Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 557–572

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-557-572 УДК 517.956.45, 517.968.74.

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АГРЕГАЦИИ

© 2017 г. **В. Ф. ВИЛЬДАНОВА, Ф. Х. МУКМИНОВ**

Аннотация. Работа посвящена изучению смешанной задачи для анизотропного интегро-дифференциального уравнения с переменными показателями нелинейности. Методом дискретизации по времени доказано существование слабого решения в ограниченном цилиндре. Дана оценка времени существования решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с границей класса C^1. Рассмотрим в цилиндрической области $D^T = \Omega \times (0,T)$ уравнение

$$\beta(x,u)_t = \operatorname{div}(a(x,u,\nabla u) - \beta(x,u)G(u)) + f(x,u) \tag{1.1}$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x,0) = u_0, \;\; u_0(x) \geqslant 0, \;\; x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$(a(x,u,\nabla u) - uG(u)) \cdot \nu = 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Omega \times (0,T), \tag{1.3}$$

где ν — вектор внешней нормали. Здесь $\beta(x,r)$, $f(x,r)$, $a(x,r,y)$ — каратеодориевы функции. Функция β, $\beta(x,0) = 0$ — нечетная и возрастает по r. Требование нечетности несущественно, поскольку нас интересуют только неотрицательные решения уравнения (1.1). Интегральный оператор $G(u) = (G_1(u), G_2(u), \dots, G_n(u))$ определяется формулами

$$G_i(v) = \int\limits_\Omega g_i(x,y)b(v(y))dy.$$

В настоящей работе доказывается существование слабого решения задачи (1.1)–(1.3) для анизотропного уравнения с переменным показателем нелинейности. Модельный пример уравнений (1.1) можно получить из уравнения агрегации

$$v_t = \operatorname{div}\left(|\nabla A(v)|^{p(x)-2}\nabla A(v) - v\nabla K * v\right), \quad 0 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p^+, \; x \in \Omega,$$

рассмотренного в случае $p(x) = 2$ в работе [9]. В этой работе доказывается существование и единственность решения задачи для указанного уравнения. После замены $v = b(u)$, где $b(u)$ — обратная к монотонно возрастающей функции $A(u)$, приходим к уравнению вида

$$b(u)_t = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u - b(u)\nabla K * b(u)\right).$$

Здесь оператор свертки определяется формулой $K * u(x,t) = \int\limits_\Omega K(x-y)u(y,t)dy$.

Функция $K(x)$ подчиняется условиям (см. [9]):

$$K \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} K(x)dx = 1; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial K(x-y)}{\partial \nu_x} \leqslant 0, \ x \in \partial\Omega, \ y \in \Omega. \tag{1.5}$$

За последние 15 лет появилось огромное число работ, посвященных изучению явлений агрегации в биологических системах. Был предложен ряд нелокальных моделей, см. [11, 15, 17, 18, 21] и имеющиеся там ссылки. Модели агрегации без диффузии изучались в работе [20]. В основном рассматриваются уравнения без слагаемого f, отвечающего за процессы рождения-уничтожения в колониях бактерий.

В работе [12] приводится вывод одномерного уравнения агрегации. Кроме того, для этого уравнения в работе найдены стабильные состояния и изучены их свойства.

Отметим еще интересную работу [10], в которой изучается задача для системы

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \operatorname{div}[\nabla u^m(x,t) - u(x,t)\nabla\phi(x,t)], \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 3, \quad m > 1, \\ -\triangle\phi(x,t) = u(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

В этой работе показано, что при $m = 2 - \dfrac{2}{n}$ существует критическое значение M_c массы $M = \int\limits_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx$ такое, что если $0 < M < M_c$, то решение существует глобально, а если $M > M_c$, то решение «взрывается» за конечное время.

Следует отметить также работы об оптимальной эксплуатации возобновляемых ресурсов (см. [2] и имеющиеся там ссылки).

В работе [13] для уравнения агрегации

$$u_t(x,t) = \operatorname{div}[\nabla u^m(x,t) - u(x,t)\nabla K * u(x,t)], \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geqslant 2, \quad m > 1,$$

дан хороший обзор результатов. В частности, при $m > 2 - \dfrac{2}{n}$ решение существует глобально при всех $t > 0$. Если же $m < 2 - \dfrac{2}{n}$, то решение «взрывается» за конечное время. В этой работе доказано, что при $m > 2 - \dfrac{2}{n}$ существует единственное (с точностью до трансляций) стационарное решение задачи при любой массе, оно радиально симметрично и имеет компактный носитель. В двумерном случае с ньютоновским взаимодействием при любой массе доказана сходимость решений уравнения агрегации к этому равновесному состоянию.

Отметим, что методы доказательства единственности ренормализованного решения для уравнений с двойной нелинейностью, использованные в работах [6, 14], основанные на методе удвоения С. Н. Кружкова [4], не пригодны для уравнения (1.1) ввиду наличия нелокального интегрального оператора.

2. Функциональные пространства и предположения

Через $L_{p(\cdot)}(Q)$ обозначим пространство Орлича

$$L_{p(\cdot)}(Q) = \{u : \int\limits_Q |u(x)|^{p(x)}dx < \infty\},$$

соответствующее функции $p(x)$, $1 < p_- \leqslant p(x) \leqslant p^+$, с нормой Люксембурга

$$||u||_{p(\cdot),Q} = \inf\{k > 0 : \int\limits_Q \left|\frac{u(x)}{k}\right|^{p(x)} dx \leqslant 1\}.$$

Ниже в качестве Q могут выступать области Ω, D^T и другие, причем индекс $Q = \Omega$ может быть опущен. Будут рассматриваться только функции $p(x)$, удовлетворяющие условию

$$|p(x) - p(y)| \leqslant \frac{C}{-\ln|x-y|} \tag{2.1}$$

при $|x-y| \leqslant 1/2$, $x, y \in \overline{\Omega}$. При таком условии имеет место сходимость осреднений (см. [1]): если $f \in L_{p(\cdot)}(Q)$ продолжена нулем вне ограниченной области Q и

$$f_{\rho_m}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\rho_m(x-y)dy,$$

то $f_{\rho_m} \to f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при $m \to \infty$. Здесь $\rho_m(x) = m^n\rho(m|x|)$ — ядро осреднения. Сходимость имеет место и для осреднений Стеклова: $f_h \to f$ в пространстве $L_{p(\cdot)}(D^T)$ при $h \to 0$, $f_h(x,t) = \dfrac{1}{h}\int\limits_t^{t+h} f(x,\tau)d\tau$.

Определим анизотропное пространство Соболева—Орлича $W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ как пополнение пространства $C^1(\overline{\Omega})$ по норме

$$||u||_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)} = \sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||_{p_i(\cdot),\Omega} + \|u\|_{1,\Omega} = ||\nabla u||_{\mathbf{p},\Omega} + \|u\|_{1,\Omega},$$

где функции $p_i(x)$ удовлетворяют условиям (2.1) и $1 < p_- \leqslant p_i(x) \leqslant p_+$, $x \in \overline{\Omega}$.

Пространство $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ определяется как пополнение пространства $C^1(\overline{D^T})$ по норме

$$||u||_{W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)} = \sum_{i=1}^n ||u_{x_i}||_{p_i(\cdot),D^T} + \|u\|_{1,D^T} = ||\nabla u||_{\mathbf{p},D^T} + \|u\|_{1,D^T}.$$

Пусть $X = \{\nabla u|\ u \in W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)\}$.

Пространство $\prod\limits_{i=1}^n L_{\overline{p}_i(\cdot)}(D^T)$, $\overline{p}_i^{-1} + p_i^{-1} = 1$, обозначим через X'. Элементы $v \in X'$ действуют как функционалы на элементы $u \in W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ по формуле $(v,u)_{D^T} = \int\limits_{D^T} v \cdot \nabla u dx dt$.

Неравенство Пуанкаре $\|\overline{u}\|_{p_-,\Omega} \leqslant C\|\nabla\overline{u}\|_{p_-,\Omega}$, где $\overline{u} = u - c$, $c = |\Omega|^{-1}\displaystyle\int\limits_\Omega u dx$, $u \in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, устанавливает вложение $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T) \subset L_{p_-}(D^T)$. Компактность этого вложения при $p_- < n$ следует из теоремы Реллиха—Кондрашова.

Другое вложение установлено в работе [16]. Положим

$$p_M(x) = \max(p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)),\ x \in \Omega.$$

Тогда [16, следствие 2.1] если

$$\operatorname{ess\,inf}(p_M(x) - p_*(x)) > 0,$$

то вложение

$$W^1_{\mathbf{p}}(\Omega) \hookrightarrow L_{p_*(\cdot)}(\Omega)$$

компактно.

Определим еще пространство

$$V = L_{p_-}(0,T; W^{0,1}_{\mathbf{p}}(\Omega))$$

с нормой

$$||u||_V = \left(\int\limits_0^T ||u(t)||^{p_-}_{\mathbf{p},\Omega} dt\right)^{1/p_-}.$$

Через $\mathrm{Lip}_0(Q)$ обозначим пространство липшицевых функций с компактным носителем, лежащим в Q.

Приведем условия на функции, входящие в уравнение (1.1). Функция $\beta(x,r)$ нечетна по $r\in\mathbb{R}$ и при некоторых M_0, M_T удовлетворяет условиям:

$$s\beta(x,r)\leqslant r\beta(x,s) \text{ при } 0<M_0\leqslant r<s\leqslant M_T,\ x\in\Omega; \tag{2.2}$$

$$\beta(x,M_T)\in L_{\overline{p}_m(\cdot)}, \quad \text{где} \quad \overline{p}_m(x)=\max_j(\overline{p}_j(x)),\ x\in\Omega. \tag{2.3}$$

Пусть функция $q(x,r)$ определяется равенством $f=\beta(x,r)q(x,r)$ и ограничена:

$$|q(x,r)|\leqslant q_0 \text{ при } |r|\leqslant M_T. \tag{2.4}$$

Будем предполагать, что неотрицательная измеримая начальная функция u_0 ограничена: $u_0(x)\leqslant M_0$. Очевидно, что $\beta(x,u_0)\in L_1(\Omega)$, и при любом $\delta>0$ найдется функция $v\in C_0^1(\Omega)$ такая, что

$$\int\limits_\Omega |\beta(x,u_0)-\beta(x,v)|dx<\delta.$$

Функции $a_i(x,r,y)$ непрерывны по $r\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$ и измеримы по $x\in\Omega$. Положим

$$S(x,y)=\sum_{i=1}^n |y_i|^{p_i(x)}.$$

Пусть существуют функция $F(x)\in L_1(\Omega)$ и непрерывная функция $C(m)$, $m\geqslant 0$, такие, что

$$|a_j(x,r,y)|^{\overline{p}_j(x)}\leqslant C(m)(F(x)+S(x,y)) \tag{2.5}$$

при всех $r\in[-m,m]$, $y\in\mathbb{R}^n$, $x\in\Omega$. Отметим, что из этого условия легко следует, что

$$a_j(x,u,\nabla v)\in L_{p_j(\cdot)}(D^T) \tag{2.6}$$

при всех $u\in L_\infty(D^T)$, $v\in W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

Условия монотонности и коэрцитивности записываются в следующем виде:

$$\Lambda(x,r,y,z)=(a(x,r,y)-a(x,r,z))\cdot(y-z)\geqslant 0,\ y\neq z; \tag{2.7}$$

$$a(x,r,y)\cdot y\geqslant \delta_0 S(x,y)-F(x), \quad \forall r\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}^n,\ x\in\Omega. \tag{2.8}$$

Опишем теперь условия на функции, определяющие интегральный оператор $G(v)$: $g_i(x,y)\in C^1(P)$, $P=\{(x,y): x,y\in\overline{\Omega}, x\neq y\}$,

$$|\sum_{i=1}^n (g_i(x,y))_{x_i}|+|g_i(x,y)|\leqslant C(1+|x-y|^{-\lambda}), \quad \lambda\in(0,n), \quad (x,y)\in P. \tag{2.9}$$

Функция $b(s)\geqslant 0$, $b(0)=0$, удовлетворяет условию Липшица:

$$|b(s_1)-b(s_2)|\leqslant L_k|s_1-s_2|, \quad s_1,s_2\in[0,k], \quad \forall k>0. \tag{2.10}$$

Предполагается, что

$$\sum_{i=1}^n \nu_i g_i(x,y)\leqslant 0, \quad x\in\partial\Omega, \quad y\in\Omega. \tag{2.11}$$

Мы будем использовать следующее утверждение об оценках интегралов типа потенциалов [7, гл. I, §6].

Лемма 2.1. *Если* $\lambda<\dfrac{n}{\overline{q}}$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\overline{q}}=1$, $1<p<\infty$, $f(x)\in L_q(\Omega)$, *то функция*

$$v(x)=\int\limits_\Omega \frac{f(y)dy}{|x-y|^\lambda}$$

непрерывна и удовлетворяет неравенству

$$|v(x)|\leqslant C\|f\|_{q,\Omega}.$$

Из этой леммы и условий (2.9), (2.10) следует, что

$$G(v)\in C^1(\mathbb{R}^n), \quad |G(v)|\leqslant C_G, \quad |\mathrm{div}G(v)|\leqslant d_G \quad \text{при} \quad |v(x)|\leqslant M_T. \tag{2.12}$$

Отметим, что из (2.12) следует, что $G(u(t))\in C^1(\mathbb{R}^n)$ при почти всех $t\in(0,T)$.

3. Формулировка результатов

Определим функции

$$T_k v = \begin{cases} k & \text{при } v > k, \\ v & \text{при } |v| \leqslant k, \\ -k & \text{при } v < -k; \end{cases} \qquad \eta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r > 1, \\ 1-r & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1, \\ 1 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

Обозначим через $\operatorname{sign}^+(s)$ многозначную функцию, равную 1 при $s > 0$, нулю при $s < 0$, $[0,1]$ при $s = 0$; $r^+ = \max(r, 0)$.

Пусть $\chi(P)$ обозначает логическую функцию, равную 1, когда P истинно, и 0, когда P ложно.

Определение 3.1. Функция $u : D^T \to [0, \infty)$ называется *слабым решением* задачи (1.1)–(1.3), если $u \in L_\infty(D^T)$, $u \in V$ и для всех пробных функций $\phi \in C^\infty(\overline{D^T})$ таких, что $\phi(T) = 0$, выполнено равенство

$$\int\limits_{D^T} ((\beta(x,u_0) - \beta(x,u))\phi_t + (a(x,u,\nabla u) - \beta(x,u)G(u)) \cdot \nabla\phi)\, dxdt = \int\limits_{D^T} f(x,u)\phi dxdt.$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.11)*,* $B(x,u_0) \in L_1(\Omega)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M_0$. *Положим* $T = \mu^{-1}\ln|\dfrac{M_T}{M_0} - 1|$, *где* $\mu = 1 + q_0 + d_G$.

Тогда существует слабое решение задачи (1.1)–(1.3) *такое, что*

$$\int\limits_{\Omega} B(x, u(x,t))dx \leqslant C,\ t \in [0,T],$$

$$0 \leqslant u(x,t) \leqslant M_T.$$

4. Существование слабого решения

Следуя [8], положим

$$B(x,r) = \beta(x,r)r - \Phi(x,r),\ \Phi(x,r) = \int\limits_0^r \beta(x,s)ds, \tag{4.1}$$

$$B(x,r) = \Psi(x, \beta(x,r));\ \Psi(x,r) = \sup_s\{sr - \Phi(x,s)\}.$$

Поскольку $\beta(x,r) \in L_1(\Omega)$ — возрастающая по r функция, то Φ и Ψ — выпуклые функции при фиксированных x, $B(x,r)$ возрастает по r на $[0,\infty)$. Интегрированием по частям устанавливается формула

$$B(x,r) = \int\limits_0^r s d\beta(x,s),$$

из которой следует, что $B(x,r) \in L_1(\Omega)$, $B(x,r) \geqslant 0$ и

$$B(x,r) - B(x,r_0) \geqslant (\beta(x,r) - \beta(x,r_0))r_0,\ r, r_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Решение задачи (1.1)–(1.3) будем строить как предел решений уравнений, полученных дискретизацией уравнения (1.1) по переменной t. Выберем целое $m > 0$. Пусть $h = T/m$ (всюду в этом параграфе) и положим

$$\partial_t^{-h}\beta(x, u(t,x)) = \frac{\beta(x,u(t,x)) - \beta(x, u(t-h,x))}{h}.$$

Будем предполагать сначала, что

$$a(x,r,y) = a(x, T_\rho r, y), \tag{4.3}$$

где $\rho = M_T$, и пусть

$$\beta(x,r) = \beta(x,\rho) + (r-\rho)^{p_- - 1}, \quad r > \rho. \tag{4.4}$$

Эти ограничения несущественны, поскольку построенное решение будет удовлетворять неравенству $0 \leqslant u(x,t) \leqslant \rho$, $(x,t) \in D^T$.

Введем обозначения $\beta_1(x,r) = \beta(x,T_\rho r)$, $u^1(x,t) = T_\rho u(x,t-h)$. Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$\partial_t^{-h}\beta(x,u(t)) = \operatorname{div}(a(x,u^1(t),\nabla u(t)) - \beta_1(x,u(t))G(u^1(t))) + \beta_1(x,u(t))q(x,u^1(t)), \tag{4.5}$$

которое решается последовательно на интервалах $((k-1)h,kh]$, $k=1,2,\ldots,m$, с ограниченным начальным условием

$$u(t,x) = u_{0m}(x), \quad t\in(-h,0]. \tag{4.6}$$

Начальные функции берутся гладкие, $u_{0m}(x)\in C_0^\infty(\Omega)$, так, чтобы $B(x,u_{0m}(x))\to B(x,u_0(x))$ в $L_1(\Omega)$ при $m\to\infty$. Краевое условие имеет вид:

$$\big(a(x,u^1(t),\nabla u(t)) - \beta_1(x,u(t,x))G(u^1(t))\big)\cdot\nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega\times(0,T). \tag{4.7}$$

Зафиксируем m. Определим кусочно постоянную функцию $M(t)=M_0$ при $t\leqslant 0$, $M(t+h) = M(t)/(1-\mu h)$ при $t>0$. Тогда при малых h справедливо неравенство

$$M(T) = \frac{M_0}{(1-\mu h)^m} \leqslant M_0(\exp(\mu T)+1) = M_T.$$

Докажем индукцией по k разрешимость задачи (4.5), (4.6) и неравенства

$$0\leqslant u(x,t)\leqslant M(t),\ x\in\Omega,\ t\in((k-1)h,kh]. \tag{4.8}$$

При $k=0$ неравенства выполнены. Пусть для $k-1$ решение задачи существует и удовлетворяет (4.8). Зафиксируем $t\in((k-1)h,kh]$. Разрешимость задачи (4.5)–(4.7) будет следовать из разрешимости операторного уравнения

$$\mathcal{A}(v) = \mathcal{F} = \beta_1(x,u^1(t))/h$$

(см. [5, теорема 2.1, гл. 2]), где оператор $\mathcal{A}: W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)\to W^{-1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$ определяется формулой

$$(\mathcal{A}(v),\varphi) = \int\limits_\Omega [(h^{-1}\beta(x,v) - q(x,u^1(t))\beta_1(x,v))\varphi +$$

$$+ (a(x,u^1(t)),\nabla v) - \beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla\varphi]dx,\ \varphi\in C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Покажем, что $\mathcal{A}(v)\in W^{-1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$ для любого $v\in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$. Из (2.5) и неравенства Юнга следует, что

$$\int\limits_\Omega |a(x,u^1(t),\nabla v)\cdot\nabla\varphi|dx \leqslant \int\limits_\Omega C(M_T)(F(x)+S(x,\nabla v)) + S(x,\nabla\varphi)dx < C(v)$$

при всех $v\in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ и φ таких, что $\|\varphi\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}=1$. Тогда в силу (4.4) и (2.3)

$$\left|\int\limits_\Omega \beta(x,v)\varphi dx\right| \leqslant 2\int\limits_\Omega |\beta(x,\rho)\varphi|dx + \int\limits_\Omega |\varphi|\chi(v>\rho)(v-\rho)^{\frac{p_-}{p_- -1}}dx \leqslant$$

$$\leqslant 4\|\beta(x,\rho)\|_{\overline{p}_1(\cdot),\Omega}\|\varphi\|_{p_1(\cdot),\Omega} + \int\limits_\Omega (|\varphi|^{p_-}+|v|^{p_-})dx \leqslant C(v)$$

при всех $v\in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ и φ таких, что $\|\varphi\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}=1$. Далее запишем неравенства, вытекающие из (2.3):

$$\int\limits_\Omega (|\beta(x,M_T)\varphi_{x_i}|dx \leqslant 2\|\beta(x,M_T)\|_{\overline{p}_i(\cdot)}\|\varphi_{x_i}\|_{p_i(\cdot)} \leqslant C\|\varphi_{x_i}\|_{p_i(\cdot)}. \tag{4.9}$$

Теперь с помощью неравенства (2.12) устанавливаем, что

$$\left|\int\limits_\Omega \beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla\varphi(t)dx\right| \leqslant C_G\int\limits_\Omega (|\beta(x,M_T)\nabla\varphi|dx \leqslant C_1.$$

Из полученных оценок следует, что $\mathcal{A}(v)\in W^{-1}_{\mathbf{p}}(\Omega)$.

Монотонность оператора $\widetilde{\mathcal{A}}$, определяемого формулой

$$(\widetilde{\mathcal{A}}(v),\varphi)=\int\limits_{\Omega}[(h^{-1}\beta(x,v)-q(x,u^1(t))\beta_1(x,v))\varphi+a(x,u^1(t),\nabla v)\cdot\nabla\varphi]dx,$$

при достаточно малых h следует из монотонности функции β и условия (2.7). Далее, псевдомонотонность оператора, определяемого формулой

$$(\mathcal{B}(v),\varphi)=\int\limits_{\Omega}[-\beta_1(x,v)G(u^1(t))\cdot\nabla\varphi]dx,$$

легко следует из неравенства $\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,v)|^{\overline{p}_m(x)}dx\leqslant\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,\rho)|^{\overline{p}_m(x)}dx<\infty$. Действительно, из компактности вложения $W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)\subset L_{p_-}(\Omega)$ и слабой сходимости $v_j\to v$ в пространстве $W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$ следует сильная сходимость $v_j\to v$ в пространстве L_{p_-}. Тогда можно выделить подпоследовательность v_{j_k} такую, что $v_{j_k}\to v$ почти всюду. Так как $|\beta_1(x,v_j)|\leqslant\beta(x,\rho)$ и из (2.3) следует, что $\beta(x,\rho)\in L_{\overline{p}_m(\cdot)}(\Omega)$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,v_{j_k})-\beta_1(x,v)|^{\overline{p}_m(x)}dx\to 0,\quad k\to\infty.$$

Легко видеть, что сходимость имеет место для всей последовательности, а не только для подпоследовательности. Поэтому $\lim\limits_{i\to\infty}(\mathcal{B}(v_j),v_j-\varphi)=(\mathcal{B}(v),v-\varphi)$, что доказывает псевдомонотонность оператора $\mathcal{B}$. Из равенства $\mathcal{A}=\widetilde{\mathcal{A}}+\mathcal{B}$ следует псевдомонотонность оператора $\mathcal{A}$.

Осталось проверить условие коэрцитивности. Пользуясь (2.12) и неравенством Юнга, запишем неравенства

$$\int\limits_{\Omega}|\beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla v|dx\leqslant C_G\int\limits_{\Omega}\beta(x,\rho)|\nabla v|dx\leqslant \tag{4.10}$$
$$\leqslant\int\limits_{\Omega}(C(\delta_0)\beta(x,\rho)^{\overline{p}_m(x)}+\frac{\delta_0}{4}S(x,\nabla v))dx.$$

Воспользовавшись неравенствами (2.8), (4.10), получим

$$(\mathcal{A}(v),v)=\int\limits_{\Omega}h^{-1}v\beta(x,v)+(a(x,u^1(t),\nabla v)- \tag{4.11}$$
$$-\beta_1(x,v)G(u^1(t)))\cdot\nabla v-\beta_1(x,v)q(x,u^1(t))vdx\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{\Omega}\left(\frac{3\delta_0}{4}S(x,\nabla v)+v(\beta(x,v)h^{-1}-q_0\beta_1(x,v))\right)dx-C_1(\delta_0).$$

Отсюда следует коэрцитивность: $\mathcal{A}((v),v)/\|v\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}\to\infty$ при $\|v\|\to\infty$ и достаточно малых h. Действительно, пусть $\|v\|_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}=A$, где A достаточно большое число, причем $\|\nabla v\|_{\mathbf{p},\Omega}\geqslant A/2$. Тогда $\|v\|^{-1}_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}\int\limits_{\Omega}S(x,\nabla v)dx\geqslant C(A)$, где $\lim\limits_{A\to\infty}C(A)=\infty$. Если же $\|v\|_1\geqslant A/2$, то $\|v\|_{p_-}\geqslant C_1A$. Поэтому из (4.4) следует

$$\int\limits_{\Omega}v\beta(x,v)dx\geqslant\int\limits_{\Omega}\chi(|v|\geqslant 2\rho)|v-\rho|^{p_-}dx\geqslant C\|v\|^{p_-}_{p_-}-C_2\geqslant C_3A^{p_-}-C_2.$$

Таким образом, при $A\to\infty$ $\|v\|_1\geqslant A/2$ и имеем

$$\|v\|^{-1}_{W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)}\int\limits_{\Omega}v\beta(x,v)dx\to\infty.$$

Итак, разрешимость уравнения $\mathcal{A}(v)=\mathcal{F}$ установлена. Таким образом, если положить $u(x,t)=v(x)$, $t\in((k-1)h,kh]$, то будем иметь решение задачи (4.5)–(4.7).

Докажем индукцией по k неравенства (4.8). Пусть $u^{(s)} = \max(0, u-s)$, $s \geqslant 0$. Умножим уравнение (4.5) на $(-u)^{(0)}(t)$ и проинтегрируем по Ω:

$$\int\limits_\Omega (-u)^{(0)}(t)(\partial_t^{-h}\beta(x,u(t)) - \beta_1(x,u(t))q(x,u^1(t)))dx =$$
$$= -\int\limits_\Omega (a(x,u,\nabla u(t)) - \beta_1(x,u(t))G(u^1(t)))\cdot\nabla(-u)^{(0)}(t)dx.$$

Пользуясь индукционными предположениями

$$M(t-h) \geqslant u(t-h) \geqslant 0,$$

нечетностью функции β и неравенством (2.8), будем иметь

$$\int\limits_\Omega \Big((-u)^{(0)}(t)\beta(x,u(t))/h - \beta_1(x,u(t))G(u(t-h))\cdot\nabla(-u)^{(0)}(t)\Big)dx \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_\Omega \beta_1(x,u(t))q(x,u(t-h))(-u)^{(0)}(t)dx \geqslant \int\limits_\Omega q_0\beta_1(x,u(t))(-u)^{(0)}(t)dx.$$

Пользуясь (2.11), запишем соотношения

$$-\int\limits_\Omega \beta_1(x,u(t))G(u(t-h))\cdot\nabla(-u)^{(0)}(t)dx = \int\limits_\Omega G\cdot\nabla \int\limits_0^{-(-u)^{(0)}(t)} \beta_1(x,r)drdx \leqslant$$

$$\leqslant -\int\limits_\Omega \int\limits_0^{-(-u)^{(0)}(t)} \beta_1(x,r)dr\operatorname{div}G(u(t-h))dx \leqslant d_G\int\limits_\Omega -(-u)^{(0)}(t)\beta_1(x,-(-u)^{(0)}(t))dx.$$

Предыдущие выкладки приводят к неравенству

$$\int\limits_\Omega (-u)^{(0)}(t)\beta(x,u(t))(1/h - q_0 - d_G)dx \geqslant 0.$$

При достаточно малых h в силу нечетности функции β отсюда следует, что $(-u)^{(0)}(t) = 0$.

Умножим теперь уравнение (4.5) на $u^{(s)}(t)$, $s > 0$, и проинтегрируем по Ω:

$$\int\limits_\Omega u^{(s)}(t)(\partial_t^{-h}\beta(x,u(t)) - \beta(x,u(t))q(x,u(t-h))dx =$$
$$= -\int\limits_\Omega (a(x,u,\nabla u(t)) - \beta(x,u(t))G(u(t-h)))\cdot\nabla u^{(s)}(t)dx.$$

Пользуясь (2.8) и индукционным предположением, запишем неравенство

$$\int\limits_\Omega \Big(u^{(s)}(\beta(x,u(t)) - \beta(x,M(t-h))/h - G(u(t-h))\cdot\nabla \int\limits_0^{u^{(s)}(t)} \beta(x,s+r)dr\Big)dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_\Omega q_0\beta(x,u(t))u^{(s)}(t)dx.$$

Используя (2.11), находим, что

$$\int\limits_\Omega G(u(t-h))\cdot\nabla\int\limits_0^{u^{(s)}(t)}\beta(x,s+r)drdx\leqslant$$

$$\leqslant-\int\limits_\Omega\int\limits_0^{u^{(s)}(t)}\beta(x,s+r)dr\mathrm{div}G(u(t-h))dx\leqslant d_G\int\limits_\Omega u^{(s)}(t)\beta(x,s+u^{(s)}(t))dx.$$

Из проведенных выкладок устанавливаем соотношение

$$\int\limits_\Omega u^{(s)}(\beta(x,u(t))(1-q_0h-d_Gh)-\beta(x,M(t-h)))dx\leqslant 0.$$

Поскольку при $s>M(t-h)$ из (2.2) следует неравенство $\dfrac{s}{M(t-h)}\beta(x,M(t-h))\leqslant\beta(x,s)$, то

$$\int\limits_\Omega u^{(s)}\Big(\frac{s}{M(t-h)}(1-q_0h-d_Gh)-1\Big)\beta(x,M(t-h))dx\leqslant 0.$$

При $s=\dfrac{M(t-h)}{1-(q_0+1)h-d_Gh}=\dfrac{M(t-h)}{1-\mu h}=M(t)$ отсюда следует равенство $u^{(s)}=0$, завершающее индукцию. Таким образом, из доказанного неравенства $u(x,t)\leqslant M(t)$ следует, что $\beta_1(x,u(t))=\beta(x,u(t))$ и $u^1(t)=u(t-h)$.

Решение задачи (4.5)–(4.7) в дальнейшем будем обозначать через $u_m(t)$.

После умножения уравнений (4.5) на $\alpha(t)u_m(t)$, $\alpha\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha\geqslant 0$, и интегрирования по Ω будем иметь

$$\int\limits_\Omega\Big(\alpha u_m\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t))+(a(x,u_{mh},\nabla u_m(t))-\beta(x,u_m(t))G(u_{mh}))\cdot\nabla\alpha u_m\Big)dx=$$

$$=\int\limits_\Omega u_m(t)\alpha\beta(x,u_m(t))q(x,u_{mh})dx,\tag{4.12}$$

где $u_{mh}=u_m(t-h)$. Оценим снизу параболический член с помощью неравенства (4.2) при $\alpha\geqslant 0$:

$$\int\limits_\Omega\alpha u_m\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t))dx\geqslant\int\limits_\Omega\alpha(B(x,u_m(t))-B(x,u_m(t-h)))/hdx.\tag{4.13}$$

Тогда

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\alpha u_m\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t))dxdt\geqslant h^{-1}\int\limits_0^{T-h}\int\limits_\Omega B(x,u_m(t))(\alpha(t)-\alpha(t+h))dxdt.\tag{4.14}$$

Отметим, что правая часть в (4.12) ограничена числом, не зависящим от m и t. Пользуясь (2.8), (4.10) и (4.13), из (4.12) (с $\alpha=1$) после интегрирования по $t\in[0,\tau]$ выводим неравенство

$$\int\limits_\Omega h^{-1}\int\limits_{\tau-h}^{\tau}B(x,u_m(t))dtdx+\frac{3\delta_0}{4}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega S(x,\nabla u_m(t))dxdt\leqslant\tag{4.15}$$

$$\leqslant C(T+\int\limits_\Omega B(x,u_0)dx).$$

Поскольку функция $B(x,u_m(t))$ кусочно постоянна по времени, при достаточно больших m (и малых h) устанавливаем неравенство

$$\max_{[0,T]}\int\limits_\Omega B(x,u_m(t))dx+\int\limits_{D^T}S(x,\nabla u_m)dxdt\leqslant C.\tag{4.16}$$

Отсюда и из (4.8) следует ограниченность последовательности u_m в пространствах $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$ и $L_\infty(D^T)$. Неравенство (4.16) при помощи условий (2.5), (2.8) позволяет установить ограниченность последовательности $a(x, u_{mh}\nabla u_m)$ в пространстве X':

$$\|a(x, u_{mh}\nabla u_m)\|_{X'} \leqslant C. \tag{4.17}$$

Это влечет сходимость при $m \to \infty$ (по подпоследовательности):

$$a_i(x, u_{mh}, \nabla u_m(t)) \to v_i,\ \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.18}$$

слабо в пространствах $L_{\overline{p}_i(\cdot)}(D^T)$, а также

$$u_m \to u, \tag{4.19}$$

слабо в пространстве $W^{0,1}_{\mathbf{p}}(D^T)$.

Далее, как и в работе [8], устанавливается компактность последовательности $\beta(x, u_m(t))$ в пространстве $L_1(D^T)$.

В следующей лемме из работы [8] функция β предполагается неубывающей.

Лемма 4.1. *Пусть последовательность* $u_m \to u$ *слабо в* $L_q(D^T)$, $q > 1$, *ограничена в* $L_1([0,T]; W^1_1(\Omega))$, *и выполнено*

$$\int\limits_\Omega B(x, u_m(t))dx \leqslant c, t \in (0, T),$$

$$\int\limits_0^{T-\mu}\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t+\mu)) - \beta(x, u_m(t)))(u_m(t+\mu) - u_m(t))dxdt \leqslant c\mu \tag{4.20}$$

при $0 < \mu < \mu_0$ *и любом* $m > 1/\mu$.

Тогда найдется подпоследовательность такая, что $\beta(x, u_m) \to \beta(x, u)$ *в* $L_1(D^T)$ *и почти всюду в* D^T.

Для доказательства неравенства (4.20) установим оценку

$$I := \int\limits_0^{T-kh}\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t+kh)) - \beta(x, u_m(t)))\Delta_{kh}u_m(t)dxdt \leqslant Ckh, \tag{4.21}$$

где $\Delta_{kh}u_m(t) = u_m(t+kh) - u_m(t)$, $k = 0, \ldots, m$.

Пусть $\gamma(x) \in W^1_{\mathbf{p}}(\Omega)$, $t_i = ih$, $i = 0, \ldots, m$. Из (4.5) следует равенство

$$\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_i+h)) - \beta(x, u_m(t_i)) - h\beta(x, u_m(t_i+h))q(x, u_m(t_i)))\gamma dx =$$

$$= h\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_i+h))G(u_m(t_i)) - a(x, u_m(t_i), \nabla u_m(t_i+h)) \cdot \nabla\gamma dx.$$

После суммирования по $i = s, \ldots, s+k-1$ будем иметь

$$\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_{s+k})) - \beta(x, u_m(t_s)))\gamma dx =$$

$$= h\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_\Omega \beta(x, u_m(t_{s+l+1}))q(x, u_m(t_{s+l}))\gamma dx+$$

$$+h\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_\Omega (\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))G(u_m(t_{s+l})) - a(x, u_m(t_{s+l}), \nabla u_m(t_{s+l+1}))) \cdot \nabla\gamma dx.$$

Выберем $\gamma_s(x) = h(u_m(t_{s+k}, x) - u_m(t_s, x))$ и просуммируем по $s = 0, \dots, m-k$. Получим

$$I = h\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{m-k}\int\limits_{\Omega}(\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))G(u_m(t_{s+l})) - a(x, u_m(t_{s+l}), \nabla u_m(t_{s+l+1}))) \times$$

$$\times \nabla\gamma_s(x)dx + h\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{s=0}^{m-k}\int\limits_{\Omega}\nu\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))q(x, u_m(t_{s+l}))\gamma_s dx.$$

Следовательно,

$$I = h\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_0^{T-kh}\int\limits_{\Omega}\big((\beta(x, u_m(t+lh+h))G(u_m(t+lh)) -$$

$$-a(x, u_m(t+lh), \nabla u_m(t+lh+h))) \cdot \nabla\Delta_{kh}u_m +$$

$$+\beta(x, u_m(t_{s+l+1}))q(x, u_m(t_{s+l}))\Delta_{kh}u_m\big)dxdt.$$

Пользуясь (4.9), (2.12), выводим оценку

$$\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_0^{T-kh}\int\limits_{\Omega}\big|\beta(x, u_m(t+lh+h))G(u_m(t+lh))\nabla u_m(t+lh+h))\big|dxdt \leqslant$$

$$\leqslant Ck||\nabla u_m(t+lh+h))||_{\mathbf{p},D^T} \leqslant C_1 k.$$

В силу (4.17) имеем

$$\sum_{l=0}^{k-1}\int\limits_0^{T-kh}\int\limits_{\Omega}|a(x, u_m(t+lh), \nabla u_m(t+lh+h)) \cdot \nabla(u_m(t+kh) - u_m(t))|dxdt \leqslant$$

$$\leqslant 2k||a(x, u_m(t), \nabla u_m(t+h))||_{X'(D^{T-h})}||u_m||_{W^1_{\mathbf{p}}(D^T)} \leqslant Ck.$$

Постоянная C не зависит от m и h. В итоге имеем оценку (4.21). В силу того, что функция $u_m(t)$ кусочно постоянна, из нее следует неравенство (4.20) при $\mu \in [1/m, T]$.

По лемме 4.1 выбираем подпоследовательность $\beta(x, u_m)$ такую, что $\beta(x, u_m) \to \beta(x, u)$ в $L_1(D^T)$ и почти всюду в D^T. В силу строгой монотонности функции β отсюда следует также сходимость

$$u_m \to u \text{ почти всюду в } D^T \tag{4.22}$$

по некоторой подпоследовательности. Тогда $u_{mh} \to u$ и $B(x, u_m) \to B(x, u)$ почти всюду в D^T. В силу ограниченности решений имеем также сходимость $u_m \to u$ в пространстве $L_q(D^T)$ при любом $q > 1$.

Из леммы 2.1, а также из (2.9) и (2.10), следует неравенство

$$|G_i(u_1) - G_i(u_2)| \leqslant C\|u_1 - u_2\|_{q,\Omega}, \ i = \overline{1, n}, \tag{4.23}$$

при достаточно большом $q > 1$. Поэтому ограниченность последовательности $G(u_{mh})$ в пространстве $L_\infty(D^T)$ влечет сходимость при $m \to \infty$ (по подпоследовательности)

$$G_i(u_{mh}) \to G_i(u) \ \text{ сильно в } L_q(D^T). \tag{4.24}$$

при любом $q > 1$.

Докажем, что

$$a_j(x, u_{mh}, \nabla u) \to a_j(x, u, \nabla u) \tag{4.25}$$

сильно в $L_{\overline{p}_j(\cdot)}(D^T)$. В силу (2.5) интегралы $\int\limits_{D^T}|a(x, u_{mh}, \nabla u)|^{\overline{p}_j(x)}dxdt$ равностепенно абсолютно непрерывны. Поэтому (4.25) легко следует из теоремы Витали [3, гл. III, § 6, теорема 15].

После умножения уравнений (4.5) на $\varphi(t) \in C_0^\infty(-1, T-\delta)$ и интегрирования по D^T получим:

$$\int\limits_{D^T} \varphi(\partial_t^{-h}\beta(x,u_m(t)) - \beta(x,u_m(t))q(x,u_{mh})+ \tag{4.26}$$
$$+(a(x,u_{mh},\nabla u_m(t)) - \beta(x,u_m(t))G(u_{mh}))\cdot\nabla\varphi dxdt = 0.$$

Нетрудно видеть, что при $2h<\delta$, $m\to\infty$, имеет место соотношение

$$\int\limits_{D^T} \varphi\partial_t^{-h}\beta(x,u_m)dxdt = -\int\limits_0^{T-h}\int\limits_\Omega \beta(x,u_m)\partial_t^h\varphi(t)dxdt - \frac{1}{h}\int\limits_0^h\int\limits_\Omega \varphi(t)\beta(x,u_{0m})dxdt \to \tag{4.27}$$
$$\to -\int\limits_{D^T}\beta(x,u)\varphi_t dxdt - \int\limits_\Omega \varphi(0)\beta(x,u_0)dx.$$

После предельного перехода в (4.26) с учетом (4.18), (4.24) и (4.27), будем иметь

$$\int\limits_{D^T} \left((\beta(x,u_0)-\beta(x,u))\varphi_t + v_iD_i\varphi - \beta(x,u)G(u)\cdot\nabla\varphi\right)dxdt = \tag{4.28}$$
$$= \int\limits_{D^T}\beta(x,u)q(x,u)\varphi dxdt.$$

Следующая лемма использует идею работы [19].

Лемма 4.2. *Пусть $\beta(x,r)$ — каратеодориева функция, неубывающая по r, и измеримые функции $v: D^T\to\mathbb{R}$, $v_0:\Omega\to\mathbb{R}$ таковы, что $\beta(x,v)\in L_1(D^T)$, $\beta(x,v_0)\in L_1(\Omega)$. Пусть $w\in X' + L_1(D^T)$ и*

$$\int\limits_{D^T}\phi_t(\beta(x,v)-\beta(x,v_0))dxdt + (w,\phi)_{D^T} = 0$$

при всех $\phi\in C_0^\infty((-1,T)\times\mathbb{R}^n)$.

Тогда

$$-(\beta(x,v)_t, \xi(x,v)\varphi)_{D^T} = \int\limits_{D^T}\varphi_t\int\limits_{v_0}^{v}\xi(x,r)d\beta(x,r)dxdt \tag{4.29}$$

при всех ограниченных $\xi(x,s)$, монотонных и липшицевых по s, таких, что $\nabla\xi(x,v)\in X$, и $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times(-1,T))$ (либо $\xi=\xi(s)\in\operatorname{Lip}_0\mathbb{R}$).

Доказательство см. в [6]. Обычно формулу (4.29), в частной форме установленную впервые в работе [8], называют «формулой интегрирования по частям» и доказывают только для функций $\xi=\xi(v)$ (см. [14]).

Из (4.28) легко следует, что $\beta(x,u)_t\in X'+L_1(D^T)$. Действительно, в силу (4.18) $v = (v_1,\dots,v_n)\in X'$, и из (2.3), (2.4), (4.8) находим, что

$$\beta(x,u)G(u)\in X', \tag{4.30}$$

а также

$$\beta(x,u)G(u)\in L_1(D^T),\quad \beta(x,u)q(x,u)\in L_1(D^T). \tag{4.31}$$

Применяя к (4.28) лемму 4.2, получаем

$$\int\limits_{D^T}\left(\varphi_t\int\limits_{u_0}^{u}\xi(r)d\beta(x,r) - \sum_{i=1}^n v_iD_i(\xi(u)\varphi) + \beta(x,u)G(u)\cdot\nabla(\varphi\xi(u))\right)dxdt = \tag{4.32}$$
$$= -\int\limits_{D^T}\beta(x,u)q(x,u)\xi(u)\varphi dxdt,$$

где $\xi(r) = T_k(r)$, $\varphi = \varphi(t) \in C_0^\infty(0,T)$ (либо $\xi \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$, $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^n \times (-1,T))$). Тогда, в силу неравенств $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M_T$, будем иметь при $k > M_T$ равенство $\xi(u) = u$, поэтому (4.32) принимает вид

$$\int\limits_{D^T} \left(\varphi_t B(x,u(t)) - \sum_{i=1}^n v_i \varphi D_i u + \beta(x,u) G(u) \cdot \nabla(\varphi u)\right) dxdt = \tag{4.33}$$

$$= -\int\limits_{D^T} \beta(x,u) q(x,u) u \varphi dxdt.$$

Отсюда следует, что функция $\int\limits_\Omega B(x,u(t))dx$ абсолютно непрерывна по t.

Проинтегрировав (4.12) по $t \in (0,T)$, после предельного перехода $m \to \infty$, используя (4.14), получим при неотрицательных функциях $\alpha \in C_0^\infty(0,T)$

$$-\int\limits_{D^T} \alpha_t B(x,u) dxdt \leqslant \liminf_{m\to\infty} \int\limits_{D^T} -\alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dxdt +$$

$$+ \int\limits_{D^T} \left(\alpha\beta(x,u) G(u) \cdot \nabla u + \beta(x,u) q(x,u) u \alpha\right) dxdt.$$

Сложив это с (4.33), в котором выбрано $\varphi = \alpha$, будем иметь

$$\limsup_{m\to\infty} \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dxdt \leqslant \sum_{i=1}^n \int\limits_{D^T} \alpha v_i D_i u dxdt. \tag{4.34}$$

Воспользуемся условием (2.7) при $\varphi \in W_{\mathbf{p}}^{0,1}(D^T)$:

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha(a(x,u_{mh},\nabla u_m) - a(x,u_{mh},\nabla\varphi)) \cdot \nabla(u_m - \varphi) dxdt =$$

$$= \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla u_m dxdt - \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla u_m) \cdot \nabla\varphi) dxdt -$$

$$- \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u_{mh},\nabla\varphi) \cdot \nabla(u_m - \varphi) dxdt.$$

После предельного перехода $m \to \infty$ с использованием соотношений (4.19), (4.25), (4.34) устанавливаем неравенство

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha v \cdot \nabla u dxdt - \int\limits_{D^T} \alpha v \cdot \nabla\varphi dxdt - \int\limits_{D^T} \alpha a(x,u,\nabla\varphi) \cdot \nabla(u - \varphi) dxdt.$$

Перепишем его в виде

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha(v - a(x,u,\nabla\varphi)) \cdot \nabla(u - \varphi) dxdt.$$

Подставляя сюда $\varphi = u - \varepsilon\psi$, получим

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha(v - a(x,u,\nabla(u - \varepsilon\psi))) \cdot \nabla\psi dxdt.$$

Предельный переход $\varepsilon \to 0$ приводит к соотношению

$$0 \leqslant \int\limits_{D^T} \alpha(v - a(x,u,\nabla u)) \cdot \nabla\psi dxdt.$$

Ввиду произвольности $\psi \in W_{\mathbf{p}}^{0,1}(D^T)$, а также $\alpha \geqslant 0$, это влечет равенства $v_i = a_i(x,u,\nabla u)$. Тогда (4.28) совпадает с (3.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алхутов Ю. А., Жиков В. В.* Теоремы существования и единственности решений параболических уравнений с переменным порядком нелинейности// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 3. — С. 3–14.
2. *Беляков А. О., Давыдов А. А.* Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — *22*, № 2. — С. 38–46.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
4. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81(123)*, № 2. — С. 228–255.
5. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
6. *Мукминов Ф. Х.* Единственность ренормализованного решения эллиптико-параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича// Мат. сб. — 2017. — *208*, № 8. — С. 1187–1206.
7. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
8. *Alt H. W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations// Math. Z. — 1983. — *183*. — C. 311–341.
9. *Bertozzi A., Slepcev D.* Existence and uniqueness of solutions to an aggregation equation with degenerate diffusion// Commun. Pur. Appl. Anal. — 2010. — *9*, № 6. — С. 1617–1637.
10. *Blanchet A., Carrillo J. A., Laurencot P.* Critical mass for a Patlak—Keller—Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions// Calc. Var. — 2009. — *35*. — С. 133–168.
11. *Boi S., Capasso V., Morale D.* Modeling the aggregative behavior of ants of the species Polyergus rufescens// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2000. — *1*. — С. 163–176.
12. *Burger M., Fetecau R. C., Huang Y.* Stationary states and asymptotic behaviour of aggregation models with nonlinear local repulsion// SIAM J. Appl. Dyn. Syst. — 2014. — *13*, № 1. — С. 397–424.
13. *Carrillo J. A., Hittmeir S., Volzone B., Yao Y.* Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics// `arxiv:1603.07767v1[math.ap]`. — 2016.
14. *Carrillo J., Wittbold P.* Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems// J. Differ. Equ. — 1999. — *156*. — С. 93–121.
15. *Eftimie R., Vries G., Lewis M. A., Lutscher F.* Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals// Bull. Math. Biol. — 2007. — *146*, № 69. — С. 1537–1565.
16. *Fan X.* Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations// Complex Var. Elliptic Equ. — 2011. — *56*, № 7-9. — С. 623-642.
17. *Milewski P. A., Yang X.* A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing// Commun. Math. Sci. — 2008. — *6*. — С. 397–416.
18. *Morale D., Capasso V., Oelschlager K.* An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations// J. Math. Biol. — 2005. — *50*. — С. 49–66.
19. *Otto F.* L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations// J. Differ. Equ. — 1996. — *131*. — С. 20–38.
20. *Topaz C. M., Bertozzi A. L.* Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups// SIAM J. Appl. Math. — 2004. — *65*. — С. 152–174.
21. *Topaz C. M., Bertozzi A. L., Lewis M. A.* A nonlocal continuum model for biological aggregation// Bull. Math. Biol. — 2006. — *68*. — С. 1601–1623.

В. Ф. Вильданова
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
450000, г. Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а
E-mail: `gilvenera@mail.ru`

Ф. Х. Мукминов
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112;
Уфимский государственный авиационный технический университет,
450008, г. Уфа, ул. Карла Маркса, 12
E-mail: `mfkh@rambler.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-557-572 UDC 517.956.45, 517.968.74.

Existence of Weak Solution of the Aggregation Integro-Differential Equation

© 2017 **V. F. Vildanova, F. Kh. Mukminov**

Abstract. In this work, we investigate the mixed problem for anisotropic integro-differential equation with variable nonlinearity indices. Using the discretization method with respect to time, we prove the existence of a weak solution in a bounded cylinder. We give an estimate of the lifetime of the solition.

REFERENCES

1. Yu. A. Alkhutov and V. V. Zhikov, "Teoremy sushchestvovaniya i edinstvennosti resheniy parabolicheskikh uravneniy s peremennym poryadkom nelineynosti" [Theorems on existence and uniqueness of solutions of parabolic equations with variable nonlinearity order], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2014, **205**, No. 3, 3–14 (in Russian).
2. A. O. Belyakov and A. A. Davydov, "Optimizatsiya effektivnosti tsiklicheskogo ispol'zovaniya vozobnovlyaemogo resursa" [Optimization of efficiency of cyclic use of renewable resource], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2016, **22**, No. 2, 38–46 (in Russian).
3. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], IL, M., 1962 (Russian translation).
4. S. N. Kruzhkov, "Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi" [First-order quasilinear equationa with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81(123)** , No. 2, 228–255 (in Russian).
5. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, M., 1971 (Russian translation).
6. F. Kh. Mukminov, "Edinstvennost' renormalizovannogo resheniya elliptiko-parabolicheskoy zadachi v anizotropnykh prostranstvakh Soboleva—Orlicha" [Uniqueness of renormalized solution of an elliptic-parabolic problem in anisotropic Sobolev–Orlicz spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2017, **208**, No. 8, 1187–1206 (in Russian).
7. S. L. Sobolev, *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
8. H. W. Alt and S. Luckhaus, "Quasilinear elliptic-parabolic differential equations," *Math. Z.*, 1983, **183**, 311–341.
9. A. Bertozzi and D. Slepcev, "Existence and uniqueness of solutions to an aggregation equation with degenerate diffusion," *Commun. Pur. Appl. Anal.*, 2010, **9**, No. 6, 1617–1637.
10. A. Blanchet, J. A. Carrillo, and P. Laurencot, "Critical mass for a Patlak—Keller—Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions," *Calc. Var.*, 2009, **35**, 133–168.
11. S. Boi, V. Capasso, and D. Morale, "Modeling the aggregative behavior of ants of the species Polyergus rufescens," *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2000, **1**, 163–176.
12. M. Burger, R. C. Fetecau, and Y. Huang, "Stationary states and asymptotic behaviour of aggregation models with nonlinear local repulsion," *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2014, **13**, No. 1, 397–424.
13. J. A. Carrillo, S. Hittmeir, B. Volzone, and Y. Yao, "Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics," *arxiv:1603.07767v1[math.ap]*, 2016.
14. J. Carrillo and P. Wittbold, "Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems," *J. Differ. Equ.*, 1999, **156**, 93–121.
15. R. Eftimie, G. Vries, M. A. Lewis, and F. Lutscher, "Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals," *Bull. Math. Biol.*, 2007, **146**, No. 69, 1537–1565.
16. X. Fan, "Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations," *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2011, **56**, No. 7–9, 623-642.
17. P. A. Milewski and X. Yang, "A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing," *Commun. Math. Sci.*, 2008, **6**, 397–416.
18. D. Morale, V. Capasso, and K. Oelschlager, "An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations," *J. Math. Biol.*, 2005, **50**, 49–66.

19. F. Otto, “L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations,” *J. Differ. Equ.*, 1996, **131**, 20–38.
20. C. M. Topaz and A. L. Bertozzi, “Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, **65**, 152–174.
21. C. M. Topaz, A. L. Bertozzi, and M. A. Lewis, “A nonlocal continuum model for biological aggregation,” *Bull. Math. Biol.*, 2006, **68**, 1601–1623.

V. F. Vildanova
Bashkir State Pedagogical University,
3a Oktyabrskoy Revolyutsii st., 450000 Ufa, Russia
E-mail: gilvenera@mail.ru

F. Kh. Mukminov
Institute of Mathematics with Computer Center of the RAS,
112 Chernyshevskogo st., 450008 Ufa, Russia
Ufa State Aviation Technical University,
12 Karla Marksa st., 450008 Ufa, Russia
E-mail: mfkh@rambler.ru