Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 599–614

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614 УДК 517.97

МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ВОЗМУЩЕННОЕ СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2017 г. **В. Г. ЗАДОРОЖНИЙ, М. А. КОНОВАЛОВА**

Аннотация. Рассматривается задача о нахождении моментных функций решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве со случайными коэффициентами. Задача сводится к начальной задаче для не случайного дифференциального уравнения с обычными и вариационными производными. Получены явные формулы для нахождения математического ожидания и смешанных моментных функций второго порядка решения уравнения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть X, Y — банаховы пространства с нормами $\|.\|_X$, $\|.\|_Y$, $T=[t_0,t_1]$ — отрезок вещественной оси $\mathbb{R}$, $L(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y, X^* — сопряженное пространство к X, $\langle x, g\rangle$ — обозначает значение линейного функционала $g\in X^*$ на элементе $x\in X$, U — нормированное пространство отображений $u: T\to X$ с нормой $\|u\|_U$ и $f: U\to Y$ — отображение из X в Y.

Определение. Если приращение $\Delta f(u) = f(u+h) - f(u)$ записывается в виде $\Delta f(u) = \int\limits_T \varphi(t,u)h(t)dt + o(h)$, где $h\in U$, интеграл понимается в смысле Лебега [8, с. 90] и является линейным ограниченным оператором на U, $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно $h\in U$, то отображение $\varphi: T\times U\to L(X,Y)$ называется *вариационной производной* (ср. [5, с. 14]) отображения f и обозначается $\dfrac{\delta f(u)}{\delta u(t)}$.

Для однозначности определения вариационной производной достаточно, чтобы выполнялось условие: если $g: T\to L(X,Y)$ и $\int\limits_T g(s)h(s)ds = 0$ $\forall h\in U$, то $g=0$. Предполагается, что это свойство выполняется. Техника вариационного дифференцирования во многом аналогична технике обычного дифференцирования (см. [5]).

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ — вероятностное пространство [2, с. 30] с вероятностной мерой μ. Тогда определяются μ-интегрируемые отображения [4, с. 127] $g:\Omega\to\mathbb{C}$ и среднее значение (математическое

©Российский университет дружбы народов, 2017

ожидание) $Mg = \int\limits_{\Omega} g(\omega)\mu(d\omega)$. Пусть $f(t,\omega)$ — случайный процесс [2, с. 321] со значениями в пространстве X, где $t \in T$, ω — случайное событие, в дальнейшем (если нет необходимости) зависимость от ω в записи не отражается. Пусть V — пространство отображений $v : T \to X$ и V^* — сопряженное пространство, причем двойственность между ними задается интегралом Лебега $\int\limits_T \langle w(t), v(t)\rangle dt$, где $v \in V$, $w \in V^*$.

Определение. Если реализации случайного процесса f лежат в пространстве V^*, то

$$\psi_f(v) = \int\limits_{\Omega} exp(i \int\limits_T \langle f(s,\omega), v(s)\rangle ds)\mu(d\omega) = M(\exp i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds),$$

где i — мнимая единица, называется *характеристическим функционалом* процесса f.

Если под знаком математического ожидания возможно вариационное дифференцирование, то для $w \in X^*$ справедливы равенства

$$\frac{\delta\psi_f(v)}{\delta v(t)} = M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds) i f(t)],$$

$$\frac{\delta^2\psi_f(v)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w = i^2 M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_2), w\rangle f(t_1)].$$

Если операция двойственности перестановочна с операцией вычисления среднего значения, то

$$\langle \frac{\delta^2\psi_f(v)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w, w\rangle = i^2 \langle M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_2), w\rangle f(t_1)], w\rangle =$$

$$= i^2 M\langle exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_2), w\rangle f(t_1), w\rangle =$$

$$= i^2 M[exp(i \int\limits_T \langle f(s), v(s)\rangle ds)\langle f(t_1), w\rangle\langle f(t_2), w\rangle].$$

Отсюда при $v = 0$ получаем представление математического ожидания и второй моментной функции случайного процесса с помощью характеристического функционала

$$\frac{\delta\psi_f(0)}{\delta v(t)} = iMf(t),$$

$$\langle \frac{\delta^2\psi_f(0)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w, w\rangle = i^2 M[\langle f(t_1), w\rangle\langle f(t_2), w\rangle].$$

Пусть ε — случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}$, f — случайный процесс со значениями в X, тогда

$$\psi(u,v) = M\exp(i \int\limits_T (\varepsilon(s)u(s) + \langle f(s), v(s)\rangle) ds)$$

— характеристический функционал пары процессов ε и f, и пусть $\dfrac{\delta_p\psi}{\delta u(t)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной u. При этом, если возможно вариационное дифференцирование под знаком среднего значения, то

$$\frac{\delta_p\psi(0,0)}{\delta u(t)} = iM\varepsilon(t), \quad \frac{\delta_p\psi(0,0)}{\delta v(t)} = iMf(t), \tag{1.1}$$

$$\frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta u(t_1)\delta v(t_2)} = i^2 M(\varepsilon(t_1)f(t_2)), \quad \frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta u(t_1)\delta u(t_2)} = i^2 M(\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)), \tag{1.2}$$

$$\langle \frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta v(t_1)\delta v(t_2)} w, w\rangle = i^2 M[\langle f(t_1), w\rangle\langle f(t_2), w\rangle]. \tag{1.3}$$

2. Мультипликативно возмущенное дифференциальное уравнение

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon(t)Ax + f(t), \tag{2.1}$$

$$x(t_0) = x_0.$$

Здесь $t \in T, \varepsilon$ — случайный процесс со значениями в $\mathbb{R}$, $x : T \to X$ — искомое отображение, $A \in L(X, X)$ — линейный ограниченный оператор, f — случайный процесс со значениями в X, $t_0 \in T$, $x_0 \in X$ — заданный случайный вектор. Уравнение (2.1) называется мультипликативно возмущенным случайным шумом линейным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве. Предполагается, что процессы ε, f заданы характеристическим функционалом $\psi(u, v)$.

Обычно обсуждают задачи нахождения либо функции распределения решения уравнения (2.1), либо плотности распределения решения, либо задачу нахождения характеристического функционала решения. Здесь рассматривается более скромная задача: найти первую и вторую моментные функции решения задачи для случая гауссовых процессов ε, f.

Если уравнение является скалярным и процессы ε, f гауссовы, то первые две моментные функции решения разными способами получили В. И. Тихонов [6] и Дж. Адомиан [1].

3. Переход к детерминированной задаче

Введем обозначение $e(u, v) = \exp(i \int\limits_T (\varepsilon(s)u(s) + \langle f(s), v(s)\rangle)ds)$. Умножим уравнение (2.1) и начальное условие на $e(u, v)$ и запишем средние значения полученных равенств:

$$M(\frac{dx}{dt}e(u, v)) = M(\varepsilon(t)Axe(u, v)) + M(f(t)e(u, v)), \tag{3.1}$$

$$M(x(t_0)e(u, v)) = M(x_0e(u, v)). \tag{3.2}$$

Введем отображение $y = y(t, u, v) = M(x(t)e(u, v))$. Отметим, что $y(t, 0, 0) = Mx(t)$. Далее (пока формально):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = M(\frac{dx}{dt}e(u, v)), \frac{\delta_p y}{\delta u(t)} = M(x(t)i\varepsilon(t)e(u, v)),$$

$$\frac{\delta_p \psi}{\delta v(t)} = M(ie(u, v)f(t)).$$

При этом равенства (3.1), (3.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p y}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p \psi}{\delta v(t)}, \tag{3.3}$$

$$y(t_0, u, v) = M(x_0e(u, v)).$$

Будем предполагать, что x_0 статистически не зависит от процессов ε, f, тогда получаем начальное условие

$$y(t_0, u, v) = M(x_0)\psi(u, v). \tag{3.4}$$

Проведенные формальные рассуждения служат основанием для следующего определения.

Определение. *Математическим ожиданием* $Mx(t)$ решения задачи (2.1) называется $y(t, 0, 0)$, где y — решение задачи (3.3), (3.4) в некоторой окрестности точки с компонентами $u = 0$, $v = 0$.

Определение. *Решением* задачи (3.3), (3.4) называется отображение $y = y(t, u, v)$, имеющее в некоторой окрестности точки с компонентами $u = 0$, $v = 0$ вариационную производную $\frac{\delta_p y}{\delta u(t)}$, почти всюду на T имеющее производную $\frac{\partial y}{\partial t}$ и удовлетворяющее почти всюду на T равенству (3.3).

Для решения полученной задачи нам потребуются некоторые дополнительные факты.

4. Характеристический функционал гауссовых процессов ε и f

В дальнейшем считается, что случайные процессы заданы гауссовым характеристическим функционалом [3, с. 324]

$$\psi(u,v) = \exp[i\int_T (a_1(s)u(s) + \langle a_2(s), v(s)\rangle)ds - \frac{1}{2}\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)ds_1ds_2 -$$
$$-\int_T\int_T \langle b_{12}(s_1,s_2)u(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2 - \frac{1}{2}\int_T\int_T \langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2]. \quad (4.1)$$

Здесь u принадлежит пространству $L_1(T)$ суммируемых на Т функций с нормой $\|u\|_1 = \int_T |u(s)|ds$, v принадлежит пространству $L_{1v}(T)$ суммируемых на Т векторных функций $v : T \to X$ с нормой $\|v\|_{1v} = \int_T \|v(s)\|ds$, $a_1 : T \to \mathbb{R}$, $b_{11} : T \times T \to \mathbb{R}$ — заданные функции, $a_2 : T \to X^*$ — векторная функция, $b_{12} : T \times T \to X^*$ — заданная векторная функция, $b_{22} : T \times T \to L(X, X^*)$ — заданное отображение.

Выясним смысл коэффициентов $a_1, a_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}$.

Лемма 4.1. *Если $B : T \times T \to L(X, X^*)$ непрерывно, $B(s_1, s_2) = B(s_2, s_1)$, $v \in L_{1v}(T)$, то*

$$\frac{\delta}{\delta v(t)}\int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2 = 2\int_T B(t,s_2)v(s_2)ds_2.$$

Доказательство. Пусть $h \in L_{1v}(T)$, тогда, в силу симметричности B,

$$\int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)(v(s_1)+h(s_1)), v(s_2)+h(s_2)\rangle ds_1ds_2 - \int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2 =$$
$$= \int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)v(s_1), h(s_2)\rangle ds_1ds_2 + \int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)h(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2 +$$
$$+ \int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)h(s_1), h(s_2)\rangle ds_1ds_2 =$$
$$= \int_T 2\int_T \langle B(s_1,s_2)v(s_1), h(s_2)\rangle ds_1ds_2 + \int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)h(s_1), h(s_2)\rangle ds_1ds_2.$$

При этом

$$|\int_T\int_T \langle B(s_1,s_2)h(s_1), h(s_2)\rangle ds_1ds_2| \leqslant \int_T\int_T |\langle B(s_1,s_2)h(s_1), h(s_2)\rangle| ds_1ds_2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_T\int_T \|B(s_1,s_2)h(s_1)\|\|h(s_2)\|ds_1ds_2 \leqslant \max_{T\times T}\|B(s_1,s_2)\|\int_T\int_T \|h(s_1)\|\|h(s_2)\|ds_1ds_2 =$$
$$= \max_{T\times T}\|B(s_1,s_2)\|\|h\|^2_{L_{1v}(T)} = o(h^2).$$

Отсюда, согласно определению вариационной производной, следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Воспользуемся равенствами (1.1):

$$iM\varepsilon(t) = \frac{\delta_p\psi(0,0)}{\delta u(t)} = [\psi(u,v)(ia_1(t) - \int_T b_{11}(t,s_2)u(s_2)ds_2 - \int_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)ds_2\rangle)]|_{u=0,v=0} = ia_1(t).$$

Следовательно, $a_1(t) = M\varepsilon(t)$. Аналогично получаем $a_2(t) = Mf(t)$.

Используя лемму, находим

$$\langle\frac{\delta_p\psi(u,v)}{\delta v(t_2)}, w\rangle = \psi(u,v)\langle ia_2(t_2) - \int_T b_{12}(s_1,t_2)u(s_1)ds_1 - \int_T b_{22}(s_1,t_2)v(s_1)ds_1, w\rangle.$$

Воспользуемся равенством (1.2):

$$i^2M[\langle f(t_1),w\rangle\langle f(t_2),w\rangle] = \langle\frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta v(t_2)\delta v(t_1)}w,w\rangle = [\psi(u,v)[\langle ia_2(t_1) - \int\limits_T b_{12}(s_1,t_1)u(s_1)ds_1 -$$

$$-\int\limits_T b_{22}(s_1,t_1)v(s_1)ds_1,w\rangle\langle ia_2(t_2) - \int\limits_T b_{12}(s_1,t_2)u(s_1)ds_1 - \int\limits_T b_{22}(s_1,t_2)v(s_1)ds_1,w\rangle -$$

$$-\langle b_{22}(t_1,t_2)w,w\rangle]]|_{u=0,v=0} = -\langle a_2(t_1),w\rangle\langle a_2(t_2),w\rangle - \langle b_{22}(t_1,t_2)w,w\rangle.$$

Из этого равенства находим

$$\langle b_{22}(t_1,t_2)w,w\rangle = M[\langle f(t_1),w\rangle\langle f(t_2),w\rangle] - \langle Mf(t_1),w\rangle\langle Mf(t_2),w\rangle.$$

Аналогично находим $b_{11}(t_1,t_2) = M(\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)) - M\varepsilon(t_1)M\varepsilon(t_2)$.

Воспользуемся первым из равенств (1.2):

$$\langle i^2M(\varepsilon(t_1)f(t_2)),w\rangle = \langle\frac{\delta_p^2\psi(0,0)}{\delta u(t_1)\delta v(t_2)},w\rangle =$$

$$= [\psi(u,v)[(ia_1(t_1) - \int\limits_T b_{11}(t_1,s_2)u(s_2)ds_2 - \int\limits_T b_{12}(t_1,s_2)v(s_2)ds_2)\langle ia_2(t_2) -$$

$$-\int\limits_T b_{12}(s_1,t_2)u(s_1)ds_1 - \int\limits_T b_{22}(s_1,t_2)v(s_1)ds_1,w\rangle] - b_{12}(t_1,t_2)]|_{u=0,v=0} =$$

$$= \langle -a_1(t_1)a_2(t_2) - b_{12}(t_1,t_2),w\rangle.$$

Отсюда находим

$$b_{12}(t_1,t_2) = M(\varepsilon(t_1)f(t_2)) - M(\varepsilon(t_1))M(f(t_2)).$$

5. Операторная функция

Пусть $\chi(\tau) = \chi(s,t,\tau)$ — функция, которая равна $\mathrm{sign}(\tau - s)$ при τ, принадлежащем отрезку $[\min(s,t),\max(s,t)]$, и равна нулю при $\tau \notin [\min(s,t),\max(s,t)]$. Если $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_kz^k$ — аналитическая на всей комплексной плоскости функция $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $A\in L(X,X)$, то определяют операторную функцию $f(At) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_kA^kt^k$. Нам потребуются аналогичные построения операторных функций, которые определяются функционалами.

Пусть $\varphi : L_1(T)\to\mathbb{C}$ — аналитический функционал

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T\dots\int\limits_T c_k(s_1,\dots,s_k)u(s_1)\cdots u(s_k)ds_1\cdots ds_k, A\in L(X,X).$$

Здесь $c_k(s_1,\dots,s_k)$ симметрично по любой паре аргументов. Тогда определена операторная функция

$$\varphi(Au) = \sum_{k=0}^{\infty}A^k\int\limits_T\dots\int\limits_T c_k(s_1,\dots,s_k)u(s_1)\cdots u(s_k)ds_1\cdots ds_k.$$

Пусть E обозначает тождественный оператор, действующий в пространстве X. На множестве аналитических операторных функций определим оператор $U(t,t_0)$

$$U(t,t_0)\varphi(uE) = \sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_T\dots\int\limits_T c_k(s_1,\dots,s_k)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)\cdots(u(s_k)E - i\chi(t_0,t,s_k)A)ds_1\cdots ds_k.$$

Теорема 5.1. *Для оператора $U(t,t_0)$ справедливы следующие свойства*:

1. $U(t_0,t_0)\varphi(uE) = \varphi(uE) = \varphi(u)E$,
2. $U(t,t_0)(\alpha\varphi_1(uE) + \beta\varphi_2(uE)) = \alpha U(t,t_0)\varphi_1(uE) + \beta U(t,t_0)\varphi_2(uE), \alpha,\beta\in\mathbb{C}$,
3. $U(t,\tau)U(\tau,t_0) = U(t,t_0)$,
4. $U(t_0,t) = U^{-1}(t,t_0)$,

5. $\dfrac{\delta}{\delta u(t)}U(t,t_0)\varphi(uE) = U(t_0,t)\dfrac{\delta\varphi(uE)}{\delta u(t)}$.

Доказательство. Первые четыре свойства легко проверяются. Докажем пятое свойство. Вариационная производная находится из вида приращения отображения (см. введение). Выпишем приращение для левой части равенства 5:

$$U(t,t_0)\varphi((u+h)E) - U(t,t_0)\varphi(uE).$$

Приращение для правой части равенства имеет вид

$$U(t,t_0)(\varphi((u+h)E) - \varphi(uE)).$$

Эти выражения равны, следовательно, справедливо равенство 5. □

6. Вычисление производных

Пусть ψ — характеристический функционал (4.1). Определим отображение

$$\Phi = U(t,t_0)\psi(uE,v) = \psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v).$$

Теорема 6.1. *Если в* (4.1) $a_1, a_2, b_{11}, b_{12}, b_{22}$ *непрерывны,* $u \in L_1(T)$, $\|u\|_1 \leqslant r$, *при* t, s, *принадлежащих* T, *выполняются условия* $|a_1(t)| \leqslant M_1$, $\|a_2(t)\| \leqslant M_2$, $|b_{11}(t,s)| \leqslant M_{11}$, $\|b_{12}(t,s)\| \leqslant M_{12}$, $\|b_{22}(t,s)\| \leqslant M_{22}$, *тогда существует вариационная производная* $\dfrac{\delta_p\Phi}{\delta u(t)}$, *причем*

$$\frac{\delta_p\Phi}{\delta u(t)} = (ia_1(t)E - \int\limits_T b_{11}(s_1,t)Eds_1 + i\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,t)Ads_1 - \int\limits_T \langle b_{12}(t,s_2), v(s_2)\rangle Eds_2)\Phi. \tag{6.1}$$

Доказательство. Воспользуемся определением вариационной производной. Пусть h — приращение переменной u. В дальнейшем $O(h)$ обозначает бесконечно малую одного порядка с бесконечно малой h, а $o(h)$ обозначает бесконечно малую высшего порядка относительно h. Вычислим соответствующее приращение для Φ:

$$\Delta_u\Phi = U(t,t_0)\psi((u+h)E) - U(t,t_0)\psi(uE) = \psi((u+h)E - i\chi(t_0,t)A, v) - \psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v) =$$
$$= \psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)[exp(i\int\limits_T a_1(s)h(s)Eds -$$
$$-\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2 -$$
$$-\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 - \int\limits_T\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle h(s_1)Eds_1ds_2) - E].$$

Нам потребуются следующие оценки:

$$\|\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2\| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_T\int\limits_T |b_{11}(s_1,s_2)|(\|u(s_1)E\| + \|A\|)\|h(s_1)E\|ds_1ds_2 \leqslant M_1(\|u\|_1 + \|A\|)\|h\|_1 = O(h),$$
$$\|\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2\| \leqslant M_1\|h\|_1^2 = o(h),$$
$$\|\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle h(s_1)Eds_1ds_2\| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_T\int\limits_T \|b_{12}(s_1,s_2)\|\|v(s_2)\|\|h(s_1)\|ds_1ds_2 \leqslant M_3\|h\|_1\int\limits_T \|v(s_2)\|ds_2 = O(h).$$

Если $B \in L(X,X)$ и α — бесконечно малая величина, то

$$\exp(B\alpha) - E = E + B\alpha + \frac{(B\alpha)^2}{2!} + \frac{(B\alpha)^3}{3!} + \ldots - E = B\alpha + o(\alpha).$$

Тогда, учитывая последние три оценки, имеем

$$\Delta\Phi = \psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)(i\int\limits_T a_1(s)h(s)Eds-$$

$$-\int\limits_t\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2-$$

$$-\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)h(s_1)h(s_2)Eds_1ds_2 - \int\limits_T\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle h(s_1)Eds_1ds_2 + o(h).$$

Поскольку

$$\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(-i\chi(t_0,t,s_1)A)h(s_2)Eds_1ds_2 = -i\int\limits_T\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)Ah(s_2)Eds_1ds_2,$$

то, согласно определению вариационной производной, вариационная производная $\dfrac{\delta_p\Phi}{\delta u(t)}$ существует и справедливо равенство (6.1). Теорема доказана. □

Теорема 6.2. *Пусть* $u \in L_1(T)$, $\|u\|_1 < r$, $a_1 : T \to \mathbb{R}$ — *непрерывная на* T *функция* $|a_1(t)| \leqslant M_1$, $a_2 : T \to X$ *непрерывная функция,* $\|a_2(s)\| \leqslant M_2$, $b_{11} : T \times T \to \mathbb{R}$, $b_{12} : T \times T \to L(X,X)$ — *равномерно непрерывны и ограничены,* $|b_{11}(s_1,s_2)| \leqslant M_{11}$, $\|b_{12}(s_1,s_2)\| \leqslant M_{12}$. *Тогда существует производная* $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ *и справедливо равенство*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = iA(ia_1(t)E - \int\limits_T b_{11}(s_1,t)Eds_1 + i\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,t)Ads_1 - \int\limits_T \langle b_{12}(t,s_2), v(s_2)\rangle Eds_2)\Phi. \tag{6.2}$$

Доказательство. Пусть Δt — приращение переменной t и $\Delta_t\Phi$ — соответствующее приращение Φ. Учитывая свойства функции χ и определение экспоненты от ограниченного оператора, находим

$$\frac{1}{\Delta t}\Delta_t\Phi = \frac{1}{\Delta t}[U(t+\Delta t,t_0)\psi(uE,v) - U(t,t_0),v)\psi(uE,v)] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}[\psi(uE - i\chi(t_0,t+\Delta t)A, v) - \psi(uE - i\chi(t_0,t)A,v)] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\{\exp[i\int\limits_T a_1(s)(u(s)E - i\chi(t_0,t,s)A - i\chi(t,t+\Delta t,s)A)ds + i\int\limits_T \langle a_2(s), v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A - i\chi(t,t+\Delta t,s_1)A)(u(s_2)E - i\chi(t_0,t,s_2)A-$$

$$-i\chi(t,t+\Delta t,s_2)A)ds_1ds_2 - \int\limits_T\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle(u(s_1)E - i\chi(t,t+\Delta t,s_1)A)ds_1ds_2-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2] - \exp[i\int\limits_T a_1(s)(u(s)E - i\chi(t_0,t,s)A)ds + i\int\limits_T \langle a_2(s), v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)(u(s_1)E - i\chi(t_0,t,s_1)A)(u(s_2)E - i\chi(t_0,t,s_2)A)ds_1ds_2-$$

$$-\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle(u(s_1)E - i\chi(t_0,t)A)ds_1ds_2 - \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)\{[\exp(\int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads + i\int\limits_T \int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 + \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 - i\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle A) - E]\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t}\psi(uE - i\chi(t_0,t)A)[\exp W - E] = \frac{1}{\Delta t}\Phi[W + o(W)],$$

где

$$W = \int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads + i\int\limits_T \int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 + \int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 - i\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle Ads_2ds_1.$$

Согласно теореме о среднем значении [7, с. 113], $\int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads = a(c)A\Delta t$, где c — точка из интервала с концами t и $t+\Delta t$. Поскольку a_1 — непрерывная функция, то

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} a_1(s)Ads = a(t)A.$$

Аналогично получаем

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[i\int\limits_T\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2] = i\int\limits_T b_{11}(s_1,t)u(s_1)Ads_1 + \int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,t)A^2ds_1,$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[-i\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_T \langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle Ads_2ds_1] = -i\int\limits_T \langle b_{12}(t,s_2), v(s_2)\rangle Ads_2.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — любое число. Поскольку b_{11} — равномерно непрерывная функция на $T\times T$, то найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что неравенство $|s-t| < \delta(\varepsilon)$, влечет неравенство $|b_{11}(s_1,s) - b(s_1,t)| < \varepsilon$ при всех $s_1 \in T$. Тогда при $0 < |\Delta t| < \delta(\varepsilon)$, $\|u\|_1 < r$ имеем

$$\|\int\limits_{t_0}^{t}\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1 - b_{11}(s_1,t)A^2\}ds_2\| =$$

$$= \|\int\limits_{t_0}^{t}\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} (b_{11}(s_1,s_2) - b_{11}(s_1,t))A^2ds_1\}ds_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t}\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} |b_{11}(s_1,s_2) - b_{11}(s_1,t)|\|A\|^2ds_1\}ds_2 < \varepsilon(t-t_0)\|A\|^2.$$

Аналогично получаем

$$\|\int\limits_T\{\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1 - b_{11}(s_1,t)u(s_1)A\}ds_2\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_T \{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} |b_{11}(s_1,s_2)-b_{11}(s_1,t)||u(s_1)|\|A\|ds_1\}ds_2\| < \varepsilon\|A\|\|u\|_1 < \varepsilon\|A\|r,$$

$$\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2\| \leqslant M_{11}\|A\|^2\Delta t = O(\Delta t),$$

Поскольку ε — произвольное положительное число, то из этих оценок следует, что при $\Delta t\to 0$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}W = a_1(t)A + i\int_T b_{11}(s_1,t)u(s_1)Ads_1 + \int_{t_0}^t b_{11}(s_1,t)A^2ds_1 - i\int_T \langle b_{12}(t,s_2),v(s_2)\rangle Ads_2ds_1.$$

Устремляя Δt к нулю, получаем равенство (6.2). Теорема доказана. □

7. Решение однородного уравнения

Теорема 7.1. *Пусть выполняются условия теорем* 6.1 *и* 6.2*, тогда*

$$y = U(t,t_0)\psi(uE,v) = \psi(uE - i\chi(t_0,t)A,v)M(x_0) \tag{7.1}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p y}{\delta u(t)}, \tag{7.2}$$

$$y(t_0,u,v) = M(x_0)\psi(u,v)). \tag{7.3}$$

Доказательство.

$$y(t_0,u,v) = \psi(uE - i\chi(t_0,t_0)A,v)M(x_0) = \psi(uE,v)M(x_0) = \psi(u,v)M(x_0),$$

т. е. условие (7.3) выполнено. Из теорем 6.1 и 6.2 следует, что выполняется равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p \Phi}{\delta u(t)}. \tag{7.4}$$

Подставляя (7.1) в (7.2) и используя при этом последнее равенство, убеждаемся, что (7.1) является решением уравнения (7.2). Теорема доказана. □

Теорема 7.2. *Решение* (7.1) *задачи* (7.2), (7.3) *единственно в классе аналитических по переменной* t (*в некоторой окрестности точки* t_0) *решений.*

Доказательство. Пусть y_1 еще одно аналитическое по переменной t решение задачи (7.1), (7.2). Рассмотрим $z = y - y_1$. Отображение z является решением задачи

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p z}{\delta u(t)},$$

$$z(t_0,u,v) = 0.$$

Рассмотрим разложение z в степенной ряд $z = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k(u,v)(t-t_0)^k$. Из начального условия получаем $z_0 = 0$. Подставим разложение для z в уравнение, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} kz_k(u,v)(t-t_0)^{k-1} = -iA\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta_p z_k(u,v)}{\delta u(t)}(t-t_0)^k.$$

При $t = t_0$ из этого равенства получаем $z_1 = -iA\dfrac{\delta_p z_0}{\delta u(t)} = 0$. Сокращая на $t - t_0$ и полагая $t = t_0$, получаем $z_2 = -iA\dfrac{\delta_p z_1}{\delta u(t)} = 0$. Продолжая этот процесс далее, получим $z_k = 0$ при всех k. Тогда $z = 0$ и $y = y_1$. Теорема доказана. □

8. Решение линейной неоднородной задачи (3.3), (3.4)

В задаче (3.3), (3.4) переменная v является параметром.

Теорема 8.1. *Пусть выполняются условия*: $u \in L_1(T)$, $\|u\|_1 < r > 0$, $v \in L_{1v}(T)$, $a_1 : T \to \mathbb{R}$, $a_2 : T \to X$ *— непрерывны,* b_{11}, b_{12} *— равномерно непрерывны и симметричны по переменным* s_1, s_2 *на* $T \times T$, b_{22} *непрерывно и симметрично по переменным* s_1, s_2. *Тогда*

$$y = U(t,t_0)\psi(uE,v)M(x_0) - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p}{\delta v(s)}U(t,s)\psi(uE,v)ds =$$

$$= \psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)M(x_0) - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p}{\delta v(s)}\psi(uE - i\chi(s,t)A, v)ds \tag{8.1}$$

является решением задачи (3.3), (3.4).

Доказательство. Произведем подстановку (8.1) в (3.3), (3.4):

$$y(t_0,u,v) = U(t,t_0)\psi(uE,v)M(x_0) = \psi(uE - i\chi(t_0,t_0)A, v)M(x_0) =$$

$$= \psi(uE,v)M(x_0) = \psi(u,v)M(x_0).$$

Начальное условие (3.4) выполняется.

Используя теоремы 6.1 и 6.2, а также равенство (7.4), находим

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p(U(t,t_0)\psi(uE,v))}{\delta u(t)}M(x_0) - i\frac{\delta_p(U(t,t)\psi(uE,v))}{\delta v(t)} - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p^2}{\delta v(s)\delta u(t)}U(t,s)\psi(uE,v)ds =$$

$$= -iA\frac{\delta_p}{\delta u(t)}[\psi(uE - i\chi(t_0,t)A, v)M(x_0) - i\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\delta_p}{\delta v(s)}\psi(uE - i\chi(s,t)A, v)ds] - i\frac{\delta_p\psi(uE,v)}{\delta v(t)} =$$

$$= -iA\frac{\delta_p y}{\delta u(t)} - i\frac{\delta_p\psi(uE,v)}{\delta v(t)}.$$

Следовательно, y является решением уравнения (3.3). Теорема доказана. $\square$

Используя вид функционала ψ и определение $U(t,t_0)$ и функции χ, формулу (8.1) можно записать в виде

$$y = \exp[i\int\limits_T a_1(s)Eu(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} a_1(s)Ads - \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2 +$$

$$+ i\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2 + \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2 -$$

$$- \int\limits_T\int\limits_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle ds_1ds_2 +$$

$$+ i\int\limits_T\int\limits_{t_0}^{t} A\langle b_{12}(s_1,s_2), v(s_2)\rangle ds_1ds_2]exp(i\int\limits_T \langle a_2(s), v(s)\rangle ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T \langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1), v(s_2)\rangle ds_1ds_2)M(x_0) -$$

$$- i\int\limits_{t_0}^{t} exp[i\int\limits_T a_1(\tau)Eu(\tau)d\tau + \int\limits_s^{t} a_1(\tau)Ad\tau - \frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2 +$$

$$+i\int_s^t\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_T\int_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\exp(i\int_T\langle a_2(\tau),v(\tau)\rangle d\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)[ia_2(s)-$$

$$-\int_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1+i\int_s^t Ab_{12}(s_1,s)ds_1-\int_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2]ds. \tag{8.2}$$

9. Математическое ожидание решения уравнения (2.1)

Теорема 9.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 8.1, *тогда математическое ожидание решения задачи* (2.1) *можно записать в виде*

$$M(x(t))=\psi(-i\chi(t_0,t)A,0)M(x_0)-i\int_{t_0}^t\frac{\delta}{\delta v(s)}\psi(-i\chi(s,t)A,0)ds$$

или в другой форме:

$$M(x(t))=\exp[\int_{t_0}^t a_1(s)Ads+\frac{1}{2}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2]M(x_0)+$$

$$+\int_{t_0}^t\exp[\int_s^t a_1(\tau)Ad\tau+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2](a_2(s)+\int_s^t Ab_{12}(s_1,s)ds_1)ds. \tag{9.1}$$

Доказательство. Согласно определению, $M(x(t))=y(t,0,0)$. Полагая в полученных выше выражениях (8.1) $u=0$, $v=0$, получаем искомые формулы. □

Замечание 9.1. Если коэффициент b_{12} равен нулю, то процессы ε и f статистически независимы. Поскольку выражение (9.1) зависит от b_{12}, то формулы для математического ожидания $M(x(t))$ различаются для статистически зависимых процессов ε, f и для статистически независимых.

Замечание 9.2. Если $b_{11}=0$, то $\varepsilon=a_1$ является не случайной функцией и (9.1) определяет математическое ожидание решения задачи (2.1), в которой только f является случайным векторным процессом.

Замечание 9.3. Если $a_1\geqslant 0$, спектр оператора A не имеет кратных собственных значений и лежит на мнимой оси, то спектр оператора $A^2\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2$ имеет отрицательные собственные значения (b_{11} по своему смыслу неотрицательная функция). В этом случае

$$M(x(t))=\exp[A\int_{t_0}^t a_1(s)ds+\frac{A^2}{2}\int_{t_0}^t\int_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)ds_1ds_2]M(x_0)$$

при возрастании t убывает. Это означает, что при этих условиях случайный шум $\varepsilon(t)$ оказывает на систему стабилизирующее влияние!

10. Смешанные моментные функции

Основные трудности в наших построениях были связаны с нахождением формул (8.1), (8.2) для решения задачи (3.3), (3.4). Оказывается, что эти формулы полезны не только для нахождения математического ожидания $M(x(t))$.

Из определения y следует

$$\frac{\delta_p y}{\delta u(\tau)}\Big|_{u=0,v=0} = iM(x(t)\varepsilon(\tau)).$$

Таким образом, смешанная моментная функция $M(x(t)\varepsilon(\tau))$ может быть получена из y с помощью операции вариационного дифференцирования.

Теорема 10.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 8.1, *тогда*

$$M(x(t)\varepsilon(\tau)) = \exp[i\int_{t_0}^{t} a_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2](a_1(\tau)E + \int_{t_0}^{t} b_{11}(\tau,s_2)Ads_2)M(x_0)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\{\exp[i\int_{s}^{t} a_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2][(a_1(\tau)E+$$

$$+\int_{s}^{t} b_{11}(\tau,s_2)Ads_2)(a_2(s) + \int_{s}^{t} Ab_{12}(s_1,s)ds_1) + b_{12}]\}ds$$

Доказательство. Поскольку вариационное дифференцирование не столь очевидно, то вычислим сначала вариационную производную:

$$\frac{\delta_p y}{\delta u(\tau)} = \exp[i\int_{T} a_1(s)Eu(s)ds + \int_{t_0}^{t} a_1(s)Ads - \frac{1}{2}\int_{T}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_{t_0}^{t}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_{T}\int_{T} u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_{T}\int_{t_0}^{t} A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2](ia_1(\tau)E - \int_{T} b_{11}(\tau,s_2)u(s_2)Eds_2 + i\int_{t_0}^{t} b_{11}(\tau,s_2)Ads_2-$$

$$-\int_{T} E\langle b_{12}(\tau,s_2),v(s_2)\rangle ds_2)\exp(i\int_{T}\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_{T}\int_{T}\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)M(x_0)-$$

$$-i\int_{t_0}^{t}\{\exp[i\int_{T} a_1(\xi)Eu(\xi)d\xi + \int_{s}^{t} a_1(\xi)Ad\xi - \frac{1}{2}\int_{T}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_{s}^{t}\int_{T} b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2 + \frac{1}{2}\int_{s}^{t}\int_{s}^{t} b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_{T}\int_{T} u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int\limits_T\int\limits_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2](ia_1(\tau)E-\int\limits_T b_{11}(\tau,s_2)u(s_2)Eds_2+i\int\limits_s^t b_{11}(\tau,s_2)Ads_2-$$

$$-\int\limits_T E\langle b_{12}(\tau,s_2),v(s_2)\rangle ds_2)[\exp(i\int\limits_T\langle a_2(\xi),v(\xi)\rangle d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)][ia_2(s)-\int\limits_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1+$$

$$+i\int\limits_s^t Ab_{12}(s_1,s)ds_1-\int\limits_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2]+$$

$$+\exp[i\int\limits_T a_1(\tau)Eu(\tau)d\tau+\int\limits_s^t a_1(\tau)Ad\tau-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int\limits_s^t\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_s^t\int\limits_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int\limits_T\int\limits_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int\limits_T\int\limits_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\exp(i\int\limits_T\langle a_2(\xi),v(\xi)\rangle d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)(-Eb_{12}(\tau,s))\}ds.$$

Полагая в этом выражении $u=0$, $v=0$, приходим к указанному в теореме выражению для смешанной моментной функции. Теорема доказана. □

Более громозко выражение для второй смешанной функции $\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle$.

Теорема 10.2. *Если выполняются условия теоремы* 8.1*, то*

$$\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle=\langle\exp(\int\limits_{t_0}^t a_1(s)Ads)\{\langle\int\limits_{t_0}^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1,\omega\rangle+\langle a_2(\tau),\omega\rangle\}M(x_0),\omega\rangle+$$

$$+\langle\int\limits_{t_0}^t\{\exp(\int\limits_s^t a_1(\xi)Ad\xi)\{\langle\int\limits_s^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1,\omega\rangle a_2(s)+\langle a_2(\tau),\omega\rangle a_2(s)+b_{22}(s,\tau)\omega\}\}ds,\omega\rangle. \tag{10.1}$$

Доказательство. Используя определение y, находим

$$\langle\frac{\delta_p}{\delta v(\tau)}\langle y,\omega\rangle,\omega\rangle|_{u=0,v=0}=\langle M(x(t)e(u,v)i\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle|_{u=0,v=0}=i\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle.$$

Таким образом, $\langle M(x(t)\langle f(\tau),\omega\rangle),\omega\rangle$ можно найти вариационным дифференцированием y.

Используя выражение (8.2), находим

$$\langle\frac{\delta_p}{\delta v(\tau)}\langle y,\omega\rangle,\omega\rangle=\langle\exp[i\int\limits_T a_1(s)Eu(s)ds+\int\limits_{t_0}^t a_1(s)Ads-\frac{1}{2}\int\limits_T\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int\limits_{t_0}^t\int\limits_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^t\int\limits_{t_0}^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_T\int_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_{t_0}^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\{\langle(-\int_T u(s_1)Eb_{12}(s_1,\tau)ds_1+$$

$$+i\int_{t_0}^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1),\omega\rangle\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)+$$

$$+\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)\langle(ia_2(\tau)-\int_T b_{22}(\tau,s_2)v(s_2)ds_2),\omega\rangle\}M(x_0),\omega\rangle-$$

$$-\langle i\int_{t_0}^t\exp[i\int_T a_1(\xi)Eu(\xi)d\xi+\int_s^t a_1(\xi)Ad\xi-\frac{1}{2}\int_T\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)u(s_2)Eds_1ds_2+$$

$$+i\int_s^t\int_T b_{11}(s_1,s_2)u(s_1)Ads_1ds_2+\frac{1}{2}\int_s^t\int_s^t b_{11}(s_1,s_2)A^2ds_1ds_2-$$

$$-\int_T\int_T u(s_1)E\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2+$$

$$+i\int_T\int_s^t A\langle b_{12}(s_1,s_2),v(s_2)\rangle ds_1ds_2]\{\langle(-\int_T u(s_1)Eb_{12}(s_1,\tau)ds_1+$$

$$+i\int_s^t Ab_{12}(s_1,\tau)ds_1),\omega\rangle\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)[ia_2(s)-\int_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1-\int_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2]+$$

$$+\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)\langle(ia_2(\tau)-\int_T b_{22}(\tau,s_2)v(s_2)ds_2),\omega\rangle(ia_2(s)-$$

$$-\int_T Eu(s_1)b_{12}(s_1,s)ds_1-\int_T b_{22}(s,s_2)v(s_2)ds_2)+\exp(i\int_T\langle a_2(s),v(s)\rangle ds-$$

$$-\frac{1}{2}\int_T\int_T\langle b_{22}(s_1,s_2)v(s_1),v(s_2)\rangle ds_1ds_2)(-b_{22}(s,\tau)\omega)\}\}ds,\omega\rangle.$$

Подставляя в это выражение $u=0$, $v=0$, находим (10.1). Теорема доказана. □

11. Заключение

В статье рассмотрена задача о нахождении моментных функций решения задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Все изложение проводится без использования базиса. Рассматривается задача, когда случайные коэффициенты заданы гауссовым характеристическим функционалом и могут быть статистически зависимыми. Однако для нахождения математического ожидания решения (см. формулу (9.1)) достаточно знать математическое ожидание и ковариационную функцию случайного коэффициента ε и всего лишь математическое ожидание $a_2(t) = M(f(t))$ случайного процесса f и $b_{12}(s_1, s) = M(\varepsilon(s_1)f(s)) - M(\varepsilon(s_1))M(f(s))$. Полученные в процессе исследования формулы (8.1), (8.2) для вспомогательного отображения y позволяют находить при помощи сравнительно простой операции вариационного дифференцирования смешанные моментные функции более высокого порядка, например, $M(x(t)\varepsilon(\tau))$, $\langle M(x(t)\langle f(\tau), \omega\rangle), \omega\rangle$. Аналогично можно найти, например, $M(x(t)\varepsilon(\tau_1)\varepsilon(\tau_2)) = -\dfrac{\delta_p^2 y}{\delta u(\tau_1)\delta u(\tau_2)}\Big|_{u=0,v=0}$ и другие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адомиан Дж.* Стохастические системы. — М.: Мир, 1987.
2. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1986.
3. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: ФМ, 1961.
4. *Данфорд Н., Шварц Д.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
5. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
6. *Тихонов В. И.* Стохастическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. — М.: ФМ, 1959.
8. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.

Владимир Григорьевич Задорожний
Воронежский государственный университет, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Мария Александровна Коновалова
Воронежский государственный университет, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., д. 1
E-mail: thereallmariya@gmail.com

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-599-614 UDC 517.97

Differential Equation in a Banach Space Multiplicatively Perturbed by Random Noise

© 2017 **V. G. Zadorozhniy, M. A. Konovalova**

Abstract. We consider the problem of finding the moment functions of the solution of the Cauchy problem for a first-order linear nonhomogeneous differential equation with random coefficients in a Banach space. The problem is reduced to the initial problem for a nonrandom differential equation with ordinary and variational derivatives. We obtain explicit formula for the mathematical expectation and the second-order mixed moment functions for the solution of the equation.

REFERENCES

1. G. Adomian, *Stokhasticheskie sistemy* [Stochastic Systems], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
2. A. A. Borovkov, *Teoriya veroyatnostey* [Probability Theory], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).

©Peoples' Friendship University of Russia, 2017

3. I. M. Gel'fand, N. Ya. Vilenkin, *Nekotorye primeneniya garmonicheskogo analiza. Osnashchennye gil'bertovy prostranstva* [Some Applications of Harmonic Analysis. Equipped Hilbert Spaces], FM, Moscow, 1961 (in Russian).
4. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], IL, M., 1962 (Russian translation).
5. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Methods of Variational Analysis], RKhD, Moscow—Izhevsk, 2006 (in Russian).
6. V. I. Tikhonov, *Stokhasticheskaya radiotekhnika* [Stochastic Radio Engineering], Sov. Radio, Moscow, 1966 (in Russian).
7. G. M. Fikhtengol'ts, *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T. 2* [A Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 2], FM, Moscow, 1959 (in Russian).
8. E. Hille, R. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis And Semi-Groups], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).

V. G. Zadorozhniy
Voronezh State University, 1 Universitetskaya sq., 394006 Voronezh, Russia
E-mail: zador@amm.vsu.ru

M. A. Konovalova
Voronezh State University, 1 Universitetskaya sq., 394006 Voronezh, Russia
E-mail: thereallmariya@gmail.com