Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 586–598

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-586-598 УДК 517.956.4

О СКОРОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАСТУЩИМ МЛАДШИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© 2017 г. **В. Н. ДЕНИСОВ**

Аннотация. В задаче Коши

$$L_1u \equiv Lu + (b, \nabla u) + cu - u_t = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

для недивергентного параболического уравнения с растущим младшим коэффициентом в полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ при $N \geqslant 3$ получены достаточные условия экспоненциальной скорости стабилизации решения при $t \to +\infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ рассмотрим задачу Коши при $N \geqslant 3$

$$L_1u \equiv Lu + (b, \nabla u) + cu - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

где

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)u_{x_ix_k}, \qquad (b,\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)u_{x_i}, c(x,t) \leqslant 0. \tag{1.3}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (1.1) непрерывны в $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ и удовлетворяют условию Гельдера равномерно по x, t на каждой ограниченной области G в D. Коэффициенты при старших производных в (1.1) симметричны, $a_{ik} = a_{ki}$, $i,k = 1,\ldots,N$, и удовлетворяют условию

$$\lambda_0^2|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k \leqslant \lambda_1^2|\xi|^2, \tag{1.4}$$

где $\lambda_0 > 0, \lambda_1 > 0$ для $\forall (x,t) \in D$,

Будем говорить, что коэффициенты $b_1(x,t),\ldots,b_N(x,t)$ удовлетворяют условию (B), если существует $B > 0$ такое, что

$$\sup_D (1+r)\sum_{i=1}^{N} |b_i(x,\,t)| \leqslant B, r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}. \tag{1.5}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-00471).

Будем говорить, что коэффициенты $c(x,t)$ удовлетворяют условию (C), если для всех (x,t) в D справедливо неравенство

$$c(x,t) \leqslant k_\alpha(r) = \begin{cases} -\alpha^2 & \text{при } r \leqslant 1, \\ -\alpha^2 r^{2l} & \text{при } r > 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

где $0 < l \leqslant 1$.

Задача Коши (1.1), (1.2) изучалась во многих работах (см., например, [2, 4–7, 9, 10, 22]).

При сделанных здесь предположениях существует и единственно классическое ограниченное решение задачи (1.1), (1.2) (см. [15, с. 78, теорема 4]).

Скорость стабилизации решений параболических уравнений изучалась, например, в работах [4–6, 11–14]. В [15, с. 181] методом барьеров, основанном на принципе максимума, установлено, что для ограниченной начальной функции $u_0(x)$ решение задачи Коши (1.1), (1.2) с ограниченными коэффициентами при выполнении условия

$$c(x,t) \leqslant C_0 < 0 \tag{1.7}$$

удовлетворяет неравенству

$$|u(x,t)| \leqslant M\exp(-at), a > 0, t > 0.$$

Отметим, что в работах [4–6] получены другие оценки стремления к нулю при $t \to +\infty$ решения краевых задач, однако при этом от начальной функции $u_0(x)$ требовалось, чтобы эта функция была финитной и достаточно гладкой [4, с. 5] или чтобы $u_0(x)$ была ограниченной, непрерывной и существовал в смысле Лебега интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u_0(x)|dx.$$

Целью настоящей работы является получение достаточных условий, обеспечивающих экспоненциальную скорость стабилизации решения при $t \to +\infty$ равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$ для любой ограниченной непрерывной в $\mathbb{R}^N$ начальной функции $u_0(x)$. Метод доказательства основан на построении точных по порядку роста на бесконечности антибарьеров [22], учитывающих поведение коэффициентов уравнения (1.1) при больших $|x|$, и не использует оценок фундаментального решения задачи Коши.

Будем говорить, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) *стабилизируется* в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$), если существует предел

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

Стабилизация решения задачи Коши для параболических уравнений второго порядка для различных классов начальных функций изучалась в работах [7, 8, 10].

С обзором работ по стабилизации решений параболических уравнений можно ознакомиться в работе [8]. Интересные результаты по параболическим уравнениям содержатся в работе [2].

2. Формулировка результата

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если коэффициенты* $b_i(x,t)$, $i = 1,\dots,N$, *в* (1.1) *удовлетворяют условию* (B), *коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C), *функция* $u_0(x)$ *непрерывна и ограничена в* $\mathbb{R}^N$, *то для решения задачи Коши* (1.1), (1.2) *при*

$$n = n(l), \text{ где } \frac{1}{3} < \frac{1}{n(l)} \leqslant \frac{1}{2},$$

справедлива оценка

$$|u(x,t)| \leqslant M_2\exp[-m^2 t^{\frac{1}{n}}], m = m(K) > 0, \tag{2.1}$$

равномерная по x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

В случае, когда в уравнении (1.1) $L = \Delta$ — оператор Лапласа, $b_i(x,t) = 0$, $i = 1,\dots,N$, $c(x,t) = c(x)$, теорема 2.1 была установлена в работе [14], т. е. теорема 2.1 уточняет теорему 1 из работы [14].

Замечание 2.1. Утверждение теоремы 2.1 не допускает усиления, т. е. нельзя заменить компакт K в $\mathbb{R}^N$ на все пространство $\mathbb{R}^N$.

3. О растущих суперрешениях для эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$

В области $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ рассмотрим стационарное решение $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(r)$ неравенства

$$L_2\Gamma \equiv L\Gamma_\alpha + (b, \nabla\Gamma_\alpha) + k_\alpha(r)\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \tag{3.1}$$

где L — оператор в (1.3), $b_i(x,t)$, $i = 1, \dots, N$, удовлетворяет условию (B). Функция $k_\alpha(r)$ взята из неравенства (1.6).

Будем искать решение $\Gamma_\alpha(r)$ неравенства (3.1) такое, что $\Gamma_\alpha(r) > 0$, $\Gamma'_\alpha(r) \geqslant 0$, и для которого имеет место асимптотика при $r \to \infty$

$$\Gamma_\alpha(r) \sim C_1 r^{-\frac{s+l-1}{2}} \exp\Big(\frac{\alpha}{(1+l)\lambda_1} r^{1+l}\Big), \tag{3.2}$$

где $C_1 > 0, 0 < l < 1, \lambda_1$ — постоянная из (1.4).

Применяя формулы дифференцирования

$$\Gamma_{x_i} = \frac{x_i}{r}\Gamma', \quad \Gamma_{x_i x_k} = \frac{x_i x_k}{r^2}\left[\Gamma'' - \frac{1}{r}\Gamma'\right], \quad \Gamma_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2}\left[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\right] + \frac{\Gamma'}{r},$$

получим равенство

$$L_2\Gamma_\alpha = Q\left\{\left[\Gamma''_\alpha - \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\right] + \frac{\Gamma'_\alpha}{r}\frac{\sum\limits_{i=1}^N a_{ii} + b_i x_i}{Q} + \frac{k_\alpha(r)\Gamma_\alpha}{Q}\right\}, \tag{3.3}$$

где $Q = Q(x,t) = \sum\limits_{i,\,k=1}^N a_{ik}(x,\,t)\dfrac{x_i x_k}{r^2}$.

Из неравенств (1.4) следует, что

$$\lambda_0^2 \leqslant Q(x,t) \leqslant \lambda_1^2, \ \frac{1}{Q}\sum_{i=1}^N a_{ii} \leqslant \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}. \tag{3.4}$$

Учитывая в (3.3) условия (B) и (C), и неравенства (1.5), (1.6) и очевидное неравенство $\dfrac{B}{1+r} \leqslant \dfrac{B}{r}$, при $t > 0$, $0 < r \leqslant 1$, будем иметь

$$L_2\Gamma \leqslant Q\left[\Gamma''_\alpha + \left(\frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} - 1\right)\frac{\Gamma'_\alpha}{r} - \frac{\alpha^2}{\lambda_1^2}\Gamma_\alpha\right]. \tag{3.5}$$

Обозначим

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1} \tag{3.6}$$

и для функции $Z_\alpha(r)$ рассмотрим задачу

$$Z''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}Z'_\alpha(r) - \overline{\alpha}^2 Z_\alpha(r) = 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \quad Z_\alpha(0) = 1, \quad Z'_\alpha(0) = 0. \tag{3.7}$$

Положим в (3.5) $\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = Z_\alpha(r)$, где $Z_\alpha(r)$ — решение задачи (3.7), получим неравенство

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \quad t > 0. \tag{3.8}$$

Из теории функций Бесселя [3, с. 91] следует, что решение задачи (3.7) существует, единственно и представимо в виде

$$Z_\alpha(r) = q_1(s)\frac{I_{\frac{s-2}{2}}(r\overline{\alpha})}{(r\overline{\alpha})^{\frac{s-2}{2}}}, \quad q_1(s) = 2^{\frac{s-2}{2}}\Gamma\frac{s}{2}, \tag{3.9}$$

где $\Gamma\Big(\dfrac{s}{2}\Big)$ — функция Эйлера [16, т. 1, с. 235], $I_\nu(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [3, с. 94]. Из представления (3.9) и формул [3, п. 3.71], следует, что $Z_\alpha(r) > 0$ при $r > 0$ и

$$b_0(\alpha) = Z_\alpha|_{r=1} = q_1(s)\overline{\alpha}^{\frac{2-s}{2}} I_{\frac{s-2}{2}}(\overline{\alpha}) > 0, \quad b_1(\alpha) = Z'_\alpha(r)|_{r=1} = q_1(s)\overline{\alpha}^{2-\frac{s}{2}} I_{\frac{s}{2}}(\overline{\alpha}), \tag{3.10}$$

$$\frac{d}{dr}\frac{I_\nu(r)}{r^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(r)}{r^\nu} > 0.$$

При $r \geqslant 1$ имеет место равенство $b_\alpha(r) = -\dfrac{\alpha^2}{r^2}$, поэтому, учитывая в (3.3) неравенство (3.4) и неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^N b_i x_i\right| \leqslant \frac{B}{1+r} \leqslant \frac{B}{r}, \quad r \geqslant 1,$$

справедливое в силу условия (B), будем иметь:

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant \lambda_1^2[\Gamma''_\alpha + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\alpha - \frac{\alpha^2 r^{2\ell}}{\lambda_1^2}\Gamma_\alpha], \tag{3.11}$$

где

$$S = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2}, \quad \overline{\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda_1}.$$

Рассмотрим для функции $h_\alpha(r)$, $r \geqslant 1$, задачу

$$h''_\alpha(r) + \frac{s-1}{r}h_\alpha(r) - \frac{\alpha^2 r^{2l}}{\lambda_1^2}h_\alpha(r) = 0, \quad r > 1, \tag{3.12}$$

$$h_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad h'_\alpha(1) = b_1(\alpha),$$

где использованы обозначения (3.6) и постоянные $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$, определенные в (3.10). Ясно, что решение задачи (3.12) существует и единственно (см. [18, с. 167]).

Положив в (3.11) $\Gamma_\alpha(r) = h_\alpha(r)$ при $r \geqslant 1$, где $h_\alpha(r)$ — решение задачи (3.12), получим неравенство

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 1, \quad t > 0. \tag{3.13}$$

Нами определена функция

$$\Gamma = \Gamma_\alpha(r) = \begin{cases} Z_\alpha(r) & \text{при } r \leqslant 1, \\ h_\alpha(r) & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.14}$$

где $Z_\alpha(r)$, $h_\alpha(r)$ — решения задач (3.7) и (3.12) соответственно.

Функция (3.14) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функции и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ справедливы условия «склейки» из (3.12):

$$Z_\alpha(1) = h_\alpha(1) = b_0(\alpha), Z'_\alpha(1) = h'_\alpha(1) = b_(\alpha).$$

Поэтому из непрерывности коэффициентов уравнений (3.6) и (3.12) имеем:

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{s-1}{r} = \lim_{r\to 1+0}\frac{s-1}{r} = s-1,$$

$$\lim_{r\to 1+0}\overline{\alpha}^2 r^{2l} = \overline{\alpha}^2 = \lim_{r\to 1-0}\overline{\alpha}^2.$$

Из этих равенств и условия «склейки» (3.12) следует, что

$$Z''_\alpha(1) = h''_\alpha(1).$$

Из (3.8) и (3.13) вытекают неравенства

$$L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 0, \quad t > 0. \tag{3.15}$$

Изучим некоторые качественные свойства решений задачи (3.12).

Лемма 3.1. *Решение задачи* (3.12) *обладает следующими свойствами*:

1. $h_\alpha(r) > 0$, $r > 1$;
2. $h'_\alpha(r) > 0$, $r > 1$;

3. $\lim\limits_{r\to\infty} h_\alpha(r) = +\infty$.

Доказательство. Запишем уравнение (3.12) в виде

$$\frac{d}{dr}\left(r^{s-1}\frac{dh_\alpha(r)}{dr}\right) = \overline{\alpha}^2 r^{s-1+2l} h_\alpha(r),$$

$$h_\alpha(1) = b_0(\alpha), \quad h'_\alpha(1) = b_1(\alpha).$$

Дважды проинтегрируем последнее уравнение от 1 и r и получим

$$\frac{dh_\alpha(r)}{dr} = \frac{b_1(\alpha)}{r^{s-1}} + \frac{\overline{\alpha}^2}{r^{s-1}}\int\limits_1^r \tau^{s-1+2l} h_\alpha(\tau)d\tau, \tag{3.16}$$

$$h_\alpha(r) = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau + \overline{\alpha}^2\int\limits_1^r h_\alpha(\xi)\xi^{s-1+2l}d\xi. \tag{3.17}$$

В силу положительности $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$, вытекающей из непрерывности функции $h_\alpha(r)$, правая часть (3.17) будет положительна в достаточно малой окрестности $r = 1$, т.е. при достаточно малом $r - 1 > 0$. Докажем, что она остается положительной и при всех $r > 1$. Предположим противное, тогда при некотором $r = r_1 > 1$ функция $h_\alpha(r)$ обратится в нуль (первый нуль $h_\alpha(r)$ при $r > 1$). Тогда из (3.17) при $r = 1$ получим

$$h_\alpha(r_1) = 0 = b_0(\alpha) + b_1(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau + \overline{\alpha}^{-2}\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau\int\limits_1^\tau h_\alpha(\xi)\xi^{s-1+2l}d\xi. \tag{3.18}$$

Так как при $1 \leqslant \xi \leqslant r_1$, $s > 1$ имеем $h_\alpha(\xi) > 0$, то очевидно, что правая часть (3.18) является положительной. Полученное противоречие доказывает, что $h_\alpha(r) > 0$ при всех $r > 1$. Утверждение 1 леммы 3.1 доказано. Из (3.16) тогда следует, что

$$\frac{dh_\alpha(r)}{dr} > 0, \quad r \geqslant 1. \tag{3.19}$$

Утверждение 2 леммы 3.1 доказано. Из (3.17) тогда вытекает, что $h_\alpha(r) \geqslant b_0(\alpha) > 0$ при $r \geqslant 1$. Поэтому из (3.17) и (3.19)получим

$$h_\alpha(r) - b_0(\alpha) = \int\limits_1^r \frac{dh_\alpha(\tau)}{d\tau}d\tau > \overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau\int\limits_1^\tau \sigma^{s-1+2l}d\sigma =$$

$$= \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s+2l}\left[\int\limits_1^r \tau^{1-s}(\tau^{s+2l}-1)d\tau\right] = \frac{\overline{\alpha}^2 b_0(\alpha)}{s+2l}\left[\frac{r^{2+2l}}{2+2l} - \frac{r^{2-s}-1}{2-s}\right] \to \infty$$

при $r \to \infty$, поскольку $s = \dfrac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2 + B}{\lambda_0^2} > N > 2$. Утверждение 3 доказано. Лемма 3.1 доказана. $\square$

Лемма 3.2. *Функция* (3.14) *обладает следующими свойствами*:

1. $L_2\Gamma_\alpha(r) \leqslant 0$, *при* $r \geqslant 0$, $t > 0$;
2. $\Gamma_\alpha(r_1) > \Gamma_\alpha(r_2)$, $r_1 > r_2$;
3. $\Gamma_{\alpha_1}(r) > \Gamma_{\alpha_2}(r)$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$;
4. $\Gamma_\alpha(r) = C_1 r^{-\frac{s+l-1}{2}}\exp\left(\dfrac{\alpha}{\lambda_1(1+l)}r^{1+l}\right)[1+\varepsilon(r)]$, *где* $\lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0$, $C_1 > 0$, $0 < l \leqslant 1$, s *из* (3.6).

Доказательство. Из неравенств (3.8) и (3.13) следует, что функция удовлетворяет свойству 1. Свойство 2 при $r \leqslant 1$ непосредственно следует из (3.9) и (3.10), а при $r \geqslant 1$ из утверждения 2 леммы 3.1. Докажем свойство 3. Пусть $\alpha_1 > \alpha_2$, $r > 0$, тогда, определяя $\Gamma_\alpha(r)$ по формуле (3.14) и вводя соответствующую функцию $W(r)$ по формуле

$$W(r) = r^{s-1}[\Gamma'_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r) - \Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma'_{\alpha_2}(r)],$$

после дифференцирования $W(r)$ по r получим неравенство

$$W'(r) = \frac{s-1}{r}W(r) + r^{s-1}[\Gamma''_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r) - \Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma''_{\alpha_2}(r)] =$$

$$= \frac{s-1}{r}W(r) - \frac{s-1}{r}W(r) + \frac{r^{s-1}}{\lambda_1^2}\Gamma_{\alpha_1}(r)\Gamma_{\alpha_2}(r)(k_{\alpha_1}(r) - k_{\alpha_2}(r)) > 0.$$

Так как $W(0) = 0$, то из неравенства $W'(r) > 0$ вытекает, что $W(r) > 0$, $r > 0$. Следовательно,

$$\left(\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)}\right)' = \frac{W(r)}{r^{s-1}\Gamma^2_{\alpha_2}(r)} > 0, \quad r > 0, \quad \alpha_1 > \alpha_2.$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая, что $\dfrac{\Gamma_{\alpha_1}(0)}{\Gamma_{\alpha_2}(0)} = 1$, получим

$$\frac{\Gamma_{\alpha_1}(r)}{\Gamma_{\alpha_2}(r)} - 1 = \int\limits_0^r \frac{W(\tau)d\tau}{\tau^{s-1}\Gamma^2_{\alpha_2}(\tau)} > 0.$$

Свойство 3 доказано.

Докажем асимптотическую формулу в свойстве 4.

В уравнении (3.12) сделаем замену $h_\alpha(r) = H(r)r^{\frac{1-s}{2}}$, при этом получим, что функция $H(r)$ является решением задачи

$$H'' - H\left(\overline{\alpha}^2 r^{2l} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}\right) = 0, \quad r > 1, \tag{3.20}$$

$$H|_{r=1} = b_0(\alpha), \quad H'|_{r=1} = b_1(\alpha) + \frac{s-1}{2}b_0(\alpha) = b_2(\alpha),$$

где $b_0(\alpha)$ и $b_1(\alpha)$ определены в (3.10).

Пусть

$$q(r) = \overline{\alpha}^2 r^{2l} + \frac{(s-1)(s-3)}{4r^2}, \quad r \geqslant 1. \tag{3.21}$$

Тогда задачу (3.20) можно записать в виде

$$H'' - q(r)H = 0, \quad r > 1, \tag{3.22}$$

$$H(1) = b_0(\alpha), \quad H'(1) = b_2(\alpha).$$

Ясно, что $q(r) > 0$ при $r > 1$, $q''(r)$ — непрерывная функция при $r > 1$ и, кроме того, как легко видеть, сходится интеграл

$$\int\limits_1^\infty |d(r)|dr, \text{ где } d(r) = \frac{1}{8}\frac{q''(r)}{q^{3/2}(r)} - \frac{5}{32}\frac{(q'(r))^2}{q^{5/2}(r)}$$

и существует предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{q'(r)}{q^{3/2}(r)} = 0.$$

Поэтому для решений уравнения (3.22) выполнены все условия известной теоремы об асимптотике Грина—Лиувилля [18, т. 3, с. 394] (см. также [21, с. 300] и монографию [20]). По этой теореме существует фундаментальная система решений $x_1(r)$, $x_2(r)$ уравнения (3.22) такая, что

$$x_{1,2}(r) = q^{-1/4}(r)\exp\left(\pm S(r)\right)[1 + \varepsilon_{1,2}(r)], \tag{3.23}$$

где $S(r) = \int\limits_1^r \sqrt{q(\tau)}d\tau \to +\infty$, $\varepsilon_{1,2}(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, и эту асимптотику можно дифференцировать:

$$x'_{1,2}(r) = \pm q^{1/4}\exp\left(\pm S(r)\right)[1 + \varepsilon_{3,4}(r)], \tag{3.24}$$

$\varepsilon_{3,4}(r) \to 0$, $r \to +\infty$.

Применяя формулу Остроградского—Лиувилля [17, с. 50] и формулы (3.23), (3.24), вычислим определитель Вронского:

$$x_1(r)x'_2(r) - x'_1(r)x_2(r) = -2. \tag{3.25}$$

Поэтому решения $x_1(r)$, $x_2(r)$ линейно независимы. Так как $\lim\limits_{r\to+\infty}\int\limits_1^r\sqrt{q(\tau)}d\tau\to+\infty$, то решение $x_1(r)$ монотонно возрастает и существует

$$\lim_{r\to+\infty}x_1(r)=+\infty, \tag{3.26}$$

а решение $x_2(r)$ — монотонно убывает,

$$\lim_{r\to+\infty}x_2(r)=0. \tag{3.27}$$

Решение задачи (3.22) с заданными условиями при $r=1$ будем искать в виде

$$H(r)=C_1x_1(r)+C_2x_2(r), \tag{3.28}$$

где постоянные C_1 и C_2 однозначно определяются из системы

$$C_1x_1(1)+C_2x_2(1)=b_0(\alpha),$$
$$C_1x_1'(1)+C_2x_2'(1)=b_2(\alpha)$$

с ненулевым определителем (3.25).

Докажем, что в (3.28) постоянная

$$C_1>0. \tag{3.29}$$

Если предположить, что это не так, то из леммы 3.2 при $C_1<0$ следует, что

$$\lim_{r\to+\infty}h_\alpha(r)=\lim_{r\to+\infty}\Gamma_\alpha(r)=\lim_{r\to+\infty}H(r)r^{\frac{1-s}{2}}=-\infty,$$

что противоречит утверждению 3 леммы 3.2, согласно которому

$$\lim_{r\to+\infty}h_\alpha(r)=\lim_{r\to+\infty}H(r)r^{\frac{1-s}{2}}=+\infty,$$

поэтому $\lim\limits_{r\to+\infty}H(r)=+\infty$. Таким образом, из (3.28), (3.29), (3.27), (3.26) следует, что $H(r)\sim C_1x_1(r), r\to+\infty$.

Подставляя (3.21) в (3.22), (3.23), мы получим для $\Gamma_\alpha(r)$ искомую асимптотику. Лемма 3.2 доказана. □

Рассмотрим функцию

$$v(r)=(1-\frac{r^2}{4h^2}),\quad r\leqslant 2h. \tag{3.30}$$

Лемма 3.3. *Функция* (3.30) *обладает свойствами*:

1. $0\leqslant v(r)\leqslant 1$ *для* $0\leqslant r\leqslant 2h$;
2. $3/4\leqslant v(r)\leqslant 1$ *для* $0\leqslant r\leqslant h$;
3. *выполнено*

$$L_2v\equiv Lv(r)+\sum_{i=1}^N b_i(x,t)v_{x_i}+k_\alpha(r)v+\beta v(r)\leqslant 0, r\leqslant h, \tag{3.31}$$

где

$$\beta=\frac{\lambda_0^2N-B}{2h^2}>0. \tag{3.32}$$

Доказательство. Свойства 1, 2 легко проверяются прямым вычислением. Докажем (3.31). Из неравенств (1.4) и того, что $a_\alpha(r)v\leqslant 0$, $\lambda v(r)\leqslant\lambda$, получим

$$\sum_{i=1}^N a_{ii}(x,t)\geqslant\lambda_0^2N, -B\leqslant\sum_{i=1}^N b_i(x,t)x_i\leqslant B.$$

Поэтому

$$L_2v=-\frac{\sum\limits_{i=1}^N a_{ii}}{2h^2}-\frac{\sum\limits_{i=1}^N b_ix_i}{2h^2}+k_\alpha(r)v+\beta v\leqslant-\frac{B-\lambda_0^2N}{2h^2}+\beta=0,$$

так как $v\leqslant 1$ и $k_\alpha(r)v(r)\leqslant 0$. Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть $B < N\lambda_0^2$, тогда*

$$G_1(x,t) = v(r)e^{-\beta t}, \tag{3.33}$$

где $v(r)$ — функция (3.30),

$$\beta = \frac{\lambda_0^2 N - B}{2h^2} > 0, \tag{3.34}$$

удовлетворяет соотношениям

$$LG_1 + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)G_{1x_i} + k_\alpha(r)G_1 \leqslant \frac{\partial G_1}{\partial t}, \quad r \leqslant h, \quad t > 0, \tag{3.35}$$

$$G_1(x,0) = v(r), \quad r < h, \tag{3.36}$$

$$\lim_{t\to+\infty} G_1(x,t) = 0, \tag{3.37}$$

равномерно по $x \in r \leqslant h$.

Доказательство. Используя свойства 1–3 леммы 3.3 и функцию (3.30), получим

$$L_1 v \leqslant e^{-\beta t}[Lv + (b, \nabla v_1) + k_\alpha(r)v + \beta v] \leqslant 0, r \leqslant h, t > 0.$$

Лемма 3.4 доказана. □

Так как функция $u_0(x)$ ограничена и $c(x,t) \leqslant 0$, то решение задачи (1.1), (1.2) является ограниченным в D. Следовательно, и решение задачи

$$Lu_1 + (b, \nabla u_1) + cu_1 - u_{1t} = 0 \text{ в } D, \tag{3.38}$$

$$u_1(x,0) = u_1(x),$$

где

$$0 \leqslant u_1(x) \leqslant B_1,$$

тоже является ограниченным в D.

4. Доказательство теоремы 2.1

Достаточно доказать утверждения теоремы 2.1 для решения задачи Коши

$$Lv + (b, \nabla v) + k_\alpha(r)v - v_t = 0 \text{ в } D, \tag{4.1}$$

$$v(x,0) = B_1 > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2}$$

Ясно, что $v(x,t) > 0$ (см. [15, п. 4]).

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$, выберем $m > 1$ так, чтобы замкнутый шар $\overline{B_m} = \{r \leqslant m\}$ содержал внутри компакт K. По теореме Вейерштрасса [16, с. 90] функция $\Gamma_\alpha(r)$ достигает максимума $\Gamma_\alpha(m)$ в шаре $\overline{B_m}$. Так как $\Gamma_\alpha(r) > 0$, то нормируем эту функцию, полагая:

$$\overline{\Gamma_\alpha}(r) = \frac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(m)}. \tag{4.3}$$

Ясно, что $\dfrac{\Gamma_\alpha(r)}{\Gamma_\alpha(m)} \leqslant 1$ при $r \leqslant m$. Для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда очевидно, что

$$\delta\overline{\Gamma_\alpha} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4}$$

при $r \leqslant m$.

Рассмотрим задачу Коши (4.1), (4.2). Из принципа максимума [15, с. 28] и однородности линейных уравнений (1.1) и (4.1) вытекает, что для доказательства теоремы 2.1 достаточно установить оценку вида (2.1), т. е. для решения задачи (4.1), (4.2)

$$v(x,t) \leqslant M_1 \exp(-at^{\frac{1}{n}}),$$

где

$$t \geqslant t_1, \quad a = a(\lambda_0, \lambda_1, l, K, \alpha) > 0, \quad M = M(K), n = n(l)$$

и
$$\frac{1}{n}=\frac{1+l}{3+l}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{3}<\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{2}, \quad 0<l\leqslant 1,$$
равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Кроме того, по тем же свойствам можно, не ограничивая общности, считать, что $v(x,0)=u_1=1$, $x\in\mathbb{R}^N$, т. е. $B_1=1$.

Рассмотрим функцию
$$W(x,t)=\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)-v(x,t), \tag{4.5}$$
где $\overline{\Gamma_\alpha}(r)$ функция (4.3), $v(x,t)$ — решение задачи Коши (4.1), (4.2), в которой $v(x,0)=1$.

Из свойства 4 леммы 3.2 очевидно следует, что найдется $r_1>m>1$ такое, что
$$r^{-\frac{s+l-1}{2}}\exp\left(\frac{\alpha}{2(1+l)\lambda_1}r^{1+l}\right)\geqslant 1 \quad \text{при } r\geqslant r_1. \tag{4.6}$$
Поэтому при $r\geqslant r_1$ справедлива оценка снизу
$$\delta\overline{\Gamma_\alpha}(r)\geqslant\frac{\delta}{2}\frac{C_1}{\Gamma(m)}\exp\left(ar^{S_1}\right), \tag{4.7}$$
где
$$a=\frac{\alpha}{2(1+l)\lambda_1}, \quad S_1=1+l, \quad 0<l\leqslant 1.$$

Для $\forall\varepsilon>0$ выберем $h>0$ настолько большим, чтобы $r\geqslant h>m$ и
$$W(x,t)|_{|x|=h}\geqslant 0 \quad \text{для всех } t>0. \tag{4.8}$$
Такой выбор $h>0$ возможен, так как функция $v(x,t)$ является ограниченной: $0<v(x,t)\leqslant 1$, а функция
$$\delta\frac{C_1}{2\Gamma(m)}\exp\left(ar^{S_1}\right), \quad S_1=1+l, a=\frac{\alpha}{2(1+l)\lambda_1},$$
является экспоненциально растущей при $r\to\infty$. В силу (4.7) достаточно выбрать h из условия
$$\frac{C_1\varepsilon}{4\Gamma(m)}\exp\left(ah^{S_1}\right)=1. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует
$$ah^{S_1}=\ln\frac{B_2}{\varepsilon}, \tag{4.10}$$
где
$$B_2=\frac{4\Gamma(m)}{C_1}>0, \quad a=\frac{\alpha^2}{2(1+l)\lambda_1}.$$

Из (4.10) получаем
$$h^2(\varepsilon)=a^{-\frac{2}{S_1}}\left(\ln\frac{B_2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{S_1}}. \tag{4.11}$$

Очевидно, что при этом функция (4.5) удовлетворяет соотношениям
$$L_2W(x,t)\leqslant 0, \quad |x|<h, \quad t>0, \tag{4.12}$$
$$W(x,t)|_{|x|=h}\geqslant 0, \quad t>0, \tag{4.13}$$
$$W(x,0)=\delta\overline{\Gamma}_\alpha(r)-1, \quad |r|<1. \tag{4.14}$$

Введем функцию
$$G_2(x,t)=AG_1(x,t), \quad |x|\leqslant h, \quad t>0, \tag{4.15}$$
где $G_1(x,t)$ — функция (3.33), а число $A<0$ выберем ниже. Докажем, что если выбрать достаточно большое отрицательное $A<0$, то получим
$$W(x,t)\geqslant G_2(x,t), \quad |x|\leqslant h, \quad t>0. \tag{4.16}$$
Введем функцию
$$g(x,t)=W(x,t)-G_2(x,t). \tag{4.17}$$
Ясно, что в силу (4.12), (4.8) (3.35) получим
$$L_2g(x,t)\leqslant 0, \quad |x|\leqslant h, \quad t>0. \tag{4.18}$$

При $|x| < h$ из (4.8), (4.15), и того, что $A < 0$, следует неравенство

$$g(x,t)|_{|x|=h} \geqslant 0, \quad |x| < h, \quad t > 0. \tag{4.19}$$

При $t = 0$ имеем

$$g(x,0) = \delta\overline{\Gamma}_\alpha(r) - 1 - Av(r). \tag{4.20}$$

Выберем $A < 0$ из условия: $g(x,0) > 0$. Так как $\dfrac{3}{4} \leqslant v(r) \leqslant 1$, $r \leqslant h$, то $-Av(r) \geqslant \dfrac{-3}{4}A$ при $A < 0$. Отсюда

$$\delta\overline{\Gamma}(r) - Av(r) > \Big(\frac{\varepsilon}{4\Gamma(m)} - 1\Big) - \frac{3}{4}A = 0. \tag{4.21}$$

поэтому при $A = -\dfrac{4}{3}\Big(1 - \dfrac{\varepsilon}{4\Gamma(m)}\Big) < 0$ мы получим неравенство (4.16). Тогда из (4.21), (4.20) и (4.19) и из принципа максимума [15, с. 15] следует, что неравенство (4.16) доказано. Запишем неравенство (4.16) в виде:

$$v(x,t) \leqslant \delta\overline{\Gamma}(r) - G_2(x,t), \quad |x| < h, \quad t > 0. \tag{4.22}$$

Пусть в (4.22) $|x| \leqslant m$, тогда первое слагаемое в (4.22) в силу (4.4) удовлетворяет неравенству

$$\delta\overline{\Gamma}(r) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad r \leqslant m. \tag{4.23}$$

Для оценки второго слагаемого в (4.22) используем неравенство

$$-A = +\frac{4}{3}\Big(1 - \frac{\varepsilon}{4\Gamma(m)}\Big) < \frac{4}{3}, \quad v(r) \leqslant 1.$$

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдем $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$ из условия

$$\frac{4}{3}\exp(-\beta t_1) = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{B_2}, \tag{4.24}$$

где $\beta = \dfrac{\lambda_0^2 N - B}{2h^2} > 0$, $B_2 > 0$ — постоянная из (4.10).

Тогда при любом $t > t_1$ тем более выполняется неравенство

$$-G_2 < \frac{4}{3}\exp(-\beta t) < \frac{4}{3B_2}\varepsilon, \tag{4.25}$$

где β из формулы (3.32) в лемме 3.3.

Решая уравнение (4.24) относительно t_1, получим

$$t_1 = \frac{2h^2}{\lambda_0^2 N - B}\ln\frac{B_2}{\varepsilon}. \tag{4.26}$$

Учитывая (4.11) в (4.26), получим

$$t_1 = \frac{2}{\lambda_0^2 N - B}\ln\big(\frac{B_2}{\varepsilon}\big)^{1+\frac{2}{S_1}} a^{-\frac{2}{S_1}}, \tag{4.27}$$

где

$$S_1 = 1 + l, \quad a = \frac{\alpha^2}{2(1+l)\lambda_1}, \quad B_2 \text{ — постоянная из (4.10).}$$

Вводя обозначения

$$m_1 = 1 + \frac{2}{S_1}, \quad B_3 = \frac{\lambda_0^2 N - B}{2} a^{\frac{2}{S_1}},$$

запишем (4.27) в виде:

$$B_3^{\frac{1}{m_1}} t_1^{\frac{1}{m_1}} = \ln\frac{B_2}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{m_1} = \frac{1+l}{3+l}.$$

Отсюда из тождества $\ln\Big[\exp\big(B_3^{\frac{1}{m_1}} t_3^{\frac{1}{m_1}}\big)\Big] = \ln\dfrac{B_2}{\varepsilon}$ получим

$$\varepsilon = B_2 \exp\Big[-B_3^{\frac{1}{m_1}} t_1^{\frac{1}{m_1}}\Big]. \tag{4.28}$$

Из (4.23), (4.25), (4.22) получим

$$|v(x,t)| < \varepsilon\Big(1 + \frac{4}{3B_2}\Big), \quad t > t_1.$$

Из (4.28) и последнего неравенства следует, что

$$|v(x,t)| \leqslant M_3 \exp\Big[- bt^{\frac{1+l}{3+l}}\Big], \quad t > t_1,$$

где

$$M_2 = B_2\Big(1 + \frac{4}{3B_2}\Big), \quad b = B_3^{\frac{1}{m_1}}.$$

Теорема 2.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айнс Э.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Факториал Пресс, 2005.
2. *Богачев В. И., Крылов Н. В., Рекнер М., Шапошников С. В.* Уравнения Фоккера—Планка—Колмогорова. — М.: Ин-т комп. иссл., 2013.
3. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. Т. 1. — М.: ИЛ, 1949.
4. *Гущин А. К.* Некоторые оценки решений краевых задач для уравнения теплопроводности в неограниченной области// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 5–18.
5. *Гущин А. К.* О стабилизации решения параболического уравнения// Тр. МИАН. — 1969. — *93*. — С. 51–57.
6. *Гущин А. К.* О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1969. — *10*, № 1. — С. 43–57.
7. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшим коэффициентом// Дифф. уравн. — 2003. — *39*, № 4. — С. 506–515.
8. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 4. — С. 145–212.
9. *Денисов В. Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 61–71.
10. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения// Соврем. мат. и ее прилож. — 2012. — *78*. — С. 17–49.
11. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с убывающими младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 62–74.
12. *Денисов В. Н.* О скорости стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *59*. — С. 53–73.
13. *Денисов В. Н.* О поведении при больших значениях времени решений параболических недивергентных уравнений с растущими старшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 72–84.
14. *Денисов В. Н.* О скорости стабилизации решения задачи Коши с растущим коэффициентом// Тезисы науч. конф. «Ломоносовские чтения-2017». — М.: МГУ, 2017. — С. 23.
15. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2001. — *17*. — С. 9–193.
16. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1970.
17. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. — М.: ИЛ, 1953.
18. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
19. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: Мир, 1968.
20. *Marić V.* Regular Variation and Differential Equations. — Springer, 2000.
21. *Marić V., Tomić M.* On Liouville—Green (WKB) approximation for second order linear differential equations// Differ. Integral Equ. — 1988. — *1*, № 3. — С. 299–304.
22. *Meyers N., Serrin J.* The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations// J. Math. Mech. — 1960. — *9*, № 4. — С. 513–538.

Василий Николаевич Денисов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-586-598 UDC 517.956.4

On the Stabilization Rate of Solutions of the Cauchy Problem for Nondivergent Parabolic Equations with Growing Lower-Order Term

© 2017 **V. N. Denisov**

Abstract. In the Cauchy problem

$$L_1 u \equiv Lu + (b, \nabla u) + cu - u_t = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

for nondivergent parabolic equation with growing lower-order term in the half-space $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$, $N \geqslant 3$, we prove sufficient conditions for exponential stabilization rate of solution as $t \to +\infty$ uniformly with respect to x on any compact K in $\mathbb{R}^N$ with any bounded and continuous in $\mathbb{R}^N$ initial function $u_0(x)$.

REFERENCES

1. E. Ince, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Faktorial Press, M., 2005 (Russian translation).
2. V. I. Bogachev, N. V. Krylov, M. Rekner, and S. V. Shaposhnikov, *Uravneniya Fokkera—Planka—Kolmogorova* [Fokker–Planck–Kolmogorov Equations], In-t komp. issl., Moscow, 2013 (in Russian).
3. G. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy. T. 1* [A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Vol. 1], IL, M., 1949 (Russian translation).
4. A. K. Gushchin, "Nekotorye otsenki resheniy kraevykh zadach dlya uravneniya teploprovodnosti v neogranichennoy oblasti" [Some estimates of solutions of boundary-value problems for the thermal conductivity equation in unbounded domain], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 5–18 (in Russian).
5. A. K. Gushchin, "O stabilizatsii resheniya parabolicheskogo uravneniya" [On stabilization of solution of a parabolic equation], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1969, **93**, 51–57 (in Russian).
6. A. K. Gushchin, "O skorosti stabilizatsii resheniya kraevoy zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya" [On the stabilization rate of solution of boundary-value problem for a parabolic equation], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1969, **10**, No. 1, 43–57 (in Russian).
7. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshim koeffitsientom" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order coefficient], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2003, **39**, No. 4, 506–515 (in Russian).
8. V. N. Denisov, "O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy pri bol'shikh znacheniyakh vremeni" [On behavior of solutions of parabolic equations for large values of time], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2005, **60**, No. 4, 145–212 (in Russian).
9. V. N. Denisov, "Dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [Sufficient conditions for stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with lower-order coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 61–71 (in Russian).
10. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya" [Stabilization of solution of the Cauchy problem for a nondivergent parabolic equation], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2012, **78**, 17–49 (in Russian).
11. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s ubyvayushchimi mladshimi koeffitsientami" [Stabilization of solutions of Cauchy problems for divergence-free parabolic equations with decreasing minor coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 62–74 (in Russian).
12. V. N. Denisov, "O skorosti stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [On the stabilization rate of solutions of the Cauchy problem for a parabolic equation with lower-order terms], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 53–73 (in Russian).

13. V. N. Denisov, "O povedenii pri bol'shikh znacheniyakh vremeni resheniy parabolicheskikh nedivergentnykh uravneniy s rastushchimi starshimi koeffitsientami" [On behavior of solutions of parabolic nondivergent equations with increasing higher-order coefficients at large values of time], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 72–84 (in Russian).
14. V.N. Denisov, "O skorosti stabilizatsii resheniya zadachi Koshi s rastushchim koeffitsientom" [On the stabilization rate of solutions of Cauchy problems with growing coefficient], Abstr. Sci. Conf. *Lomonosovskie chteniya-2017* [Lomonosov Reading-2017], MSU, Moscow, 2017, 23 (in Russian).
15. A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleynik, "Lineynye uravneniya vtorogo poryadka parabolicheskogo tipa" [Second-order linear equations of parabolic type], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2001, **17**, 9–193 (in Russian).
16. L. D. Kudryavtsev, *Matematicheskiy analiz. T. 1* [Mathematical Analysis. Vol. 1], Vysshaya shkola, Moscow, 1970 (in Russian).
17. G. Sansone, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. T. 1* [Ordinary Differential Equations. Vol. 1], IL, Moscow, 1953 (Russian translation).
18. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
19. A. Friedman, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa* [Partial Differential Equations of Parabolic Type], Mir, Moscow, 1968 (Russian translation).
20. V. Marić, *Regular Variation and Differential Equations*, Springer, 2000.
21. V. Marić and M. Tomić, "On Liouville—Green (WKB) approximation for second order linear differential equations," *Differ. Integral Equ.*, 1988, **1**, No. 3, 299–304.
22. N. Meyers and J. Serrin, "The exterior Dirichlet problem for second order elliptic partial differential equations," *J. Math. Mech.*, 1960, **9**, No. 4, 513–538.

V. N. Denisov
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru