Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 573–585

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-573-585 УДК 517.956.25

ОБ ОТСУТСТВИИ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МОНОТОННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КОЭРЦИТИВНЫХ НЕРАВЕНСТВ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

© 2017 г. **Е. И. ГАЛАХОВ, О. А. САЛИЕВА**

Аннотация. В работе на основе метода нелинейной емкости проводится исследование вопроса об отсутствии неотрицательных монотонных решений для квазилинейного эллиптического неравенства вида $\Delta_p u \geqslant u^q$ в полупространстве в терминах параметров p и q.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Необходимые условия существования нетривиальных неотрицательных решений квазилинейных уравнений вида $Au = u^q$ и неравенств вида $Au \geqslant u^q$, где A — некоторый эллиптический оператор, в полупространстве $\mathbb{R}^N_+$ представляют значительный интерес как сами по себе, так и в связи с априорными оценками решений краевых задач в ограниченных областях. Это связано с тем, что при масштабировании области последовательность решений соответствующих задач, вообще говоря, может сходиться к решению некоторой предельной задачи в полупространстве (см., например, [3]). При этом операторы A могут быть как коэрцитивными (оператор Лапласа Δ, оператор p-Лапласа Δ_p), так и антикоэрцитивными (противоположного знака).

Целью исследования является нахождение диапазона значений q, при которых соответствующее уравнение или неравенство в полупространстве $\mathbb{R}^N_+$ не имеет нетривиальных неотрицательных решений.

Первые результаты в этом направлении для дифференциальных неравенств с антикоэрцитивными операторами были получены А. Берестики, И. Капуццо Дольчетта и Л. Ниренбергом [4], доказавшими отсутствие решений неравенства $-\Delta u \geqslant u^q$ при $1 < q < \dfrac{N+1}{N-1}$. Оптимальность этих результатов была показана И. Биринделли и Э. Митидиери [6]. Неравенства вида $Au \geqslant u^q$ с оператором $Au = -\Delta_p u$, где $\Delta_p u := \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$, в полупространстве изучались М. Ф. Бидо-Верон и С. И. Похожаевым [5], а позднее — Л. Вероном и А. Порреттой [14]. Им принадлежат результаты об отсутствии решений в полупространстве с выколотой окрестностью нуля, а следовательно, и во всем полупространстве при $p-1 < q < q_{\mathrm{cr}}(p,n)$, где $q_{\mathrm{cr}}(p,n) = p - 1 + \dfrac{p}{\beta_{p,n}}$, а $\beta_{p,n}$ — показатель роста сингулярных решений вблизи нуля, в явном виде полученный только при $n = 2$ ($\beta_{p,2} = \dfrac{3-p+\sqrt{(p-1)^2+2-p}}{3(p-1)}$). Следует отметить также работы Р. Филиппуччи [11] о критических показателях для полулинейных неравенств вида $-\operatorname{div}(u^\alpha |x|^\beta Du) \geqslant |x|^\gamma u^q$ во всем полупространстве, Э. Н. Дансера, И. Доу и М. Эфендиева [7] и Х. Зоу [15] об отсутствии решений задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^q & (x \in \mathbb{R}^N_+), \\ u(x) = 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+) \end{cases} \tag{1.1}$$

для нелинейного уравнения с оператором p-Лапласа в полупространстве, а также А. Фарины, Л. Монторо и Б. Шиунци [8–10] о монотонности существенно ограниченных решений той же задачи, из которой следуют утверждения об их отсутствии при значениях q, которые будут указаны ниже. Эллиптические задачи с сингулярными коэффициентами вблизи неограниченных множеств рассматривались, в частности, авторами настоящей работы в [12, 13]. Что касается неравенств с коэрцитивными операторами, нам известны лишь результаты во всем пространстве [1].

В настоящей работе исследуются необходимые условия существования нетривиальных неотрицательных решений эллиптического неравенства $\Delta_p u \geqslant u^q$ в полупространстве. На основе метода нелинейной емкости [1, 2] такие условия получены в некотором подклассе монотонных функций. Отметим, что при $p = 2$ они совпадают с оптимальными условиями для оператора с противоположным знаком [6].

Буквой c в тексте обозначены различные положительные константы, зависящие от параметров задачи и, возможно, от условий роста, накладываемых на решение.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки России (соглашение № 05.Y09.21.0013 от 19 мая 2017).

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Обозначим $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_N > 0\}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant u^q & (x \in \mathbb{R}^N_+), \\ u(x) \geqslant 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+). \end{cases} \tag{2.1}$$

Будем понимать слабые решения задачи (2.1) в следующем смысле.

Определение 2.1. *Слабым решением* задачи (2.1) будем называть неотрицательную функцию $u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, удовлетворяющую интегральному неравенству

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}(Du, D\varphi)\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \varphi\,dx$$

для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N_+)$.

Замечание 2.1. Методом аппроксимации можно показать, что класс слабых решений задачи (2.1) не изменится, если в качестве класса пробных функций рассматривать неотрицательные функции $\varphi \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

Замечание 2.2. Отметим, что на решения задачи (2.1) не накладываются граничные условия.

Замечание 2.3. Слабые решения задач, рассматриваемых ниже, определяются аналогично.

Далее будем рассматривать решения, удовлетворяющие условию

$$u(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N) \leqslant cu(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N + 2R) \tag{2.2}$$

для любых $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N_+$ и $R > 0$, где $c > 0$ — константа, не зависящая от $(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$ и от R.

Замечание 2.4. В частности, для функций $u(x_1, \dots, x_{N-1}, x_N)$, неубывающих по переменной x_N, условие (2.2) выполняется с константой $c = 1$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть* $p > \dfrac{2N+2}{N+2}$ *и*

$$\max\{1, p-1\} < q \leqslant \frac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}. \tag{2.3}$$

Тогда задача (2.1) *не имеет нетривиальных слабых решений* $u \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *и монотонных по переменной* x_N, *т. е. таких, что*

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_N} \geqslant 0 \text{ или } \frac{\partial u(x)}{\partial x_N} \leqslant 0 \quad (x \in \mathbb{R}^N_+). \tag{2.4}$$

Замечание 2.5. Частный случай условия (2.4), а именно требование монотонного неубывания решений, для некоторых квазилинейных антикоэрцитивных задач в полупространстве рассматривался А. Фариной, Л. Монторо и Б. Шиунци (см. [10]). В частности, ими было показано, что если функция $f : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ непрерывна по Липшицу, то условие (2.4) выполняется для решений задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & (x \in \mathbb{R}^N_+), \\ u(x) = 0 & (x \in \partial\mathbb{R}^N_+) \end{cases} \tag{2.5}$$

с $|Du| \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, откуда вытекает отсутствие решений частного случая этой задачи (1.1) с $f(u) = u^q$ при

$$\begin{cases} q > p-1, & \text{если } N \leqslant \dfrac{p(p+3)}{p-1}, \\ p-1 < q < q_{\mathrm{cr}}(p,N), & \text{если } N > \dfrac{p(p+3)}{p-1}, \end{cases}$$

где $q_{\mathrm{cr}}(p,N) = \dfrac{[(p-1)N-p]^2 + p^2(p-2) - p^2(p-1)N + 2p^2\sqrt{(p-1)(N-1)}}{(N-p)[(p-1)N - p(p+3)]}$.

Замечание 2.6. При $p = 2$ условие (2.3) совпадает с полученным в [4] условием отсутствия нетривиальных неотрицательных решений неравенства $-\Delta u \geqslant u^q$, оптимальность которого была показана в [6].

Замечание 2.7. Условие $u \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$ вводится для упрощения формулировки и доказательства. Отсутствие решений может быть доказано и в более широком классе функций, удовлетворяющих некоторым условиям локальной интегрируемости. Результаты об отсутствии произвольных слабых решений задачи (2.1) нам неизвестны.

3. Доказательство теоремы 2.1

Воспользуемся методом нелинейной емкости [1,2]. Выберем семейство неотрицательных пробных функций $\xi_R^\lambda \in C^1_0(\mathbb{R}^N)$ таких, что $\lambda > 0$ и $\xi_R(x) = \prod_{k=1}^{N-1} \chi_R(x_k) \cdot \chi_R(x_N - 3R)$ с

$$\chi_R(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leqslant R), \\ 0 & (|t| \geqslant 2R), \end{cases} \tag{3.1}$$

причем

$$|D\xi_R(x)| \leqslant cR^{-1} \quad (x \in \mathbb{R}^N_+). \tag{3.2}$$

Умножим обе части (2.1) на $u^\alpha \xi_R x_N$, где $\alpha > 0$, и проинтегрируем по частям. При этом будем использовать обозначение

$$Q_{kR} = \{(x_1, \ldots, x_{N-1}) : -kR \leqslant x_1 \leqslant kR, \ldots, -kR \leqslant x_{N-1} \leqslant kR\}, \ k = 1, 2.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае пробная функция $u^\alpha \xi_R x_N$ является допустимой даже для решений, обращающихся в 0, так как $\alpha > 0$, в отличие от случая антикоэрцитивного неравенства.

Используя монотонность подынтегральной функции $u^{q+\alpha}x_N$ по x_N при любых фиксированных $(x_1,\ldots,x_{N-1})$, после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
&c\int\limits_{Q_{2R}\times[0,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx \leqslant \int\limits_{Q_{2R}\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx \leqslant\\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx + \alpha\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant\\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-1}|D\xi_R^\lambda|x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Применение параметрического неравенства Юнга с показателями $\dfrac{p}{p-1}$ и p к первому интегралу в правой части (3.3) дает

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant\\
&\leqslant C(\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}|D\xi_R^\lambda|^p\xi_R^{1-p}x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Повторно применив параметрическое неравенство Юнга к первому интегралу в правой части (3.4) с показателями $\dfrac{q+\alpha}{\alpha+p-1}$ и $\dfrac{q+\alpha}{q-p+1}$, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant\\
&\leqslant C(\alpha,\lambda)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |D\xi_R|^{-\frac{p(q+\alpha)}{q-p+1}}\xi_R^{\lambda-\frac{p(q+\alpha)}{q-p+1}}x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx := I_1(R)+I_2(R).
\end{aligned}\tag{3.5}$$

При $\lambda > \dfrac{p(q+\alpha)}{q-p+1}$ интеграл $I_1(R)$ оценивается как

$$I_1(R) \leqslant CR^{N+1-\frac{p(q+\alpha)}{q-p+1}} \to 0 \text{ при } R\to\infty. \tag{3.6}$$

Если $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_N} \geqslant 0$, то $I_2(R)\leqslant 0$. Если же $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_N}\leqslant 0$, то интеграл $I_2(R)$ оценивается разными способами в случаях $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$ и $p>2$ (случай $p=2$ рассмотрен в [4]).

Случай $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$. *Первый способ.* Используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned}
I_2(R) &= -\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx =\\
&= c(\alpha,p)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant c(\alpha,p)\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} =\\
&= c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} = c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant c(\alpha,p,q)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{q+\alpha}}\cdot R^{N(2-p)}\times$$
$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left|\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{(q+\alpha)(p-1)}{(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha}}(\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{\alpha+p-1}{(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha}}\,dx\right)^{\frac{(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha}{q+\alpha}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx+c(\alpha,p,q)R^{\frac{N[(2-p)(q+\alpha)+(q+\alpha-1)(p-1)-\alpha]-(q+\alpha+1)(p-1)-\alpha}{q-p+1}},$$

где последнее слагаемое стремится к 0 при $R\to\infty$ при $\alpha>0$ настолько малом, что показатель степени R в предыдущем неравенстве отрицателен (это имеет место при $\alpha=0$ в силу условия теоремы на параметры p,q и N).

Второй способ. Если в правой части (2.3) имеет место строгое неравенство, выберем β так, чтобы

$$\frac{2q-(N+1)(q-1)}{q(p-2)}<\beta<-\frac{N}{p-1}, \tag{3.7}$$

и разобьем интеграл $I_2(R)$ на два интеграла:

$$\begin{aligned}&I_2(R)=I_2^1(R)+I_2^2(R)=\\&=-\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|<R^\beta}u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx-\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta}u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx\leqslant\\&\leqslant\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|<R^\beta}u^\alpha|Du|^{p-1}\,dx-\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta}u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Оценка $I_2^1(R)$ следует непосредственно из (3.7):

$$I_2^1(R)\leqslant cR^{N+\beta(p-1)}\to 0 \text{ при } R\to\infty. \tag{3.9}$$

Оценка $I_2^2(R)$. При $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\geqslant 0$ это слагаемое неположительно. При $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\leqslant 0$ и $\dfrac{2N+2}{N+2}<p<2$ имеем

$$\begin{aligned}&I_2^2(R):=\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta}u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant\\&\leqslant cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{|D(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})(x)|\geqslant R^\beta}u^{\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}u^{\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx=\\&=cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\frac{\partial(u^{1+\frac{\alpha}{p-1}})}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx=-cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\xi_R^{\lambda-1}\,dx\leqslant\\&\leqslant cR^{\beta(p-2)}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\left|\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\right|\xi_R^{\lambda-1}\,dx\leqslant cR^{\beta(p-2)-1}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\left|\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\right|x_N\xi_R^{\lambda-1}\,dx.\end{aligned}$$

Применяя к последнему интегралу из этой цепочки неравенство Юнга с показателями

$$a=\frac{(q+\alpha)(p-1)}{\alpha+p-1},\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=1,$$

получим

$$I_2^2(R)\leqslant\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx+cR^{N+1+a'(\beta(p-2)-2)}. \tag{3.10}$$

В силу (3.7) при достаточно малых α имеем $N+1+a'(\beta(p-2)-2)<0$. Комбинируя (3.5)–(3.10), приходим к

$$\frac{1}{4}\int\limits_{Q_{2R}\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx \leqslant cR^{N+1+a'(\beta(p-2)-2)} \to 0 \text{ при } R\to\infty, \tag{3.11}$$

что с учетом (3.3) завершает доказательство теоремы в случае $1<p<2$ при строгом неравенстве в правой части условия (2.3).

Если же при $\dfrac{2N+2}{N+2}<p<2$ в правой части (2.3) имеет место равенство, то, повторяя предыдущие рассуждения с $\beta=\dfrac{2q-(N+1)(q-1)}{q(p-2)}=-\dfrac{N}{p-1}$, получаем в пределе

$$I:=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}x_N\,dx<+\infty,$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[0,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[0,2R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx=I-I=0,$$

и в силу условия (2.2)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}x_N\,dx=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[0,2R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx\leqslant c\lim_{R\to\infty}\int\limits_{Q_R\times[2R,4R]} u^{q+\alpha}x_N\,dx=0,$$

что влечет утверждение теоремы.

Случай $p>2$. В этом случае при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\geqslant 0$ имеем $I_2(R)\leqslant 0$, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N}\leqslant 0$ получим

$$I_2(R)=-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|\xi_R\,dx=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^{\frac{p-2}{p-1}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^{\frac{1}{p-1}}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2+\frac{p-2}{p-1}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^{\frac{1}{p-1}}\xi_R^\lambda\,dx,$$

и в силу неравенства Юнга с показателями $\dfrac{p-1}{p-2}$ и $p-1$

$$I_2(R)\leqslant\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx+c\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-2}\left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|x_N^{2-p}\xi_R^\lambda\,dx=$$
$$=\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx-c\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}x_N^{2-p}\xi_R^\lambda\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx+cR^{2-p}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}\left|\frac{\partial\xi}{\partial x_N}\right|\xi_R^{\lambda-1}\,dx,$$

откуда, вновь применяя неравенство Юнга с показателями $\dfrac{q+\alpha}{\alpha+p-1}$ и $\dfrac{q+\alpha}{q-p+1}$, будем иметь

$$\begin{aligned}I_2(R)\leqslant{}&\frac{\alpha}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p\xi_R^\lambda x_N\,dx+\frac{1}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{q+\alpha}\xi_R^\lambda x_N\,dx+\\&+cR^{\frac{(2-p)(q+\alpha)}{q-p+1}}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} x_N^{-\frac{\alpha+p-1}{q-p+1}}\left|\frac{\partial\xi_R}{\partial x_N}\right|^{\frac{q+\alpha}{q-p+1}}\xi_R^{\lambda-\frac{q+\alpha}{q-p+1}}\,dx.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Доказательство при $q < \dfrac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}$ завершается аналогично случаю $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$. При $q = \dfrac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}$ получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \xi_R^\lambda x_N \, dx < \infty$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q \xi_R^\lambda x_N \, dx \to 0 \text{ при } R \to \infty, \tag{3.13}$$

где

$$\operatorname{supp} D\xi_R = ((Q_{2R} \setminus Q_R) \times [R, 5R]) \cup (Q_{2R} \times ([R, 5R] \setminus [2R, 4R])).$$

Умножая первое из неравенств (2.1) на $\xi_R^\lambda x_N$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \xi_R^\lambda x_N \, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N \, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_N} \xi_R^\lambda \, dx. \tag{3.14}$$

Применяя к первому интегралу в правой части (3.14) неравенство Гельдера, с учетом (3.12) получаем:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N \, dx = \int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N \, dx \leqslant \\
&\leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^{\alpha-1} |Du|^p \xi_R^\lambda x_N \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^{(1-\alpha)(p-1)} |D\xi_R^\lambda|^p \xi_R^{\lambda(1-p)} x_N \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^{\alpha-1} |Du|^p \xi_R^\lambda x_N \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q \xi_R^\lambda x_N \, dx \right)^{\frac{(1-\alpha)(p-1)}{pq}} \times \\
&\times \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} |D\xi_R^\lambda|^{\frac{pq}{q-(1-\alpha)(p-1)}} \xi_R^{\frac{\lambda(1-p)(q+\alpha-1)}{q-(1-\alpha)(p-1)}} \, dx \right)^{\frac{q-(1-\alpha)(p-1)}{pq}} \leqslant \\
&\leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q} - p} \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q \xi_R^\lambda x_N \, dx \right)^{\frac{p-1}{q}},
\end{aligned}$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N \, dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q} - p} \left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q \xi_R^\lambda x_N \, dx \right)^{\frac{p-1}{q}}. \tag{3.15}$$

Второй интеграл в правой части (3.14) при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \geqslant 0$ неположителен, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \leqslant 0$, используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u\frac{\partial \xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant c(p,q)\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}}\cdot R^{N(2-p)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R}\left|\frac{\partial \xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{q}{q-1}}(\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{1}{q-1}}\,dx\right)^{\frac{(q-1)(p-1)}{q}},$$

откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q}-p}\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}}. \tag{3.16}$$

Комбинируя (3.14)–(3.16), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q-p+1)}{q}-p}\left(\int\limits_{\operatorname{supp} D\xi_R} u^q\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}}, \tag{3.17}$$

где в силу (3.13) правая, а следовательно, и левая часть неравенства стремится к 0 при $R \to \infty$ и в случае $q = \dfrac{(N+1)(p-1)}{N-p+1}$, что завершает доказательство.

Замечание 3.1. Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant (1+x_N^\gamma)u^q & (x \in \mathbb{R}^N_+),\\ u(x) \geqslant 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+). \end{cases} \tag{3.18}$$

Аналогично предыдущему результату доказывается

Теорема 3.1. *Пусть* $p > \dfrac{2N+\gamma+2}{N+\gamma+2}$ *и*

$$\max\{p-1,1\} < q \leqslant \frac{(N+\gamma+1)(p-1)}{N-p+1}. \tag{3.19}$$

Тогда задача (3.18) *не имеет неотрицательных нетривиальных слабых решений* $u \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *и монотонных по переменной* x_N, *т. е. таких, что выполняется неравенство* (2.4).

4. Обобщение на случай систем неравенств

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant v^{q_1} & (x \in \mathbb{R}^N_+),\\ \Delta_q v \geqslant u^{p_1} & (x \in \mathbb{R}^N_+),\\ u(x) \geqslant 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+),\\ v(x) \geqslant 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+). \end{cases} \tag{4.1}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. *Пусть* $\dfrac{2N+2}{N+2} < p < 2$, $\dfrac{2N+2}{N+2} < q < 2$, $\min\{p_1, q_1\} > 1$ *и*

$$\max\{p_1(q-1)(q_1+1), q_1(p-1)(p_1+1)\} > (N+1)(p_1q_1 - (p-1)(q-1)). \tag{4.2}$$

Тогда задача (4.1) *не имеет неотрицательных нетривиальных слабых решений* $(u,v) \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *для* u, *а также аналогичному условию для* v *и монотонных по переменной* x_N, *т. е. таких, что выполняется неравенство* (2.4) *для* u *и соответствующее неравенство для* v.

Доказательство. Умножая первое из неравенств (4.1) на $u^\alpha \xi_R^\lambda x_N$, аналогично (3.5) получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1} u^\alpha \xi_R^\lambda x_N\,dx + \frac{\alpha}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1}|Du|^p \xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant \\ &\leqslant C(\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}|D\xi_R^\lambda|^p \xi_R^{1-p} x_N\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Применим к первому интегралу в правой части (4.3) неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha+p-1}|D\xi_R^\lambda|^p\xi_R^{1-p}x_N\,dx \leqslant \\ &\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |D\xi_R^\lambda|^{\frac{pp_1}{p_1-\alpha-p+1}}\xi_R^{\frac{\lambda((1-p)(p_1+1)-\alpha)}{p_1-\alpha-p+1}} x_N\right)^{\frac{p_1-\alpha-p+1}{p_1}} dx \leqslant \\ &\leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-(1-\alpha)(p-1))}{pp_1}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Второй интеграл в правой части (4.3) при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \geqslant 0$ неположителен, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \leqslant 0$, используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} &-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha|Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx = \\ &= c(\alpha,p)\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant c(\alpha,p)\left(-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\frac{\partial u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}}{\partial x_N}\xi_R^\lambda\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant \\ &\leqslant c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant c(\alpha,p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{1+\frac{\alpha}{p-1}}\left|\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leqslant c(\alpha,p,p_1)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}} \cdot R^{N(2-p)}\times \\ &\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left|\frac{\partial\xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{p_1(p-1)}{(p_1-1)(p-1)-\alpha}}(\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{\alpha+p-1}{(p_1-1)(p-1)-\alpha}}\,dx\right)^{\frac{(p_1-1)(p-1)-\alpha}{p_1}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^\alpha |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_N} \xi_R\, dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-(1-\alpha)(p-1))}{pp_1}-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1} \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}}. \tag{4.5}$$

Комбинируя (4.3)–(4.5), получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1} u^\alpha \xi_R^\lambda x_N\, dx + \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1} |Du|^p \xi_R^\lambda x_N\, dx \leqslant \\ &\leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-(1-\alpha)(p-1))}{pp_1}-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1} \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{\alpha+p-1}{p_1}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1} u^\alpha \xi_R^\lambda x_N\, dx + \frac{\alpha}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{\alpha-1} |Dv|^q \xi_R^\lambda x_N\, dx \leqslant \\ &\leqslant cR^{\frac{(N+1)(q_1-(1-\alpha)(q-1))}{qq_1}-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1} \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{\alpha+q-1}{q_1}}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Далее, умножая первое из неравенств (4.1) на $\xi_R^\lambda x_N$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1} \xi_R^\lambda x_N\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_N} \xi_R^\lambda\, dx. \tag{4.8}$$

Применяя к первому интегралу в правой части (4.8) неравенство Гельдера, с учетом (4.6) получаем:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N\, dx \leqslant \\ &\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1} |Du|^p \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{(1-\alpha)(p-1)} |D\xi_R^\lambda|^p \xi_R^{\lambda(1-p)} x_N\, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{\alpha-1} |Du|^p \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1} \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{(1-\alpha)(p-1)}{pp_1}} \times \\ &\qquad \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |D\xi_R^\lambda|^{\frac{pp_1}{p_1-(1-\alpha)(p-1)}} \xi_R^{\frac{\lambda(1-p)(p_1+\alpha-1)}{p_1-(1-\alpha)(p-1)}} \right)^{\frac{p_1-(1-\alpha)(p-1)}{pp_1}} \leqslant \\ &\qquad \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1)}{p_1}-p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1} \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{p-1}{p_1}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-1} |D\xi_R^\lambda| x_N\, dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1)}{p_1}-p} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1} \xi_R^\lambda x_N\, dx \right)^{\frac{p-1}{p_1}}. \tag{4.9}$$

Второй интеграл в правой части (4.8) при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \geqslant 0$ неположителен, а при $\dfrac{\partial u}{\partial x_N} \leqslant 0$, используя неравенство Гельдера и интегрируя по частям, имеем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left(-\frac{\partial u}{\partial x_N}\right)^{p-1}\xi_R^\lambda\,dx \leqslant$$

$$\leqslant c(p)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u\frac{\partial \xi_R^\lambda}{\partial x_N}\,dx\right)^{p-1} R^{N(2-p)} \leqslant c(p,p_1)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}}\cdot R^{N(2-p)}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}\left|\frac{\partial \xi_R^\lambda}{\partial x_N}\right|^{\frac{p_1}{p_1-1}}(\xi_R^\lambda x_N)^{-\frac{1}{p_1-1}}\,dx\right)^{\frac{(p_1-1)(p-1)}{p_1}},$$

откуда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} |Du|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_N}\xi_R\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1)}{p_1}-p}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}}. \tag{4.10}$$

Комбинируя (4.8)–(4.10), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(p_1-p+1))}{p_1}-p}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{p-1}{p_1}}. \tag{4.11}$$

Аналогично,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{\frac{(N+1)(q_1-q+1)}{q_1}-q}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx\right)^{\frac{q-1}{q_1}}. \tag{4.12}$$

Подставляя (4.11) в (4.12) и обратно, после упрощения получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} u^{p_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{N+1-\frac{p_1(q-1)(q_1+1)}{p_1q_1-(p-1)(q-1)}},$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} v^{q_1}\xi_R^\lambda x_N\,dx \leqslant cR^{N+1-\frac{q_1(p-1)(p_1+1)}{p_1q_1-(p-1)(q-1)}}.$$

Устремляя $R \to +\infty$, при условиях теоремы получаем противоречие, которое завершает доказательство.

Замечание 4.1. Для системы неравенств

$$\begin{cases} \Delta_p u \geqslant (1+x_N)^\gamma v^{q_1} & (x \in \mathbb{R}^N_+),\\ \Delta_q v \geqslant (1+x_N)^\delta u^{p_1} & (x \in \mathbb{R}^N_+),\\ u(x) \geqslant 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+),\\ v(x) \geqslant 0 & (x \in \mathbb{R}^N_+), \end{cases} \tag{4.13}$$

где $\gamma \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}$, аналогичным образом доказывается

Теорема 4.2. *Пусть* $\dfrac{2N+\gamma+2}{N+\gamma+2} < p < 2$, $\dfrac{2N+\delta+2}{N+\delta+2} < q < 2$, $\min\{p_1,q_1\} > 1$ *и*

$$\max\{p_1(q-1)(q_1+\gamma+1), q_1(p-1)(p_1+\delta+1)\} > (N+1)(p_1q_1-(p-1)(q-1)). \tag{4.14}$$

Тогда задача (4.13) *не имеет неотрицательных нетривиальных слабых решений* $(u, v) \in C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_+)$, *удовлетворяющих условию* (2.2) *для* u, *а также аналогичному условию для* v *и монотонных по переменной* x_N, *т. е. таких, что выполняется неравенство* (2.4) *для* u *и соответствующее неравенство для* v.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. МИАН. — 2001. — *234.* — С. 3–383.
2. *Похожаев С. И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *357.* — С. 592–594.
3. *Azizieh C., Clément P.* A priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations// J. Differ. Equ. — 2002. — *179.* — С. 213–245.
4. *Berestycki H., Capuzzo Dolcetta I., Nirenberg L.* Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 1994. — *4.* — С. 59–78.
5. *Bidaut-Véron M. F., Pohozaev S. I.* Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems// J. Anal. Math. — 2001. — *84.* — С. 1–49.
6. *Birindelli I., Mitidieri E.* Liouville theorems for elliptic inequalities and applications// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1998. — *128A.* — С. 1217–1247.
7. *Dancer E. N., Du Y., Efendiev M.* Quasilinear elliptic equations on half- and quarter-spaces// Adv. Nonlinear Stud. — 2013. — *13.* — С. 115–136.
8. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity and one-dimensional symmetry for solutions of $-\Delta_p u = f(u)$ in half-spaces// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2012. — *43.* — С. 123–145.
9. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity of solutions of quasilinear degenerate elliptic equation in half-spaces// Math. Ann. — 2013. — *357.* — С. 855–893.
10. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$// `arXiv:1509.03897v1 [math.AP]`. — 2015.
11. *Filippucci R.* A Liouville result on a half space// В сб.: «Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations, II: Stationary Problems»: Proc. Workshop, Perugia, 2012. — Providence: Am. Math. Soc., 2013. — С. 237–252.
12. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408.* — С. 102–113.
13. *Galakhov E., Salieva O.* Blow-up for nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets// Current Trends in Analysis and its Applications: Proc. IXth ISAAC Congress, Krakow, Poland, 2014. — Basel: Birkhäuser, 2015. — С. 299-305.
14. *Porretta A., Veron L.* Separable solutions of quasilinear Lane—Emden equations// J. Eur. Math. Soc. — 2013. — *15.* — С. 755–774.
15. *Zou H.* A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2008. — *33.* — С. 417–437.

Е. И. Галахов

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

E-mail: `galakhov@rambler.ru`

О. А. Салиева

Московский государственный технологический университет «Станкин», 127055, Москва, Вадковский пер., д. 1

E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-573-585 UDC 517.956.25

On Absence of Nonnegative Monotone Solutions for Some Coercive Inequalities in a Half-Space

© 2017 **E. I. Galakhov, O. A. Salieva**

Abstract. Using the nonlinear capacity method, we investigate the problem of absence of nonnegative monotone solutions for a quasilinear elliptic inequality of type $\Delta_p u \geqslant u^q$ in a half-space in terms of parameters p and q.

REFERENCES

1. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, "Apriornye otsenki i otsutstvie resheniy nelineynykh uravneniy i neravenstv v chastnykh proizvodnykh" [A priori estimates and absence of solutions of nonlinear partial derivatives equations and inequalities], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2001, **234**, 3–383 (in Russian).
2. S. I. Pohozaev, "Sushchestvenno nelineynye emkosti, porozhdennye differentsial'nymi operatorami" [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **357**, 592–594 (in Russian).
3. C. Azizieh and P. Clément, "A priori estimates and continuation methods for positive solutions of p-Laplace equations," *J. Differ. Equ.*, 2002, **179**, 213–245.
4. H. Berestycki, I. Capuzzo Dolcetta, and L. Nirenberg, "Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems," *Topol. Methods Nonlinear Anal.* , 1994, **4**, 59–78.
5. M. F. Bidaut-Véron and S. I. Pohozaev, "Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems," *J. Anal. Math.*, 2001, **84**, 1–49.
6. I. Birindelli and E. Mitidieri, "Liouville theorems for elliptic inequalities and applications," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 1998, **128A**, 1217–1247.
7. E. N. Dancer and Y. Du, M. Efendiev, "Quasilinear elliptic equations on half- and quarter-spaces," *Adv. Nonlinear Stud.*, 2013, **13**, 115–136.
8. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity and one-dimensional symmetry for solutions of $-\Delta_p u = f(u)$ in half-spaces," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2012, **43**, 123–145.
9. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity of solutions of quasilinear degenerate elliptic equation in half-spaces," *Math. Ann.*, 2013, **357**, 855–893.
10. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$," *arXiv:1509.03897v1 [math.AP]*, 2015.
11. R. Filippucci, "A Liouville result on a half space," In: *Recent Trends in Nonlinear Partial Differential Equations, II: Stationary Problems*, Workshop, Perugia, 2012, Am. Math. Soc., Providence, 2013, 237–252.
12. E. Galakhov and O. Salieva, "On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, 102–113.
13. E. Galakhov and O. Salieva, "Blow-up for nonlinear inequalities with singularities on unbounded sets," *Current Trends in Analysis and its Applications*: Proc. IXth ISAAC Congress, Krakow, Poland, 2014, Birkhäuser, Basel, 2015, 299–305.
14. A. Porretta and L. Veron, "Separable solutions of quasilinear Lane—Emden equations," *J. Eur. Math. Soc.*, 2013, **15**, 755–774.
15. H. Zou, "A priori estimates and existence for quasi-linear elliptic equations," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2008, **33**, 417–437.

E. I. Galakhov
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: galakhov@rambler.ru

O. A. Salieva
Moscow State Technological University "Stankin," 1 Vadkovskii per., 127055 Moscow, Russia
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com