Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 4 (2017). С. 543–556

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-543-556 УДК 517.929

ОТОБРАЖЕНИЯ, НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ПО МИХАЛУ—БАСТИАНИ, НО НЕ ПО ФРЕШЕ

© 2017 г. **Х.-О. ВАЛЬТЕР**

Аннотация. Строятся примеры нелинейных отображений в функциональных пространствах, которые непрерывно дифференцируемы в смысле Михала—Бастиани, но не в смысле Фреше. Интерес к таким примерам возникает при изучении дифференциальных уравнений с запаздыванием, в которых запаздывание переменно и не обязательно ограничено.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Дифференциальное исчисление на бесконечномерных пространствах может быть основано на различных понятиях непрерывной дифференцируемости. Хорошо известны производные Фреше отображений между банаховыми пространствами, есть понятие непрерывной дифференцируемости в смысле Михала (см. [10]) и Бастиани (см. [1]), широко используемое для отображений между пространствами Фреше (см., например, [3, 4, 7]), есть и много других определений [1, 11]. Если f — непрерывное отображение из открытого подмножества U топологического векторного пространства V в топологическое векторное пространство W, т. е. $f : V \supset U \to W$, то его непрерывная дифференцируемость по Михалу—Бастиани (для краткости будем называть ее C^1_{MB}-*гладкостью*) означает, что все производные по направлению

$$Df(u)v = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t}(f(u+tv) - f(u)), \quad u \in U, \quad v \in V,$$

существуют и отображение

$$U \times V \ni (u, v) \mapsto Df(u)v \in W$$

непрерывно. Под непрерывной дифференцируемостью f по Фреше (для краткости будем называть ее C^1_F-*гладкостью*) будем понимать, что все производные по направлению существуют (как и ранее), каждая производная

$$Df(u) : V \ni v \mapsto Df(u)v \in W, \quad u \in U,$$

линейна и непрерывна, а отображение

$$Df : U \ni u \mapsto Df(u) \in L_c(V, W)$$

непрерывно на векторном пространстве $L_c(V, W)$ линейных непрерывных отображений из V в W относительно топологии β равномерной сходимости на ограниченных множествах. Легко видеть, что если V и W — нормированные пространства, то отображение C^1_F-гладко тогда и только тогда, когда оно дифференцируемо по Фреше и его производная по Фреше непрерывна относительно обычной нормы в $L_c(V,W)$, и что C^1_{MB}-гладкость слабее C^1_F-гладкости (см. [18]). То, что C^1_{MB}-гладкость не требует выбора топологии в $L_c(V,W)$ можно считать преимуществом, в частности, при переходе к производным высших порядков.

Если I — интервал положительной длины (не обязательно компактный) на $\mathbb{R}$, то через C_I обозначим пространство Фреше непрерывных функций из I в $\mathbb{R}$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах, а через C^1_I — пространство Фреше непрерывно дифференцируемых функций из I в $\mathbb{R}$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах для отображений и их производных. В настоящей работе предъявляются функционалы из C_I в $\mathbb{R}$ и функционалы из C^1_I в $\mathbb{R}$, которые C^1_{MB}-гладки, но не C^1_F-гладки.

Интерес к поиску таких функционалов вызван изучением дифференциальных уравнений с непостоянным запаздыванием. Рассмотрим, например, уравнение

$$x'(t) = g(x(t-d)), \quad d = \Delta(x(t)), \tag{1.1}$$

где $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а $\Delta : \mathbb{R} \to [0,\infty)$. Такие уравнения с *переменным* запаздыванием не покрываются современной теорией начальных задач вида

$$x'(t) = f(x_t) \text{ при } t > 0, \ x_0 = \phi, \tag{1.2}$$

для *функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием*, изложенной в многочисленных монографиях от [5] до [2, 6]. Начальными данными в задаче (1.2) являются отображения $\phi : I \to \mathbb{R}^n$, определенные на *начальном интервале* $I \subset \mathbb{R}$, для которого $\max I = 0 \in \mathbb{R}$, и истории (или отрезки) $x_t : I \to \mathbb{R}^n$ решения $x : I + (0,t_x) \to \mathbb{R}^n$, $0 < t_x \leqslant \infty$, заданные соотношениями $x_t(s) = x(t+s)$.

Теория начальных задач вида (1.2) (ее можно применять и к уравнениям с запаздыванием, зависящим от состояния, и получать с ее помощью существование, единственность и дифференцируемость по начальным данным) для случая компактных начальных интервалов развита в [8, 12, 13], а для случая, когда $I = (-\infty, 0]$, развита в [16–18]. В обоих случаях требуется, чтобы отображение $f : U \to \mathbb{R}^n$ было определено на открытом подмножестве множества $(C^1_I)^n$, а также было непрерывно дифференцируемо и удовлетворяло некоторому *свойству расширения* (e). При этих условиях максимальные решения начальной задачи (1.2) определяют непрерывный полупоток разрешающих операторов на *многообразии решений* $\{\phi \in U : \phi'(0) = f(\phi)\}$, которое действительно является непрерывно дифференцируемым подмногообразием коразмерности n в $(C^1_I)^n$. Результаты для случая, когда вместо $(C^1_I)^n$ рассматриваются банаховы пространства отображений $(-\infty, 0] \to \mathbb{R}^n$, а также для неавтономных начальных задач, доступны и в [14, 15].

Если начальный интервал I компактен, а $(C^1_I)^n$ — банахово пространство, то теория использует исчисление, основанное на C^1_F-гладкости. Для случая $I = (-\infty, 0]$, в котором в $C^1_I(n)$ не существует нормы, разработаны две версии теории. Первая основана на C^1_{MB}-гладкости (см. [16, 17]) под впечатлением того, что исчисление, основанное на C^1_{MB}-гладкости, широко используется в пространствах Фреше — возможно, так же, как исчисление в банаховых пространствах, как правило, опирается на дифференцируемость по Фреше. Теории создаются для приложений, и проверка обычных примеров показывает, что, если выполняется предположение о гладкости, то всегда имеет место более сильная C^1_F-гладкость. Это наблюдение показало необходимость второй версии указанной теории: для случая, в котором $I = (-\infty, 0]$. Эта версия включает результаты, связанные с более сильной C^1_F-гладкостью, и некоторые ее доказательства несколько более сложны, чем в первой версии (см. [18]). Ее преимущество заключается в том, что техническая гипотеза (d) предыдущего подхода (см. [17]), фактически требующая C^1_F-гладкости некоторого сопряженного отображения, становится излишней.

Поскольку у нас есть две версии теории, но ни одного примера, удовлетворяющего более слабому предположению из [16, 17], возникает вопрос, как могут могут выглядеть C^1_{MB}-функционалы на C^1_I, не являющиеся C^1_F-гладкими.

В [18, Sec. 8] приведены примеры таких отображений, действующих в некоторых других пространствах, а именно:

- отображение, действующее в банаховом пространстве c_0 последовательностей $x = (x_j)$ из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, сходящихся к началу координат вещественной оси, где $|x| = \max\limits_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$;
- отображение из l^1 в $\mathbb{R}$;

- отображения из C_I в c_0 и из C_I^1 в c_0.

В разделах 2-3 ниже мы вначале построим C^1_{MB}-функционал, который не является C^1_F-гладким в банаховом пространстве

$$C_{I,0} = \{\phi \in C_I : \phi(\min I) = 0\}$$

с компактным I. Далее, применение композиции с подходящими линейными непрерывными отображениями дает искомые функционалы на банаховых пространствах C_I и C^1_I, а также на $C^1_{\mathcal{I}}$, где $\mathcal{I}$ уже не обязательно компактен.

Отметим, что, в рамках теории дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием, особый интерес к C^1-гладкости (без учета производных высших порядков) может быть обоснован результатом из [9], согласно которому многообразие решений начальной задачи (1.2), вообще говоря, не более чем C^1-гладко, вне зависимости от того, насколько гладки такие компоненты каждого конкретного примера, как функции g и Δ в уравнении (1.1). То же самое имеет место для локально устойчивых многообразий в стационарных точках (см. [9]).

Обозначения. Граница, внутренность и замыкание подмножества M топологического пространства обозначаются через ∂M, $int\, M$ и $cl\, M$ соответственно. Для компактного интервала $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, нормы, рассматриваемые на C_I и на C^1_I, задаются соотношениями

$$|p| = \max_{t \in I} |p(t)| \quad \text{и} \quad |p|_1 = |p| + |\partial\, p|$$

соответственно, где

$$\partial : C^1_I \to C_I$$

есть линейное непрерывное отображение дифференцирования.

Имеет место разложение

$$C_I = C_{I,0} \oplus \mathbb{R}\mathbf{1},$$

на замкнутые подпространства, где $\mathbf{1}(t) = 1$ на I. Сопряженная проекция

$$pr : C_I \to C_I$$

вдоль $\mathbb{R}\mathbf{1}$ на $C_{I,0}$ линейна и непрерывна.

Билинейное отображение $(\cdot,\cdot)_2 : C_{I,0} \times C_{I,0} \ni (p, q) \mapsto \int\limits_a^b p(s)q(s)ds \in \mathbb{R}$ непрерывно по переменной $|\cdot|$, а соотношение

$$|p|_2 = \sqrt{(p, p)_2}$$

определяет норму в $C_{I,0}$, где

$$|p|_2 \leqslant \sqrt{b-a}|p| \quad \text{для любого} \quad p \quad \text{из} \quad C_{I,0}.$$

Для положительных r положим

$$\begin{aligned} N_{2,r} &= \{p \in C_{I,0} : |p|_2 < r\}, \\ B_{2,r} &= \{p \in C_{I,0} : |p|_2 \leqslant r\}. \end{aligned}$$

Тогда $N_{2,r}$ — открытое подмножество пространства $C_{I,0}$, $B_{2,r}$ — замкнутое подмножество пространства $C_{I,0}$, а

$$\partial\, N_{2,r} = \{p \in C_{I,0} : |p|_2 = r\} = \partial\, B_{2,r},$$

где ∂ обозначает границу множества $N_{2,r}$, рассматриваемую как подмножество банахова пространства $C_{I,0}$ с нормой $|\cdot|$.

Если интервал $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ некомпактен, а подынтервал $I \subset \mathcal{I}$ положительной длины компактен, то сужением определяется линейное непрерывное отображение $R : C^1_{\mathcal{I}} \to C^1_I$, а продолжение прямыми линиями с подходящими углами наклона определяет линейное непрерывное отображение

$$E : C^1_I \to C^1_{\mathcal{I}},$$

для которых $REp = p$ на C^1_I.

2. Последовательности конусов в $C_{I,0}$; случай компактного I

В этом и следующем разделах применяются обозначения $I = [a, b]$ (где $a < b$), $C = C_I$, $C_0 = C_{I,0}$ и $C^1 = C^1_I$.

Для любого натурального j положим $t_j = a + \dfrac{b-a}{2j}$ и выберем открытый интервал $I_j \subset (a, b)$, для которого $t_j \in I_j$ и $cl\, I_j \cap cl\, I_k = \varnothing$ при $j \neq k$. Выберем e_j из C^1, для которого

$$e_j([a,b]) \subset [0,1], \quad \operatorname{supp} e_j \subset I_j, \quad e_j(t_j) = 1$$

и числовая последовательность $|e_j|_2$, $j \in \mathbb{N}$, строго убывает. Отметим, что

$$\begin{aligned} |e_j| &= 1 \quad \text{для всех} \quad j \quad \text{из} \quad \mathbb{N}, \\ |e_j|_2 &\to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty, \\ |e_j - e_k|_2^2 &= |e_j|_2^2 + |e_k|_2^2, \quad \text{если} \quad j \neq k \quad \text{в} \quad \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Для любого натурального j выберем такое положительное δ_j, что

$$\delta_j < \frac{|e_j|_2}{2}, \tag{2.1}$$

$$\delta_j^2 + 2\delta_j (b-a)^2 < |e_j|_2^2. \tag{2.2}$$

Замкнутые множества $e_j + B_{2,\delta_j}$ попарно не пересекаются, потому что если натуральные m и j удовлетворяют неравенству $m < j$, а $p \in e_j + B_{2,\delta_j}$, то неравенство (2.1) и монотонность влекут за собой следующие соотношения:

$$|p - e_m|_2 \geqslant |e_m - e_j|_2 - |e_j - p|_2 \geqslant |e_m|_2 - \delta_j > |e_m|_2 - \frac{|e_j|_2}{2} > |e_m|_2 - \frac{|e_m|_2}{2} = \frac{|e_m|_2}{2} > \delta_m.$$

Для натуральных j обозначим через H_j ядро линейного непрерывного отображения вычисления

$$ev_j : C_0 \ni p \mapsto p(t_j) \in \mathbb{R}$$

и положим

$$L_j = \{p \in C_0 : ev_j p = 1\} = \{p \in C_0 : p(t_j) = 1\}.$$

Тогда $e_j \in L_j$ и, если $p \in C_0$ и $p(t_j) > 0$, то

$$q = \frac{1}{p(t_j)} p \in L_j \quad \text{и} \quad p = rq \quad \text{при} \quad r = p(t_j).$$

Для конусов

$$\begin{aligned} U_j &= (0,\infty) \cdot (L_j \cap (e_j + N_{2,\delta_j})), \\ R_j &= [0,\infty) \cdot (L_j \cap (e_j + \partial\, N_{2,\delta_j})), \\ K_j &= [0,\infty) \cdot (L_j \cap (e_j + B_{2,\delta_j}) \end{aligned}$$

справедливы соотношения

$$\begin{aligned} U_j &= \left\{ p \in C_0 : p(t_j) > 0, \quad \left| \frac{1}{p(t_j)} p - e_j \right|_2 < \delta_j \right\}, \\ R_j &= \{0\} \cup \left\{ p \in C_0 : p(t_j) > 0, \quad \left| \frac{1}{p(t_j)} p - e_j \right|_2 = \delta_j \right\}, \\ K_j &= \{0\} \cup \left\{ p \in C_0 : p(t_j) > 0, \quad \left| \frac{1}{p(t_j)} p - e_j \right|_2 \leqslant \delta_j \right\}, \end{aligned}$$

$$U_j \cup R_j = K_j, \quad 0 \in R_j \subset K_j, \quad U_j \cap R_j = \varnothing.$$

Предложение 2.1. *Для любого натурального j справедливы следующие утверждения*:

(i) *U_j — открытое подмножество пространства C_0, а R_j и K_j — замкнутые подмножества пространства C_0*;

(ii) $\partial K_j = R_j = \partial\, U_j$;

(iii) *если натуральные m и n не равны друг другу, то $K_m \cap K_n = \{0\}$.*

Доказательство.

(i). Открытость множества U_j следует из непрерывности отображений ev_j и $(\cdot,\cdot)_2$. Аналогично, множество
$$V_j = \left\{p \in C_0 : p(t_j) > 0 \text{ и } \left|\frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right|_2 > \delta_j\right\}$$
открыто. Справедливо соотношение
$$C_0 \setminus K_j = (H_j \setminus \{0\}) \cup V_j \cup \{p \in C_0 : p(t_j) < 0\}.$$
Теперь, чтобы доказать замкнутость множества K_j, остается показать, что точки множества $H_j \setminus \{0\}$ имеют окрестности в $(H_j \setminus \{0\}) \cup V_j \cup \{p \in C_0 : p(t_j) < 0\}$. Пусть $p \in H_j \setminus \{0\}$. Рассмотрим положительное ϵ, удовлетворяющее неравенству
$$\epsilon < \frac{|p|_2}{1 + 2(\delta_j + |e_j|_2)}.$$
Соотношения
$$|q - p| < \epsilon \quad \text{и} \quad |q - p|_2 < \frac{|p|_2}{2}$$
определяют открытую окрестность N точки p в $C_0 \setminus \{0\}$. Если $q \in N$, то либо $q(t_j) < 0$, либо $q \in H_j \setminus \{0\}$, либо $q(t_j) > 0$. В последнем случае справедливы соотношения
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{q(t_j)}q - e_j\right|_2 &\geqslant \frac{1}{|q(t_j)|}|q|_2 - |e_j|_2 = \frac{1}{|q(t_j) - p(t_j)|}|q|_2 - |e_j|_2 \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{|q-p|}(|p|_2 - |q-p|_2) - |e_j|_2 \geqslant \frac{1}{\epsilon}\frac{|p|_2}{2} - |e_j|_2 > \delta_j,\end{aligned}$$
откуда следует, что $q \in V_j$.

Множество R_j замкнуто, потому что $R_j = K_j \setminus U_j$.

(ii). Вначале докажем, что $R_j \subset cl\, U_j$. Поскольку
$$U_j \ni \frac{1}{n}e_j \to 0 \quad \text{при} \quad \mathbb{N} \ni n \to \infty,$$
получаем, что $0 \in cl\, U_j$. Для любой точки p из $R_j \setminus \{0\}$ величина $p(t_j)$ положительна. Точка $q = \dfrac{1}{p(t_j)}p$ принадлежит множеству L_j и удовлетворяет соотношению $\delta_j = |q - e_j|_2$. Если $0 < s < 1$, то
$$q_s = s\,q + (1-s)e_j \in L_j,$$
$$|q_s - q| \leqslant (s-1)|q| + (1-s)|e_j| = (s-1)|q| + (1-s),$$
$$\delta_j = |q - e_j|_2 > |s(q - e_j)|_2 = |(s\,q + (1-s)e_j) - e_j|_2 = |q_s - e_j|_2.$$
Следовательно, $q_s \in L_j \cap (e_j + N_{2,\delta_j})$ и $p(t_j)q_s \in U_j$. Из предельного соотношения $q_s \to q$ при $s \to 1$ следует предельное соотношение
$$U_j \ni p(t_j)q_s \to p(t_j)q = p \quad \text{при} \quad s \to 1,$$
доказывающее, что $p \in cl\, U_j$. Отсюда следует, что $R_j \subset cl\, U_j$.

Теперь докажем, что $\partial\, U_j = R_j$. Из включения $R_j \subset cl\, U_j$, соотношения $R_j \cap U_j = \varnothing$ и замкнутости множества K_j, подмножеством которого является U_j, получаем соотношения
$$K_j \setminus U_j = R_j \subset (cl\, U_j) \setminus U_j \subset K_j \setminus U_j = R_j,$$
доказывающие, что $\partial\, U_j = cl\, U_j \setminus U_j = R_j$.

Теперь докажем, что $\partial\, K_j = R_j$. Из открытости подмножества U_j множества K_j вытекает, что
$$\partial\, K_j = cl\, K_j \setminus int\, K_j \subset K_j \setminus U_j = R_j.$$
Чтобы показать, что $R_j \subset \partial K_j$, рассмотрим $R_j \subset K_j = cl\, K_j$. Остается доказать, что $R_j \subset cl(C_0 \setminus K_j)$. Итак, пусть $p \in R_j$. Если $p \neq 0$, то $p(t_j) > 0$, $q = \dfrac{1}{p(t_j)}p \in L_j$ и $|q - e_j|_2 = \delta_j$. Если $s > 1$, то $q_s = s\,q + (1-s)e_j$ из L_j удовлетворяет соотношениям
$$\delta_j = |q - e_j|_2 < |s(q - e_j)|_2 = |q_s - e_j|_2;$$

значит, $q_s \in L_j \cap \{r \in C_0 : |r - e_j|_2 > \delta_j\}$ и $p(t_j)q_s \in C_0 \setminus K_j$. Учитывая, что $q_s \to q$ при $s \to 1$, получаем, что $C_0 \setminus K_j \ni p(t_j)q_s \to p(t_j)q = p$ при $s \to 1$. Следовательно, $p \in cl(C_0 \setminus K_j)$. Осталось рассмотреть случай, в котором $p = 0 \in R_j$. В этом случае выберем $h \in H_j \setminus \{0\} \subset C_0 \setminus K_j$. Тогда

$$C_0 \setminus K_j \ni \frac{1}{n}h \to 0 = p \quad \text{при} \quad \mathbb{N} \ni n \to \infty$$

и, тем самым, $p = 0 \in cl(C_0 \setminus K_j)$.

(iii). Пусть натуральные m и n не равны друг другу и $0 \neq p \in K_m \cap K_n$. Тогда $p(t_m) > 0$, $p(t_n) > 0$ и существуют такие q из $L_m \cap (e_m + B_{2,\delta_m})$, r из $L_n \cap (e_n + B_{2,\delta_n})$ и положительные s и t, что

$$s\,q = p = t\,r.$$

Можно считать, что $s \geqslant t$. Тогда

$$|e_m|_2^2 + |e_n|_2^2 = |e_m - e_n|_2^2 \leqslant (|e_m - q|_2 + |q - e_n|_2)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\delta_m + \left|\frac{t}{s}r - e_n\right|_2\right)^2 \leqslant \left(\delta_m + \left|\frac{t}{s}r - \frac{t}{s}e_n\right|_2 + \left|\frac{t}{s}e_n - e_n\right|_2\right)^2 \leqslant \left(\delta_m + \frac{t}{s}\delta_n + \left|\frac{t}{s} - 1\right| |e_n|_2\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(\delta_m + \frac{t}{s}|e_n|_2 + \left(1 - \frac{t}{s}\right)|e_n|_2\right)^2 = (\delta_m + |e_n|_2)^2 = \delta_m^2 + 2\delta_m|e_n|_2 + |e_n|_2^2 \leqslant \delta_m^2 + 2\delta_m\sqrt{b-a} + |e_n|_2^2,$$

что в сочетании с неравенством (2.2) приводит к противоречию. □

Предложение 2.2. *$\partial \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j \subset \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} R_j$. Для любой точки q из $(\partial \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$ существует единственное $J = J_q$, для которого $q \in R_J$. Если последовательность $(p_n)_{n=1}^\infty$ из $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j$ сходится к q из $\partial(\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$, то существует подпоследовательность $(p_{n_k})_{k=1}^\infty$, содержащаяся в U_{J_q}.*

Доказательство. Пусть $q \in \partial \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j$. Поскольку $0 \in R_j$ для всех j, можно считать, что $q \neq 0$. Тогда существует последовательность $(p_n)_{n=1}^\infty$, содержащаяся в $(\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$ и стремящаяся к q при $n \to \infty$. Согласно предложению 2.1(iii), для любой такой последовательности соотношение $p_n \in U_{j(n)}$ определяет последовательность (не обязательно инъективную)

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto j(n) \in \mathbb{N}.$$

Если эта последовательность ограничена, то существует постоянная подпоследовательность $\mathbb{N} \ni k \mapsto j(n_k) \in \mathbb{N}$ со значением $J = j(n_k)$ для любого натурального k. Поскольку $p_{n_k} \in U_J$ для любого натурального k, мы заключаем, что $q \in R_J$. Этим соотношением J определено однозначно в силу соотношения $q \neq 0$ и предложения 2.1(iii).

Осталось рассмотреть случай, в котором последовательность $(j(n))_{n\in\mathbb{N}}$ неограничена. В этом случае существует подпоследовательность $\mathbb{N} \ni k \mapsto j(n_k) \in \mathbb{N}$, стремящаяся к бесконечности. Тогда для любого положительного ϵ существует такое натуральное k, что

$$|e_{j(n_k)}|_2 < \epsilon, \quad |q - p_{n_k}|_2 \leqslant \sqrt{b-a}|q - p_{n_k}| < \epsilon \quad \text{и} \quad \delta_{j(n_k)} < \epsilon.$$

Отсюда следует, что

$$|q|_2 \leqslant |q - p_{n_k}|_2 + |p_{n_k} - p_{n_k}(t_{j(n_k)})e_{j(n_k)}|_2 + |p_{n_k}(t_{j(n_k)})||e_{j(n_k)}|_2 <$$
$$< \epsilon + |p_{n_k}(t_{j(n_k)})|(\delta_{j(n_k)} + \epsilon) \leqslant \epsilon + |p_{n_k}|(\delta_{j(n_k)} + \epsilon) \leqslant \epsilon + \left(|q| + \frac{\epsilon}{\sqrt{b-a}}\right) 2\,\epsilon,$$

что противоречит соотношению $q \neq 0$. □

Предложение 2.3. *Для любого q из $(\partial \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$ существует такое натуральное J и такое положительное r, что*

$$\{p \in C_0 : |p - q| < r\} \subset \left\{p \in U_J : \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_j}{2}\right\} \cup (C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)).$$

Доказательство. Пусть $q \in (\partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \setminus \{0\}$. Возьмем натуральное $J = J_q$, существование и единственность которого доказаны в предложении 2.2, и докажем, что существует такое положительное ρ, что

$$\{p \in C_0 : |p-q| < \rho\} \subset U_J \cup (C_0 \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j). \tag{2.3}$$

Предположим обратное, т. е. что существует такая последовательность $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, что

$$|p_n - q| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad p_n \in (C_0 \setminus U_J) \cap (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \quad \text{для всех} \quad n \quad \text{из} \quad \mathbb{N}.$$

У этой последовательности нет подпоследовательности, содержащейся в U_J, что противоречит предложению 2.2.

Из соотношения $0 \neq q \in R_J$ получаем соотношение

$$\left|\frac{1}{q(t_J)}q - e_J\right|_2 = \delta_J.$$

Существует такое r из $(0,\rho)$, что если $p \in C_0$ и $|p-q| < r$, то

$$p(t_J) > 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_J}{2}.$$

Используя это и вложение (2.3), мы получаем, что если $p \in C_0$ и $|p-q| < r < \rho$, то

$$p \in U_J \quad \text{и} \quad \frac{\delta_J}{2} < \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2$$

либо

$$p \in C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j).$$

□

3. C^1_{MB}-ФУНКЦИОНАЛ НА $C_{I,0}$, НЕ ЯВЛЯЮЩИЙСЯ C^1_F-ГЛАДКИМ; СЛУЧАЙ КОМПАКТНОГО I

Для любого натурального j выберем непрерывно дифференцируемое отображение

$$g_j : \mathbb{R} \to [0,1] \subset \mathbb{R},$$

для которого

$$g_j(\xi) = 1 \quad \text{при} \quad |\xi| \leqslant \frac{\delta_j}{4}, \quad g_j(\xi) = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant \frac{\delta_j}{2}$$

и

$$|g_j'(\xi)| \leqslant \frac{8}{\delta_j} \quad \text{для любого вещественного} \quad \xi. \tag{3.1}$$

Тогда соотношение

$$\phi_j(p) = g_j(|p - e_j|_2)$$

определяет C^1_F-гладкое отображение $\phi_j : L_j \to \mathbb{R}$.

Теперь выберем такую непрерывную функцию

$$r_j : \mathbb{R} \to [0,1] \subset \mathbb{R},$$

что

$$r_j(s) = 0 \quad \text{при} \quad |s| \leqslant \frac{1}{2j}, \quad r_j\left(\frac{1}{j}\right) = 1 \quad \text{и}$$

$$\left|\int_0^{\xi} r_j(s)ds\right| \leqslant \delta_j|\xi|^3 \quad \text{для любого вещественного} \quad \xi. \tag{3.2}$$

Отметим, что отображения r_j, $j \in \mathbb{N}$, не являются равностепенно непрерывными в начале координат вещественной оси.

Функции

$$f_j : \mathbb{R} \ni \xi \mapsto \int\limits_a^\xi r_j(s)ds \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},$$

непрерывно дифференцируемы.

Рассмотрим отображение $f : C_0 \to \mathbb{R}$, заданное следующим образом:

$$\begin{aligned} f(p) &= \phi_j\left(\frac{1}{p(t_j)}p\right) \cdot f_j(p(t_j)) \quad \text{при} \quad j \quad \text{из} \quad \mathbb{N} \quad \text{и} \quad p \quad \text{из} \quad K_j \setminus \{0\}, &(3.3)\\ f(p) &= 0 \quad \text{при} \quad p \quad \text{из} \quad C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j), &(3.4)\\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

Это определение корректно в силу предложения 2.1(iii).

Отметим, что

$$f(p) = 0 \quad \text{на} \quad \bigcup_{j\in\mathbb{N}} R_j.$$

Сужение f на объединение попарно непересекающихся открытых множеств $U_j \subset K_j$, $j \in \mathbb{N}$, C_F^1-гладко.

Предложение 3.1. *Любая точка q из $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$, отличная от начала координат пространства C_0, имеет такую окрестность N, что $f(p) = 0$ на N.*

Доказательство.

1. В случае, когда q — внутренняя точка замкнутого множества $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$, существует такое положительное r, что множество

$$N = \{p \in C_0 : |p - q| < r\}$$

содержится в $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$. Пусть $p \in N$. Тогда

$$p \in C_0 \setminus U_j = (C_0 \setminus K_j) \cup R_j$$

для любого натурального j.

Если существует такое натуральное j, что $p \in R_j$, то $f(p) = 0$ по определению отображения f. В противном случае $p \in C_0 \setminus R_j$ для любого натурального j, откуда следует, что $p \in C_0 \setminus K_j$ для любого натурального j. Значит, $f(p) = 0$ по определению отображения f.

2. В случае, когда $0 \neq q \in \partial(C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)) = \partial \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j$, из предложения 2.3 вытекает существование такого натурального J и такого положительного r, что множество

$$N = \{p \in C_0 : |p - q| < r\}$$

содержится в

$$\left\{p \in U_J : \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_j}{2}\right\} \cup (C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)).$$

Пусть $p \in N$. Если

$$p \in C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j),$$

то соотношение $f(p) = 0$ доказывается так же, как и первой части доказательства. Если

$$p \in U_J \quad \text{и} \quad \left|\frac{1}{p(t_J)}p - e_J\right|_2 > \frac{\delta_j}{2},$$

то соотношение $f(p) = 0$, как и выше, следует из определения отображения f. □

Следствие 3.1. *Сужение f на $C_0 \setminus \{0\}$ является C_F^1-гладким и $Df(q) = 0$ для любого ненулевого q из $C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)$.*

Доказательство. Используется предложение 3.1, замечание, предшествующее ему, и соотношение

$$C_0 = (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j) \cup (C_0 \setminus (\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j)).$$

□

Предложение 3.2. *Отображение f непрерывно, и для каждого $\hat{p}$ из C_0 производная по направлению*

$$Df(0)\hat{p} = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{1}{t}[f(0+t\hat{p}) - f(0)] = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{f(t\hat{p})}{t}$$

существует и равна нулевому элементу пространства C_0.

Доказательство.

1. Из следствия 3.1 вытекает непрерывность f на $C_0 \setminus \{0\}$. Непрерывность в начале координат пространства C_0 следует из соотношения $f(p) = 0$, справедливого на $C_0 \setminus (\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} K_j)$, и оценки

$$|f(p) - f(0)| = |f(p)| = \left| g_j \left(\left| \frac{1}{p(t_j)} p - e_j \right|_2 \right) \cdot f_j(p(t_j)) \right| \leqslant \left| \int\limits_0^{p(t_j)} r_j(s)ds \right| \leqslant |p(t_j)| \leqslant |p|,$$

верной при условии, что $0 \neq p \in K_j$ и $j \in \mathbb{N}$.

2. Если $0 \neq \hat{p} \in C_0$ и $0 \neq t \in \mathbb{R}$, то либо $t\hat{p} \in C_0 \setminus (\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} K_j)$, что влечет за собой соотношение $f(t\hat{p}) = 0$, либо $t\hat{p} \in K_j$ для некоторого натурального j. В последнем случае справедливо неравенство

$$|f(t\hat{p})| \leqslant |f_j((t\hat{p})(t_j))| \leqslant \delta_j |(t\hat{p})(t_j)|^3 \leqslant \frac{\sqrt{b-a}}{2} |t|^3 |\hat{p}|^3.$$

В сочетании с неравенством

$$\frac{|f(t\hat{p})|}{|t|} \leqslant |t|^2 \frac{\sqrt{b-a}}{2} |\hat{p}|$$

оно дает соотношение

$$Df(0)\hat{p} = \lim_{0\neq t\to 0} \frac{f(t\hat{p})}{t} = 0.$$

□

Следующее утверждение исключает возможность того, что f C^1_F-гладко: производные $Df\Big(\frac{1}{j}e_j\Big)$ из $L_c(C_0, \mathbb{R})$ не сходятся к $Df(0) = 0$ равномерно на ограниченном множестве $\{e_k \in C_0 : k \in \mathbb{N}\}$.

Предложение 3.3.

$$Df\left(\frac{1}{j}e_j\right) e_j = 1 \quad \text{\textit{для любого натурального}} \quad j.$$

Доказательство. Если $j \in \mathbb{N}$ и $t > 0$, то

$$f\left(\frac{1}{j}e_j + te_j\right) - f\left(\frac{1}{j}e_j\right) = f\left(\left(\frac{1}{j} + t\right) e_j\right) - f\left(\frac{1}{j}e_j\right) =$$
$$= g_j(0) \cdot f_j\left(\frac{1}{j} + t\right) - g_j(0) \cdot f_j\left(\frac{1}{j}\right) = f_j\left(\frac{1}{j} + t\right) - f_j\left(\frac{1}{j}\right).$$

При $0 < t \to 0$ слагаемое

$$\frac{1}{t}\left[f_j\left(\frac{1}{j} + t\right) - f_j\left(\frac{1}{j}\right)\right]$$

стремится к

$$f'_j\left(\frac{1}{j}\right) = r_j\left(\frac{1}{j}\right) = 1.$$

□

Чтобы убедиться в C^1_{MB}-гладкости f, нужно исследовать производные по направлению $Df(p)\hat{p}$ для значений p, близких к точкам 0 и $\hat{p}$ пространства C_0. На каждом множестве U_j, $j \in \mathbb{N}$, справедливо соотношение

$$f(p) = g_j\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot f_j(p(t_j)),$$

где

$$Q_j : \{p \in C_0 : p(t_j) > 0\} \ni p \mapsto \left(\frac{1}{p(t_j)}p - e_j, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2 \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N},$$

есть C^1_F-гладкое отображение. Для любого натурального j и любого p из C_0, удовлетворяющего условию $p(t_j) > 0$, справедливо соотношение

$$Q_j(p) = \frac{1}{p(t_j)^2}(p,p)_2 - \frac{2}{p(t_j)}(p,e_j)_2 + (e_j,e_j)_2.$$

При $\hat{p} \in C_0$, дифференцируя произведение и дифференцируя сложную функцию, получаем, что

$$\begin{aligned} DQ_j(p)\hat{p} &= \frac{1}{p(t_j)^4}\left[2 \cdot (p,\hat{p})_2 \cdot p(t_j)^2 - (p,p)_2 \cdot 2 \cdot p(t_j) \cdot \hat{p}(t_j)\right] - \\ &\quad - \frac{2}{p(t_j)^2}[(\hat{p},e_j)_2 \cdot p(t_j) - (p,e_j)_2 \cdot \hat{p}(t_j)] = \\ &= \frac{2}{p(t_j)^2}\left[(p,\hat{p})_2 - \left(\frac{1}{p(t_j)}p, p\right)_2 \cdot \hat{p}(t_j) - (\hat{p},e_j)_2 \cdot p(t_j) + (p,e_j)_2 \cdot \hat{p}(t_j)\right] = \\ &= \frac{2}{p(t_j)^2}\left[p(t_j)\left(\hat{p}, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2 - \hat{p}(t_j) \cdot \left(p, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2\right]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Предложение 3.4. *Для любого натурального j, любого p из U_j и любого $\hat{p}$ из C_0 справедливо неравенство*

$$|Df(p)\hat{p}| \leqslant 16 \cdot |p| \cdot \sqrt{b-a} \cdot |\hat{p}| \cdot |p| + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)|.$$

Доказательство.

1. Если $p \in U_j \setminus \mathbb{R} \cdot e_j$, $j \in \mathbb{N}$ и $\hat{p} \in C_0$, то $Q_j(p) \neq 0$. Комбинируя формулу для производной произведения, правило дифференцирования сложной функции и соотношение $D\,ev_j(p)\hat{p} = ev_j\hat{p} = \hat{p}(t_j)$, получаем, что

$$Df(p)\hat{p} = g_j'\left(\sqrt{Q_j(p)}\right)\frac{1}{2\sqrt{Q_j(p)}}DQ_j(p)\hat{p} \cdot f_j(p(t_j)) + g_j\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot Df_j(p(t_j))\hat{p}(t_j),$$

что, с учетом (3.5), дает формулу

$$\begin{aligned} Df(p)\hat{p} = g_j'\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{Q_j(p)}}\frac{1}{p(t_j)^2}\left[p(t_j)\left(\hat{p}, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2 - \hat{p}(t_j) \cdot \left(p, \frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right)_2\right] \times \\ \times f_j(p(t_j)) + g_j\left(\sqrt{Q_j(p)}\right) \cdot r_j(p(t_j)) \cdot \hat{p}(t_j). \end{aligned}$$

используя соотношения

$$|g_j'(\xi)| \leqslant \frac{8}{\delta_j}, \qquad g_j(\mathbb{R}) \subset [0,1],$$

$$|f_j(\xi)| = \left|\int_0^\xi r_j(s)ds\right| \leqslant \delta_j|\xi|^3,$$

$$\sqrt{Q_j(p)} = \left|\frac{1}{p(t_j)}p - e_j\right|_2 \quad \text{и} \quad |(u,v)_2| \leqslant |u|_2|v|_2,$$

получаем, что

$$|Df(p)\hat{p}| \leqslant \frac{8}{\delta_j}\frac{1}{p(t_j)^2} \cdot [|\hat{p}|_2 \cdot |p(t_j)| + |\hat{p}(t_j)| \cdot |p|_2] \cdot \delta_j |p(t_j)|^3 + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)| \leqslant$$
$$\leqslant 8 \cdot |p(t_j)| \cdot \left[\sqrt{b-a} \cdot |\hat{p}| \cdot |p(t_j)| + |\hat{p}| \cdot \sqrt{b-a} \cdot |p|\right] + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)| \leqslant$$
$$\leqslant 16 \cdot |p(t_j)| \cdot \sqrt{b-a} \cdot |\hat{p}| \cdot |p| + |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)|.$$

2. Если $p \in U_j \cap \mathbb{R} \cdot e_j$, $j \in \mathbb{N}$, то $Q_j(p) = 0$. В силу непрерывности неравенство $\left|\sqrt{Q_j(\tilde{p})}\right| < \dfrac{\delta_j}{4}$ выполняется в окрестности N точки p в U_j, а значит, $f(\tilde{p}) = 1 \cdot f_j(\tilde{p}(t_j))$ в N и, следовательно, $Df(p)\hat{p} = f_j'(p(t_j)\hat{p}(t_j) = r_j(p(t_j))\hat{p}(t_j)$ для всех $\hat{p}$ из C_0. Отсюда следует, что

$$|Df(p)\hat{p}| \leqslant |r_j(p(t_j))| \cdot |\hat{p}(t_j)|.$$

□

Предложение 3.5. *Для всех последовательностей $C_0 \ni p_n \to 0 \in C_0$ и $C_0 \ni \hat{p}_n \to \hat{p} \in C_0$ справедливо предельное соотношение $Df(p_n)\hat{p}_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $C_0 \ni p_n \to 0 \in C_0$ и $C_0 \ni \hat{p}_n \to \hat{p} \in C_0$. Поскольку $Df(p) = 0$ на $C_0 \setminus (\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j)$, достаточно рассмотреть случай, в котором $p_n \in \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} U_j$ для всех натуральных n. В этом случае достаточно показать, что из любой подпоследовательности последовательности $(Df(p_n)\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно, в свою очередь, извлечь подпоследовательность, стремящуюся при $n \to \infty$ к началу координат вещественной оси. Итак, пусть $\mathbb{N} \ni k \mapsto n_k \in \mathbb{N}$ строго возрастает. Поскольку множества U_j попарно не пересекаются, каждое натуральное число k однозначно определяет такое натуральное число $j(k)$, что $p_{n_k} \in U_{j(k)}$ (в силу предложения 2.1(iii) и условия, что $0 \notin U_j$ для каждого натурального j).

Рассмотрим случай, в котором последовательность $(j(k))_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена. Пусть $j_{\max} = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} j(k)$. Тогда существует такое натуральное k_0, что

$$|p_{n_k}| < \frac{1}{2j_{\max}} \quad \text{для всех целых} \quad k, \quad \text{больше либо равных} \quad k_0.$$

В частности,

$$|p_{n_k}(t_{j(k)})| \leqslant |p_{n_k}| < \frac{1}{2j_{\max}} \leqslant \frac{1}{2j(k)} \quad \text{для всех целых} \quad k, \quad \text{больше либо равных} \quad k_0,$$

откуда следует, что $0 = r_{j(k)}(p_{n_k}(t_{j(k)}))$ для указанных целых k. Используя предложение 3.4, мы заключаем, что

$$|Df(p_{n_k})\hat{p}_{n_k}| \leqslant 16 \cdot |p_{n_k}|^2\sqrt{b-a}|\hat{p}_{n_k}| \quad \text{для всех целых} \quad k, \quad \text{больше либо равных} \quad k_J.$$

Отсюда следует, что $|Df(p_{n_k})\hat{p}_{n_k}$ стремится к началу координат вещественной оси при $k \to \infty$.

Теперь рассмотрим случай, в котором последовательность $(j(k))_{k\in\mathbb{N}}$ неограничена. В этом случае существует ее подпоследовательность $(j(k_m))_{m\in\mathbb{N}}$, стремящаяся к бесконечности при $m \to \infty$. Отсюда следует, что

$$t_{j(k_m)} \to a \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Используя это, оценку

$$|\hat{p}_{n_{k_m}}(t_{j(k_m)})| \leqslant |\hat{p}_{n_{k_m}}(t_{j(k_m)}) - \hat{p}(t_{j(k_m)})| + |\hat{p}(t_{j(k_m)})| \leqslant |\hat{p}_{n_{k_m}} - \hat{p}| + |\hat{p}(t_{j(k_m)})|$$

и тот факт, что $\hat{p}(a) = 0$, заключаем, что

$$\hat{p}_{n_{k_m}}(t_{j(k_m)}) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty. \tag{3.6}$$

Теперь, объединяя оценку из предложения 3.5 с предельными соотношениями $p_{n_{k_m}} \to 0$ при $m \to \infty$ и $\hat{p}_{n_{k_m}} \to \hat{p}$ при $m \to \infty$, справедливыми при $r_{j(k_m)}(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, и с предельным соотношением (3.6), получаем, что

$$Df(p_{n_{k_m}})\hat{p}_{n_{k_m}} \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

□

Объединяя следствие 3.1, предложение 3.3 и предложение 3.5, получаем, что $f : C_0 \to \mathbb{R}$ является C^1_{MB}-гладким.

Отметим, что работать в пространстве C_0 (вместо пространства C) требуется только в самом последнем случае доказательства предложения 3.5 — когда последовательность $(j(k))_{k\in\mathbb{N}}$ является неограниченной.

4. Функционалы на C_I и C^1_I в случае компактного интервала I и функционалы на $C^1_{\mathcal{I}}$ в случае произвольного интервала $\mathcal{I}$

Следствие 4.1. *Пусть $a < b$ и $I = [a, b]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Функционалы $h : C_I \to \mathbb{R}$, заданные формулами $h(p) = f(pr\, p)$ при $pr : C_I \to C_{\mathcal{I},0}$ из раздела 1 и $H = h \circ \partial$ на C^1_I, являются C^1_{MB}-гладкими, но не C^1_F-гладкими.*

(ii) *Пусть I — подмножество интервала $\mathcal{I}$. Тогда отображение $F = H \circ R$, где $R : C^1_{\mathcal{I}} \to C^1_I$ — сужение, является C^1_{MB}-гладким, но не является C^1_F-гладким.*

Доказательство.

1. Отображение h является C^1_{MB}-гладким и $Dh(0) = 0 \in L_c(C_I, \mathbb{R})$, потому что

$$Dh(0)\hat{p} = Df(pr\, 0)pr\, \hat{p} = Df(0)pr\, \hat{p} = 0 \quad \text{для всех} \quad \hat{p} \quad \text{из} \quad C_I.$$

Для любого натурального j справедливы соотношения

$$Dh\left(\frac{1}{j}e_j\right)e_j = Df\left(pr\left(\frac{1}{j}e_j\right)\right)pr\, e_j = Df\left(\frac{1}{j}e_j\right)e_j = 1,$$

откуда следует, что на ограниченном множестве

$$\{e_j : j \in \mathbb{N}\} \subset C_I$$

отсутствует равномерная сходимость производных $Dh\Big(\dfrac{1}{j}e_j\Big)$ из пространства $L_c(C_I, \mathbb{R})$ к $Dh(0)$, являющемуся нулем этого пространства. Следовательно, h не является C^1_F-гладким.

2. Отображение H является C^1_{MB}-гладким и $DH(0) = 0 \in L_c(C^1_I, \mathbb{R})$, потому что

$$DH(0)\hat{p} = Dh(\partial\, 0)\partial\hat{p} = Dh(0)\partial\hat{p} = 0 \quad \text{для всех} \quad \hat{p} \quad \text{из} \quad C^1_I.$$

Для любого натурального j определим e^1_j из C^1_I формулой $e^1_j(t) = \int\limits_a^t e_j(s)ds$. Тогда

$$\{e^1_j \in C^1_I : j \in \mathbb{N}\}$$

— ограниченное подмножество пространства C^1_I, $\dfrac{1}{j}e^1_j \to 0$ при $j \to \infty$ и

$$DH\left(\frac{1}{j}e^1_j\right)e^1_j = Dh\left(\partial\left(\frac{1}{j}e^1_j\right)\right)\partial\, e^1_j = Dh\left(\frac{1}{j}e_j\right)e_j = 1 \quad \text{для всех} \quad j \quad \text{из} \quad \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что на ограниченном множестве $\{e^1_j \in C^1_I : j \in \mathbb{N}\}$ производные $DH\Big(\dfrac{1}{j}e^1_j\Big)$ принадлежат пространству $L_c(C^1_I, \mathbb{R})$, но их равномерная сходимость к нулевому элементу этого пространства не имеет места. Значит, H не является C^1_F-гладким.

3. Пусть I содержится в интервале $\mathcal{I}$. Рассмотрим сужение $R : C^1_{\mathcal{I}} \to C^1_I$ и положим $F = H \circ R$. Отображение F является C^1_{MB}-гладким в силу формулы дифференцирования сложной функции:

$$DF(0) = DH(R0) \circ R = DH(0) \circ R = 0 \in L_c(C^1_{\mathcal{I}}, \mathbb{R}).$$

Напомним, что линейное ограниченное отображение $E : C^1_I \to C^1_{\mathcal{I}}$ из раздела 1 переводит ограниченное подмножество $\{e^1_j : j \in \mathbb{N}\} \subset C^1_I$ в ограниченное подмножество

$$\{Ee^1_j : j \in \mathbb{N}\}$$

пространства $C^1_{\mathcal{I}}$. Имеет место сходимость $\dfrac{1}{j}Ee^1_j \to 0$ в $C^1_{\mathcal{I}}$, а для любого натурального j справедливо соотношение

$$DF\left(\frac{1}{j}Ee^1_j\right)Ee^1_j = DH\left(RE\frac{1}{j}e^1_j\right)REe^1_j = DH\left(\frac{1}{j}e^1_j\right)e^1_j = 1,$$

показывающее, что на ограниченном множестве $\{Ee^1_j : j \in \mathbb{N}\}$ производные $DF\Big(\dfrac{1}{j}Ee^1_j\Big)$ принадлежат $L_c(C^1_{\mathcal{I}}, \mathbb{R})$, однако их равномерная сходимость к $DF(0) = 0$ не имеет места. Следовательно, F не является C^1_F-гладким. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bastiani A.* Applications différentiables et varietés de dimension infinie// J. Anal. Math. — 1964. — *13.* — C. 1–114.
2. *Diekmann O., van Gils S. A., Verduyn Lunel S. M., Walther H. O.* Delay equations: functional-, complex- and nonlinear analysis. — New York: Springer, 1995.
3. *Glöckner H.* Implicit functions from topological vector spaces to Banach spaces// Israel J. Math. — 2006. — *155.* — C. 205–252.
4. *Glöckner H.* Finite order differentiability properties, fixed points and implicit functions over valued fields// `http://arxiv.org/pdf/math/0511218`. — 2007.
5. *Hale J. K.* Functional differential equations. — New York: Springer, 1971.
6. *Hale J. K., Verduyn Lunel S. M.* Introduction to functional differential equations. — New York: Springer, 1993.
7. *Hamilton R. S.* The inverse function theorem of Nash and Moser// Bull. Am. Math. Soc. (N. S.). — 1982. — *7.* — C. 65–222.
8. *Hartung F., Krisztin T., Walther H. O., Wu J.* Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications// Handb. Differ. Equ. — 2006. — *3.* — C. 435–545.
9. *Krisztin T., Walther H. O.* Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay// Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. — 2017. — *49.* — C. 95–112.
10. *Michal A. D.* Differential calculus in linear topological spaces// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1938. — *24.* — C. 340–342.
11. *Szilasi J., Lovas R. L.* Some aspects of differential theories// В сб.: Handbook of global analysis. — Amsterdam: Elsevier, 2007. — C. 1071–1116.
12. *Walther H. O.* The solution manifold and C^1-smoothness of solution operators for differential equations with state dependent delay// J. Differ. Equ. — 2003. — *195.* — C. 46–65.
13. *Walther H. O.* Smoothness properties of semiflows for differential equations with state dependent delay// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2004. — *124.* — C. 5193–5207.
14. *Walther H. O.* Differential equations with locally bounded delay// J. Differ. Equ. — 2012. — *252.* — C. 3001–3039.
15. *Walther H. O.* Evolution systems for differential equations with variable time lags// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2014. — *202.* — C. 911–933.
16. *Walther H. O.* Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2016. — *48.* — C. 507–537.
17. *Walther H. O.* Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — *85.* — C. 1–29.
18. *Walther H. O.* Fréchet differentiability in Fréchet spaces, and differential equations with unbounded variable delay// Preprint, 2016.

Hans-Otto Walther

Mathematisches Institut, Universität Gießen, Arndtstr. 2, D 35392 Gießen, Germany

E-mail: `Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de`

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-4-543-556 UDC 517.929

Maps Which Are Continuously Differentiable in the Sense of Michal and Bastiani but not of Fréchet

© 2017 **H.-O. Walther**

Abstract. We construct examples of nonlinear maps on function spaces which are continuously differentiable in the sense of Michal and Bastiani but not in the sense of Fréchet. The search for such examples is motivated by studies of delay differential equations with the delay variable and not necessarily bounded.

REFERENCES

1. A. Bastiani, "Applications différentiables et varietés de dimension infinie," *J. Anal. Math.*, 1964, **13**, 1–114.
2. O. Diekmann, S. A. van Gils, S. M Verduyn Lunel, and H. O. Walther, *Delay Equations: Functional-, Complex- and Nonlinear Analysis*, Springer, New York, 1995.
3. H. Glöckner, "Implicit functions from topological vector spaces to Banach spaces," *Israel J. Math.*, 2006, **155**, 205–252.
4. H. Glöckner, "Finite order differentiability properties, fixed points and implicit functions over valued fields," `http://arxiv.org/pdf/math/0511218`, 2007.
5. J. K. Hale, *Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1971.
6. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1993.
7. R. S. Hamilton, "The inverse function theorem of Nash and Moser," *Bull. Am. Math. Soc. (N. S.)*, 1982, **7**, 65–222.
8. F. Hartung, T. Krisztin, H. O. Walther, and J. Wu, "Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications," *Handb. Differ. Equ.*, 2006, **3**, 435–545.
9. T. Krisztin and H. O. Walther, "Smoothness issues in differential equations with state-dependent delay," *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 2017, **49**, 95–112.
10. A. D. Michal, "Differential calculus in linear topological spaces," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 1938, **24**, 340–342.
11. J. Szilasi and R. L. Lovas, "Some aspects of differential theories," In: *Handbook of Global Analysis*, Elsevier, Amsterdam, 2007, 1071–1116.
12. H. O. Walther, "The solution manifold and C^1-smoothness of solution operators for differential equations with state dependent delay," *J. Differ. Equ.*, 2003, **195**, 46–65.
13. H. O. Walther, "Smoothness properties of semiflows for differential equations with state dependent delay," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2004, **124**, 5193–5207.
14. H. O. Walther, "Differential equations with locally bounded delay," *J. Differ. Equ.*, 2012, **252**, 3001–3039.
15. H. O. Walther, "Evolution systems for differential equations with variable time lags," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2014, **202**, 911–933.
16. H. O. Walther, "Semiflows for differential equations with locally bounded delay on solution manifolds in the space $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2016, **48**, 507–537.
17. H. O. Walther, "Local invariant manifolds for delay differential equations with state space in $C^1((-\infty,0],\mathbb{R}^n)$," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, **85**, 1–29.
18. H. O. Walther, "Fréchet differentiability in Fréchet spaces, and differential equations with unbounded variable delay," Preprint, 2016.

Hans-Otto Walther
Mathematisches Institut, Universität Gießen, Arndtstr. 2, D 35392 Gießen, Germany
E-mail: `Hans-Otto.Walther@math.uni-giessen.de`