Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 615–626

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-615-626 УДК 517.957

КОНУСЫ ГОРДИНГА И УРАВНЕНИЯ БЕЛЛМАНА В ТЕОРИИ ГЕССИАНОВСКИХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ

© 2017 г. Н. М. ИВОЧКИНА, Н. В. ФИЛИМОНЕНКОВА

Аннотация. В работе продолжено изучение алгебраических свойств конусов Гординга в пространстве симметричных матриц. На этой базе намечен новый подход к исследованию полностью нелинейных дифференциальных операторов и уравнений в частных производных второго порядка. Найдены теоремы сравнения нового типа для эволюционных гессиановских операторов, а также установлена связь гессиановских уравнений с уравнениями Беллмана.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Современная теория полностью нелинейных дифференциальных уравнений с гессиановскими операторами является результатом взаимодействия двух факторов. Первый — классическая теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, обогащенная в начале 80-х результатами из [6,10,11,14]. В публикациях [8,13,20] предпринята попытка создания общей теории полностью нелинейных уравнений по аналогии с теорией линейных и квазилинейных уравнений в частных производных второго порядка.

Второй фактор — теория однородных a-гиперболических многочленов многих переменных, представленная в 1959 г. Л. Гордингом в статье [15]. Приведем несколько фрагментов этой теории.

Начинается статья с понятия a-гиперболического многочлена $P_m(x)$, $m > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ [15, с. 957]:

Определение 1.1. Пусть $a \in \mathbb{R}^N$, $P_m(a) \neq 0$, $P_m(tx) = t^m P_m(x)$, $t \in \mathbb{R}$. Многочлен $P_m(x)$ называется *a-гиперболическим*, если многочлен одной переменной $p(t) = P_m(ta + x)$ имеет m вещественных корней для любого $x \in \mathbb{R}^N$.

Естественными примерами a-гиперболических многочленов с $a = (1, \ldots, 1)$ являются элементарные симметрические функции порядка m.

В [15, с. 960] любому a-гиперболическому многочлену, $a \in \mathbb{R}^N$, сопоставляется конус

$$C(P_m, a) = \{x \in \mathbb{R}^N : P_m(ta + x) \neq 0,\ t \geqslant 0\}. \tag{1.1}$$

Наконец, как следствие основной теоремы 1 из [15, с. 961], сформулирована работающая в приложениях теорема 2. Приведем ее укороченную версию.

Теорема 1.1. *Пусть P_m — a-гиперболический многочлен. Тогда конус $C_m(P_m, a)$ есть выпуклое множество. Более того, если $b \in C_m(P_m, a)$, то P_m является b-гиперболическим и $C_m(P_m, b) = C_m(P_m, a)$.*

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-07650.

Удивительная алгебраическая теория Л. Гординга проникла в область полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных благодаря авторам статьи [13], где содержится первое упоминание о ней в этом контексте.

Независимо от публикаций [13, 15], примеры гиперболических многочленов и конусов (1.1) под именем конусов устойчивости дифференциальных операторов составляют содержание заметки [1] (1983 г.). Причем в [1] эти конструкции рассматриваются для многочленов с аргументами не только из $\mathbb{R}^N$, но также из пространства симметричных матриц. Автору [1] не удалось доказать выпуклость конусов устойчивости в общем случае, пока не выяснилось, что они являются матричными аналогами конусов Гординга (1.1). С этого времени алгебраическая теория Л. Гординга является полноправным фундаментом теории полностью нелинейных уравнений.

В статьях [4, 12] воспроизводятся основные положения теории Л. Гординга (в том числе для многочленов с матричным аргументом), а также демонстрируется ее роль в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Помимо синтеза с алгебраической теорией Л. Гординга, исследование полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка привело к появлению новых направлений в дифференциальной геометрии и функциональном анализе. Такая смесь затрудняет восприятие результатов, полученных непосредственно для уравнений. В надежде сделать современную теорию полностью нелинейных уравнений более прозрачной, в статьях [3, 4, 17, 18] предпринята попытка отделить те новые алгебро-геометрические структуры, которые сопровождают эту теорию, от самих уравнений.

В предлагаемой статье продолжено отделение новых направлений в алгебре от их приложений к полностью нелинейным уравнениям.

Так, раздел 2 данной работы содержат модернизированный обзор новых алгебраических понятий, возникших в результате развития теории Л. Гординга, и формулировку некоторых нелинейных алгебраических проблем, интересных независимо от каких-либо приложений.

Раздел 3 посвящен следствиям этой деятельности для теории полностью нелинейных уравнений. Рассматриваются операторы и уравнения гессиановского типа, т. е. $F(u_{xx}) = f$.

В пункте 3.1 мы демонстрируем принцип построения гессиановских операторов, для которых корректно понятие конуса допустимых функций, т. е. множества, контролируемого только знаком оператора.

В публикациях Н. В. Крылова [6–8, 20] показано, что многие полностью нелинейные уравнения допускают эквивалентное представление в форме уравнений Беллмана. На основе дуальных конусов Гординга, построенных в разделе 2, в пункте 3.2 мы устанавливаем новую связь между гессиановскими операторами и операторами Беллмана. В качестве примеров рассмотрим здесь классическое уравнение Монжа—Ампера

$$\det u_{xx} = f_1^n, \quad x \in \bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

и его эволюционный аналог

$$-u_t \det u_{xx} = f_2^{n+1}, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times [0;T]. \tag{1.3}$$

Как это следует из результатов пункта 3.2 данной статьи, справедливы теоремы:

Теорема 1.2. *Пусть $\omega \in \mathrm{Sym}^+(n)$, $\det\omega = 1$, где $\mathrm{Sym}^+(n)$ — пространство симметричных положительно определенных $n \times n$-матриц. Предположим, что функция $u \in C^2(\bar{\Omega})$ есть решение уравнения*

$$\inf_{\{\omega\}}(\omega, u_{xx}) = f_1 > 0, \quad f_1 \in C(\bar{\Omega}). \tag{1.4}$$

Тогда u — выпуклая в $\bar{\Omega}$ функция, для которой справедливо равенство (1.2).

С другой стороны, для того, чтобы C^2-решение u уравнения (1.2) *было решением уравнения* (1.4), *необходимо и достаточно, чтобы u была выпуклой в $\bar{\Omega}$ функцией.*

В (1.4) и далее символом (S^1, S^2) обозначено скалярное произведение симметричных матриц.

Теорема 1.3. *Пусть $\omega \in \mathrm{Sym}^+(n)$. Предположим, что $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ — решение уравнения*

$$\inf_{\{\omega\}}\left(\frac{-u_t}{\det\omega} + (\omega, u_{xx})\right) = f_2 > 0, \quad f_2 \in C(\bar{Q}_T). \tag{1.5}$$

Тогда u — монотонно-выпуклое в $\bar{Q}_T$ решение уравнения (1.3).

С другой стороны, для того, чтобы $C^{2,1}$-решение u уравнения (1.3) *удовлетворяло уравнению* (1.5)*, необходимо и достаточно, чтобы функция u была монотонно-выпуклой в $\bar{Q}_T$.*

Отметим, что в статье [22] *монотонно-выпуклыми* названы функции $u = u(x,t)$, отрицательно монотонные по t и выпуклые по x. В теореме 1.3 мы следуем этой терминологии.

Если уравнение Монжа—Ампера (1.2) было предметом исследования с давних пор (см. [9]), то его параболический аналог (1.3) впервые появился в книге [7, с. 307, пример 8]. В статье [16] уравнение (1.3) включено в семейство m-гессиановских эволюционных уравнений, $m = n$.

Новым примером является уравнение

$$-u_{tt}\det u_{xx} = f_3^{n+1}, \quad (x,t) \in \bar{Q}_T = \bar{\Omega}\times[0;T], \tag{1.6}$$

По аналогии с монотонно-выпуклыми, назовем *вогнуто-выпуклыми* функции, вогнутые по t и выпуклые по x. Справедлива

Теорема 1.4. *Пусть $\omega \in \mathrm{Sym}^+(n)$. Предположим, что $u \in C^{2,2}(\bar{Q}_T)$ — решение уравнения*

$$\inf_{\{\omega\}}\left(\frac{-u_{tt}}{\det\omega} + (\omega, u_{xx})\right) = f_3 > 0, \quad f_2 \in C(\bar{Q}_T). \tag{1.7}$$

Тогда функция u — вогнуто-выпуклая в $\bar{Q}_T$ и удовлетворяет уравнению (1.6).

С другой стороны, для того, чтобы $C^{2,2}$-решение u уравнения (1.6) *удовлетворяло уравнению* (1.7)*, необходимо и достаточно, чтобы u была вогнуто-выпуклой в $\bar{Q}_T$ функцией.*

Мы привели эти однотипные теоремы для того, чтобы подчеркнуть, что в отличие от линейного случая, в теории уравнений с нелинейными гессиановскими операторами главным контролером является знак оператора. Заметим еще, что уравнения (1.4), (1.5) и (1.7) являются уравнениями Беллмана.

В пункте 3.3 продемонстрировано применение алгебраических результатов из раздела 2 для получения новых теорем сравнения для гессиановских эволюционных операторов. Хорошо известно, что в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений теоремы сравнения являются ключом к построению априорных оценок решений. Мы приводим простейшие примеры такого взаимодействия для допустимых решений гессиановских эволюционных уравнений.

2. Конусы Гординга в пространстве симметричных матриц

2.1. Конусы m-положительных матриц. В этом параграфе и далее используем следующие обозначения:

$\mathrm{Sym}(n)$ — пространство симметричных $n\times n$-матриц $S = (s_{ij})_{i,j=1}^n$;

$\mathrm{Sym}^+(n) \subset \mathrm{Sym}(n)$ — подпространство положительно определенных матриц;

$(S^1, S^2) = \mathrm{tr}(S^1S^2)$ — скалярное произведение симметричных матриц, равное следу их произведения;

I — единичная матрица;

$\det S$ — определитель матрицы S;

$T_m(S)$ — m-след матрицы S, равный сумме всех главных миноров $\det S$ порядка m, $0 < m \leqslant n$;

$\nabla T_m(S) = \left(\dfrac{\partial T_m(S)}{\partial s_{ij}}\right)_{i,j=1}^n$ — градиент матричной функции T_m.

В статьях [1, 2] впервые были рассмотрены операторы, вычисляющие m-след гессиана C^2-функций, и введены конусы их устойчивости как естественные множества разрешимости задачи Дирихле. Матричными репликами этих конструкций служили функции $T_m(S)$ и конусы

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_p(S) > 0,\ p = 1,\dots,m\}, \quad m = 1,\dots,n. \tag{2.1}$$

В [1] показано, что корни многочлена $p(t) = T_m(S+tI)$, $t \in \mathbb{R}$, вещественны для любой матрицы $S \in \mathrm{Sym}(n)$, указано представление

$$T_m(S+tI) = C_n^m\sum_{k=0}^m \frac{C_m^k}{C_n^k}T_k(S)t^{m-k}, \tag{2.2}$$

и отмечен очевидный факт, что все коэффициенты многочлена положительны тогда и только тогда, когда все его корни отрицательны. Впоследствии это привело автора [1] к справедливому заключению, что если рассматривать симметричные матрицы S как элементы пространства $\mathbb{R}^N$ с $N = n(n+1)/2$, то, согласно определению 1.1, многочлен $T_m(S)$ является I-гиперболическим в смысле Гординга, а конус (2.1) совпадает с соответствующим конусом Гординга (1.1): $K_m = C(T_m, I)$.

При этом определение (2.1) позволяет заменить вычисление корней многочлена $T_m(S+tI)$ вычислением m-следов $\det S$ и делает очевидной цепочку вложений

$$\mathrm{Sym}^+(n) = K_n \subset K_{n-1} \cdots \subset K_1 = \{S \in \mathrm{Sym}(n): \ \mathrm{tr} S > 0\}. \tag{2.3}$$

Из теоремы 1.1 для конусов Гординга следует, что конус (2.1) есть выпуклое множество в пространстве $\mathrm{Sym}(n)$, и если $S^0 \in K_m$, то $K_m = C(T_m, S^0)$, т. е. справедлива следующая лемма:

Лемма 2.1. *Пусть $S^0 \in K_m$, $S \in \mathrm{Sym}(n)$. Для того, чтобы $S \in K_m$, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты многочлена $p_m(t) = T_m(S + tS^0)$ были положительны.*

В некоторых ситуациях удобно использовать иные описания конусов K_m. Например, такое:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{t>0} T_m(S+tI) > 0\}, \tag{2.4}$$

естественным дополнением которого является

$$\mathrm{Sym}(n)\backslash K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{t>0} T_m(S+tI) \leqslant 0\}.$$

Из равенств (2.2) и (2.4) получаем еще одно определение:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{t>0} T_m(S+tI) = T_m(S)\}. \tag{2.5}$$

Наконец, большое теоретическое значение имеет следующая простая лемма, доказанная, например, в [5].

Лемма 2.2. *Конус K_m есть компонента связности множества $\{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_m(S) > 0\}$, содержащая I. Причем единичную матрицу можно заменить на любую матрицу $S^0 \in K_m$.*

Далее матрицы из конуса K_m мы называем *m-положительными*. Подробное исследование m-положительных матриц содержится в публикациях [4, 17], а в работе [5] на них распространен критерий Сильвестра. Именно, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть $S \in \mathrm{Sym}(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим символом $S^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_k\rangle}$ матрицу, полученную из матрицы S заменой строк и столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на нулевые.*

(i) *Для произвольного номера $1 \leqslant i \leqslant n$ верно следующее*:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_m(S) > 0, \ S^{<i>} \in K_{m-1}\}. \tag{2.6}$$

(ii) *Для произвольного набора различных номеров $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \leqslant n$ верно следующее*:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_m(S) > 0, \ T_{m-1}(S^{\langle i_1\rangle}) > 0, \ldots, T_1(S^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}\rangle}) > 0\}.$$

В приложениях центральную роль играет пункт (i) теоремы 2.1.

2.2. Дуальные конусы. Определением

$$K_d^m = \{S_d \in \mathrm{Sym}(n) : (S_d, S) > 0, S \in K_m\}, \quad m = 1, \ldots, n,$$

введем в рассмотрение *дуальные конусы* K_d^m. Поскольку $K_d^n = \bar{K}_n \backslash \{\mathbf{0}\}$, то вместе с соотношениями (2.3) приходим к цепочке вложений:

$$K_d^1 \subset K_d^2 \cdots \subset K_d^n \subset \bar{K}_n \subset \bar{K}_{n-1} \cdots \subset \bar{K}_1.$$

Очевидно, что $K^1 = \{\lambda I, \lambda > 0\}$, $I = \nabla T_1(S)$, $K_d^n \backslash \partial K_d^n = \{\nabla T_n(S), S \in K_n\}$. В связи с этим можно предложить иную версию дуальных конусов при $m > 1$:

$$K^m = \{\nabla T_m(S), S \in K_m\}, \quad 1 < m \leqslant n.$$

Справедлива

Лемма 2.3. *Для $m = 2, \ldots, n$ выполнены равенства $K^m = K_d^m \backslash \partial K_d^m$.*

Заметим, что вложение $K^m \subset K_d^m \backslash \partial K_d^m$ является простым следствием хорошо известных в теории Л. Гординга [15] неравенств

$$(\nabla T_m(S^1), S^2) \geqslant m T_m^{\frac{m-1}{m}}(S^1) T_m^{\frac{1}{m}}(S^2), \quad S^1, S^2 \in K_m, \quad m = 1, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Доказательство обратного вложения для $1 < m < n$ мы оставляем читателю.

Введем теперь 1-однородную функцию

$$F_m(S) := T_m^{\frac{1}{m}}(S).$$

Реплика неравенства (2.7) для F_m выглядит особенно просто:

$$(\nabla F_m(S^1), S^2) \geqslant F_m(S^2), \quad S^1, S^2 \in K_m, \tag{2.8}$$

и означает, что функция F_m вогнута в конусе m-положительных матриц.

Замечание 2.1. Неравенства (2.7), (2.8) точные, причем равенство достигается на $S^1 = S^2$.

Введем обозначение

$$\omega_m = \{\nabla F_m(S), S \in K_m\}.$$

Множество ω_m является нормированным подмножеством K^m в том смысле, что состоит из 0-однородных матриц-функций ∇F_m. Сформулируем одно простое следствие лемм 2.2, 2.3 и неравенства (2.8).

Лемма 2.4. *Справедливы соотношения*:

$$K_m = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \inf_{\omega_m}(\omega, S) > 0\}, \quad m = 1, \ldots, n.$$

При этом для m-положительных матриц выполнено равенство $\inf\limits_{\omega_m}(\omega, S) = F_m(S)$.

Безусловно существует описание множеств ω_m, независимое от $\nabla F_m(S)$. Сформулируем гипотезу:

$$\omega_m = \{S \in K_n : T_p(S) = C_n^p, p = m, \ldots, n\}, \quad 1 \leqslant m \leqslant n. \tag{2.9}$$

Отметим, что при $m = 1$ и $m = n$ равенства (2.9) очевидны.

Замечание 2.2. Поскольку следы T_m ортогонально инвариантны, т. е. справедливы тождества $T_m(S) = T_m(BSB^T)$, $BB^T = I$, утверждения этого параграфа автоматически переносятся на любое подпространство $\mathrm{Sym}(n)$. В частности, они справедливы для подпространства диагональных матриц, эквивалентного $\mathbb{R}^n$. В приложениях используется также подпространство эволюционных матриц $\mathrm{Sym}^{ev}(n+1) \subset \mathrm{Sym}(n+1)$, у элементов которого в первой строке и столбце отличен от 0 может быть лишь диагональный элемент.

2.3. Сравнение m-положительных матриц. Аппаратом такого сравнения являются неравенства (2.7), (2.8) и монотонность m-следов в K_m. Именно, справедлива

Теорема 2.2. *Для любых $S^1 \in K_m$, $S^2 \in \bar{K}_m \backslash \{\mathbf{0}\}$ справедливо неравенство*

$$T_m(S^1 + tS^2) > T_m(S^1), \quad t > 0. \tag{2.10}$$

Доказательство. Рассмотрим разложение многочлена $T_m(S^1 + tS^2)$ по степеням t с коэффициентами α_k, зависящими от S^1 и S^2:

$$T_m(S^1 + tS^2) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k t^{m-k} + T_m(S^1).$$

Из условия данной теоремы и леммы 2.1 следует, что $\alpha_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, m$. Если $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, \ldots, m$, то $T_m(S^1 + tS^2) \in K_m$ при любом значении $t \in \mathbb{R}$, что невозможно. Следовательно, существует хотя бы один положительный коэффициент α_k, и неравенство (2.10) доказано. $\square$

Сформулируем условия, достаточные для того, чтобы разность m-положительной и симметричной матриц не попадала в замкнутый конус $\bar{K}_m$. Заметим, что в приложениях к дифференциальным уравнениям (см. раздел 3) важно лишь, что разность не попадает в более узкий конус $\bar{K}_n \subset \bar{K}_m$.

Следствие 2.1. *Пусть* $S \in K_m$, $S \neq S^1$ *и для матрицы* S^1 *выполнено хотя бы одно из неравенств*

1. $\inf\limits_{t>0} T_m(S^1 + tI) \leqslant T_m(S)$;
2. $T_m(S^1) \leqslant T_m(S)$;
3. $(\nabla F_m(S^2), S^1) \leqslant F_m(S)$ *с некоторой матрицей* $S^2 \in K_m$.

Тогда $(S^1 - S) \notin \bar{K}_m$.

Доказательство. Предположим, что $(S^1 - S) \in \bar{K}_m$. Тогда $S^1 = S^1 - S + S \in K_m$ по теореме 2.2 и $T_m(S^1) = T_m(S^1 - S + S) > T_m(S)$, что противоречит условию 2. Это предположение также не совместимо ни с одним из условий 1 и 3, так как $\inf\limits_{t>0} T_m(S^1 + tI) = T_m(S^1)$ согласно (2.5) и $(\nabla F_m(S^2), S^1) \geqslant F_m(S^1)$ по неравенству (2.8). $\square$

В заключение этого параграфа отметим, что множество m-положительных матриц является центральным и для дробей

$$T_{m,l}(S) = \frac{T_m}{T_l}(S), \quad F_{m,l}(S) = T_{m,l}^{\frac{1}{m-l}}(S), \quad 0 \leqslant l < m \leqslant n,$$

введенных в статьях [21,23,24]. Именно, все вышесказанное, включая определение (1.1), справедливо и для функций $T_{m,l}$. Было бы интересно найти аналитическое описание всех функций такого типа.

3. Гессиановские дифференциальные операторы

3.1. Конусы допустимых функций. В теории дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка одним из основных объектов является матрица Гессе $u_{xx} = (u_{ij})_{i,j=1}^n$. Термин «гессиановские уравнения» был введен в публикации [25] (1995 г.) для уравнений вида $F(u_{xx}) = f$ и с тех пор является общепринятым как для уравнений, так и для операторов $F[u] := F(u_{xx})$. Для того чтобы учесть специфику операторов

$$T_m[u] := T_m(u_{xx}),$$

мы назвали их *m-гессиановскими*.

В статье [13] предпринята попытка описать общий класс гессиановских уравнений, для которых существует функциональный конус корректной постановки задачи Дирихле. Элементы этих конусов были названы допустимыми функциями, [13, с. 263]. Следуя этой терминологии, мы называем функцию *m-допустимой*, если она принадлежит функциональному аналогу матричного конуса (2.1):

$$\mathbb{K}_m(\bar{\Omega}) = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : T_p[u](x) > 0,\ p = 1, \ldots, m\}. \tag{3.1}$$

Согласно лемме 2.2, для проверки m-допустимости функции u достаточно убедиться, что $T_m[u] > 0$ для всех $x \in \bar{\Omega}$ и $u_{xx}(x_0) \in K_m$ хотя бы в одной точке $x_0 \in \bar{\Omega}$.

На основе стационарного m-гессиановского оператора $T_m[u]$ в статьях [16, 19] введены понятия m-гессиановского эволюционного оператора и m-допустимых эволюций. В данной работе вводим новое понятие m-гессиановских гиперэволюций. Следующие определения сформулированы с учетом того, что $T_{n+1}(S) \equiv 0$.

Определение 3.1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $Q_T = \Omega \times (0; T)$. Операторы

$$E_m[u] := -u_t T_{m-1}(u_{xx}) + T_m(u_{xx}), \quad m = 1, \ldots, n+1, \tag{3.2}$$

называем *m-гессиановскими эволюционными*, а функции из конуса

$$\mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}_T) = \{u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T) : E_p[u](x,t) > 0,\ p = 1, \ldots, m\} \tag{3.3}$$

— *m-допустимыми эволюциями*.

Определение 3.2. Операторы

$$H_m[u] := -u_{tt} T_{m-1}(u_{xx}) + T_m(u_{xx}), \quad m = 1, \ldots, n+1, \tag{3.4}$$

назовем *m-гессиановскими гиперэволюционными*, а функции из конуса

$$\mathbb{K}_m^{he}(\bar{Q}_T) = \{u \in C^{2,2}(\bar{Q}_T) : H_p[u](x,t) > 0,\ p = 1, \ldots, m\} \tag{3.5}$$

— *m-допустимыми гиперэволюциями.*

Определения 3.1, 3.2 следует рассматривать как иллюстрации к замечанию 2.2. Введем подпространство $\mathrm{Sym}^{ev}(n+1) \subset \mathrm{Sym}(n+1)$, состоящее из матриц вида

$$\hat{S} = (s_{ij})_{i,j=0}^{n},\ s_{00} = s \in \mathbb{R},\ s_{0i} = s_{i0} = 0,\ (s_{ij})_{i,j=1}^{n} = S \in \mathrm{Sym}(n).$$

Будем называть такие матрицы *эволюционными* и обозначать их для краткости парой $(s; S)$:

$$\mathrm{Sym}^{ev}(n+1) = \{\hat{S} = (s; S), s \in \mathbb{R}, S \in \mathrm{Sym}(n)\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_m[u] &= T_m(\hat{S}[u]), \quad \hat{S}[u] = (-u_t; u_{xx}), \\ H_m[u] &= T_m(\hat{S}[u]), \quad \hat{S}[u] = (-u_{tt}; u_{xx}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Следовательно, согласно замечанию 2.2, все утверждения раздела 2 можно применить как к оператору T_m, так и к E_m, H_m.

Например, сочетание леммы 2.2 и теоремы 2.1 (критерий Сильвестра) дает достаточные условия того, чтобы знак операторов E_m, H_m контролировал m-допустимость эволюций.

Теорема 3.1. *Пусть $D \subset Q_T$ — связная область, $u \in C^{2,2}(\bar{D})$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Предположим, что имеется точка $(x_0, t_0) \in \bar{D}$, для которой $u_{xx}(x_0, t_0) \in K_{m-1}$. Тогда*

(i) *если для всех $(x,t) \in \bar{D}$ выполнено неравенство $E_m[u] > 0$, то $u \in \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{D})$;*
(ii) *если для всех $(x,t) \in \bar{D}$ выполнено неравенство $H_m[u] > 0$, то $u \in \mathbb{K}_m^{he}(\bar{D})$.*

Доказательство. Чтобы доказать утверждение (i), рассмотрим эволюционные матрицы $\hat{S}[u] = (-u_t; u_{xx})$. Из (3.6), (2.1) следует, что

$$u \in \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{D}) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{S}[u](x,t) \in K_m \subset \mathrm{Sym}(n+1),\ (x,t) \in \bar{D}. \tag{3.7}$$

Множество эволюционных матриц $\{\hat{S}[u](x,t), (x,t) \in \bar{D}\}$ связно в пространстве $\mathrm{Sym}(n+1)$ и, по условию (i) теоремы, $T_m(\hat{S}[u]) = E_m[u] > 0$ для всех $(x,t) \in \bar{D}$. Тогда по лемме 2.2 для справедливости (3.7) достаточно, чтобы матрица $\hat{S}[u]$ была m-положительна хотя бы в одной точке области $\bar{D}$. Такая точка имеется по условию теоремы и равенству (2.6). Утверждение (i) доказано.

Чтобы доказать утверждение (ii), надо повторить это рассуждение для $\mathbb{K}_m^{he}(\bar{D})$, положив $\hat{S}[u] = (-u_{tt}; u_{xx})$. □

3.2. Связь с операторами Беллмана. Покажем, что для m-гессиановских операторов $T_m[u]$, $E_m[u]$, $H_m[u]$ в конусах допустимых функций существует иное представление.

Теорема 3.2. *Справедливы утверждения*:

(i) *для любого $1 \leqslant m \leqslant n$ уравнение $T_m[u] = f^m$ равносильно в конусе* (3.1) *равенству*

$$B_m[u] := \inf_{\omega_m}(\omega, u_{xx}) = f > 0, \quad \omega_m = \{\omega \in \mathrm{Sym}^+(n) : T_p(\omega) = C_n^p, p = m, \dots, n\}; \tag{3.8}$$

(ii) *для любого $1 \leqslant m \leqslant n+1$ уравнение $E_m[u] = f^m$ равносильно в конусе* (3.3) *равенству*

$$B_m^e[u] := \inf_{\omega_m^e}\big(-u_t\omega^0 + (\omega, u_{xx})\big) = f, \tag{3.9}$$

$$\omega_m^e = \{(\omega^0; \omega) \in \mathrm{Sym}^{ev}(n+1) \cap \mathrm{Sym}^+(n+1) : T_m(\omega^0; \omega) = C_{n+1}^p, p = m, \dots, n+1\};$$

(iii) *для любого $1 \leqslant m \leqslant n+1$ уравнение $H_m[u] = f^m$ равносильно в конусе* (3.5) *равенству*

$$B_m^h[u] := \inf_{\omega_m^e}\big(-u_{tt}\omega^0 + (\omega, u_{xx})\big) = f. \tag{3.10}$$

Доказательство. Заметим, что в случае $m = 1$ утверждения теоремы очевидны, а соответствующие операторы приобретают классический вид:

$$T_1[u] = B_1[u] = \Delta u, \quad E_1[u] = B_1^e[u] = -u_t + \Delta u, \quad H_1[u] = B_1^h[u] = -u_{tt} + \Delta u.$$

Докажем утверждения (i)–(iii) для общего случая.

Начнем с утверждения (i). Вследствие леммы 2.4 и представления (2.9) справедливо равенство

$$T_m^{\frac{1}{m}}[u] = \inf_{\omega_m}(\omega, u_{xx}), \quad u \in \mathbb{K}_m(\bar{\Omega}), \tag{3.11}$$

и поэтому m-допустимые решения уравнения $T_m[u] = f^m$ удовлетворяют уравнению (3.8), и наоборот.

В соответствии с замечанием 2.2 справедливы эволюционные аналоги (3.11). Именно, для всех $m = 1, \dots, n+1$ справедливы равенства

$$E_m^{\frac{1}{m}}[u] = \inf_{\omega_m^e}(-u_t\omega^0 + (\omega, u_{xx})), \quad u \in \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}_T),$$

$$H_m^{\frac{1}{m}}[u] = \inf_{\omega_m^e}(-u_{tt}\omega^0 + (\omega, u_{xx})), \quad u \in \mathbb{K}_m^{he}(\bar{Q}_T),$$

что и доказывает утверждения (ii), (iii). □

Уравнения (3.8), (3.9), (3.10) называются уравнениями Беллмана, и мы переносим эту терминологию на соответствующие операторы.

Покажем, что знак операторов Беллмана контролирует принадлежность возможных решений уравнений Беллмана соответствующим функциональным конусам.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f > 0$ непрерывна. Тогда любое C^2-решение уравнения* (3.8) *является m-допустимой функцией, $C^{2,1}$-решение уравнения* (3.9) *— m-допустимой эволюцией, а $C^{2,2}$-решение уравнения* (3.10) *— m-допустимой гиперэволюцией.*

Действительно, множества ω_m в (3.8), ω_m^e в (3.9), (3.10) являются полномочными представителями дуальных к $\mathbb{K}_m$, $\mathbb{K}_m^{ev}$, $\mathbb{K}_m^{he}$ конусов, и утверждение леммы есть следствие леммы 2.4 и равенства (2.9).

Заметим, что теорема 3.2 и лемма 3.1 доказаны нами при условии справедливости гипотезы (2.9). Утверждения теорем 1.2–1.4, сформулированных во введении, являются следствиями теоремы 3.2 и леммы 3.1.

3.3. Сравнение m-допустимых эволюций. В теории дифференциальных уравнений одной из основных является проблема корректной постановки задач. Очевидно, с этого момента пути исследования свойств допустимых функций (3.1), эволюций (3.3) и гиперэволюций (3.5) расходятся.

Условиям разрешимости задачи Дирихле для гессиановских уравнений посвящено достаточно работ, начиная с [13] и кончая [18], где проводится алгебро-геометрический анализ таких условий для m-гессиановских уравнений.

Эволюционные m-гессиановские уравнения впервые были представлены в работе [16], где обсуждается разрешимость первой-начально краевой задачи в цилиндре.

О разрешимости гиперэволюционных m-гессиановских уравнениях мы ничего сказать не можем.

В этом разделе статьи мы выясняем, что дают алгебраические результаты раздела 2 для m-гессиановских эволюционных уравнений.

Итак, имеется функция $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, эволюционная матрица $\hat{S}[u] = (-u_t; u_{xx}) \in \mathrm{Sym}^{ev}(n+1)$, m-гессиановские эволюционные операторы $E_m[u] = T_m(\hat{S}[u])$, явно выписанные в (3.2). Сформулируем функциональную транскрипцию следствия 2.1 при справедливости его условия 1.

Теорема 3.3. *Предположим, что для функции $v \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ и m-допустимой эволюции u выполнено неравенство*

$$\inf_{\tau>0} E_m(-v_t + \tau; v_{xx} + \tau I) \leqslant E_m[u], \quad (x,t) \in Q_T = \Omega \times (0;T). \tag{3.12}$$

Тогда

$$u - v \leqslant \sup_{\partial' Q_T}(u - v), \quad \partial' Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T]). \tag{3.13}$$

Доказательство. Неравенство (3.12) означает, что в любой точке $(x,t) \in \bar{Q}_T \backslash \partial' Q_T$ выполнено условие 1 следствия 2.1 для эволюционных матриц

$$\hat{S} = (-u_t; u_{xx})(x,t), \quad \hat{S}^1 = (-v_t; v_{xx})(x,t).$$

Поэтому либо $\hat{S} = \hat{S}^1$, либо $(\hat{S}^1 - \hat{S}) \notin \bar{K}_m \supset \bar{K}_{n+1}$, а следовательно $(v - u) \notin \bar{\mathbb{K}}^{ev}_{n+1}(Q_T)$. Но тогда на множестве $\bar{Q}_T \backslash \partial' Q_T$ функция $(v - u)$ не имеет точек минимума, что и доказывает (3.13). $\square$

Результаты типа теоремы 3.3 называют теоремами сравнения. Одним из ее следствий является предложение, которое принятое называть «принцип максимума».

Следствие 3.1. *Любое m-допустимое в Q_T решение неравенства $E_m[u] > 0$ принимает наибольшее значение на параболической границе цилиндра Q_T.*

Для доказательства достаточно положить $v \equiv 0$ в теореме 3.3.

Для того чтобы сформулировать еще одно следствие классического типа, поставим в цилиндре Q_T первую начально-краевую задачу:

$$E_m[u] = f > 0, \quad u|_{\partial' Q_T} = \Phi \tag{3.14}$$

и, следуя линейной терминологии, назовем m-допустимую эволюцию $\underline{u}$ *субрешением* уравнения (3.14), если $E_m[\underline{u}] \geqslant f$, а эволюцию $\bar{u} \in C^{2,1}$ назовем *суперрешением*, если $\inf\limits_{\tau > 0} E_m(-\bar{u}_t + \tau, \bar{u}_{xx} + \tau I) \leqslant f$. *Решением* назовем функцию, которая одновременно является суб- и суперрешением. Очевидным следствием теоремы 3.3 является

Следствие 3.2. *Предположим, что на параболической границе цилиндра Q_T выполнено равенство $\underline{u} = \bar{u}$. Тогда $\underline{u} \leqslant \bar{u}$ в Q_T. В частности, задача* (3.14) *может иметь не более одного m-допустимого решения.*

На самом деле справедливо более информативное предложение:

Теорема 3.4. *Предположим, что функция $\Phi(x, 0)$ является $(m-1)$-допустимой в области Ω. Тогда задача* (3.14) *может иметь не более одного $C^{2,1}$-решения, и если такое решение существует, то оно является m-допустимой эволюцией.*

Для доказательства априорной ограниченности производных решения задачи (3.14) удобно использовать функциональную адаптацию следствия 2.1 при справедливости его условия 2. А именно, если ввести обозначение

$$F^{ev}_m[u] := T_m^{\frac{1}{m}}(\hat{S}[u]), \quad \hat{S}[u] = (-u_t; u_{xx}),$$

то следствие 2.1 приводит к еще одной теореме сравнения:

Теорема 3.5. *Пусть $v \in C^{2,1}(Q_T)$, $u, w \in \mathbb{K}^{ev}_m(\bar{Q}_T)$. Предположим, что выполнено неравенство*

$$\Big(\nabla F^{ev}_m(\hat{S}[u]), \hat{S}[v]\Big) \leqslant F^{ev}_m[w], \quad (x,t) \in Q_T. \tag{3.15}$$

Тогда $(w - v) \leqslant \sup\limits_{\partial' Q_T} (w - v)$.

Основной проблемой в доказательстве разрешимости краевых задач для полностью нелинейных уравнений является построение априорных оценок вторых производных решения. Используя теорему 3.5, сделаем первый шаг в этом направлении для m-гессиановских эволюционных уравнений.

Теорема 3.6. *Пусть $f > 0$, $f \in C^{2,1}(Q_T)$. Предположим, что функция $u \in C^{4,2}(\bar{Q}_T)$ является m-допустимым решением уравнения*

$$F^{ev}_m[u] = f, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{3.16}$$

Тогда найдется постоянная $c = c\left(n, m, \|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}, \mathrm{diam}(\Omega)\right)$ такая, что

$$|u_{ii}(x,t)| \leqslant \sup_{\partial' Q^T} |u_{ii}(x,t)| + c, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Доказательство. Согласно (2.8) и замечанию 2.2, функция $F^{ev}_m(\hat{S})$, $\hat{S} \in \mathrm{Sym}^{ev}(n+1)$, является вогнутой в конусе $K_m \subset \mathrm{Sym}(n+1)$. Дифференцируя дважды по x^i уравнение (3.16), выводим неравенство

$$\Big(\nabla F^{ev}_m[u], \hat{S}[u_{ii}]\Big) \geqslant f_{ii}, \quad \hat{S}[u_{ii}] = (-u_{iit}, (u_{ii})_{xx})\,. \tag{3.18}$$

Положим $v = -u_{ii}$. Тогда из (3.18) следует, что

$$(\nabla F_m^{ev}[u], \hat{S}[v]) \leqslant \|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}, \quad (x,t) \in Q_T. \tag{3.19}$$

Функция

$$w = \frac{\|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}}{2C_n^m}|x|^2$$

несомненно является m-допустимой эволюцией, и для нее выполнено равенство $F_m^{ev}[w] = \|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}$. Этот факт вместе с (3.19) приводит к неравенству (3.15) теоремы 3.5, и поэтому

$$u_{ii}(x,t) \leqslant \sup_{\partial' Q^T} (w + u_{ii}(x,t)) \leqslant \sup_{\partial' Q^T} u_{ii}(x,t) + \frac{\|f\|_{C^{2,0}(Q_T)}}{2C_n^m}\mathrm{diam}^2(\Omega). \tag{3.20}$$

Неравенство (3.20) содержательно лишь для положительных u_{ii}. Однако $\Delta u > 0$ для m-допустимой эволюции u, что вместе (3.20) гарантирует существование постоянной c в (3.17). $\square$

Исследование поведения решения уравнения (3.16) и его производных вплоть до второго порядка на границе области является актуальной и трудоемкой задачей теории m-гессиановских эволюционных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивочкина Н. М.* Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа—Ампера// Мат. сб. — 1983. — *22*. — С. 265–275.
2. *Ивочкина Н. М.* Решение задачи Дирихле для некоторых уравнений типа Монжа—Ампера// Мат. сб. — 1985. — *128*. — С. 403–415.
3. *Ивочкина Н. М.* От конусов Гординга к p-выпуклым гиперповерхностям// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 94–104.
4. *Ивочкина Н. М., Прокофьева С. И., Якунина Г. В.* Конусы Гординга в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Проблемы мат. анализа. — 2012. — *64*. — С. 63–80.
5. *Ивочкина Н. М., Филимоненкова Н. В.* О новых структурах в теории полностью нелинейных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 82–95.
6. *Крылов Н. В.* Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — *47*, № 1. — С. 75–108.
7. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1985.
8. *Крылов Н. В.* О первой краевой задаче для нелинейных вырождающихся эллиптических уравнений// Изв. АН СССР. — 1987. — *51*, № 2. — С. 242–269.
9. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. — М.: Наука, 1975.
10. *Сафонов М. В.* Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гельдеровость их решений// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1983. — *12*. — С. 272–287.
11. *Сафонов М. В.* О гладкости вблизи границы решений эллиптических уравнений Беллмана// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1985. — *17*. — С. 150–154.
12. *Филимоненкова Н. В., Бакусов П. А.* Гиперболические многочлены и конусы Гординга// Мат. просвещ. Третья сер. — 2016. — *20*. — С. 143–166.
13. *Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J.* The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian// Acta Math. — 1985. — *155*. — С. 261–301.
14. *Evans L. C.* Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1982. — *25*. — С. 333–363.
15. *Gårding L.* An inequality for hyperbolic polynomials// J. Math. Mech. — 1959. — *8*, № 2. — С. 957–965.
16. *Ivochkina N. M.* On classic solvability of the m-Hessian evolution equation// Am. Math. Soc. Transl. — 2010. — *229*. — С. 119–129.
17. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations// Commun. Pure Appl. Anal. — 2013. — *12*, № 4. — С. 1687–1703.
18. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations// J. Fixed Point Theory Appl. — 2015. — *16*, № 1. — С. 11–25.
19. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* Attractors of m-Hessian evolutions// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2015. — *207*, № 2. — С. 226–235.

20. *Krylov N. V.* On general notion of fully nonlinear second order elliptic equation// Trans. Am. Math. Soc. — 1995. — *347*, № 3. — С. 857–895.
21. *Lin M., Trudinger N. S.* On some inequalities for elementary symmetric functions// Bull. Aust. Math. Soc. — 1994. — *50*. — С. 317–326.
22. *Nazarov A. I., Uraltseva N. N.* Convex-monotone hulls and an estimate of the maximum of the solution of a parabolic equation// J. Soviet Math. — 1987. — *37*. — С. 851–859.
23. *Trudinger N. S.* The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1990. — *111*. — С. 153–179.
24. *Trudinger N. S.* On the Dirichlet problem for Hessian equations// Acta Math. — 1995. — *175*. — С. 151–164.
25. *Urbas Jh. I.* Nonlinear oblique boundary value problems for Hessian equations in two dimensions// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire — 1995. — *12*. — С. 507–575.

Н. М. Ивочкина
Санкт-Петербургский государственный университет, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7–9
E-mail: ninaiv@NI1570.spb.edu

Н. В. Филимоненкова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., д. 29
E-mail: nf33@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-615-626 UDC 517.957

Gårding Cones and Bellman Equations in the Theory of Hessian Operators and Equations

© 2017 **N. M. Ivochkina, N. V. Filimonenkova**

Abstract. In this work, we continue investigation of algebraic properties of Gårding cones in the space of symmetric matrices. Based on this theory, we propose a new approach to study of fully nonlinear differential operators and second-order partial differential equations. We prove new-type comparison theorems for evolution Hessian operators and establish a relation between Hessian and Bellman equations.

REFERENCES

1. N. M. Ivochkina, “Opisanie konusov ustoychivosti, porozhdaemykh differentsial’nymi operatorami tipa Monzha—Ampera” [Description of stability cones generated by differential operators of the Monge–Ampère type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1983, **22**, 265–275 (in Russian).
2. N. M. Ivochkina, “Reshenie zadachi Dirikhle dlya nekotorykh uravneniy tipa Monzha—Ampera” [Solution of the Dirichlet problem for some equations of the Monge–Ampère type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1985, **128**, 403–415 (in Russian).
3. N. M. Ivochkina, “Ot konusov Gordinga k p-vypuklym giperpoverkhnostyam” [From Gårding’s cones to p-convex hypersurfaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 94–104 (in Russian).
4. N. M. Ivochkina, S. I. Prokof’eva, and G. V. Yakunina, “Konusy Gordinga v sovremennoy teorii polnost’yu nelineynykh differentsial’nykh uravneniy vtorogo poryadka” [Gårding’s cones in contemporary theory of fully nonlinear second-order differential equations], *Problemy mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2012, **64**, 63–80 (in Russian).
5. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, “O novykh strukturakh v teorii polnost’yu nelineynykh uravneniy” [On new structures in the theory of fully nonlinear equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 82–95 (in Russian).

6. N. V. Krylov, "Ogranichenno neodnorodnye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya v oblasti" [Boundedly nonhomogeneous elliptic and parabolic equations in a domain], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1983, **47**, No. 1, 75–108 (in Russian).
7. N. V. Krylov, *Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Nonlinear Second-Order Elliptic and Parabolic Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
8. N. V. Krylov, "O pervoy kraevoy zadache dlya nelineynykh vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh uravneniy" [On the first boundary-value problem for nonlinear degenerating elliptic equations], *Izv. AN SSSR* [Bull. Acad. Sci. USSR], 1987, **51**, No. 2, 242–269 (in Russian).
9. A. V. Pogorelov, *Mnogomernaya problema Minkovskogo* [Multidimensional Minkowski Problem], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
10. M. V. Safonov, "Neravenstvo Kharnaka dlya ellipticheskikh uravneniy i gel'derovost' ikh resheniy" [Harnack's inequality for elliptic equations and the Hölder property of their solutions], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1983, **12**, 272–287 (in Russian).
11. M. V. Safonov, "O gladkosti vblizi granitsy resheniy ellipticheskikh uravneniy Bellmana" [On smoothness of solutions of elliptic Bellman equations near the boundary], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1985, **17**, 150–154 (in Russian).
12. N. V. Filimonenkova and P. A. Bakusov, "Giperbolicheskie mnogochleny i konusy Gordinga" [Hyperbolic polynomials and Gårding's cones], *Mat. prosveshch. Tret'ya ser.* [Math. Educ. Third Ser.], 2016, **20**, 143–166 (in Russian).
13. L. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck, "The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian," *Acta Math.*, 1985, **155**, 261–301.
14. L. C. Evans, "Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1982, **25**, 333–363.
15. L. Gårding, "An inequality for hyperbolic polynomials," *J. Math. Mech.*, 1959, **8**, No. 2, 957–965.
16. N. M. Ivochkina, "On classic solvability of the m-Hessian evolution equation," *Am. Math. Soc. Transl.*, 2010, **229**, 119–129.
17. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, "On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations," *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2013, **12**, No. 4, 1687–1703.
18. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, "On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations," *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2015, **16**, No. 1, 11–25.
19. N. M. Ivochkina and N. V. Filimonenkova, "Attractors of m-Hessian evolutions," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **207**, No. 2, 226–235.
20. N. V. Krylov, "On general notion of fully nonlinear second order elliptic equation," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1995, **347**, No. 3, 857–895.
21. M. Lin and N. S. Trudinger, "On some inequalities for elementary symmetric functions," *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1994, **50**, 317–326.
22. A. I. Nazarov and N. N. Uraltseva, "Convex-monotone hulls and an estimate of the maximum of the solution of a parabolic equation," *J. Soviet Math.*, 1987, **37**, 851–859.
23. N. S. Trudinger, "The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1990, **111**, 153–179.
24. N. S. Trudinger, "On the Dirichlet problem for Hessian equations," *Acta Math.*, 1995, **175**, 151–164.
25. Jh. I. Urbas, "Nonlinear oblique boundary value problems for Hessian equations in two dimensions," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1995, **12**, 507–575.

N. M. Ivochkina
Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya nab., 199034 St. Petersburg, Russia
E-mail: `ninaiv@NI1570.spb.edu`

N. V. Filimonenkova
Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,
29 Polytechnic st., 195251 St. Petersburg, Russia
E-mail: `nf33@yandex.ru`