагаемыми отличается от вариационного отношения

$$\sum_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}|\gamma_{n,k}\vec{u}_k|^2 d\Gamma_k\Big/\sum_{k=1}^{2}\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k). \tag{9.28}$$

Это отношение, в свою очередь, отвечает двум независимым спектральным задачам

$$\begin{aligned} & -P_{0,S_k}\Delta\vec{u}_k + \nabla\widetilde{p}_k = \vec{0}, \ \ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ \ (\text{в} \ \ \Omega_k), \ \ \vec{u}_k = \vec{0} \ \ (\text{на} \ \ S_k), \\ & \tau_{j3}(\vec{u}_k) := \mu_k\Big(\frac{\partial u_k^j}{\partial x_k^3} + \frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^j}\Big) = 0, \ \ j = 1, 2, \ \ k = 1, 2, \\ & \lambda\Big(-\widetilde{p}_k + 2\mu_k\frac{\partial u_k^3}{\partial x_k^3}\Big) = \rho_k\gamma_{n,k}\vec{u}_k, \ \ k = 1, 2, \end{aligned} \tag{9.29}$$

соответствующим вариационным отношениям

$$\rho_k\int\limits_{\Gamma_k}|\gamma_{n,k}\vec{u}_k|^2 d\Gamma_k\Big/\Big(\mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{u}_k)\Big), \ \ k = 1, 2. \tag{9.30}$$

Отношения (9.30) порождают положительный дискретный спектр $\{\lambda_{j,k}\}_{j=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = 0$ и асимптотическим поведением

$$\lambda_{j,k} = \frac{\rho_k}{\mu_k}\Big(\frac{|\Gamma_k|}{16\pi}\Big)^{1/2} j^{-1/2}[1 + o(1)] \ \ (j \to \infty), \ \ k = 1, 2, \tag{9.31}$$

см. [14], а также [27–29].

Отсюда и из предыдущих рассуждений следует утверждение леммы.

$\square$

Замечание 9.3. Как показано в [16, с. 118], имеет место ортогональное разложение

$$\vec{J}_{0,S_k}^{1}(\Omega_k) = \vec{N}_1(\Omega_k) \oplus \vec{M}_1(\Omega_k), \tag{9.32}$$

где $\vec{N}_1(\Omega_k)$ — ядро оператора $\gamma_{n,k}$ в пространстве $\vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k)$:

$$\vec{N}_1(\Omega_k) = \{\vec{u}_k \in \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) : \ \gamma_{n,k}\vec{u}_k = 0\}, \tag{9.33}$$

$\gamma_{n,k} : \vec{J}^1_{0,S_k}(\Omega_k) \to \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_k}$. Ортогональным дополнением к нему является подпространство $\vec{M}_1(\Omega_k)$, состоящее из обобщенных решений задачи

$$\begin{gathered} -\mu_k P_{0,S_k}\Delta\vec{u}_k + \nabla p_k = \vec{0}, \ \operatorname{div}\vec{u}_k = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \vec{u}_k = \vec{0} \ (\text{на } S_k), \\ \tau_{j3}(\vec{u}_k) = 0, \ j = 1,2, \ \gamma_{n,k}\vec{u}_k = \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}_{\Gamma_k}, \ k = 1,2. \end{gathered} \tag{9.34}$$

9.4. Нормальные колебания в случае статической устойчивости. Как уже отмечалось, спектральная задача для пучка С. Г. Крейна вида (9.8) достаточно хорошо изучена (см. [16, гл. 7, п. 2, 3]). Поэтому далее приведем без доказательств свойства решений этой задачи, основанные на общих построениях из [16] и установленных выше свойствах операторов $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{B}_1$.

Сначала будем считать, что оператор $\widetilde{B}_1$ неотрицателен (выполнено свойство статической устойчивости системы).

1°. Спектр задачи (9.8) состоит из не более чем счетного множества собственных значений конечной алгебраической кратности, расположенных в правой конечной полуплоскости. Точками сгущения спектра являются точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Невещественные собственные значения расположены симметрично относительно вещественной оси.

Невещественные собственные значения, а также те вещественные собственные значения, которым отвечают не только собственные, но и присоединенные элементы, расположены в сегменте

$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant (2\|\widetilde{A}_1\|)^{-1}, \ \ |\lambda| \leqslant 2\|\widetilde{B}_1\|, \tag{9.35}$$

причем их конечное число.

Если выполнено грубое условие сильной демпфированности системы, т. е. условие

$$4g\|\widetilde{A}_1\| \cdot \|\widetilde{B}_1\| < 1, \tag{9.36}$$

то все собственные значения вещественные (и положительные), и присоединенных элементов задача (9.8) не имеет.

2°. Если выполнено условие (9.36), то оператор-функция

$$M(\lambda) := \lambda L_1(\lambda) = \lambda I_1 - g\widetilde{B}_1 - \lambda^2\widetilde{A}_1 \tag{9.37}$$

(см. (9.8)) допускает спектральную факторизацию

$$M(\lambda) = M_+(\lambda)(\lambda I_1 - Z), \ \ \sigma(Z) \subset [-r, r], \ \ Z = Y\widetilde{B}_1, \ \ Y, Y^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1), \tag{9.38}$$

$$r \in (r_-, r_+), \ \ r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4g\|\widetilde{A}_1\| \cdot \|\widetilde{B}_1\|}/(2\|\widetilde{A}_1\|), \tag{9.39}$$

а $M_+(\lambda)$ — голоморфная и голоморфно обратимая оператор-функция в окрестности отрезка $[-r, r]$ (и даже в круге любого радиуса $r \in (r_-, r_+)$).

Далее, для оператора Z существует ограниченный положительно определенный правый симметризатор F, поэтому Z подобен самосопряженному оператору. При этом

$$\ker Z = \ker \widetilde{B}_1 \neq \{0\}. \tag{9.40}$$

Пусть $P_0 : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{10} := \ker Z$ — ортопроектор, а $P_1 := I_1 - P_0$ — дополнительный ортопроектор. Тогда спектральная задача (см. (9.38))

$$Z\varphi_1 = \lambda\varphi_1, \ \ \lambda \in (0, r), \ \ r \in (r_-, r_+), \tag{9.41}$$

после применения ортопроекторов P_0 и P_1, переходит в задачу

$$P_1ZP_1\varphi_{11} = \lambda\varphi_{11}, \ \ \varphi_{10} = \lambda P_0ZP_1\varphi_{11}, \ \ \varphi_{10} = P_0\varphi_1, \ \ \varphi_{11} = P_1\varphi_1. \tag{9.42}$$

Далее, из условия $ZF = (ZF)^*$ следует, что

$$P_1ZP_1 = K_1F_1^{-1}, \ \ F_1 := P_1FP_1 \gg 0, \ \ K_1 = K_1^*, \tag{9.43}$$

и первое уравнение (9.42) преобразуется к виду

$$K_1F_1^{-1}\varphi_{11} = \lambda\varphi_{11}, \ \ \varphi_{11} \in \mathcal{H}_{11}. \tag{9.44}$$

После замены

$$F_1^{-1/2}\varphi_{11} =: \psi_{11} \in \mathcal{H}_{11} \tag{9.45}$$

из (9.44) приходим к спектральной задаче для компактного положительного оператора:

$$F_1^{-1/2}K_1F_1^{-1/2}\psi_{11} = \lambda\psi_{11}. \tag{9.46}$$

Используя теорему Гильберта—Шмидта, из (9.46) приходим к выводу, что эта задача имеет дискретный положительный спектр с предельной точкой $\lambda = 0$, а система собственных элементов задачи (9.46) образует ортонормированный базис в $\mathcal{H}_{11}$.

Итогом проведенных кратких пояснений является следующее утверждение. Если выполнено условие (9.36), то задача (9.8) имеет на промежутке $(0, r)$, $r \in (r_-, r_+)$, счетное множество конечнократных собственных значений $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = 0$. Этим собственным значениям отвечает система собственных элементов $\{\varphi_{1j}^-\}_{j=1}^\infty$ задачи (9.8), которая после проектирования на $\mathcal{H}_{11} = \mathcal{H}_1 \ominus \ker \widetilde{B}_1$ образует базис Рисса в $\mathcal{H}_{11}$.

3°. Осуществляя в (9.8) замену λ на λ^{-1} и пользуясь тем, что $\ker \widetilde{A}_1 = \{0\}$, получаем аналогично рассуждениям из 2° такой вывод. Если выполнено условие (9.36), то задача (9.8) имеет на промежутке $[r_+, +\infty)$ счетное множество конечнократных собственных значений $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Этим собственным значениям отвечают собственные элементы $\{\varphi_{1j}^+\}_{j=1}^\infty$, образующие базис Рисса в $\mathcal{H}_1$.

4°. Для собственных значений λ_j^- имеют место вариационные принципы

$$\begin{aligned} \lambda_j^- &= \min_{\dim N^\perp = j-1} \max_{0\neq\varphi_1\in N} p_-(\varphi_1), \\ \lambda_j^- &= \max_{\dim M = j} \min_{0\neq\varphi_1\in M} p_-(\varphi_1), \end{aligned} \tag{9.47}$$

где M — произвольное j-мерное подпространство из $\mathcal{H}_1$, N — произвольное подпространство из $\mathcal{H}_1$ коразмерности $j-1$, а

$$p_\pm(\varphi_1) := \frac{(\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} \pm \sqrt{(\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1}^2 - 4g(\widetilde{A}_1\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} \cdot (\widetilde{B}_1\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1}}}{2(\widetilde{A}_1\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1}}. \tag{9.48}$$

Для собственных значений λ_j^+ аналогичные утверждения (вариационные принципы) также имеют место; они получаются из (9.47) формальной заменой λ_j^- на $1/\lambda_j^+$, $\widetilde{A}_1$ на $g\widetilde{B}_1$, $g\widetilde{B}_1$ на $\widetilde{A}_1$.

Из приведенных вариационных принципов получаем следующие двусторонние оценки:

$$\begin{aligned} &g\lambda_j(\widetilde{B}_1) \leqslant \lambda_j^- \leqslant g\lambda_j(\widetilde{B}_1)/(1 - 2\lambda_j(\widetilde{B}_1)\|\widetilde{A}_1)\|), \quad j = 1, 2, \ldots, \\ &1/\lambda_j(\widetilde{A}_1) - 2g\|\widetilde{B}_1)\| \leqslant \lambda_j^+ \leqslant 1/\lambda_j(\widetilde{A}_1), \quad j = 1, 2, \ldots. \end{aligned} \tag{9.49}$$

Из них, в свою очередь, имеем асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \lambda_j^- &= g\lambda_j(\widetilde{B}_1)[1 + o(1)], \quad j \to \infty, \\ \lambda_j^+ &= (\lambda_j(\widetilde{A}_1))^{-1}[1 + o(1)], \quad j \to \infty. \end{aligned} \tag{9.50}$$

5°. Сначала напомним известные определения (см. [23], [17, с. 76]).

Определение 9.1. Будем говорить, что оператор $A \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$ имеет *конечный порядок*, если A принадлежит классу $\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ $(0 < p < \infty)$, т. е. его s-числа (собственные значения оператора $(A^*A)^{1/2}$) суммируемы со степенью p:

$$\sum_{j=1}^\infty (s_j(A))^p < \infty. \tag{9.51}$$

Нижнюю грань значений p для оператора A называют *порядком оператора* A и обозначают $p(A)$.

Определение 9.2. Базис Рисса $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$, получаемый из ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ по закону

$$\psi_j = (I+T)\varphi_j, \ \ T \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}), \ \ \exists\, (I+T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{9.52}$$

называют *p-базисом* (см. [26]). При $p=2$ говорят о *базисе Бари*.

Для задачи (9.8) в приведенных терминах имеем следующее утверждение. Система собственных элементов, отвечающее собственным значениям λ_j^- операторного пучка (9.8), расположенным на отрезке $[-r,r]$, $r \in (r_-,r_+)$, после проектирования на подпространство $\mathcal{H}_{11} = P_1\mathcal{H}_1$, образует p-базис в $\mathcal{H}_{11}$ при

$$p \geqslant p_0, \ \ p_0^{-1} = (p_{\widetilde{A}_1})^{-1} + (p_{\widetilde{B}_1})^{-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}, \ \ p_0 = \frac{6}{7}. \tag{9.53}$$

Соответственно, система собственных элементов, отвечающая собственным элементам λ_j^+ из промежутка $[r_+,+\infty)$, образует p-базис во всем пространстве $\mathcal{H}_1$ при тех же p.

Доказательство сформулированных фактов можно найти в [17], если заметить, что в силу асимптотических формул (9.15), (9.26)

$$\widetilde{A}_1 \in \mathfrak{S}_{3/2}(\mathcal{H}_1), \ \ \widetilde{B}_1 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}_1), \tag{9.54}$$

и воспользоваться теоремой 3.2.1 из [17, с. 89].

6°. Если условие (9.36) сильной демпфированности не выполнено, то задача (9.8) по-прежнему имеет дискретный спектр с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$. При этом ветвь собственных значений λ_j^- с предельной точкой $\lambda = 0$ расположена на положительной полуоси и по-прежнему имеет асимптотическое поведение (9.50), а проекции собственных элементов образуют в $\mathcal{H}_{11}$ базис Рисса с точностью конечного дефекта. Соответственно ветвь собственных значений λ_j^+ с предельной точкой $\lambda = +\infty$ также расположена на положительной полуоси и по-прежнему имеет асимптотическое поведение (9.50) (вторая формула), а собственные элементы, отвечающие этой ветви, образуют базис Рисса в $\mathcal{H}_1$ с точностью конечного дефекта. Кроме того, как уже упоминалось, в секторе (9.35) может быть не более конечного числа невещественных собственных значений, а также тех вещественных, у которых имеются не только собственные, но и присоединенные элементы.

9.5. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости. Будем теперь считать, что квадратичная форма оператора $\widetilde{B}_1$ в задаче (9.8) индефинитна и имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов, $1 \leqslant \varkappa \leqslant 4$ (лемма 3.6), т. е. гидромеханическая система не является статически устойчивой по линейному приближению. Покажем, что в этом случае система и динамически неустойчива.

Теорема 9.1. *Пусть выполнено условие* (9.36)*, а также условия общего положения* (3.45)*, причем квадратичная форма оператора потенциальной энергии C_2 имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов. Тогда задача* (9.8) *имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений, расположенных на промежутке* $[-r_-,0)$.

Доказательство. Введем, как и выше, функцию

$$f(\lambda) := (\lambda L_1(\lambda)\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} = \lambda(\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} - (\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} - \lambda^2(\widetilde{A}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} \tag{9.55}$$

и корни квадратного трехчлена $f(\lambda)$, т. е. функционалы $p_\pm(\varphi_1)$ из (9.48). Так как $\widetilde{A}_1 > 0$, а квадратичная форма оператора $\widetilde{B}_1$ имеет $\varkappa$ отрицательных квадратов (лемма 9.4), то собственные значения λ в левой полуплоскости могут существовать лишь для функционала $p_-(\varphi_1)$ и при условии $(\widetilde{B}_1\varphi_1,\varphi_1)_{\mathcal{H}_1} < 0$, т. е. на подпространстве размерности $\varkappa$. При условии факторизации (9.36) эти собственные значения могут располагаться на промежутке $[-r_-,0)$.

Здесь снова возникает спектральная задача (9.41), однако теперь на промежутке $(-r,r)$, $r \in (r_-,r_+)$. Она затем переходит в задачу (9.42), а после в (9.46), где теперь оператор K_1 имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений. Отсюда получаем, что и исходная задача (9.8) имеет на промежутке $[-r_-,0)$ ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей).

Для обоснования сформулированных выводов заметим, что для задачи (9.8) на промежутке $(-r,r)$, $r \in (r_-,r_+)$, выполнены следующие свойства.

1°. Для любого $\varphi_1 \in \mathcal{H}_1$ функция $f(\lambda)$ имеет на этом промежутке ровно один корень $p_-(\varphi_1)$.

2°. Функция $f(\lambda)$ возрастает в точке $p_-(\varphi_1)$:

$$f'(\lambda)\Big|_{\lambda=p_-(\varphi_1)} = \sqrt{(\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1} - 4g(\widetilde{A}_1\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1}(\widetilde{B}_1\varphi_1, \varphi_1)_{\mathcal{H}_1}} > 0, \quad \varphi_1 \neq 0.$$

3°. Функционал $p_-(\varphi_1)$ при $\varphi_1 \neq 0$ непрерывен.

4°. Имеют место неравенства

$$\sup p_-(\varphi_1) \leqslant r_- < r, \ \ r \in (r_-, r_+), \qquad \inf p_-(\varphi_1) \geqslant -r_- > -r.$$

5°. Операторный пучок $M(\lambda) = \lambda L_1(\lambda)$ имеет на промежутке $(-r, r)$ последовательность конечнократных собственных значений с предельной точкой $\lambda = 0$. Этот факт доказывается так же, как соответствующие преобразования из (9.37)–(9.46) с учетом того, что Z_1 подобен самосопряженному оператору.

6°. Система собственных элементов задачи (9.41), отвечающая собственным значениям из $(-r, r)$, полна в $\mathcal{H}_1$ с учетом того, что бесконечнократному собственному значению $\lambda = 0$ отвечает ортонормированный базис из подпространства $\mathcal{H}_{10} = \ker Z = \ker \widetilde{B}_1$.

При выполнении свойств 1°–6° для отрицательных собственных значений $\lambda_j^{-,-}$ задачи (9.8) справедлив следующий вариационный принцип Пуанкаре—Ритца (см. [1]):

$$\lambda_j^{-,-} = \min_{\dim M = j} \max_{0 \neq \varphi_1 \in M} p_-(\varphi_1),$$

где M — произвольное j-мерное подпространство в $\mathcal{H}_1$. Так как $p_-(\varphi_1)$ принимает отрицательные значения на подпространстве максимальной размерности $\varkappa$, то задача (9.8) имеет ровно $\varkappa$ отрицательных собственных значений.

□

В качестве следствия из теоремы 9.1 получаем такое утверждение.

Теорема 9.2 (обращение теоремы Лагранжа об устойчивости)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1*, т. е. исследуемая система является статически неустойчивой и индекс неустойчивости* (*количество отрицательных квадратов квадратичной формы оператора потенциальной энергии* C_2) — *число* $\varkappa \geqslant 1$*. Тогда данная гидромеханическая система является и динамически неустойчивой, причем неустойчивость системы теряется на экспоненциально возрастающих по времени нормальных движениях* (*см.* (9.1) *при* $\lambda < 0$)*, т. е. неколебательным образом* ($\operatorname{Im} \lambda = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. — Л.: ЛГУ, 1983.
2. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
3. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими вязкую несжимаемую жидкость// Динам. сист. — 2001. — *17*. — С. 120–125.
5. *Батыр Э. И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2002. — *15* (*54*), № 2. — С. 5–10.
6. *Батыр Э. И.* Малые движения и нормальные колебания системы трех сочлененных тел с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. — 2010. — *23* (*62*), № 2. — С. 19–38.
7. *Батыр Э. И., Дудик О. А., Копачевский Н. Д.* Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью// Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. — 2009. — *49*. — С. 15–29.
8. *Батыр Э. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения и нормальные колебания системы сочлененных гиростатов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 5–88.
9. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–52.

10. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.* Малые движения системы двух сочлененных тел с полостями, частично заполненными тяжелой вязкой жидкостью// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — № 2 (35) (в печати).
11. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающейся задачи Стеклова// Вестн. ЛГУ. — 1973. — *19*. — С. 148–150.
12. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1362–1392.
13. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью// В сб. «Избранные сочинения. Т. 1». — М., Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31–52.
14. *Каразеева Н. А., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра задач типа Стеклова в составных областях// Пробл. мат. анализа. — 1981. — *8*. — С. 36–48.
15. *Копачевский Н. Д.* О колебаниях тела с полостью, частично заполненной тяжелой идеальной жидкостью: теоремы существования, единственности и устойчивости сильных решений// Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. Зб. праць Інституту математики НАН України. — 2005. — *1*, № 1. — С. 158–194.
16. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
17. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков: специальный курс лекций. — Симферополь: Форма, 2009.
18. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП Бондаренко О. А., 2012.
19. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–105.
20. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: Форма, 2016.
21. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
22. *Крейн С. Г., Моисеев Н. Н.* О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной границей// Прикл. мат. мех. — 1957. — *21*, № 2. — С. 169–174.
23. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
24. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
25. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
26. *Пригорский В. А.* О некоторых классах базисов гильбертова пространства// Усп. мат. наук. — 1965. — *20*, Вып. 125, № 5. — С. 231–236.
27. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях однородного эллиптического уравнения при наличии связей на части границы// Пробл. мат. анализа. — 1984. — *9*. — С. 84–97.
28. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно-гладкой границей// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1985. — *147*. — С. 179-183.
29. *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра некоторых задач, связанных с колебаниями жидкостей. — Л.: Ленинградский электротехн. институт связи, 1985. — Деп. в ВИНИТИ 21.11.85, № 8058-В.
30. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2001.
31. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2003.
32. *Metivier G.* Valeurs propres d'operation definis par restriction de systemes variationelles a des sous-espaces// J. Math. Pures Appl. — 1978. — Ser. IX, *57*, № 2. — С. 133–156.

Н. Д. Копачевский
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа,
295007, г. Симферополь, пр-т Академика Вернадского, д. 4
E-mail: `kopachevsky@crimea.edu`

В. И. Войтицкий
Таврическая академия Крымского федерального университета им. В. И. Вернадского,
факультет математики и информатики, кафедра математического анализа,

295007, г. Симферополь, пр-т Академика Вернадского, д. 4
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

З. З. Ситшаева
Крымский инженерно-педагогический университет, кафедра математики,
295015, г. Симферополь, пер. Учебный, д. 8
E-mail: szz2008@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-627-677 UDC 517.98, 517.955, 532.5

On Oscillations of Two Connected Pendulums Containing Cavities Partially Filled with Incompressible Fluid

© 2017 **N. D. Kopachevsky, V. I. Voytitsky, Z. Z. Sitshaeva**

Abstract. We consider the linearized problem on small oscillations of two pendulums connected to each other with a spherical hinge. Each pendulum has a cavity partially filled with incompressible fluid. We study the initial-boundary value problem as well as the corresponding spectral problem on normal motions of the hydromechanic system. We prove theorems on correct solvability of the problem on an arbitrary interval of time both in the case of ideal and viscous fluids in the cavities, and we study the corresponding spectral problems as well.

REFERENCES

1. Yu. Sh. Abramov, *Variatsionnye metody v teorii operatornykh puchkov. Spektral'naya optimizatsiya* [Variational Methods in the Theory of Operator Pencils. Spectral Optimization], LGU, Leningrad, 1983 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for second-order strongly elliptic systems in domains with smooth and nonsmooth boundary], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Basics of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. E. I. Batyr, "Malye dvizheniya sistemy posledovatel'no sochlenennykh tel s polostyami, soderzhashchimi vyazkuyu neszhimaemuyu zhidkost'" [Small motions of system of serially connected bodies with cavities containing viscous incompressible fluid], *Dinam. sist.* [Dynam. Syst.], 2001, **17**, 120–125 (in Russian).
5. E. I. Batyr, "Malye dvizheniya sistemy posledovatel'no sochlenennykh tel s polostyami, soderzhashchimi ideal'nuyu neszhimaemuyu zhidkost'" [Small motions of system of serially connected bodies with cavities containing ideal incompressible fluid], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2002, **15** (**54**), No. 2, 5–10 (in Russian).
6. E. I. Batyr, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy trekh sochlenennykh tel s polostyami, zapolnennymi ideal'noy neszhimaemoy zhidkost'yu" [Small motions and normal oscillations of a system of three connected bodies with cavities filled with ideal incompressible fluid], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ.], 2010, **23** (**62**), No. 2, 19–38 (in Russian).
7. E. I. Batyr, O. A. Dudik, and N. D. Kopachevsky, "Malye kolebaniya tel s polostyami, zapolnennymi neszhimaemoy vyazkoy zhidkost'yu" [Small motions of bodies with cavities filled with incompressible viscous fluid], *Izv. vuzov. Sev.-Kavkaz. region. Estestv. nauki* [Bull. Higher Edu. North Caucas. Reg. Nat. Sci.], 2009, **49**, 15–29 (in Russian).
8. E. I. Batyr and N. D. Kopachevsky, "Malye dvizheniya i normal'nye kolebaniya sistemy sochlenennykh girostatov" [Small motions and normal oscillations in systems of connected gyrostats], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 5–88 (in Russian).

9. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Math. Anal.], 1977, **14**, 5–52 (in Russian).
10. V. I. Voytitskiy and N. D. Kopachevsky, "Malye dvizheniya sistemy dvukh sochlenennykh tel s polostyami, chastichno zapolnennymi tyazheloy vyazkoy zhidkost'yu" [Small motions of a system of two connected bodies with cavities partially filled with heavy viscous fluid], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, No. 2 (35), to be published (in Russian).
11. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushcheysya zadachi Steklova" [Spectral asymptotics of the degenerating Steklov problem], *Vestn. LGU* [Bull. Leningrad State Univ.], 1973, **19**, 148–150 (in Russian).
12. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh operatorov vtorogo poryadka" [Spectral asymptotics of second-order degenerating elliptic operators], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1362–1392 (in Russian).
13. N. E. Zhukovskiy, "O dvizhenii tverdogo tela, imeyushchego polosti, napolnennye odnorodnoy kapel'noy zhidkost'yu" [On motion of a solid body with cavities filled with homogeneous dropping fluid], In: *Izbrannye sochineniya. T. 1* [Selected Works. Vol. 1], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948, 31–52 (in Russian).
14. N. A. Karazeeva and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra zadach tipa Steklova v sostavnykh oblastyakh" [Asymptotics of spectrum of Steklov-type problems in composite domains], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1981, **8**, 36–48 (in Russian).
15. N. D. Kopachevsky, "O kolebaniyakh tela s polost'yu, chastichno zapolnennoy tyazheloy ideal'noy zhidkost'yu: teoremy sushchestvovaniya, edinstvennosti i ustoychivosti sil'nykh resheniy" [On oscillations of a body with cavity partially filled with heavy ideal fluid: theorems of existence, uniqueness, and stability of strong solutions], *Problemi dinamiki ta stiykosti bagatovimirnikh sistem. Zb. prats' Institutu matematiki NAN Ukraïni* [Probl. Dynamics Stability Multidimen. Syst.: Digest Works Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine], 2005, **1**, No. 1, 158–194 (in Russian).
16. N. D. Kopachevsky, S. G. Krein, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolutional and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
17. N. D. Kopachevsky, *Spektral'naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: A Special Course], Forma, Simferopol', 2009 (in Russian).
18. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial'nye uravneniya Vol'terra v gil'bertovom prostranstve: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Integrodifferential Equations in a Hilbert Space: A Special Course], FLP Bondarenko, Simferopol', 2012.
19. N. D. Kopachevsky, "Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil'bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form" [Abstract Green formulas for triples of Hilbert spaces and sesquilinear forms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–105 (in Russian).
20. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green Formula and Some Its Applications], Forma, Simferopol', 2016 (in Russian).
21. S. G. Krein, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
22. S. G. Krein and N. N. Moiseev, "O kolebaniyakh tverdogo tela, soderzhashchego zhidkost' so svobodnoy granitsey" [On oscillations of solid body containing fluid with a free boundary], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1957, **21**, No. 2, 169–174 (in Russian).
23. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
24. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
25. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Hermit operators in spaces with indefinite metrics], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
26. V. A. Prigorskiy, "O nekotorykh klassakh bazisov gil'bertova prostranstva" [On some classes of bases of Hilbert spaces], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1965, **20**, Issue 125, No. 5, 231–236 (in Russian).
27. T. A. Suslina, "Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh odnorodnogo ellipticheskogo uravneniya pri nalichii svyazey na chasti granitsy" [Asymptotics of spectrum of variational problems on solutions of homogeneous elliptic equation with relations on part of the boundary], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 1984, **9**, 84–97 (in Russian).

28. T. A. Suslina, "Asimptotika spektra variatsionnykh zadach na resheniyakh ellipticheskogo uravneniya v oblasti s kusochno-gladkoy granitsey" [Asymptotics of spectrum of variational problems on solutions of elliptic equation in a domain with piecewise smooth boundary], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1985, **147**, 179–183 (in Russian).
29. T. A. Suslina, "Asimptotika spektra nekotorykh zadach, svyazannykh s kolebaniyami zhidkostey" [Asymptotics of spectrum of some problems related to oscillations of fluids], Dep. to VINITI 21.11.85, No. 8058-B, Leningrad Electrotech. Inst. Commun., Leningrad, 1985 (in Russian).
30. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
31. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 2003.
32. G. Metivier, "Valeurs propres d'operation definis par restriction de systemes variationelles a des sous-espaces," *J. Math. Pures Appl.*, 1978, Ser. IX, **57**, No. 2, 133–156.

N. D. Kopachevsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University,
Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Mathematical Analysis,
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

V. I. Voytitsky
Taurida Academy, V. I. Vernadsky Crimea Federal University,
Faculty of Mathematics and Informatics, Department of Mathematical Analysis,
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: victor.voytitsky@gmail.com

Z. Z. Sitshaeva
Crimean Engineering-Pedagogical University,
Department of Mathematics,
8 Uchebnyi Per., 295015 Simferopol, Russia
E-mail: szz2008@mail.ru