Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 1 (2017). С. 1–189

УДК 517.968

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-1-1-189

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ. I

© 2017 г. **А. П. СОЛДАТОВ**

Аннотация. Книга состоит из трех частей I–III, первая из которых представлена в настоящем томе. Данная книга отличается принятым новым подходом и в значительной степени основана на работах автора. Многие результаты публикуются впервые.

Глава 1 носит вводный характер. Чтобы сделать изложение по возможности замкнутым, в ней приведены необходимые предварительные сведения функционального анализа. Рассмотрения в последующих главах в основном ведутся в рамках пространств Гельдера с весом, которым посвящена глава 2. Особое значение имеет глава 3, где приведены необходимые оценки интегральных операторов в весовых гельдеровых пространствах с однородно-разностными ядрами, которые охватывают как интегралы типа потенциала и сингулярные интегралы, так и интегралы типа Коши и потенциалы двойного слоя. Случай аналогичных оценок в весовых лебеговых пространствах рассмотрен в последней главе 4.

Интегралы с однородно-разностными ядрами будут играть существенную роль в части III монографии, посвященной эллиптическим краевым задачам. Они естественным образом возникают в интегральных представлениях решений эллиптических систем первого порядка с помощью фундаментальных матриц или их параметриксов. Исследование краевых задач для эллиптических уравнений и систем второго и высокого порядка сводится к эллиптическим системам первого порядка.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Теория одномерных сингулярных интегральных уравнений возникла в конце прошлого столетия в работах Д. Гильберта и А. Пуанкаре. Основу ее заложили исследования Ф. Нетера и Т. Карлемана. Начиная с 30-х годов эта теория получает существенное развитие в трудах советских математиков. Основным методом изучения сингулярных уравнений и краевых задач для аналитических функций явился аппарат интегралов типа Коши, в определенном смысле законченный вид он принял в известных монографиях Н. И. Мусхелишвили [36] и Ф. Д. Гахова [11].

В дальнейшем теория сингулярных интегральных уравнений и краевых задач интенсивно развивалась по многим направлениям, таким, как ослабление требований на класс искомых функций (Lp-теория), на коэффициенты уравнений и краевых задач, замена этих коэффициентов более общими функциональными операторами со сдвигом. В исследованиях по сингулярным уравнениям широкое применение находят идеи и методы функционального анализа. Обнаружена тесная связь этих уравнений с уравнениями Винера—Хопфа. В этом направлении можно отметить книги И. Ц. Гохберга, Н. И. Крупника [14], З. Пресдорфа [42], Г. С. Литвинчука [31], Н. П. Векуа [7] а также вышедшие сравнительно недавно монографии С. Г. Михлина, З. Пресдорфа [77] и М. Криста [71].

Данная книга отличается принятым новым подходом и в значительной степени основана на работах автора. Многие результаты публикуются впервые. Книга состоит из трех частей I–III, первая из которых представлена в настоящем томе. Глава 1 носит вводный характер. Чтобы сделать изложение по возможности замкнутым, в ней приведены необходимые предварительные сведения из функционального анализа. Рассмотрения в последующих главах в основном ведутся в рамках пространств Гельдера C^{μ} с весом, которым посвящена вторая глава. Особое значение имеет глава 3, где приведены необходимые оценки интегральных операторов в гельдеровых пространствах с однородно-разностными ядрами, которые охватывают как интегралы типа потенциала и сингулярные интегралы, так и интегралы типа Коши и потенциалы двойного слоя. Случай аналогичных оценок в весовых лебеговых L^p-пространствах рассмотрен в последней, четвертой главе.

Интегралы с однородно-разностными ядрами будут играть существенную роль в третьей части монографии, посвященной эллиптическим краевым задачам. Они естественным образом возникают в интегральных представлениях решений эллиптических систем первого порядка с помощью фундаментальных матриц или их параметриксов. Исследование краевых задач для эллиптических уравнений и систем второго и высокого порядка сводится к изучению эллиптических систем первого порядка. Отметим, что аналогичный прямой подход с помощью аналогов потенциалов простого слоя непосредственно для эллиптических систем высокого порядка предпринят в работах Г. Фикера и его учеников [73, 74].

Сам аппарат собственно сингулярных интегро-функциональных уравнений составит содержание второй части монографии, в которой развивается подход, изложенный в монографии автора [54] и в серии статей [56–58]. Он посвящен исследованию операторной алгебры, которая помимо сингулярного оператора Коши содержит интегральные операторы с неподвижными особенностями в особых точках кусочно-гладкой кривой. Элементы этой алгебры естественным образом возникают при исследовании эллиптических краевых задач в областях с кусочно-гладкой границей на плоскости, включая нелокальные краевые задачи и задачи на стратифицированных множествах, а также в приложениях к уравнениям смешанного эллиптико-гиперболического типа.

Более полное представление о содержании первой части монографии дает ее оглавление. Библиография не претендует на полноту и касается главным образом вопросов, близких к темам, рассматриваемым в книге.

Глава 1

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА И АЛГЕБРЫ

1.1. Банаховы пространства

Большая часть материала этой главы хорошо известна, и его можно найти во всех руководствах по функциональному анализу (см., например, Рудин [46] и Иосида [22]). Чтобы изложение было по возможности замкнутым, почти все предложения приведены с краткими доказательствами. Теоремы, для которых сделаны исключения, снабжены отдельными комментариями.

Опишем основные понятия, связанные с нормированными векторными пространствами и ограниченными линейными операторами. Если не оговорено особо, эти пространства рассматриваются над полем скаляров $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Напомним сначала некоторые общие понятия векторных пространств.

Подмножество $X_1 \subseteq X$ называется подпространством векторного пространства X, если $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X_1$ для любых $x_j \in X_1$ и $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Пересечение $X_1 \cap X_2$ и сумма $X_1 + X_2 = \{x_1 + x_2,\, x_j \in X_j\}$ двух подпространств X_1, X_2 также являются подпространствами. Если $x_1 + x_2 = 0$ для $x_j \in X_j$ влечет $x_1 = x_2 = 0$, то сумма $X_1 + X_2$ называется прямой и обозначается $X_1 \oplus X_2$. Если она совпадает с X, то говорим, что X раскладывается в прямую сумму подпространств X_1 и X_2. В этом случае пишут также $X_2 = X \ominus X_1$. Вместе с парой пространств X_1 и X_2 прямое произведение $X_1 \times X_2$ является векторным пространством относительно покоординатных линейных операций $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ и $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$. Аналогичный смысл имеет прямое произведение $X_1 \times \ldots \times X_n$. Исходя из подпространства $Y \subseteq X$, можно ввести векторное фактор-пространство X/Y. Его элементами служат классы смежности $\tilde{x} = \{x + y,\, y \in Y\}$ с линейными операциями $\lambda\tilde{x} = \widetilde{\lambda x}$ и $\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x + y}$.

Для $e_j \in X,\ \lambda_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots, n$, вектор $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ называется линейной комбинацией векторов e_j. Множество всех таких векторов образует в X подпространство, которое обозначим $[e_1, \ldots, e_n]$. Система векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ линейно независима, если равенство $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0$ влечет $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Подпространство $X_0 \subseteq X$ конечномерно, если найдется такая линейно независимая система $\{e_1, \ldots, e_n\}$, что $X_0 = [e_1, \ldots, e_n]$. В этом случае $\{e_1, \ldots, e_n\}$ называется базисом X_0. Число n элементов этого базиса зависит только от X_0, называется размерностью пространства X_0 и обозначается $\dim X_0$. Для бесконечномерных пространств X полагаем $\dim X = \infty$.

Пусть подпространство $X_1 \subseteq X$ таково, что фактор-пространство X/X_1 конечномерно. Тогда размерность $\dim(X/X_1)$ называется коразмерностью X_1 и обозначается $\operatorname{codim} X_1$. В этом случае говорим, что векторное пространство X является конечномерным расширением своего подпространства X_1, или, наоборот, X_1 есть конечномерное сужение X. Если вектора $\tilde{e}_i$ образуют базис

X/X_1, то, очевидно, вектора $e_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, линейно независимы и X раскладывается в прямую сумму $X = X_1 \oplus [e_1, \dots, e_n]$.

Неотрицательная функция $x \to |x|$, заданная на векторном пространстве X, называется нормой, если

1) $|x| = 0$ равносильно $x = 0$;
2) $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$;
3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

Последнее условие носит название неравенства треугольника.

Из 1)–3) следует, что X является метрическим пространством относительно метрики $d(x, y) = |x - y|$. В соответствии с этим все понятия метрического пространства переносятся на X. Множество $B(a, r) = \{x \in X \mid |x - a| < r\}$ называется шаром с центром a радиуса r. Последовательность $x_n \in X$, $n = 1, \dots$ сходится в X, если существует такой $x \in X$, что вне любого шара с центром x находится конечное число членов этой последовательности. Данное требование равносильно тому, что $|x_n - x|_X \to 0$ при $n \to \infty$. Вектор x называется пределом последовательности и обозначается $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (используется также запись $x_n \to x$ в X при $n \to \infty$). Ясно, что сходящиеся последовательности ограничены, т. е. их нормы $|x_n| \leqslant C$, где постоянная $C > 0$ не зависит от n.

Последовательность x_n называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если $|x_n - x_m| \to 0$ при $n, m \to \infty$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$ при $n, m \geqslant N$. Нормированное пространство X полно, если любая последовательность Коши его элементов имеет предел. Полное нормированное пространство называется банаховым.

Свойство полноты часто удобнее проверять с помощью рядов. По определению ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится в X, если последовательность его частичных сумм $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ сходится к некоторому элементу $s \in X$. В этом случае вектор s называют суммой ряда. Иногда полезен следующий критерий полноты (Берг, Лефстрем [3]).

Лемма 1.1.1. *Нормированное векторное пространство X полно тогда и только тогда, когда из условия*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \tag{1.1.1}$$

следует сходимость в X ряда $\sum x_k$.

Доказательство. Полагая $s_n = x_1 + \ldots + x_n$, в силу неравенства треугольника при $n \geqslant m$ можно записать $|s_n - s_m| \leqslant |x_{m+1}| + \ldots + |x_n|$. Поэтому в силу (1.1.1) последовательность s_n является фундаментальной. В частности, полнота X влечет сходимость ряда $\sum x_k$.

Обратно, пусть выполнено условие леммы и задана последовательность Коши $y_n \in X$. Достаточно убедиться, что в X сходится ее некоторая подпоследовательность y_{n_k}. Выберем эту подпоследовательность по условию

$$|y_{n_{k+1}} - y_{n_k}| \leqslant 1/2^k.$$

Тогда для $x_k = y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$ выполнено условие (1.1.1). Поскольку частичные суммы ряда $\sum x_k$ совпадают с y_{n_k}, последняя последовательность сходится и, значит, X полно. $\square$

Пусть пространство X нормировано и Y — его замкнутое подпространство. Для элементов $\tilde{x} = \{x + y, y \in Y\}$ фактор-пространства X/Y, положим

$$|\tilde{x}| = \inf_{y \in Y} |x + y|_X. \tag{1.1.2}$$

Нетрудно видеть, что это равенство определяет в X/Y норму. С помощью леммы 1.1.1 легко показывается, что полнота X влечет полноту и фактор-пространства X/Y. Замкнутые подпространства конечной коразмерности условимся называть коконечномерными.

Две заданные на X нормы $|\cdot|$ и $|\cdot|'$ эквивалентны, если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|x|' \leqslant C|x|, \quad |x| \leqslant C|x|' \tag{1.1.3}$$

для всех $x \in X$. В этом случае сходимости в X по каждой из данных норм совпадают. В частности, если X полно по одной норме, то оно полно и по другой.

Теорема 1.1.1.

(a) *Конечномерное нормированное пространство полно, причем любые две его нормы эквивалентны.*

(b) *Пусть нормированное пространство X является конечномерным расширением банахового пространства Y, причем их нормы на Y совпадают. Тогда пространство X банахово, причем все его нормы с этим свойством эквивалентны.*

(c) *Пусть пространство X банахово и подпространство Y коконечномерно. Тогда этим свойством обладает и любое подпространство $X_1 \supseteq Y$, причем $\operatorname{codim} X_1 = \operatorname{codim} Y - \dim(X_1/Y)$.*

Доказательство. (a) Рассмотрим базис $e_1, \ldots, e_n$ конечномерного нормированного пространства X, так что каждый элемент $x \in X$ единственным образом представляется в виде $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ с некоторыми $\xi_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Достаточно убедиться, что исходная норма в X эквивалентна норме

$$|x|' = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\xi_i|.$$

Одно из неравенств (1.1.3) для рассматриваемых норм очевидно:

$$|x| \leqslant \sum_1^n |\xi_i||e_i| \leqslant (\sum_1^n |e_i|)|x|'.$$

Чтобы доказать противоположное неравенство, на компакте $K = \{\xi \in \mathbb{C}^n,\ \max_i |\xi_i| = 1\}$ рассмотрим положительную функцию $f(\xi) = |\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n|$. Очевидно, она непрерывна на K и, значит, достигает своего минимума $m > 0$. Поэтому $|x| \geqslant m$ для любого $x \in X$ с $|x|' = 1$. Заменяя здесь x на $x/|x|'$ с произвольным $x \in X$, приходим ко второму неравенству в (1.1.3).

(b) Пусть $X = Y \oplus Z$ и $e_1, \ldots, e_n$ — базис Z. Тогда любой элемент $x \in X$ единственным образом представим в виде

$$x = y + z(\xi), \quad z(\xi) = \xi_1 e_1 + \ldots \xi_n e_n, \tag{1.1.4}$$

с некоторыми $y \in Y,\ \ \xi \in \mathbb{C}^n$. Выберем для определенности норму в $\mathbb{C}^n$ равенством $|\xi| = \max_i |\xi_i|$. Утверждается, что для вектора $\xi \in \mathbb{C}^n$ в разложении (1.1.4) справедлива оценка

$$|\xi| \leqslant C|x|, \tag{1.1.5}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от x.

В самом деле, если подобной оценки не существует, то найдется последовательность $x^k \in X$, для которой $|x^k| = 1$ и $|\xi^k| \to +\infty$. Обозначая $x^k/|\xi^k|$ снова x^k, получим равенство $x^k = y^k + z(\xi^k)$, где $x^k \to 0$ и $|\xi^k| = 1$ для всех k. По теореме Больцано—Вейерштрасса из последовательности ξ^k можно выбрать подпоследовательность ξ^{k_s}, сходящуюся к некоторому вектору $\xi \in \mathbb{C}^n$, $|\xi| = 1$. Поэтому $y^{k_s} = x^{k_s} - z(\xi^{k_s}) \to -z(\xi)$ при $s \to \infty$. С другой стороны, в силу полноты пространства Y вектор $y = -z(\xi) \in Y$, что противоречит единственности разложения (1.1.4).

Исходя из разложения (1.1.4), введем теперь в нормированном пространстве X норму $|x|' = |y| + |\xi|$. Относительно этой нормы пространство X изоморфно $Y \times \mathbb{C}^n$ и, следовательно, банахово. Достаточно убедиться, что нормы $|x|$ и $|x|'$ эквивалентны, т. е. справедливы неравенства (1.1.3). Очевидно,

$$|x| \leqslant (1 + M)|x|',\ \ M = |e_1| + \ldots + |e_n|.$$

С другой стороны, из (1.1.5) следует, что для обоих слагаемых разложения (1.1.4) справедливы неравенства

$$|z(\xi)| \leqslant MC|x|, \quad |y| \leqslant (1 + MC)|x|,$$

что приводит к противоположному неравенству в (1.1.3).

(c) Свойство замкнутости X_1 является следствием (b), где X нужно заменить на X_1. Полагая $Z_1 = X_1 \ominus Y$, $Z_2 = X \ominus X_1$, получим разложение $X = Y \oplus Z$ с конечномерным пространством $Z = Z_1 \oplus Z_2$, откуда следует соотношение для размерностей леммы. □

В дальнейшем норма в X выбирается с точностью до эквивалентной. Например, в банаховом пространстве $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ прямого произведения равенства $|x| = \max\limits_i |x_i|_{X_i}$ и $|x|' = \sum\limits_i |x_i|_{X_i}$ определяют эквивалентные нормы. В последующих разделах роль X играют различные функциональные пространства, например, лебеговы L^p- или гельдеровы C^μ-пространства. В этом случае элементы прямого произведения $X^n = X \times \ldots \times X$ можно рассматривать как n-вектор-функции.

Поскольку вектор-функции в дальнейшем будут широко встречаться, условимся о следующем общем соглашении. Для заданного банахового пространства X скалярных функций символ X закрепим и за пространством X^n прямого произведения, снабженным, например, нормой $|x| = \max|x_i|_X$ (или любой другой эквивалентной нормой). В случае, когда это соглашение приводит к путанице, пользуемся более точным обозначением X^n.

Согласно теореме 1.1.1 нормированное конечномерное пространство банахово. В соединении с теоремой Больцано—Вейерштрасса (использованной при доказательстве теоремы 1.1.1) можно также утверждать, что единичный шар конечномерного нормированного пространства компактен. Следующая теорема Рисса показывает, что это свойство полностью характеризует конечномерные пространства.

Теорема 1.1.2. *Пусть нормированное пространство X обладает свойством Больцано—Вейерштрасса, т. е. из каждой ограниченной последовательности можно выбрать подпоследовательность Коши. Тогда это пространство конечномерно.*

Доказательство. Оно основывается на следующем свойстве нормированных пространств. Если подпространство $X_0 \subseteq X$ замкнуто, то существует такой вектор $e \in X$, что

$$|e| = 1; \quad |e - x| \geqslant 1/2, \ x \in X_0. \tag{1.1.6}$$

В самом деле, пусть $a \in X$ и $a \notin X_0$. В силу замкнутости X_0 найдется такое $r > 0$, что шар $B(a, r)$ с центром в a радиуса r не пересекается с X_0. Пусть r выбрано так, что аналогичный шар радиуса $2r$ имеет общие точки с X_0, т. е. $|a - b| \leqslant 2r$ для некоторого $b \in X_0$. Тогда для вектора $e = (a - b)/|a - b|$ и любого $x \in X_0$ имеем: $|e - x| = |a - b|^{-1}|a - b - |a - b|x| \geqslant |a - b|^{-1}r \geqslant 1/2$, что и доказывает (1.1.6).

Предположим теперь, что $\dim X = \infty$. Тогда в X можно выбрать возрастающую последовательность конечномерных подпространств $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots$ и в соответствии с (1.1.6) последовательность единичных векторов $e_k \in X_k$ со свойством

$$|e_n - e_m| \geqslant 1/2, \ n \neq m. \tag{1.1.7}$$

По условию существует некоторая подпоследовательность Коши e_{n_k}, что в силу (1.1.7) невозможно. □

В дальнейшем будут также рассматриваться семейства $(X_i, \, i \in I)$ банаховых пространств, содержащиеся в некотором векторном пространстве. Указанное свойство выполняется, когда это семейство является решеткой по вложению, т. е. для любого конечного подмножества $I_0 \subseteq I$ найдутся такие $k^0, k^1 \in I$, что

$$X_{k^0} \subseteq X_i \subseteq X_{k^1}, \quad i \in I_0. \tag{1.1.8}$$

В частности, определено векторное пространство $X = \bigcup\limits_i X_i$, состоящее из всех конечных сумм $\sum x_i$ с элементами $x_i \in X_i$. Остановимся на случае $I_0 = \{1, 2\}$ пары пространств. Легко видеть, что относительно нормы

$$|x| = \max(|x|_{X_1}, |x|_{X_2})$$

пространство $X_1 \cap X_2$ банахово.

При некотором естественном предположении аналогичный результат справедлив и по отношению к $X_1 + X_2$.

Лемма 1.1.2. *Пусть банаховы пространства X_j вложены в отделимое топологическое пространство X. Тогда равенство*

$$|x| = \inf_{x = x_1 + x_2} (|x_1|_{X_1} + |x_2|_{X_2}), \quad x_i \in X_i, \tag{1.1.9}$$

определяет в пространстве $X_1 + X_2$ норму, относительно которой оно банахово.

Доказательство. Проверка для (1.1.9) соответствующих аксиом нормы осуществляется без труда. Например, если $|x| = 0$, то по определению найдутся такие последовательности $x_{jn} \in X_j$, сходящиеся к нулю, что $x = x_{1n} + x_{2n}$ для всех n. В силу вложения X_1 и X_2 в отделимое топологическое пространство отсюда следует, что $x = 0$. Неравенство треугольника проверяется обычным образом. Пусть $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, где $x_i, y_i \in X_i$. Зафиксируем x_i и запишем неравенство

$$|x+y| - |x_1|_1 - |x_2|_2 \leqslant |y_1|_1 + |y_2|_2,$$

где $|\cdot|_i$ означает норму в X_i, откуда по определению (1.1.8)

$$|x+y| - |x_1|_1 - |x_2|_2 \leqslant |y_1 + y_2|.$$

Перенося слагаемые с $|x_j|_j$ в правую часть и повторяя эту процедуру, получим неравенство $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Таким образом, равенство (1.1.9) определяет норму. То, что относительно этой нормы пространство $X_1 + X_2$ полно, легко обосновывается с помощью леммы 1.1.1. □

Подмножество K банахового пространства называется относительно компактным, если из любой последовательности его элементов можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, и компактом, если дополнительно оно замкнуто, т. е. пределы этих подпоследовательностей принадлежат K. Приведем классический критерий компактности подмножества пространства $X = C(Q)$ функций, заданных и непрерывных на некотором метрическом компакте Q. Хорошо известно, что каждая непрерывная функция f на компакте Q ограничена и равномерно непрерывна. Первое свойство означает существование такой постоянной $M > 0$, что $|f(x)| \leqslant M$, $x \in Q$, а второе формулируется следующим образом: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ при $d(x,y) \leqslant \delta$, где $d(x,y)$ есть метрика на Q. Если эти свойства выполняются равномерно для всех функций f из некоторого множества $K \subseteq C(Q)$, то совокупность этих функций называется равномерно ограниченной и равностепенно непрерывной. Норма в векторном пространстве $C(X)$ определяется равенством

$$|f| = \max_{x \in Q} |f(x)|.$$

Относительно данной нормы это пространство банахово. Следующая хорошо известная теорема (см., например, Рудин [46]) дает критерий компактности подмножеств этого пространства.

Теорема (Асколи—Арцела)**.** *Множество $K \subseteq C(Q)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

В заключение остановимся на случае, когда компакт Q является кусочно-гладкой кривой Γ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Напомним, что под этой кривой понимается объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться лишь по своим концам. В случае, когда связные компоненты Γ гомеоморфны окружности, говорим о кусочно-гладком контуре (простом или составном в зависимости от числа этих компонент).

Теорема (Уолш)**.**

(a) *Пусть Γ является кусочно-гладкой кривой на комплексной плоскости. Тогда множество рациональных функций с полюсами вне Γ плотно в $C(\Gamma)$.*

(b) *Пусть конечная область D на плоскости ограничена простым кусочно-гладким контуром и $A(\overline{D})$ есть замкнутое подпространство $C(\overline{D})$, состоящее из функций, аналитических в D. Тогда множество многочленов плотно в $A(\overline{D})$.*

(c) *Пусть в условиях* (b) *точка $z_0 \in D$ и $u_n(z) = (z - z_0)^n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$. Тогда множество всех рациональных функций, представимых в виде конечных сумм*

$$R(z) = \sum c_n u_n(z), \quad c_n \in \mathbb{C}, \tag{1.1.10}$$

плотно в $C(\Gamma)$.

Заметим, что третье утверждение (c) теоремы является следствием первых двух. В самом деле, любую рациональную функцию $R(z)$ с полюсами вне Γ можно представить в виде суммы $R_1 + R_2$, где полюса R_1 лежат вне $\overline{D}$. Тогда на основании (b) функцию R_1 можно приблизить многочленами, т. е. конечными суммами (1.1.10) по неотрицательным целым n. Соответствующее утверждение по отношению к R_2 доказывается аналогичными соображениями после применения преобразования $z \to 1/(z - z_0)$.

1.2. Ограниченные операторы

Линейный оператор N, действующий из банахова пространства X в аналогичное пространство Y, называется ограниченным, если существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|Nx|_Y \leqslant C|x|_X, \quad x \in X. \tag{1.2.1}$$

Аналогичным образом понятие ограниченности вводится и для билинейных отображений $B : X_1 \times X_2 \to Y$ с помощью неравенства

$$|B(x_1, x_2)|_Y \leqslant C|x_1|_{X_1}|x_2|_{X_2}, \quad x_i \in X_i.$$

Заметим, что как для линейных, так и для билинейных отображений требование ограниченности равносильно их непрерывности.

Класс всех ограниченных операторов $N : X \to Y$ является векторным пространством, которое обозначим $\mathcal{L}(X, Y)$. При $X = Y$ пишем кратко $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, Y)$. Наименьшая постоянная C в (1.2.1) совпадает с величиной

$$|N|_{\mathcal{L}} = \sup_{|x| \leqslant 1} |Nx|_Y,$$

которая является нормой в векторном пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$. Заметим, что композиция MN двух ограниченных операторов M и N будет также ограниченным оператором, причем

$$|MN|_{\mathcal{L}} \leqslant |M|_{\mathcal{L}}|N|_{\mathcal{L}}. \tag{1.2.2}$$

Лемма 1.2.1. *Пусть пространство Y полно, последовательность операторов N_k ограничена в $\mathcal{L}(X, Y)$ и существует предел*

$$\lim_{k \to \infty} N_k x = Nx \tag{1.2.3}$$

по норме Y для всех x из некоторого плотного подпространства $X_0 \subseteq X$. Тогда этот предел существует для всех $x \in X$ и оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$. В частности, нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ полно.

Доказательство. По условию

$$|N_k x|_Y \leqslant C|x|_X, \tag{1.2.4}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от k. В силу (1.2.3) для $x \in X_0$ это неравенство распространяется и на N. Поэтому с учетом плотности X_0 в X оператор N продолжается по непрерывности до элемента из $\mathcal{L}(X, Y)$, который обозначим снова N.

Для заданных $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ выберем $x_0 \in X_0$ и номер n по условиям $|x - x_0| \leqslant \varepsilon$ и $|(N_k - N)x_0| \leqslant \varepsilon,\ k \geqslant n$. Тогда с учетом (1.2.4) при $k \geqslant n$ имеем:

$$|(N_k - N)x| \leqslant |N_k(x - x_0)| + |N(x - x_0)| + |(N_k - N)x_0| \leqslant (2C + 1)\varepsilon,$$

что и означает справедливость (1.2.3) для любого x.

Второе утверждение леммы является следствием первого. Пусть $N_k \in \mathcal{L}(X, Y)$ является последовательностью Коши. Тогда эта последовательность ограничена в $\mathcal{L}(X, Y)$. В силу очевидного неравенства

$$|(N_m - N_n)x| \leqslant |N_m - N_n|_{\mathcal{L}}|x| \tag{1.2.5}$$

и полноты Y предел (1.2.3) существует для каждого x. Остается убедиться, что $N_k \to N$ в $\mathcal{L}(X, Y)$.

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем номер n_0 так, чтобы $|N_m - N_n|_{\mathcal{L}} \leqslant \varepsilon$ при $n, m \geqslant n_0$. Тогда (1.2.5) переходит в неравенство $|(N_m - N_n)x| \leqslant \varepsilon|x|,\ n, m \geqslant n_0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $|N_n - N|_{\mathcal{L}} \leqslant \varepsilon,\ n \geqslant n_0$. Следовательно, пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ полно. □

В дальнейшем, если не оговорено особо, все нормированные пространства предполагаются банаховыми, а термин «оператор» используется как «ограниченный» линейный оператор.

Для оператора $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ подпространство $\ker N = \{x \mid Nx = 0\}$, называемое его ядром, всегда замкнуто. В противоположность этому его образ $\operatorname{Im} N = \{Nx, \quad x \in X\}$ не всегда замкнут в Y. Операторы $N : X \to Y$ с нулевым ядром (т. е. взаимно однозначные операторы) называют часто вложениями банаховых пространств. Например, семейство банаховых пространств X_i, $i \in I$, где $I \subseteq \mathbb{R}$, монотонно возрастает по i (в смысле вложений), если $X_i \subseteq X_j$ при $i \leqslant j$ и тождественный оператор вложения $X_i \to X_j$ ограничен, т. е.

$$|x|_{X_j} \leqslant C|x|_{X_i}, \quad i \leqslant j.$$

В этом же смысле понимаются вложения (1.1.8) для семейства пространств, образующих решетку.

По определению оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ обратим, если $\ker N = 0$, $\operatorname{Im} N = Y$, а обратное линейное отображение N^{-1} принадлежит $\mathcal{L}(Y, X)$. Другими словами, обратимые операторы осуществляют изоморфизмы банаховых пространств.

Очевидно, произведение двух обратимых операторов есть также обратимый оператор.

Теорема 1.2.1. *Множество $G(X, Y)$ обратимых операторов $X \to Y$ открыто в $\mathcal{L}(X, Y)$, а отображение $N \to N^{-1}$ непрерывно $G(X, Y) \to G(Y, X)$.*

Доказательство. Оно основывается на следующем предложении: если $A \in \mathcal{L}(X)$ и норма $|A|_{\mathcal{L}} \leqslant q < 1$, то оператор $1 - A$ обратим и его обратный определяется сходящимся рядом

$$(1 - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n. \tag{1.2.6}$$

В самом деле, в силу (1.2.2) имеем оценку $|A^n|_{\mathcal{L}} \leqslant |A|_{\mathcal{L}}^n \leqslant q^n$, так что с учетом полноты $\mathcal{L}(X, Y)$ ряд в правой части (1.2.6) сходится. Пусть $B \in \mathcal{L}(X)$ есть сумма этого ряда. Тогда

$$(1 - A)B = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = 1$$

и аналогично проверяется равенство $B(1 - A) = 1$. Следовательно, $1 - A$ обратим и $(1 - A)^{-1} = B$.

При $|A|_{\mathcal{L}} \leqslant q < 1$ из (1.2.6) видно, что

$$\big|(1 - A)^{-1} - 1\big|_{\mathcal{L}} \leqslant (1 - q)^{-1}|A|_{\mathcal{L}},$$

и, следовательно, $(1 - A)^{-1} \to 1$ при $|A|_{\mathcal{L}} \to 0$.

Пусть теперь оператор $N \in G(X, Y)$ и $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ удовлетворяет условию $|N^{-1}|_{\mathcal{L}}|B|_{\mathcal{L}} < 1$. Тогда $N^{-1}B \in \mathcal{L}(X)$ и $|N^{-1}B|_{\mathcal{L}} < 1$, так что в силу предыдущего предложения оператор $N - B = N(1 - N^{-1}B) \in G(X, Y)$. Следовательно, множество $G(X, Y)$ открыто.

Если $B \to 0$ в $\mathcal{L}(X, Y)$, то по доказанному выше $[1 - (N^{-1}B)]^{-1} \to 1$ в $\mathcal{L}(X)$ и, значит, $(N - B)^{-1} \to N^{-1}$ в $\mathcal{L}(X, Y)$. □

Следующая фундаментальная теорема [46] показывает, что требование ограниченности обратного оператора N^{-1} в определении обратимости N в действительности излишне.

Теорема (Банаха об открытом отображении)**.** *Пусть оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $\operatorname{Im} N = Y$. Тогда линейное отображение N открыто в том смысле, что для любого открытого множества $G \subseteq X$ образ $N(G)$ открыт в Y. В частности, в случае $\ker N = 0$ обратное отображение N^{-1} непрерывно $Y \to X$, т. е. оператор N обратим.*

Примером оператора «на» в теореме может служить каноническое фактор-отображение $x \to \tilde{x} = x + X_0$ из X в банахово фактор-пространство X/X_0, где X_0 — замкнутое подпространство X. В самом деле, по определению (1.1.3) норма $|\tilde{x}| \leqslant |x|$, так что отображение $x \to \tilde{x}$ ограничено. Ясно, что его образ совпадает с X/X_0. Следовательно, по теореме Банаха это отображение открыто.

Другим примером может служить разложение X в прямую сумму

$$X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n \tag{1.2.7}$$

замкнутых подпространств X_i. Согласно теореме Банаха линейное отображение $(x_1, \ldots, x_n) \to x = x_1 + \ldots x_n$ ограничено $X_1 \times \ldots \times X_n \to X$ и его образом служит все X. Следовательно, этот оператор обратим и норма в X эквивалентна норме пространства $X_1 \times \ldots \times X_n$.

В частности, операторы $P_i x = x_i$, где $x = x_1 + \ldots + x_n$, $x_i \in X_i$, ограничены в X и, очевидно, обладают свойством

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad P_1 + \ldots + P_n = 1, \tag{1.2.8}$$

где δ_{ij} означает символ Кронекера, т. е. $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$.

Оператор $P \in \mathcal{L}(X)$ со свойством $P^2 = P$ называется проектором, вместе с ним проектором служит и $Q = 1 - P$. Образ проектора $X_1 = \operatorname{Im} P$ является замкнутым подпространством и $X = X_1 \oplus X_2$, $X_2 = \operatorname{Im} Q = \ker P$. Аналогично, разложение (1.2.8) единичного оператора в сумму проекторов равносильно разложению (1.2.7).

Замкнутое подпространство $X_1 \subseteq X$ называется дополняемым, если существует такое замкнутое подпространство $X_2 \subseteq X$, что $X = X_1 \oplus X_2$. Как отмечено выше, это равносильно существованию проектора $P \in \mathcal{L}(X)$ с образом $\operatorname{Im} P = X_1$. Очевидно, замкнутое подпространство $X_1 \subseteq X$ конечной коразмерности дополняемо. Как будет показано ниже, дополняемы и конечномерные подпространства.

Если пространство Y также задано в виде прямой суммы $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_m$ замкнутых подпространств, то каждый оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ можно отождествить с операторной $m \times n$-матрицей (N_{ij}), $N_{ij} \in \mathcal{L}(X_j, Y_i)$, действующей по правилу

$$(Nx)_i = \sum_{j=1}^{n} N_{ij} x_j, \ i = 1, \ldots, m.$$

К обратимым операторам тесно примыкает понятие односторонне обратимых операторов. Пусть ограниченные операторы $N : X \to Y$ и $R : Y \to X$ таковы, что их произведение NR является единичным оператором. Тогда по определению оператор N обратим справа, а R — слева. В этом случае R называется правым обратным к N и, соответственно, оператор N есть левый обратный к R. Нетрудно полностью охарактеризовать классы этих операторов.

Теорема 1.2.2.

(a) *Оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ обратим справа тогда и только тогда, когда образ $\operatorname{Im} N = Y$, а ядро $\ker N$ дополняемо в X. Множество всех таких операторов открыто в $\mathcal{L}(X, Y)$.*

(b) *Оператор $R \in \mathcal{L}(Y, X)$ обратим слева тогда и только тогда, когда образ $\operatorname{Im} R$ дополняем в X, а ядро $\ker R = 0$. Множество всех таких операторов открыто в $\mathcal{L}(Y, X)$.*

Доказательство. Если $NR = 1$, то, очевидно, $\operatorname{Im} N = Y$ и $\ker R = 0$. Так как $RNRN = RN$, оператор $P = RN \in \mathcal{L}(X)$ является проектором, при этом $\ker P = \ker N$ и $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} R$. В частности, $X = \ker N \oplus \operatorname{Im} R$, т. е. ядро $\ker N$ и образ $\ker N$ дополняемы в X. Тем самым первые утверждения в (a) и (b) установлены.

Пусть далее оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ таков, его образ $\operatorname{Im} N = Y$, а ядро $\ker N$ дополняемо в X. Тогда сужение N_1 оператора N на замкнутое подпространство $X_1 = X \ominus \ker N$ является обратимым оператором в $\mathcal{L}(X_1, Y)$ и обратный оператор $R = N_1^{-1}$ как элемент $\mathcal{L}(Y, X)$ является правым обратным к N.

Аналогично доказывается и соответствующее утверждение в (b). Пусть образ $X_1 = \operatorname{Im} R$ оператора $R \in \mathcal{L}(Y, X)$ дополняем в X, а ядро $\ker R = 0$. Тогда R допускает обратный $N_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y)$. Пусть оператор $P \in \mathcal{L}(X)$ проектирует X на X_1, тогда оператор $N = N_1 P$ является левым обратным к R.

Что касается последних утверждений в (a) и (b), то они устанавливаются совершенно аналогично теореме 1.2.1. □

При $Y = \mathbb{C}$ элементы пространств $\mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ называются линейными функционалами, а само это пространство обозначается X^* и называется сопряженным к X. Согласно известной теореме Хана—Банаха [46] любой функционал $x_0^* \in X_0^*$, где X_0 — замкнутое подпространство X, с сохранением нормы продолжается до некоторого ограниченного функционала $x^* \in X^*$. Для наших целей будет достаточен следующий частный случай этой теоремы.

Теорема (Хана—Банаха). *Для любого замкнутого подпространства $X_0 \subseteq X$ и вектора $x_0 \notin X_0$ найдется такой ограниченный линейный функционал $x^* \in X^*$ единичной нормы, что $x^*(x_0) = |x_0|$ и $x^*(x) = 0$, $x \in X_0$.*

Заметим, что вторая часть теоремы является фактически следствием первой части, если последнюю применить к фактор-пространству X/X_0.

Из этой теоремы, в частности, следует, что норма любого вектора x равна

$$|x| = \sup_{|x^*| \leqslant 1} |x^*(x)|.$$

Другими словами, если x рассматривать как линейный функционал на X^* относительно билинейной формы
$$(x, x^*) = x^*(x), \tag{1.2.9}$$
то норма этого функционала совпадает с нормой $|x|$. В результате получаем каноническое изометрическое вложение $X \subseteq (X^*)^*$. Пространство X называется рефлексивным, если образ этого вложения совпадает с $(X^*)^*$.

Условимся векторы $x \in X$ и $x^* \in X^*$ называть ортогональными относительно формы (1.2.9) и записывать этот факт $x \perp x^*$, если $(x, x^*) = 0$. Точно так же запись $x \perp Y$ для подпространства $Y \subseteq X^*$ означает, что $(x, x^*) = 0$ для всех $x^* \in Y$. Аналогичный смысл имеет и запись $x^* \perp Y$ для $Y \subseteq X$. Множество $\{x \in X,\, x \perp Y\}$ является замкнутым подпространством X, оно обозначается $Y^\perp$ и называется ортогональным дополнением Y. Аналогичным образом определяется ортогональное дополнение $Y^\perp \subseteq X^*$ для $Y \subseteq X$.

Из теоремы Хана—Банаха следует, что для любого замкнутого подпространства $Y \subseteq X$ справедливо также равенство
$$(Y^\perp)^\perp = Y, \quad Y \subseteq X. \tag{1.2.10}$$

Действительно, по определению элементы $y \in Y$ ортогональны $Y^\perp$, так что $Y \subseteq (Y^\perp)^\perp$. Если это включение не является равенством и $x_0 \in (Y^\perp)^\perp$, $x_0 \notin Y$, то по теореме Хана—Банаха найдется такой функционал $x^* \in X^*$, что $x^*(x_0) \neq 0$ и x^* обращается в нуль на Y. Иначе говоря, $(x_0, x^*) \neq 0$ и $x^* \in Y^\perp$. Но это противоречит тому, что $x_0 \in (Y^\perp)^\perp$.

Если подпространство $Y \subseteq X$ замкнуто, то каждый линейный функционал $f \in (X/Y)^*$ в композиции с каноническим отображением $x \to \tilde{x}$ определяет элемент $x^*(x) = f(\tilde{x})$ пространства X^*, обращающийся в нуль на Y, т. е. элемент $x^* \in Y^\perp$. Верно и обратное: каждый элемент $x^* \in Y^\perp$ может быть записан указанным образом. Таким образом, векторные пространства $(X/Y)^*$ и $Y^\perp$ изоморфны и, значит, их размерности совпадают. Поэтому $\operatorname{codim} Y = \dim Y^\perp$. Полагая $Z = Y^\perp$, с учетом (1.2.10) будем иметь двойственное соотношение $\dim Z = \operatorname{codim} Z^\perp$ для конечномерного пространства $Z \subseteq X^*$.

Отметим еще, что для любых двух конечномерных подпространств $Z_j \subseteq X^*$, $j = 1, 2$, справедливо соотношение
$$Y_1 \cap Y_2 = (Z_1 + Z_2)^\perp, \quad Y_j = Z_j^\perp. \tag{1.2.11}$$
В самом деле, поскольку $Z_j \subseteq Z_1 + Z_2$, имеем соотношение $(Z_1 + Z_2)^\perp \subseteq Y_j$ и, значит, $(Z_1 + Z_2)^\perp \subseteq Y_1 \cap Y_2$. Обратно, подпространство $Y_1 \cap Y_2$ ортогонально Z_j, $j = 1, 2$, и, значит, ортогонально $Z_1 + Z_2$, так что $Y_1 \cap Y_2 \subseteq (Z_1 + Z_2)^\perp$.

Равенство (1.2.11) показывает, что пересечение двух коконечномерных подпространств принадлежит к тому же типу

Условимся две системы векторов $e_1, \dots, e_n \in X$ и $e_1^*, \dots, e_n^* \in X^*$ называть биортогональными, если $(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} означает символ Кронекера. Очевидно, каждая из этих систем линейно независима. Из определения непосредственно следует, что оператор P, действующий по формуле
$$Px = \sum_1^n (x, e_i^*) e_i, \tag{1.2.12}$$
является проектором, образ которого есть подпространство, натянутое на $e_1, \dots, e_n$, а ядро $\ker P$ совпадает с ортогональным дополнением к подпространству, натянутому на $e_1^*, \dots, e_n^*$.

Лемма 1.2.2. *Пусть подпространства $X_0 \subseteq X$ и $X_1 \subseteq X^*$ таковы, что X_0 конечномерно и в X_0 не существует ненулевых элементов, ортогональных X_1. Тогда в X_1 можно выбрать систему векторов, биортогональную к заданному базису в X_0. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к случаю, когда $X_0 \subseteq X^*$, $X_1 \subseteq X$.*

В частности, конечномерное пространство X_0 дополняемо, т. е. существует проектор P с областью значений $\operatorname{Im} P = X_0$. Если $X_0 \cap Y = 0$ для некоторого замкнутого подпространства $Y \subseteq X$, то выбор P можно подчинить условию $\ker P \supseteq Y$.

Доказательство. Выберем в X_0 базис $e_1, \dots, e_n$ и рассмотрим линейный оператор $T \in \mathcal{L}(X_1, \mathbb{C}^n)$, действующий по формуле $(Tx^*)_i = (e_i, x^*)$. Утверждается, что он является оператором «на», т. е. его образ $\operatorname{Im} T = \mathbb{C}^n$. Если это не так, то найдется такой ненулевой вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$, что $\sum_i \eta_i (Tx^*)_i = 0$ для всех $x^* \in X_1$. Тогда для вектора $x = \sum_i \eta_i e_i$ будем иметь соотношение $(x, x^*) = 0$, $x^* \in X_1$. Иначе говоря, ненулевой элемент $x \in X_0$ ортогонален X_1, что по предположению леммы невозможно. Таким образом, $\operatorname{Im} T = \mathbb{C}^n$ и существуют такие $e_i^* \in X_1$, что $Te_1^* = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $Te_n^* = (0, 0, \dots, 1)$. Другими словами, $(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$. Случай, когда $X_0 \subseteq X^*$ и $X_1 \subseteq X$, рассматривается аналогично.

Последнее утверждение леммы является следствием первого, если в качестве X_1 выбрать подпространство $Y^\perp$, которое в силу (1.2.10) удовлетворяет предположению первой части леммы. $\square$

Условимся для оператора $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ ортогональное дополнение $(\operatorname{Im} N)^\perp \subseteq Y^*$ его образа называть коядром и обозначать $\operatorname{coker} N$. В силу (1.2.10) имеем равенство

$$\overline{\operatorname{Im} N} = (\operatorname{coker} N)^\perp. \tag{1.2.13}$$

Оно означает, что если образ $\operatorname{Im} N$ оператора N замкнут, то разрешимость уравнения $Nx = y$ равносильна условию ортогональности правой части y коядру оператора N.

В конкретных ситуациях описание сопряженного пространства Y^* и связанной с ним канонической формы (1.2.9) не всегда возможно. Удобнее вместо них рассматривать некоторое банахово пространство Y' вместе с ограниченной билинейной формой $\langle y, y' \rangle$ на $Y \times Y'$. Эта форма предполагается невырожденной в том смысле, что $\langle y, y' \rangle = 0$ для всех $y' \in Y'$ влечет $y = 0$ и аналогично $\langle y, y' \rangle = 0$ для всех $y \in Y$ влечет $y' = 0$. Тройку $(Y, Y', \langle , \rangle)$ называем структурой двойственности, которой наделено пространство Y. Из теоремы Хана—Банаха следует, что форма (1.2.9) невырождена и, значит, тройка $(X, X^*, (,))$ определяет так называемую каноническую структуру двойственности.

Понятие ортогональности и ортогонального дополнения $Z^\perp$ относительно формы $\langle y, y' \rangle$ определяется совершенно аналогично предыдущему. В силу невырожденности формы $\langle , \rangle$ каждый элемент $y' \in Y'$ можно отождествить с линейным функционалом $y \to \langle y, y' \rangle$ сопряженного пространства Y^*. В результате имеем канонические вложения $Y' \subseteq Y^*$ и $Y \subseteq (Y')^*$. Отсюда следует, что если одно из пространств Y, Y' конечномерно, то конечномерно и другое, причем их размерности совпадают.

В самом деле, пусть, например, конечномерно Y. Тогда в силу вложения $Y' \subseteq Y^*$ пространство Y' конечномерно и $\dim Y' \leqslant \dim Y^* = \dim Y$. Точно так же вложение $Y \subseteq (Y')^*$ дает противоположное неравенство для размерностей.

Может случиться, что по отношению к вложению $Y' \subseteq Y^*$ коядро $\operatorname{coker} N$ содержится в Y'. Тогда ортогональность в равенстве (1.2.13) можно понимать по отношению к билинейной форме $\langle y, y' \rangle$.

С каждым оператором $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ можно связать линейный оператор $N^* : Y^* \to X^*$, который переводит линейный функционал $y^* \in Y^*$ в функционал $x^* = N^* y^* \in X^*$ по правилу $(N^* y^*)(x) = y^*(Nx)$, $x \in X$. Этот оператор называется сопряженным с N. Поскольку $|N^* y^*| \leqslant |N|_{\mathcal{L}} |y^*|$, где $|\,.\,|$ означают нормы в сопряженных пространствах, оператор $N^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ и его норма не превосходит $|N|_{\mathcal{L}}$. В действительности с помощью теоремы Хана—Банаха легко убедиться, что эти нормы совпадают.

Из определения сопряженного оператора следует, что коядро $\operatorname{coker} N$ совпадает с ядром $\ker N^*$ сопряженного оператора, так что в (1.2.13) можно $\operatorname{coker} N$ заменить на $\ker N^*$. В частности, если образ $\operatorname{Im} N$ коконечномерен, то его коразмерность совпадает с размерностью ядра $\ker N^*$.

Условимся оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ с конечномерным образом $\operatorname{Im} N$ кратко называть конечномерным, класс таких операторов обозначим $\mathcal{T}_0(X, Y)$. Очевидно, композиция двух операторов, один из которых конечномерен, также принадлежит к этому типу. Подпространство $\mathcal{T}_0$ конечномерных операторов, вообще говоря, не замкнуто в $\mathcal{L}$. В этом отношении более предпочтительно подпространство компактных (или вполне непрерывных) операторов, которое обозначим $\mathcal{T}(X, Y)$. По определению оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ компактен, если для любой ограниченной последовательности $\{x_n \in X\}$ из последовательности $\{Nx_n \in Y\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Эквивалентное определение: образ $N(B)$ единичного шара $B \subseteq X$ относительно компактен в Y.

Из определения видно, что композиция двух ограниченных операторов, один из которых компактен, есть также компактный оператор. Ясно также, что $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$, т. е. каждый конечномерный оператор компактен.

Теорема 1.2.3. *Подпространство $\mathcal{T}(X,Y)$ компактных операторов замкнуто в $\mathcal{L}(X,Y)$, причем $N \in \mathcal{T}(X,Y)$ влечет $N^* \in \mathcal{T}(Y^*,X^*)$.*

Доказательство. Пусть последовательность операторов $N_s \in \mathcal{T}(X,Y)$ сходится к $N \in \mathcal{L}(X,Y)$ по операторной норме. Зададимся последовательностью $x_k \in X$, $|x_k| \leqslant 1$ и рассмотрим ее подпоследовательность $x_{k,1}$, $k = 1,\dots$, для которой $N_1 x_{k,1}$ сходится в Y. Пусть для натурального $s \geqslant 2$ последовательность $x_{k,s} \in X$ является подпоследовательностью $x_{k,s-1}$, причем $N_s x_{k,s}$, $k = 1,\dots$ сходится в Y. Утверждается, что тогда сходится и последовательность Nx_{kk}.

В самом деле, для заданного $\varepsilon > 0$ выберем s по условию $|N_s - N|_{\mathcal{L}} \leqslant \varepsilon$, так что

$$|(N_s - N)x_{kr}| \leqslant \varepsilon.$$

Пусть номер $n \geqslant s$ таков, что

$$|N_s(x_{ks} - x_{rs})| \leqslant \varepsilon,\ k,r \geqslant n.$$

Тогда при $k,r \geqslant n$ имеем:

$$|N(x_{kk} - x_{rr})| = |(N - N_s)(x_{kk} - x_{rr}) + N_s(x_{kk} - x_{rr})| \leqslant 3\varepsilon,$$

что означает сходимость последовательности Nx_{kk}. Следовательно, оператор N компактен, так что подпространство $\mathcal{T}(X,Y)$ замкнуто.

Обратимся ко второму утверждению теоремы. Пусть оператор $N \in \mathcal{T}(X,Y)$ и задана последовательность $y_k^* \in Y^*$, $|y_k^*| \leqslant 1$. Требуется убедиться, что из последовательности $x_k^*(x) = y_k^*(Nx)$ можно выбрать сходящуюся в X^* подпоследовательность. Пусть B — единичный шар в X и $Q = \overline{N(B)}$. Тогда множество Q компактно относительно метрики банахового пространства Y и последовательность непрерывных функций $f_k(y) = y_k^*(y)$, $y \in Q$ равномерно ограничена. Кроме того, семейство $\{f_k\}$ равностепенно непрерывно, поскольку

$$|f_k(y) - f_k(y')| = |y_k^*(y - y')| \leqslant |y - y'|,\ y,y' \in Q.$$

Следовательно, по теореме Асколи—Арцела из последовательности $\{f_k\}$ можно выделить подпоследовательность f_{k_i}, которая на Q равномерно сходится к некоторой непрерывной функции. Легко видеть, что тогда и $x_{k_i}^*$ сходится в X^*. □

Понятия ограниченных и компактных операторов можно распространить на случай семейств банаховых пространств. Пусть заданы семейства банаховых пространств $(X_i,\ i \in I)$ и $(Y_i,\ i \in I)$, образующих решетки (в смысле вложений (1.1.8) банаховых пространств), причем $X_i \subseteq X_j$ влечет $Y_i \subseteq Y_j$. По определению линейный оператор $N : \bigcup\limits_{i \in I} X_i \to \bigcup\limits_{i \in I} Y_i$ ограничен в этих семействах, если для каждого $i \in I$ сужение $N_i = N|X_i$ ограничено $X_i \to Y_i$. Пространство операторов этого типа обозначаем $\mathcal{L}(X_i,Y_i; i \in I)$. Как обычно, при $X_i = Y_i$ пишем $\mathcal{L}(X_i; i \in I)$. В случае семейства (X_1,X_2) из двух элементов последнее обозначение сводится к $\mathcal{L}(X_1;X_2)$, что несколько отличается от обозначения пространства $\mathcal{L}(X_1,X_2)$ ограниченных операторов $X_1 \to X_2$. Впрочем, различие в обозначениях будет видно из контекста.

Аналогичные определения вводятся и для компактных операторов с заменой символа $\mathcal{L}$ на $\mathcal{T}$ в обозначениях.

Заметим, что вложение $Y_i \subseteq Y_j$ влечет $Y_j^* \subseteq Y_i^*$, соответственно оператор N_j^* совпадает с сужением N_i^* на X_j^*. Поэтому семейство сопряженных пространств $(X_i^*,\ i \in I)$ также образует решетку и определен сопряженный оператор $N^* \in \mathcal{L}(Y_i^*,X_i^*; i \in I)$. Заметим, что элементы $y^* \in \bigcap\limits_i Y_i^*$ можно рассматривать как линейные функционалы над векторным пространством $\bigcup\limits_i Y_i$. Очевидно, ядро $\ker N = \bigcup\limits_i \ker N_i$ оператора $N \in \mathcal{L}(X_i,Y_i; i \in I)$ содержится в $\bigcup\limits_i X_i$ и аналогично его коядро $\operatorname{coker} N = \ker N^* \subseteq \bigcup\limits_i Y_i^*$. Если $\operatorname{coker} N \subseteq \bigcap\limits_i Y_i^*$, то аналогично (1.2.10) имеем равенства

$$\overline{\operatorname{Im} N_i} = Y_i \cap (\operatorname{coker} N)^{\perp}, \quad i \in I. \qquad (1.2.14)$$

1.3. Фредгольмовы операторы

Оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ называется фредгольмовым, если его ядро $\ker N$ и коядро конечномерны, причем

$$\operatorname{Im} N = (\operatorname{coker} N)^{\perp}. \tag{1.3.1}$$

Другими словами, оператор N фредгольмов, если его ядро $\ker N$ конечномерно, а образ $\operatorname{Im} N$ коконечномерен. Удобно для краткости размерности $\dim(\ker N)$ и $\operatorname{codim}(\operatorname{Im} N) = \dim(\operatorname{coker} N)$ обозначать, соответственно, $\dim N$ и $\operatorname{codim} N$, целое число $\operatorname{ind} N = \dim N - \operatorname{codim} N$ называется индексом оператора N. Фредгольмовы операторы называют также нетеровыми (особенно в отечественной литературе), закрепляя термин «фредгольмовый» за операторами индекса нуль. Подробное изложение теории фредгольмовых операторов можно найти в книгах Като [23], Пале [39] и С. Крейна [25].

Если оператор N фредгольмов, то пространства X и Y можно разложить в прямые суммы

$$\begin{aligned} X &= X_{(0)} \oplus X_{(1)},\ X_{(0)} = \ker N, \\ Y &= Y_{(0)} \oplus Y_{(1)},\ Y_{(1)} = \operatorname{Im} N. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Конечно, эти разложения определяются неоднозначно, тем не менее конечномерное пространство $Y_{(0)}$ называется кообразом оператора N. Очевидно, величина $\dim Y_{(0)} = \operatorname{codim} N$ совпадает с размерностью коядра оператора N, т. е. размерностью $\dim N^*$ ядра сопряженного оператора. Поэтому $\operatorname{ind} N = \dim N - \dim N^*$ и (1.3.1) можно переписать в форме

$$\operatorname{Im} N = (\ker N^*)^{\perp}. \tag{1.3.3}$$

Таким образом, для уравнения $Nx = y$ имеем следующие три утверждения, известные как альтернативы Фредгольма.

(i) *Однородное уравнение $Nx = 0$ имеет конечное число n линейно независимых решений $x_1, \dots, x_n$.*

(ii) *Однородное сопряженное уравнение $N^* y^* = 0$ имеет конечное число m линейно независимых решений $y_1^*, \dots, y_m^* \in Y^*$, а неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $(y, y_i^*) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$.*

(iii) *Разность $n - m$ совпадает с индексом $\operatorname{ind} N$ оператора N.*

Из разложений (1.3.2) следует, что оператор N взаимно однозначно переводит $X_{(1)}$ на $Y_{(1)}$, так что по теореме Банаха сужение $N_1 = N|X_1$ обратимо как оператор $X_{(1)} \to Y_{(1)}$. Рассмотрим оператор $N^{(-1)} \in \mathcal{L}(Y, X)$ с ядром $\ker N^{(-1)} = Y_{(0)}$, для которого сужение $N_{(1)}^{(-1)} = N^{(-1)}|Y_{(1)}$ совпадает с N_1^{-1}. Очевидно, этот оператор фредгольмов и

$$\operatorname{ind} N^{(-1)} = -\operatorname{ind} N, \quad N^{(-1)} N = 1 + P_0,\ N N^{(-1)} = 1 + Q_0, \tag{1.3.4}$$

где P_0 и Q_0 означают проекторы, соответственно, $X \to X_{(0)}$ и $Y \to Y_{(0)}$, определяемые разложениями (1.3.2).

Если пространства X и Y конечномерны, то, очевидно, любой оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ фредгольмов. Поскольку в этом случае размерности пространств $X_{(1)}$ и $Y_{(1)}$ в разложениях (1.3.2) совпадают, индекс $\operatorname{ind} N = \dim X - \dim Y$.

Примером фредгольмового оператора может служить обратимый справа оператор с конечномерным ядром, его индекс совпадает с размерностью $\dim N$ ядра. Аналогично оператор $R \in \mathcal{L}(Y, X)$, который обратим справа и образ которого коконечномерен, является фредгольмовым, и его индекс $\operatorname{ind} R = -\operatorname{codim} R$.

Отметим несколько простых свойств фредгольмовых операторов, непосредственно вытекающих из определений.

Лемма 1.3.1.

(a) *Если операторы $N_1 N$ и $N N_2$ фредгольмовы, то фредгольмов и оператор N.*

(b) *Пусть ядро оператора $N \in \mathcal{L}(X,Y)$ конечномерно и коконечномерное подпространство $X_1 \subseteq X$ выбрано по условию $X_1 \cap \ker N = 0$. Тогда фредгольмовость оператора N равносильна тому, что подпространство $Y_1 = N(X_1)$ коконечномерно и сужение $N_1 = N|X_1$ обратимо $X_1 \to Y_1$. При этом* $\operatorname{ind} N = \operatorname{codim} X_1 - \operatorname{codim} Y_1$.
(c) *Оператор $N = 1 + T$, где $T \in \mathcal{T}_0(X)$, фредгольмов и его индекс равен нулю.*

Доказательство. (a) Имеют место очевидные соотношения $\ker N \subseteq \ker(N_1 N)$, $\operatorname{Im} N \supseteq \operatorname{Im}(NN_2)$. Первое из них означает конечномерность ядра $\ker N$. На основании теоремы 1.1.1(c) из второго соотношения следует, что образ $\operatorname{Im} N$ коконечномерен. Следовательно, оператор N фредгольмов.

(b) Если Y_1 коконечномерно, то по теореме 1.1.1(c) этим свойством обладает и подпространство $\operatorname{Im} N \supseteq Y_1$, так что оператор N фредгольмов.

Обратно, пусть N фредгольмов. По условию существует разложение $X = X_1 \oplus X_0$, $X_0 \supseteq \ker N$. Запишем $X_0 = X_0' \oplus \ker N$ и в разложениях (1.3.2) положим $X_{(1)} = X_1 \oplus X_0'$. Как было отмечено выше, оператор $N_1 = N|X_{(1)}$ обратим $X_{(1)} \to Y_{(1)}$, так что образ $\operatorname{Im} N = Y_{(1)}$ раскладывается в прямую сумму $Y_1 \oplus Y_0'$, где $Y_1 = N(X_1)$ и $Y_0' = N(X_0')$, причем размерности конечномерных пространств X_0' и Y_0' совпадают. Таким образом, подпространство Y_1 коконечномерно, оператор $N_| X_1$ обратим $X_1 \to Y_1$ и $\operatorname{codim} X_1 = \dim X_0' + \dim N$, $\operatorname{codim} Y_1 = \dim Y_0' + \operatorname{codim} N$. Вычитая из первого равенства второе, отсюда приходим и к формуле для индекса.

(c) Очевидно, ядро $X_1 = \ker T$ конечномерного оператора T коконечномерно и оператор $N = 1 + T$ действует на этом подпространстве как единичный. Поскольку $X_1 \cap \ker N = 0$, остается воспользоваться предложением (b) леммы с $Y_1 = X_1$. □

Следующий классический результат обобщает утверждение (c) леммы 1.3.1.

Теорема (Рисс—Шаудер)**.** *Оператор $N = 1 + T$, $T \in \mathcal{T}(X)$, фредгольмов и его индекс равен нулю.*

Доказательство. В нормированном пространстве $\ker N$ единичный оператор 1 совпадает с компактным $-T$, так что это пространство обладает свойством Больцано—Вейерштрасса и по теореме 1.1.2 конечномерно. Согласно теореме 1.2.2 конечномерно и ядро $\ker N^*$. Поэтому с учетом (1.2.13) остается убедиться, что подпространство $\operatorname{Im} N$ замкнуто в X.

Рассмотрим разложение $X = X_1 \oplus \ker N$, для которого, очевидно, $N(X_1) = \operatorname{Im} N$. Рассмотрим последовательность $x_n = z_n + Tz_n$, $z_n \in X_1$, сходящуюся к некоторому $x \in X$. Если последовательность z_n ограничена, то в силу компактности T существует сходящаяся подпоследовательность Tz_{n_k}. Тогда $z_{n_k} = x_{n_k} - Tz_{n_k}$ сходится к $z \in X_1$ и, следовательно, $x = z + Tz \in \operatorname{Im}(1 + T)$. Предположим, что последовательность z_n неограничена. Переходя к ее подпоследовательности, можно считать, что $|z_n| \to \infty$. Тогда $z_n' + Tz_n' \to 0$, $z_n' = z_n/|z_n|$. Рассуждая как выше, найдем последовательность z_{n_k}', сходящуюся к $z' \in X_1$, $|z'| = 1$. Но тогда в пределе $z' + Tz' = 0$, что противоречит определению X_1. Таким образом, пространство $\operatorname{Im} N$ замкнуто и оператор $N = 1 + T$ фредгольмов.

Доказательство равенства нулю его индекса откладываем до утверждения (d) нижеследующей теоремы, которая объединяет все основные свойства фредгольмовых операторов. □

Теорема 1.3.1.

(a) *Композиция двух фредгольмовых операторов $N \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $M \in \mathcal{L}(Y,Z)$ также фредгольмова, причем*
$$\operatorname{ind} MN = \operatorname{ind} M + \operatorname{ind} N. \tag{1.3.5}$$
(b) *Пусть операторы $N \in \mathcal{L}(X,Y)$ и $R \in \mathcal{L}(Y,X)$ таковы, что*
$$RN - 1 \in \mathcal{T}(X), \quad NR - 1 \in \mathcal{T}(Y). \tag{1.3.6}$$
Тогда операторы N и R фредгольмовы.
(c) *Множество фредгольмовых операторов открыто в $\mathcal{L}(X,Y)$, и* ind *как целочисленная функция постоянна на связных компонентах этого множества.*
(d) *Если оператор $N \in \mathcal{L}(X,Y)$ фредгольмов и $T \in \mathcal{T}(X,Y)$, то $N + T$ также фредгольмов и* $\operatorname{ind}(N + T) = \operatorname{ind} N$.

Доказательство. (a) Поскольку $\ker(MN) = N^{-1}(\ker M)$, ядро оператора MN конечномерно. Выберем коконечномерное подпространство X_1 по условию $X_1 \cap \ker(MN) = 0$. Тогда на основании леммы 1.3.1(b) подпространство $Y_1 = N(X_1)$ коконечномерно и, очевидно, $Y_1 \cap \ker M = 0$. Поэтому из тех же соображений подпространство $Z_1 = M(Y_1)$ коконечномерно, так что оператор MN фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} MN = \operatorname{codim} X_1 - \operatorname{codim} Z_1$. С другой стороны, аналогичным образом $\operatorname{ind} N = \operatorname{codim} X_1 - \operatorname{codim} Y_1$ и $\operatorname{ind} M = \operatorname{codim} Y_1 - \operatorname{codim} Z_1$, что приводит к равенству (1.3.5).

(b) Это утверждение непосредственно следует из леммы 1.3.1(a) и первой части теоремы Рисса—Шаудера.

(c) Пусть оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ фредгольмов и $R = N^{(-1)} \in \mathcal{L}(Y, X)$ фигурирует в (1.3.4). Как было отмечено, этот оператор фредгольмов и его индекс противоположен $\operatorname{ind} N$. Пусть $B \in \mathcal{L}(X, Y)$ и

$$|B|_{\mathcal{L}} < 1/|R|_{\mathcal{L}}.$$

Достаточно убедиться, что оператор $N + B$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(N + B) = \operatorname{ind} N$.

Очевидно, $|BR|_{\mathcal{L}} \leqslant |B|_{\mathcal{L}} |R|_{\mathcal{L}} < 1$. Как установлено при доказательстве теоремы 1.2.1, отсюда следует обратимость оператора $1 + BR$ в $\mathcal{L}(Y)$. Аналогичным образом обратим и оператор $1 + RB$ в $\mathcal{L}(X)$. Поэтому в соответствии с (1.3.4) можно записать

$$R(N + B) = 1 + RB + P_0 = (1 + RB)(1 + T_1), \quad T_1 = [1 + (1 + RB)^{-1} P_0],$$

$$(N + B)R = 1 + BR + Q_0 = (1 + BR)(1 + T_2), \quad T_2 = [1 + (1 + BT)^{-1} Q_0],$$

где операторы T_j конечномерны. На основании (b) и леммы 1.3.1(c) отсюда следует, что оператор $N + B$ фредгольмов, причем с учетом (1.3.5) индекс $\operatorname{ind}(N + B) + \operatorname{ind} R = 0$. Остается напомнить, что $\operatorname{ind} R = -\operatorname{ind} N$.

(d) Рассмотрим оператор $R = N^{(-1)} \in \mathcal{L}(Y, X)$, фигурирующий в (1.3.4). В силу (1.3.6) можно записать $R(N + T) = 1 + T_1$, $(N + T)R = 1 + T_2$ с некоторыми компактными операторами T_j, так что на основании (b) оператор $N + T$ фредгольмов. При каждом $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ оператор $N + \lambda T$ также фредгольмов, и в силу (c) его индекс не зависит от λ. Следовательно, $\operatorname{ind}(N + T) = \operatorname{ind} N$. $\square$

Из теоремы следует, что фредгольмовы операторы переводят коконечномерные подпространства в коконечномерные. В самом деле, если оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ фредгольмов и подпространство $X_1 \subseteq X$ коконечномерно, то $N(X_1)$ совпадает с образом оператора NP, где P проектирует X на X_1. Поскольку проектор $1 - P$ конечномерен, оператор P фредгольмов, и, следовательно, этим свойством обладает и NP.

По определению операторы N и R со свойством (1.3.6) называются обратимыми по модулю $\mathcal{T}$. По отношению к N оператор R называют также регуляризатором. Совместно с (1.3.4) теорема 1.3.1(b) утверждает, что фредгольмовость оператора N равносильна его обратимости по модулю $\mathcal{T}$.

Можно также ввести понятия односторонней обратимости по модулю $\mathcal{T}$. Однако обратимость оператора N слева и справа по модулю $\mathcal{T}$ (т. е. наличие его левого и правого регуляторов) влечет совпадение этих регуляризаторов (по модулю $\mathcal{T}$). В самом деле, если $R_1 N \sim 1$, $NR_2 \sim 1$, где $\sim$ означает равенство по модулю $\mathcal{T}$, то $R_2 \sim R_1 N R_2 \sim R_1$.

По определению оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ является конечномерным расширением $N_1 \in \mathcal{L}(X_1, Y)$, если $X_1 \subseteq X$ является подпространством конечной коразмерности и $N_1 x = Nx$ для $x \in X_1$. В этом случае говорим также, что оператор N_1 представляет собой конечномерное сужение N. Эти операторы фредгольмово эквивалентны и их индексы связаны соотношением

$$\operatorname{ind} N = \operatorname{ind} N_1 + \operatorname{codim} X_1. \tag{1.3.7}$$

В самом деле, пусть $X = X_1 \oplus X_0$ и оператор $\widetilde{N}$ получен расширением N_1 по условию $\widetilde{N}|X_0 = 0$. Тогда по отношению к N_1 и $\widetilde{N}$ соотношение (1.3.8) очевидно. С другой стороны, разность $N - \widetilde{N}$ является конечномерным оператором, и остается воспользоваться теоремой 1.3.1(d).

Наряду с понятиями сужения и расширения оператора $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ встречается и его конечномерное возмущение. Так называется оператор $\tilde{N} \in \mathcal{L}(X \times \mathbb{C}^m, Y \times \mathbb{C}^n)$, в каноническом представлении которого в виде 2×2-матрицы оператор $\tilde{N}_{11} = N$. В силу теоремы 1.3.1(d) эти операторы фредгольмово эквивалентны и $\operatorname{ind} \tilde{N} = \operatorname{ind} N + m - n$.

В самом деле, $\tilde{N}$ отличается от оператора

$$\tilde{N^0} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(X \times \mathbb{C}^m, Y \times \mathbb{C}^n)$$

конечномерным слагаемым, а последний, очевидно, фредгольмово эквивалентен с N.

Из теоремы также следует, что если произведение $N_1 N_2$ двух операторов и один из его сомножителей фредгольмовы, то второй сомножитель есть также фредгольмов оператор. Из этих же соображений фредгольмовость N^k для некоторого натурального k влечет и фредгольмовость N. Еще одно следствие такого рода выделим особо.

Лемма 1.3.2. *Пусть $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, так что оператор $N \in \mathcal{L}(X)$ представляется $n \times n$-матрицей (N_{ij}), $N_{ij} \in \mathcal{L}(X_j, X_i)$. Пусть эта матрица треугольна по модулю $\mathcal{T}$ (например, нижне-треугольна, так что $N_{ij} \in \mathcal{T}$ при $i < j$). Тогда, если диагональные элементы $N_{ii} \in \mathcal{L}(X_i)$ фредгольмовы, то оператор N фредгольмов и его индекс*

$$\operatorname{ind} N = \sum_1^n \operatorname{ind} N_{ii},$$

причем регуляризатор $R = (R_{ij})$ оператора N также нижне-треуголен по модулю $\mathcal{T}$.

Если матрица N диагональна по модулю $\mathcal{T}$, то фредгольмовость N влечет фредгольмовость его диагональных элементов N_{ii}.

Доказательство. Достаточно доказать лемму для $n = 2$. В общем случае достаточно записать $X = X_1 \times (X_2 \times \cdots \times X_n)$ и воспользоваться индукцией по n. Итак, пусть

$$N = \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix},$$

где N_{ii} фредгольмовы и $N_{12} \in \mathcal{T}$. Если R_i есть регуляризатор N_{ii}, то

$$\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} N \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ R_2 N_{21} & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sim$ означает равенство по модулю $\mathcal{T}$. Оператор в правой части этого соотношения обратим, и обратный имеет тот же вид с заменой $R_2 N_{21}$ на $-R_2 N_{21}$. Поэтому оператор N фредгольмов, и его индекс равен $\operatorname{ind} N = -\operatorname{ind} R_1 - \operatorname{ind} R_2 = \operatorname{ind} N_{11} + \operatorname{ind} N_{22}$. Тем самым первая часть леммы доказана.

Пусть теперь оператор N фредгольмов и

$$N \sim \begin{pmatrix} N_{11} & 0 \\ 0 & N_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда для его регуляризатора $R = (R_{ij})$ имеем соотношения $NR \sim (N_{ii} R_{ij}) \sim 1$ и $RN \sim (R_{ij} N_{jj}) \sim 1$, откуда $N_{ii} R_{ii} \sim R_{ii} N_{ii} \sim 1$. Следовательно, операторы N_{ii} фредгольмовы. $\square$

Рассмотрим вопрос, когда коядро $\operatorname{coker} N$ фредгольмового оператора N содержится в некотором банаховом пространстве Y', вложенном в Y^*. Пусть банаховы пространства X и Y наделены структурой двойственности $(X, X', \langle , \rangle)$ и $(Y, Y', \langle , \rangle)$ соответственно (в смысле данного в пункте 1.2 определения), так что имеем вложения $X' \subseteq X^*$ и $Y' \subseteq Y^*$. Условимся говорить, что оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ допускает союзный $N' \in \mathcal{L}(Y', X')$, если

$$\langle Nx, y \rangle = \langle x, N'y \rangle \tag{1.3.8}$$

тождественно по $x \in X$, $y \in Y'$. В силу невырожденности форм союзный оператор N', если он существует, определен по N однозначно. Сам термин союзного оператора идет, видимо, от Мусхелишвили [36]. Ясно, что вместе с парой операторов N_1, N_2 допускает союзный оператор и их произведение $N_1 N_2$, причем $(N_1 N_2)' = N_2' N_1'$. Очевидно, по отношению к каноническим вложениям $X' \subseteq X^*$ и $Y' \subseteq Y^*$ оператор N допускает союзный N' тогда и только тогда, когда сопряженный оператор N^* ограничен в паре пространств $Y^* \to X^*$ и $Y' \to X'$ в смысле определения из пункта 1.2, причем $N' = N^* | Y'$.

Условимся говорить, что оператор N союзно фредгольмов, если он допускает союзный N', оба оператора N, N' фредгольмовы и выполняются соотношения

$$\operatorname{coker} N = \ker N', \quad \operatorname{coker} N' = \ker N. \tag{1.3.9}$$

Ясно, что в этом случае индексы операторов N и N' противоположны. В действительности последнее свойство полностью описывает союзно фредгольмовы операторы.

Теорема 1.3.2.

(a) *Оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ союзно фредгольмов тогда и только тогда, когда оба оператора N, N' фредгольмовы и их индексы противоположны.*

(b) *Пусть операторы $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ и $R \in \mathcal{L}(Y, X)$ удовлетворяют условиям* (a), *причем R является регуляризатором N, а R' — регуляризатором N'. Тогда оба оператора N, R союзно фредгольмовы.*

Доказательство. (a) Пусть оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ фредгольмов и допускает союзный $N' \in \mathcal{L}(Y', X')$, который также фредгольмов. Утверждается, что тогда

$$\operatorname{ind} N + \operatorname{ind} N' \leqslant 0. \tag{1.3.10}$$

В самом деле, в силу (1.3.8) имеем соотношения

$$\ker N' \subseteq \operatorname{coker} N, \quad \ker N \subseteq \operatorname{coker} N',$$

из которых, в частности,

$$\dim N' \leqslant \operatorname{codim} N, \quad \dim N \leqslant \operatorname{codim} N'. \tag{1.3.11}$$

В свою очередь эти неравенства приводят к (1.3.9).

В силу невырожденности билинейных форм, определяющих двойственности, равенство в (1.3.10) приводит к равенствам в (1.3.11) и, следовательно, к соотношениям (1.3.9).

(b) По условию $\operatorname{ind} N + \operatorname{ind} R = \operatorname{ind} N' + \operatorname{ind} R' = 0$. С другой стороны, для R имеем аналогичное (1.3.10) неравенство, что возможно, только когда $\operatorname{ind} N = -\operatorname{ind} N'$ и $\operatorname{ind} R = -\operatorname{ind} R'$. Поэтому остается применить к этим операторам предложение (a) теоремы. □

Рассмотрим канонические двойственности (X, X^*) и (Y, Y^*) с соответствующими билинейными формами (1.2.9). Если оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ фредгольмов и $R \in \mathcal{L}(Y, X)$ является его регуляризатором, то в силу теорем 1.2.3 и 1.3.1 оператор R^* является регуляризатором N^*. Поэтому на основании теоремы 1.3.2(b) индексы операторов N и N^* противоположны:

$$\operatorname{ind} N^* = -\operatorname{ind} N. \tag{1.3.12}$$

Понятие фредгольмовости можно ввести и для операторов, действующих в семействе банаховых пространств. Пусть в обозначениях пункта 1.2 оператор $N \in \mathcal{L}(X_i, Y_i; i \in I)$. По определению этот оператор фредгольмов, если его ядро $\ker N$ конечномерно и содержится в $\bigcap\limits_i X_i$, его коядро $\operatorname{coker} N$ коконечномерно и содержится в $\bigcap\limits_i Y_i^*$, и имеют место соотношения

$$N(X_i) = Y_i \cap (\operatorname{coker} N)^\perp, \quad i \in I. \tag{1.3.13}$$

Разность $\operatorname{ind} N = \dim N - \operatorname{codim} N$ естественно назвать индексом оператора N.

Из этого определения непосредственно следует, что $\ker N_i = \ker N$, $\operatorname{coker} N_i = \operatorname{coker} N$ и, в частности, $\operatorname{ind} N_i = \operatorname{ind} N$ для всех $i \in I$. Верно и обратное: если операторы N_i фредгольмовы для всех $i \in I$, а ядро $\ker N_i$ и коядро $\operatorname{coker} N_i$ не зависят от i, то оператор N фредгольмов. Еще два почти очевидных следствия определения выделим особо.

Лемма 1.3.3. *Пусть оператор $N \in \mathcal{L}(X_i, Y_i; i \in I)$ фредгольмов. Тогда при $X_i \subseteq X_j$ любое решение $x \in X_j$ уравнения $Nx = y$ с правой частью $y \in X_i$ также принадлежит X_i. Кроме того, если форма $(y, y^*) = y^*(y)$ невырождена на произведении $(\bigcup\limits_i Y_i) \times (\bigcap\limits_i Y_i^*)$, то найдется такое конечномерное подпространство $Z \subseteq \bigcap\limits_i Y_i$ размерности $\operatorname{codim} N$, что*

$$Y_i = Z \oplus \operatorname{Im} N_i, \quad i \in I. \tag{1.3.14}$$

Доказательство. Пусть $X_i \subseteq X_j$ и $x \in X_j$, $Nx = y \in Y_i$. Тогда $y \perp \operatorname{coker} N$ и на основании (1.3.13) существует вектор $x_1 \in X_i$, для которого $Nx_1 = y$. Но тогда $x_0 = x - x_1 \in \ker N \subseteq \bigcap\limits_i X_i$ и потому $x = x_0 + x_1 \in X_i$.

Пусть выполнены условия второй части леммы и вектора $y_1^*, \ldots, y_n^*$ образуют базис $\operatorname{coker} N$. Тогда аналогично лемме 1.2.2 легко доказать, что найдутся вектора $z_1, \ldots, z_n \in \bigcap\limits_i X_i$, биортогональные этому базису. Пусть пространство Z натянуто на эти вектора. Если некоторый вектор $z = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ принадлежит образу оператора N_i для некоторого i, то он ортогонален всем $z_1, \ldots, z_n$, что возможно только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Таким образом, $Z \cap \operatorname{Im} N_i = 0$, что вместе с равенством $\dim Z = \operatorname{codim} N_i$ приводит к (1.3.14). □

Имеется простой критерий фредгольмовости операторов, действующих в семействе банаховых пространств, позволяющий распространить на эти операторы теорему 1.3.1.

Теорема 1.3.3.

(a) *Оператор $N \in \mathcal{L}(X_i, Y_i; i \in I)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $N_i = N|X_i \in \mathcal{L}(X_i, Y_i)$ фредгольмов при каждом i и $\operatorname{ind} N_i$ не зависит от i. В частности, оператор $1 + K$, где $K \in \mathcal{T}(X_i; i \in I)$, фредгольмов, и его индекс равен нулю.*

(b) *Если операторы $N \in \mathcal{L}(X_i, Y_i; i \in I)$ и $M \in \mathcal{L}(Y_i, Z_i; i \in I)$ фредгольмовы, то этим свойством обладает и оператор MN, причем $\operatorname{ind}(MN) = \operatorname{ind} N + \operatorname{ind} M$.*

(c) *Если оператор $N \in \mathcal{L}(X_i, Y_i; i \in I)$ фредгольмов и $T \in \mathcal{T}(X_i, Y_i; i \in I)$, то оператор $N + T$ фредгольмов и $\operatorname{ind}(N + T) = \operatorname{ind} N$.*

(d) *Пусть операторы $N \in \mathcal{L}(X_i, Y_i; i \in I)$ и $R \in \mathcal{L}(Y_i, X_i; i \in I)$ таковы, что RN и NR фредгольмовы. Тогда фредгольмовы и операторы N, R. В частности, если*

$$RN - 1 \in \mathcal{T}(X_i; i \in I), \quad NR - 1 \in \mathcal{T}(Y_i; i \in I),$$

то операторы N и R фредгольмовы, и их индексы противоположны.

Доказательство. (a) Пусть все операторы N_i фредгольмовы, и их индексы не зависят от i. Достаточно убедиться, что ядро и коядро операторов N_i не зависят от i, т. е.

$$\ker N_i = \ker N_j, \quad \operatorname{coker} N_i = \operatorname{coker} N_j \tag{1.3.15}$$

для любой пары $i, j \in I$. В соответствии с (1.1.8), не ограничивая общности, можно считать, что $X_i \subseteq X_j$. В этом случае и $Y_i \subseteq Y_j$, и $Y_j^* \subseteq Y_i^*$. Поэтому

$$\ker N_i \subseteq \ker N_j, \quad \operatorname{coker} N_j \subseteq \operatorname{coker} N_i$$

и, в частности, обе величины $s = \dim N_j - \dim N_i$ и $s' = \operatorname{codim} N_i - \operatorname{codim} N_j$ неотрицательны. Но по условию $0 = \operatorname{ind} N_j - \operatorname{ind} N_i = s + s'$, так что $s = s' = 0$, что приводит к соотношениям (1.3.15).

В обратную сторону предложение теоремы очевидно.

(b)–(d) Все утверждения являются непосредственными следствиями (a) и теоремы 1.2.1. □

Отметим, что в той или иной форме теоремы 1.3.2, 1.3.3 встречаются во многих работах (см., например, Дудучава [17], Солдатов [49]).

До сих пор все рассмотрения велись по отношению к векторным пространствам над полем скаляров $\mathbb{C}$. Понятие фредгольмовости можно ввести и по отношению к $\mathbb{R}$-линейным операторам. Заметим, что $\mathbb{C}$-линейные фредгольмовы операторы можно рассматривать и как $\mathbb{R}$-линейные операторы, нужно лишь иметь в виду, что при переходе от $\mathbb{C}$ к $\mathbb{R}$ размерности удваиваются.

Типичная ситуация возникает, когда банахово пространство X снабжено $\mathbb{R}$-линейным оператором $J \in \mathcal{L}(X)$ со свойствами

$$J^2 = 1, \quad J(ix) = -iJx, \; x \in X, \tag{1.3.16}$$

где $i \in \mathbb{C}$ означает мнимую единицу. Например, если элементами X служат комплексные функции $\varphi(t)$, $t \in E$, то условиям (1.3.16) удовлетворяет оператор комплексного сопряжения $J : \varphi(t) \to \overline{\varphi(t)}$. По этой причине J называем оператором комплексного сопряжения и в общем случае.

Элементы $x \in X$, для которых $Jx = x$, назовем вещественными. Они образуют в X замкнутое подпространство (над полем $\mathbb{R}$), которое обозначим $X_{\mathbb{R}}$. Само пространство X раскладывается над полем $\mathbb{R}$ в прямую сумму $X_\mathbb{R} \oplus iX_\mathbb{R}$. В этой связи пару (X, J) называем комплексной структурой, которой наделено пространство X.

В дальнейшем оператор комплексного сопряжения для различных комплексных структур будем обозначать одним и тем же символом J, за исключением тех случаев, когда это приводит к путанице.

Пусть банаховы пространства X и Y наделены комплексной структурой, тогда в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ ограниченных $\mathbb{C}$-линейных операторов можно также ввести комплексную структуру, в которой оператором комплексного сопряжения служит отображение $N \to JNJ$ (напомним, что соответствующие сомножители J здесь действуют в пространствах X и Y). Необходимые условия (1.3.16) для этого отображения очевидным образом выполняются, для него примем специальное обозначение

$$\overline{N} = JNJ. \tag{1.3.17}$$

В частности, оператор N веществен относительно этой комплексной структуры, если $\overline{N} = N$ или, что равносильно, операторы N и J коммутируют:

$$NJ = JN. \tag{1.3.18}$$

В этом случае его сужение на $X_\mathbb{R}$ определяет $\mathbb{R}$-линейный оператор $X_\mathbb{R} \to Y_\mathbb{R}$, который обозначим $N_\mathbb{R}$.

Теорема 1.3.4.

(a) *Пусть $\mathbb{C}$-линейный оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ веществен относительно комплексных структур в пространствах X и Y. Тогда он фредгольмово эквивалентен с оператором $N_\mathbb{R} \in \mathcal{L}(X_\mathbb{R}, Y_\mathbb{R})$, причем их индексы* (*над соответствующими полями*) *совпадают, а* $\ker N_\mathbb{R}$ *состоит из вещественных элементов ядра* $\ker N$.

(b) *Пусть заданы $\mathbb{C}$-линейные операторы $N_1, N_2 \in \mathcal{L}(X)$ и*

$$N_* = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \\ \overline{N_2} & \overline{N_1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(X \times X).$$

Тогда $\mathbb{R}$-линейный оператор $N = N_1 + N_2 J$ фредгольмово эквивалентен $\mathbb{C}$-линейному оператору N_* и их индексы совпадают.

Доказательство. (a) Относительно канонических разложений $X = X_\mathbb{R} \oplus iX_\mathbb{R} \simeq X_\mathbb{R}^2$ и аналогично для Y оператор N представляется в виде 2×2-матрицы с элементами $N_{ij} \in \mathcal{L}(X_\mathbb{R}, Y_\mathbb{R})$. Если N веществен, то в силу (1.3.18) эта матрица диагональна и $N_{11} = N_{22} = N_\mathbb{R}$. Поэтому остается воспользоваться леммой 1.3.2.

(b) Матрица

$$J_* = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix}$$

определяет в пространстве X^2 комплексную структуру, относительно которой оператор N_* веществен, т. е. $N_* J_* = J_* N_*$. Очевидно, $(X^2)_\mathbb{R}$ состоит из элементов $(x, \bar{x})$, $x \in X$, при этом $\mathbb{R}$-линейный оператор $Lx = (x, \bar{x})$ осуществляет изоморфизм X на $(X^2)_\mathbb{R}$. Поскольку

$$L(N_1 + N_2 J) = N_* L,$$

операторы $N = N_1 + N_2 J$ и $(N_*)_\mathbb{R}$ фредгольмово эквивалентны и их индексы совпадают, то остается к применить $(N_*)_\mathbb{R}$ утверждение (a) теоремы. □

1.4. Банаховы алгебры

Пусть в банаховом пространстве A задано ограниченное билинейное отображение $A \times A \to A$, обозначаемое $(x, y) \to xy$, которое удовлетворяет условию ассоциативности $x(yz) = (xy)z$. Тогда пространство A вместе с этим билинейным отображением как операцией умножения называется банаховой алгеброй. В частности, по отношению к операциям сложения и умножения A является кольцом. Алгебра A коммутативна, если $xy = yx$ для любых $x, y \in A$.

Согласно пункту 1.1 условие ограниченности операции умножения заключается в оценке

$$|xy| \leqslant C|x||y|, \tag{1.4.1}$$

где $|\cdot|$ означает норму в A и $C > 0$ не зависит от $x, y \in A$.

В силу (1.2.2) примером A может служить банахово пространство $\mathcal{L}(X)$ всех ограниченных в X операторов. Другой пример доставляет алгебра $A = C(K)$ всех непрерывных и ограниченных на топологическом пространстве K функций, снабженная поточечными операциями и sup-нормой. Исходя из банаховых алгебр $A_1, \dots, A_n$, можно ввести также банахову алгебру прямого произведения $A_1 \times \dots \times A_n$ с покомпонентными операциями.

Еще один пример дает банахова алгебра $A^{n\times n}$, состоящая из $n \times n$-матриц $a = \{a_{ij}\}_1^n$ с элементами $a_{ij} \in A$ и снабженная обычной операцией матричного умножения

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}. \tag{1.4.2}$$

Например, таковой является алгебра $C^{n\times n}(K)$ непрерывных и ограниченных $n\times n$-матриц-функций на K. Общее соглашение, принятое в начале пункта 1.1, распространим и на банаховы алгебры $A^{n\times n}$ матриц-функций. Если это не приводит к путанице, данные алгебры будем обозначать тем же символом A, что и для скалярных функций.

Операция (1.4.2) естественным образом распространяется и на прямоугольные матрицы $a \in A^{m\times n}$ и $b \in A^{n\times l}$, ее результатом будет матрица $ab \in A^{m\times l}$. Если заданы разбиения $m = m_1 + \dots + m_k$, $n = n_1 + \dots + n_s$, то матрицу $a \in A^{m\times n}$ можно записать в блочном виде

$$a = \begin{pmatrix} a_{(11)} & \dots & a_{(1s)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{(k1)} & \dots & a_{(ks)} \end{pmatrix} \tag{1.4.3}$$

с элементами $a_{(ij)} \in A^{m_i\times n_j}$. В случае $k = 1$ или $s = 1$ соответствующие блочные строку и столбец записываем

$$a = (\overset{n_1}{a_{(1)}} \overset{\cdots}{\dots} \overset{n_s}{a_{(s)}}), \quad a =\downarrow (\overset{m_1}{a_{(1)}} \overset{\cdots}{\dots} \overset{m_k}{a_{(k)}}). \tag{1.4.4}$$

При необходимости аналогичное указание порядков используем и в общем случае (1.4.3). Если блочная матрица (1.4.3) квадратна, т. е. $k = s$, и ее внедиагональные блочные элементы равны 0, то эту матрицу называем блочно диагональной и записываем в форме $a = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{kk})$.

Рассмотрим некоторые общие понятия, связанные с банаховой алгеброй A. Элемент $e \in A$ называется единицей, если $xe = ex = x$ для любого $x \in A$. Единица алгебры (если она существует) единственна и в дальнейшем обозначается 1 (как и в случае нулевого вектора $0 \in A$, отличие этого обозначения от единицы поля скаляров $\mathbb{C}$ будет видно из контекста). При необходимости зависимость 1 от A указываем обозначением $1 = 1_A$. Например, в случае алгебры $A^{n\times n}$ единицей служит единичная матрица $(1_A \delta_{ij})$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

В банаховой алгебре A с единицей можно ввести эквивалентную норму $|\,|'$, для которой постоянная C в оценке (1.4.1) равна 1, т. е. $|xy|' \leqslant |x|'|y|'$, $x, y \in A$.

Для доказательства с каждым элементом $x \in A$ свяжем линейный оператор $L(x)$, действующий по формуле $L(x)z = xz$, $z \in A$. В силу (1.4.1) этот оператор ограничен в A. Поскольку $L(xy) = L(x)L(y)$, норма в A, определенная равенством $|x|' = |L(x)|_{\mathcal{L}}$, обладает указанным свойством. Неравенство (1.4.1), записанное в форме $|L(x)y| \leqslant C|x||y|$, означает, что $|x|' \leqslant C|x|$. С другой стороны, равенство $x = L(x)1_A$ влечет противоположную оценку $|x| \leqslant |1_A||x|'$.

Подпространство $A_0 \subseteq A$ образует подалгебру A, если $xy \in A_0$ для любых $x, y \in A_0$. Единица 1 может как входить, так и не входить в A_0. Ясно, что замыкание $\overline{A}_0$ есть также подалгебра.

Подалгебра $J \subseteq A$ является (двусторонним) идеалом A, если $xy \in J$, когда один из сомножителей x или y принадлежит J. Если идеал J собственный, т. е. не совпадает с A, то, очевидно, единица $1 \notin J$. Замыкание идеала является, очевидно, также идеалом.

Ограниченный линейный оператор $\psi : A \to B$ называется гомоморфизмом банаховых алгебр, если

$$\psi(xy) = (\psi x)(\psi y), \quad x, y \in A, \tag{1.4.5}$$

причем $\psi(1_A) = 1_B$ в случае, когда обе единицы существуют. Ясно, что ядро $\ker\psi$ является замкнутым идеалом A.

Банахово пространство X есть A-модуль, если задано ограниченное билинейное отображение $A \times X$, также называемое умножением и обозначаемое $(a, x) \to ax$, удовлетворяющее условию ассоциативности $a(bx) = (ab)x$, $x \in X$. Кроме того, для алгебры A с единицей должно быть $1x = x$. Очевидно, это билинейное отображение определяет гомоморфизм банаховых алгебр $R : A \to \mathcal{L}(X)$ по правилу $R(a)x = ax$. Верно и обратное: наличие такого гомоморфизма задает в X структуру A-модуля.

Например, каждое пространство X является $\mathcal{L}(X)$-модулем с соответствующей операцией умножения. Отвечающий этому модулю гомоморфизм R является тождественным отображением. Другой пример доставляет банахово пространство A^n прямого произведения, оно является $A^{n\times n}$-модулем. Сама банахова алгебра по отношению к умножению может рассматриваться как A-модуль, что уже было использовано при построении эквивалентной нормы в связи с неравенством (1.4.1).

Обратимся к случаю произвольной банаховой алгебры A с единицей. Элемент $x \in A$ называется обратимым, если существует такой $y \in A$, что $xy = yx = 1$. Элемент y с этими свойствами определяется однозначно по x, обозначается x^{-1} и называется обратным к элементу x.

Систематическое изложение теории банаховых алгебр можно найти в книге Рудина [46]. Напомним, что ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ с элементами $a_n \in A$ абсолютно сходится, если $\sum |a_n| < \infty$. В силу полноты банахова пространства A исходный ряд действительно сходится.

Лемма 1.4.1. *Если* $|x| \leqslant (2C)^{-1}$, *где* $C \geqslant 1$ *фигурирует в* (1.4.1), *то элемент* $1 - x$ *обратим, и обратный к нему определяется абсолютно сходящимся рядом*

$$(1 - x)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0} x^n \tag{1.4.6}$$

с оценкой норм

$$|(1 - x)^{-1} - 1| \leqslant (C|e| + 1)|x|,$$

где $e = 1$ *есть единичный элемент алгебры.*

Доказательство. При $|x| \leqslant (2C)^{-1}$ имеем:

$$|x^n| \leqslant C^{n-1}|x|^n \leqslant C^{-1}2^{-n}, \quad n \geqslant 1,$$

так что ряд в правой части (1.4.6) абсолютно сходится и норма его суммы y не превосходит

$$|y| \leqslant |e| + \frac{1}{C}\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2^n} = |e| + \frac{1}{C}.$$

То, что y является обратным элементом к $1 - x$, вытекает из почленного умножения этого ряда на $1 - x$. В частности, $1 = y - xy$ и $|y - 1| \leqslant C|x||y| \leqslant (C|e| + 1)|x|$. □

Обозначим $G(A)$ множество всех обратимых в A элементов, очевидно, оно является группой по умножению. Связную компоненту этого множества, содержащую единицу 1, обозначим $G_0(A)$ и назовем единичной компонентой группы $G(A)$.

Теорема 1.4.1.

(a) *Множество* $G(A)$ *всех обратимых в* A *элементов открыто, и отображение* $x \to x^{-1}$ *этого множества на себя непрерывно.*

(b) *Единичная компонента* $G_0(A)$ *открыта в* A *и является инвариантной подгруппой группы* $G(A)$.

(c) *Пусть* $V \subseteq G_0(A)$ *— некоторая окрестность единицы* 1. *Тогда любой* $x \in G_0(A)$ *представим в виде конечного произведения элементов из* $V \cup V^{-1}$, *где* $V^{-1} = \{x^{-1},\ x \in V\}$.

Доказательство. (a) Пусть $x_0 \in G(A)$ и $|y| \leqslant (2C^2|x_0|)^{-1}$. Тогда $x_0^{-1} - y = x_0^{-1}(1 - x_0y)$ и на основании леммы 1.4.1 элемент $(1 - x_0y)$, а, значит, и $x_0^{-1} - y$ обратимы. Поэтому множество $G(A)$ открыто. Из этих же соображений $y \to 0$ в A влечет $x_0^{-1} - y \to 0$, так что отображение $x \to x^{-1}$ непрерывно.

(b) В банаховом пространстве каждое связное открытое множество D линейно связно. Последнее означает, что для любых двух точек $x_0, x_1 \in D$ существует такое непрерывное отображение $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, со значениями в D, что $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$. В этом случае говорим также, что x_0 и x_1 можно соединить путем в D.

Возвращаясь к открытому множеству $G(A)$ обратимых в A элементов, рассмотрим его связную компоненту $G_0(A)$, содержащую 1. Как отмечено выше, открытое связное множество $G_0(A)$ линейно связно. В частности, любую его точку x можно соединить путем с 1, т. е. существует такое непрерывное отображение $x(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1$ со значениями в $G(A)$, что $x(0) = 1,\ x(1) = x$. Поскольку вместе с $x(t)$ непрерывна и функция $x^{-1}(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1$, обратный элемент $x^{-1} \in G_0(A)$. Из тех же соображений $a^{-1}xa \in G_0(A)$ для любого $a \in G(A)$. Аналогично убеждаемся, что $xy \in G_0(A)$ для $x, y \in G_0(A)$. Таким образом, $G_0(A)$ является инвариантной подгруппой $G(A)$ и одновременно связной топологической группой.

(c) Пусть D состоит из всех конечных произведений элементов, о которых идет речь в теореме. Очевидно, D есть открытое подмножество $G_0(A)$, содержащее V. Утверждается, что оно относительно замкнуто в $G_0(A)$, т. е. каждая предельная точка $x_0 \in \overline{D} \cap G_0(A)$ принадлежит D.

В самом деле, по условию для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $x \in D$, что $x_0 = x + y,\ |y| < \varepsilon$. Поскольку V — окрестность 1, то $1 - x_0^{-1}y \in V$ для достаточно малого ε. Следовательно, $x_0 = x(1 - x_0^{-1}y)^{-1} \in D$. Таким образом, множество D одновременно открыто и замкнуто в $G_0(A)$ и в силу связности последнего отсюда $D = G_0(A)$. □

Согласно (1.4.5) гомоморфизм $\psi : A \to B$ банаховых алгебр обратимые элементы переводит в обратимые. Точно так же $x \in G_0(A)$ влечет $\psi x \in G_0(B)$. Следующая теорема показывает, что обращение обоих этих свойств осуществляется одновременно.

Теорема 1.4.2. *Пусть задан гомоморфизм $\psi : A \to B$ банаховых алгебр, образ которого $\psi(A)$ плотен в B, причем обратимость x в A равносильна обратимости ψx в B. Тогда и $x \in G_0(A)$ равносильно $\psi x \in G_0(B)$, т. е.*

$$\psi^{-1}[G_0(B)] = G_0(A). \tag{1.4.7}$$

Доказательство. Рассмотрим множества

$$U_A = \{x \in A \,|\, \lambda - x \in G(A) \quad \text{при} \quad |\lambda| \geqslant 1\}, \quad V_A = \{1 - x \,|\, x \in U_A\}. \tag{1.4.8}$$

Согласно лемме 1.4.1 множество U_A содержит шар $\{|x| \leqslant (2C)^{-1}\}$ и, значит, является окрестностью нуля. Кроме того, оно связно, поскольку с каждой своей точкой x содержит и отрезок $[0, x] = \{tx \,|\, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Следовательно, множество V_A связно, содержится в $G(A)$ и является окрестностью единицы. В силу связности оно в действительности содержится в $G_0(A)$ и потому может служить окрестностью, о которой идет речь в теореме 1.4.1(c).

Пусть U_B и V_B определяется аналогично (1.4.8) по отношению к B. Из определения (1.4.8) видно, что

$$\psi^{-1}(V_B) = V_A. \tag{1.4.9}$$

С помощью теоремы 1.4.1(c) отсюда уже легко вывести (1.4.7). Пусть $\psi a \in G_0(B)$, так что $\psi a = b_1 \cdots b_n$, где каждое b_j принадлежит $V_B \cup V_B^{-1}$. Поскольку образ $\psi(A) = \operatorname{Im}\psi$ плотен в B и множество $V_B \cup V_B^{-1}$ открыто, найдутся такие $a_j \in A$, что $\psi a_j \in V_B \cup V_B^{-1}$ и $(b_1 \cdots b_n)^{-1}\psi(a_1 \cdots a_n) \in V_B$. В силу (1.4.9) элементы $a_j \in V_A \cup V_A^{-1}$, так что $\psi(a_1 \cdots a_n) = (\psi a) \cdot b,\ b \in V_B$. Опять пользуясь (1.4.9), получим $(a_1 \cdots a_n)a^{-1} \in V_A$. Следовательно, $a \in G_0(A)$, что завершает доказательство (1.4.7). □

Особо отметим случай, когда роль ψ в теореме играет вложение $A \subseteq B$. Подалгебру A, условие обратимости в которой совпадает с обратимостью в B, часто называют наполненной [40].

В общем случае в качестве B может выступать, например, алгебра $C = C^{n \times n}(K)$ всех непрерывных на компакте K матриц-функций $x(t)$. Условием обратимости $x(t)$, очевидно, служит $\det x(t) \neq 0,\ t \in K$. Принадлежность $x(t)$ группе G_0 определяется возможностью выбора непрерывной на K ветви логарифма $\ln \det x(t)$.

Теорема 1.4.2 принадлежит автору [48], она дает описание $G_0(A)$ в тех случаях, когда аналогичное описание $G_0(B)$ уже известно. Например, в качестве B может выступать алгебра $C = C^{n \times n}(K)$ всех непрерывных на компакте K матриц-функций $x(t)$. Условием обратимости $x(t)$, очевидно, служит $\det x(t) \neq 0,\ t \in K$. Принадлежность $x(t)$ группе G_0 определяется возможностью выбора непрерывной на K ветви логарифма $\ln \det x(t)$. Хорошо известны следующие два важных случая.

1) Если компакт K односвязен, то группа $G(C)$ связна и, следовательно, совпадает с $G_0(C)$.

2) Пусть компакт K гомеоморфен окружности, тогда на группе $G(C)$ обратимых элементов можно ввести целочисленную функцию

$$\operatorname{Ind}_K x = \frac{1}{2\pi i} \ln \det x(t)\big|_K, \tag{1.4.10}$$

где справа берется приращение непрерывной ветви $\ln \det x$ на контуре K вдоль одного из двух выбранного направления. В этих обозначениях единичная компонента $G_0(C)$ определяется условием $\operatorname{Ind} x = 0$.

В этой связи удобно ввести следующее понятие. Непрерывная комплексная функция χ на группе $G(A)$ называется характером, если она обладает групповыми свойствами

$$\chi(xy) = \chi(x) + \chi(y), \quad \chi(1) = 0. \tag{1.4.11}$$

Особую роль играют целочисленные характеры на $G(A)$, которые в силу непрерывности сохраняют постоянное значение на каждой связной компоненте множества $G(A)$ и, следовательно, могут быть отождествлены с гомоморфизмами $\tilde{\chi}$ из фактор-группы G/G_0 в аддитивную группу $\mathbb{Z}$. Примером целочисленного характера служит функция (1.4.10) для алгебры C непрерывных на окружности K матриц-функций. Свойства (1.4.11) для нее проверяются непосредственно. В случае, когда компакт K является отрезком прямой, аналогичная функция (1.4.10) представляет собой комплекснозначный характер. В обоих случаях функция Ind называется индексом Коши.

Нижеследующая теорема доставляет другой типичный пример целочисленного характера. Предварительно условимся в терминологии. Пусть J — замкнутый двусторонний идеал A. Тогда в банаховом фактор-пространстве A/J можно ввести корректно операцию умножения $(x+J)(y+J) = xy + J$, относительно которой это пространство является банаховой алгеброй. Удобно все соответствующие понятия в A/J выражать в терминах элементов алгебры A «по модулю J». Например, выражение "$x = y$ по модулю J"или $x \sim y$ означает, что $x - y \in J$. Аналогично, элемент x обратим в A по модулю J, если $x + J$ обратим в A/J, т. е. если $xy \sim yx \sim 1$ для некоторого $y \in A$. Элемент y здесь естественно назвать обратным к x по модулю J. В частности, множество всех таких элементов открыто в A, поскольку оно является прообразом открытого множества $G(A/J)$ при фактор-отображении $x \to x + J$.

Например, согласно теореме 1.2.2 подпространство $\mathcal{T}(X)$ компактных операторов является замкнутым идеалом банаховой алгебры $\mathcal{L}(X)$. В принятых обозначениях теорему 1.3.2 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.4.3.

(a) *Фактор-отображение $N \to N + \mathcal{T}$ переводит класс фредгольмовых операторов $N \in \mathcal{L}(X)$ в группу $G(\mathcal{L}/\mathcal{T})$ элементов, обратимых в банаховой алгебре $\mathcal{L}(X)/\mathcal{T}(X)$, и индуцирует на ней целочисленный характер $\widetilde{\operatorname{ind}}(N + \mathcal{T}) = \operatorname{ind} N$.*

(b) *Пусть ограниченное линейное отображение L банаховой алгебры A в $\mathcal{L}(X)$ таково, что $L1 \sim 1$ и $(Lx)Ly \sim L(xy)$ по модулю $\mathcal{T}(X)$ для любых $x, y \in A$. Тогда при $x \in G(A)$ оператор Lx фредгольмов, и функция $\widetilde{\operatorname{ind}} x = \operatorname{ind} Lx$ представляет собой целочисленный характер на $G(A)$.*

Доказательство. Оно почти очевидно. Первое утверждение в (a) является следствием утверждения (d), а второе — утверждений (a)–(c) теоремы 1.3.2. Что касается второй части (b) доказываемой теоремы, то по условию L индуцирует гомоморфизм банаховых алгебр $\tilde{L} : A \to \mathcal{L}/\mathcal{T}$. Поэтому остается воспользоваться (a). □

Рассмотрим линейные ограниченные функционалы x^* на банаховой алгебре A, обладающие мультипликативным свойством (1.4.5). Другими словами, они осуществляют гомоморфизмы банаховых алгебр $A \to \mathbb{C}$. Множество всех таких мультипликативных функционалов обозначим $M(A) \subseteq A^*$. Убедимся, что это множество содержится в шаре $|x^*| \leqslant C$ сопряженного банахова пространства A^*, где постоянная $C > 0$ фигурирует в (1.4.1).

В самом деле, пусть для краткости q означает норму мультипликативного функционала $x^* \in M(A)$. Если $x \in A$, то в силу (1.4.1) имеем: $|x^2| \leqslant C|x|^2$. Поэтому с учетом мультипликативности функционала $|x^*(x)|^2 = |x^*(x^2)| \leqslant Cq|x|^2$, откуда $|x^*(x)| \leqslant \sqrt{Cq}\,|x|$ для всех $x \in A$. Следовательно, $q \leqslant \sqrt{Cq}$ и, значит, $q \leqslant C$.

Очевидно, ядро $\ker x^*$ мультипликативного функционала является одновременно идеалом и замкнутым подпространством коразмерности 1. Такие идеалы называют максимальными. Верно и обратное: каждый максимальный идеал служит ядром некоторого мультипликативного функционала $x^* \in M(A)$. Особенно важную роль множество $M(A)$ играет для коммутативных банаховых алгебр A.

Теорема (Гельфанд)**.** *Элемент a коммутативной банаховой алгебры A с единицей обратим тогда и только тогда, когда $x^*(a) \neq 0$ для любого $x^* \in M(A)$.*

Доказательство. Наметим доказательство этой теоремы. Если a обратим, то в силу (1.4.2) равенство $aa^{-1} = 1$ влечет $x^*(a)x^*(a^{-1}) = 1$ и, значит, $x^*(a) \neq 0$, $x^* \in M(A)$.

Обратно, пусть a не обратим в A. Тогда множество $J = \{xa,\ x \in A\}$ является собственным идеалом A. Рассуждения, используемые при доказательстве теоремы Хана—Банаха, позволяют показать, что существует максимальный идеал $J_0 \supseteq J$. Если $x^* \in M(A)$ определяется ядром $\ker x^* = J_0$, то $x^*(x) = 0$, $x \in J$ и, в частности, $x^*(a) = 0$. $\square$

Более подробно теория коммутативных банаховых алгебр A изложена в монографии Гельфанда, Райкова, Шилова [8]. Согласно теореме Банаха—Алаоглу (Рудин [46]), единичный шар B в сопряженном пространстве слабо компактен. Относительно этой топологии множество $M(A)$ мультипликативных функционалов есть замкнутое подмножество B и, следовательно, является также компактом. В силу однозначной взаимной связи между мультипликативными функционалами $x^* \in M(A)$ и их ядрами $\ker x^*$ множество $M(A)$ называют также компактом максимальных идеалов.

Некоторым аналогом теоремы 1.4.2 для коммутативных банаховых алгебр служит теорема Аренса—Ройдена (Гамелин [9]), согласно которой преобразование Гельфанда индуцирует изоморфизм фактор-групп $G(A)/G_0(A)$ и $G(C)/G_0(C)$, где $C = C(K)$ и K — компакт максимальных идеалов.

Элемент $e \in A$ банаховой алгебры называется инволютивным, если $e^2 = 1$. Очевидно, он совпадает с обратным $e^{-1} = e$ и определяет изоморфизм $x \to x^\diamond = exe$ алгебры A на себя, который обладает инволютивным свойством $(x^\diamond)^\diamond = x$.

Пусть это преобразование инвариантно на некоторой подалгебре $\mathcal{A} \subseteq A$. Тогда элементы вида $x = a + be$ образуют алгебру, которую обозначим $\mathcal{A}_e$.

Лемма 1.4.2. *Элемент $x = a + be$ и ассоциированный с ним $x_1 = a - be$ обратимы в алгебре $\mathcal{A}_e$ тогда и только тогда, когда 2×2-матрица*

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ b^\diamond & a^\diamond \end{pmatrix} \tag{1.4.12}$$

обратима в $\mathcal{A}$.

Напомним, что в соответствии с принятым соглашением символ $\mathcal{A}$ используется и для алгебры матриц с элементами из $\mathcal{A}$.

Доказательство. Обозначим $\tilde{\mathcal{A}}$ класс матриц вида (1.4.12). Нетрудно видеть, что матрица $x = (x_{ij})_1^2 \in A$ принадлежит $\tilde{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда она коммутирует с инволютивной матрицей

$$\tilde{e} = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому обратимость матрицы x в алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$ равносильна ее обратимости в $\mathcal{A}$.

Воспользуемся далее матричным соотношением

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{b} & \hat{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & -e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & -e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + be & 0 \\ 0 & a - be \end{pmatrix}.$$

Поскольку фигурирующая здесь матрица обратима:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & -e \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & e \\ 1 & -e \end{pmatrix},$$

это соотношение показывает, что обратимость $a \pm be$ в алгебре $\mathcal{A}_e$ равносильна обратимости матрицы (1.4.12) в алгебре $\tilde{\mathcal{A}}$, а, значит, и в $\mathcal{A}$. $\square$

Алгебра $\mathcal{A}$, инвариантная относительно инволюции $x \to x^\diamond = exe$, может быть построена следующим образом. Пусть некоторая инволюция s связана с e соотношением $es = -se$. Тогда класс $\mathcal{A}$ всех элементов, коммутирующих с s, образует подалгебру, удовлетворяющую указанному требованию. В самом деле, если $a \in \mathcal{A}$, т. е. $as = sa$, то $a^\diamond s = -ease = -esae = sa^\diamond$. Заметим, что элемент вида $2x = a(1+s) + b(1-s)$ обратим в $\mathcal{A}$, если обратимы оба элемента a, b, и в этом случае $2x^{-1} = a^{-1}(1+s) + b^{-1}(1-s)$.

В заключение введем общее понятие аналитичности функции комплексного переменного, принимающей значения в банаховой алгебре A. Пусть функция $F(z)$ со значениями в A задана и непрерывна в области $D \subseteq \mathbb{C}$. Под областью здесь понимается открытое множество, не обязательно связное. В частности, сужения F на связные компоненты этого множества никак не связаны между собой. По определению функция $F(z)$ аналитична в этой области, если в каждой точке $z_0 \in D$ существует предел

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{-1}[F(z) - F(z_0)] = F'(z_0).$$

Соответственно функцию $F'(z), z \in D$, называют производной $F(z)$.

Все свойства классических аналитических функций, основанные на интегральной формуле Коши, нетрудно распространить на функции со значениями в A. Однако предварительно необходимо ввести понятие интеграла от непрерывных функций F со значениями в банаховом пространстве. С помощью сумм Римана этот интеграл определяется совершенно аналогично скалярному случаю. Точно так же можно ввести и криволинейный интеграл

$$\int\limits_\Gamma F(z)dz = \int\limits_\Gamma F(z)(dx + idy)$$

от непрерывной функции $F(z)$, заданной на ориентированном кусочно-гладком контуре Γ комплексной плоскости переменной $z = x + iy$.

Для этого интеграла справедлива оценка

$$\left| \int\limits_\Gamma F(z)dz \right| \leqslant \int\limits_\Gamma |F(z)| ds_z \leqslant L \max_\Gamma |F(z)|, \tag{1.4.13}$$

где $|F(z)|$ означает норму в A и L есть длина контура Γ. Кроме того, для любого непрерывного линейного функционала $x^* \in A^*$ имеет место равенство

$$x^* \left(\int\limits_\Gamma F(z)dz \right) = \int\limits_\Gamma x^*[F(z)]dz. \tag{1.4.14}$$

Доказательство этих соотношений несложно: для сумм Римана они очевидны, поэтому в соответствии с определением интеграла достаточно перейти к пределу.

Теорема (Коши). *Пусть функция $F(z)$ со значениями в банаховой алгебре A аналитична в конечной области D, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, и непрерывна в $\overline{D}$. Пусть контур Γ ориентирован положительно по отношению к D, т. е. область D остается слева относительно этой ориентации. Тогда справедливы равенство*

$$\int\limits_\Gamma F(z)dz = 0$$

и формула Коши

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma (z - z_0)^{-1} F(z) dz, \quad z_0 \in D.$$

Заметим, что, вообще говоря, контур Γ здесь составной и состоит из нескольких связных компонент. В этой связи условимся говорить, что он охватывает некоторый компакт K на комплексной плоскости, если Γ служит границей конечной области, содержащей K. При этом контур ориентируется положительно по отношению к данной области.

Доказательство. Из данного выше определения аналитичности видно, что для $x^* \in A^*$ скалярная функция $x^*[F(z)]$ аналитична в области D. Поэтому к данной функции можно применить теорему Коши:

$$\int\limits_{\Gamma} x^*[F(z)]dz = 0.$$

С учетом (1.4.14) отсюда

$$x^* \left[\int\limits_{\Gamma} F(z)dz \right] = 0.$$

Поскольку это равенство справедливо для всех $x^* \in A^*$, элемент алгебры A, определяемый интегралом в квадратных скобках, равен нулю. Доказательство формулы Коши аналогично. $\square$

1.5. Спектр и резольвента

С каждым элементом a банаховой алгебры A с единицей свяжем на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ множество всех точек λ, для которых элемент $\lambda - a$ обратим в A. Это множество, называемое резольвентным, служит областью определения функции $R(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}$ со значениями в A, которая носит название резольвенты элемента a. Дополнение

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - a \notin G(A)\}$$

к этому множеству называется спектром элемента a. Согласно теореме 1.4.1 резольвента является непрерывной функцией. Из леммы 1.4.1 также видно, что при $|\lambda| \geqslant 2C|a|$ элемент $\lambda - a$ обратим и, значит, указанные точки λ принадлежат резольвентному множеству. При этом функция $R(\lambda)$ раскладывается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд

$$R(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{\lambda^{n+1}}, \quad |\lambda| \geqslant 2C|a|. \tag{1.5.1}$$

В частности, спектр $\sigma(a)$ является ограниченным множеством плоскости.

По определению резольвентное множество является прообразом открытого множества $G(A)$ при непрерывном отображении $\lambda \to \lambda - a$ и, следовательно, открыто на плоскости. Соответственно, спектр $\sigma(a)$ замкнут и с учетом его ограниченности является компактным множеством.

В силу очевидного тождества $R(\lambda) - R(\lambda_0) = -(\lambda - \lambda_0)R(\lambda)R(\lambda_0)$ имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^{-1}[R(\lambda) - R(\lambda_0)] = -[R(\lambda_0)]^2.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}$ как функция со значениями в A аналитична в открытом множестве $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$.

Теорема 1.5.1. *Для любого неотрицательного целого m справедливо равенство*

$$a^m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} z^m R(z)dz, \tag{1.5.2}$$

где $r > 0$ достаточно велико и окружность ориентирована против часовой стрелки.

В частности, спектр $\sigma(a)$ всегда непуст и непрерывно зависит от a в том смысле, что для любого открытого множества $G \subseteq \mathbb{C}$ множество $\sigma_G = \{a \in A \mid \sigma(a) \subseteq G\}$ открыто в A..

Доказательство. Как было отмечено выше, ряд (1.5.1) сходится абсолютно и равномерно на окружности $|z| = r$ при $r \geqslant 2C|a|$. Умножая его на z^m и интегрируя почленно, в результате приходим к разложению

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} z^m R(z)dz = \sum_{n\geqslant 0}\frac{a^n}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} z^{m-n-1}dz,$$

из которого непосредственно следует (1.5.2).

Если $\sigma(a) = \varnothing$, то функция $R(\lambda)$ аналитична на всей комплексной плоскости, и по теореме Коши все интегралы в правой части (1.5.2) равны нулю. Но при $m = 0$ это противоречит левой части равенства, которая равна 1.

Пусть далее множество $G \subseteq \mathbb{C}$ открыто и компакт $K \subseteq \mathbb{C}$ не пересекается с G. Поскольку резольвента $R(\lambda)$ непрерывна на K, норма $|(\lambda - a)^{-1}| \leqslant M$, $\lambda \in K$ для некоторой постоянной $M > 0$. Пусть $|y| \leqslant 1/2MC^2$, где постоянная C фигурирует в (1.4.1). Тогда $|(\lambda - a)^{-1}y| \leqslant MC|y| \leqslant 1/2C$ и на основании леммы 1.4.1 элемент $1 - (\lambda - a)^{-1}y \in G(A)$ для всех $\lambda \in K$. Следовательно, это верно и по отношению к $\lambda - a - y = (\lambda - a)[1 - (\lambda - a)^{-1}y]$, так что множества K и $\sigma(a + y)$ не пересекаются. Поскольку компакт K вне G был выбран произвольно, множество $\sigma_G = \{a \in A \mid \sigma(a) \subseteq G\}$ открыто. □

С каждым элементом $a \in A$ свяжем неотрицательное число

$$\operatorname{spr} a = \max_{\nu\in\sigma(a)} |\nu|,$$

которое назовем его спектральным радиусом. Другими словами, спектральный радиус есть радиус наименьшего круга $|z| \leqslant \rho$, содержащего спектр $\sigma(a)$.

Лемма 1.5.1. *Для любого $r > \operatorname{spr} a$ найдется такая постоянная $M > 0$, что*

$$|a^n| \leqslant Mr^n, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.5.3}$$

Обратно, наличие этой оценки влечет $r \geqslant \operatorname{spr} a$.

Доказательство. Пусть $r > \operatorname{spr} a$. В силу теоремы Коши формула (1.5.2), первоначально установленная для $r \geqslant 2C|a|$, справедлива и для рассматриваемых значений r. Поэтому с учетом (1.4.13) из этой формулы следует оценка (1.5.3) с постоянной

$$M = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} |R(z)|ds_z.$$

Обратно, пусть выполнена оценка (1.5.3) и $|\lambda| > r$. Тогда ряд

$$b = \sum_{n\geqslant 0}\frac{a^n}{\lambda^n}$$

сходится абсолютно, и аналогично лемме 1.4.1 убеждаемся, что для его суммы b справедливо соотношение

$$b\left(1 - \frac{a}{\lambda}\right) = \left(1 - \frac{a}{\lambda}\right)b = 1.$$

Следовательно, элемент $\lambda - a$ обратим и спектр $\sigma(a)$ лежит в круге $|\nu| \leqslant r$. □

Из леммы 1.5.1 и определения верхнего предела следует, что

$$\operatorname{spr} a = \limsup_{n\to\infty} |a^n|^{1/n}. \tag{1.5.4}$$

Заметим, что предел в правой части этого равенства не зависит от выбора эквивалентной нормы в банаховой алгебре A, что согласуется с определением спектрального радиуса. Можно показать, что в действительности верхний предел в (1.5.4) можно заменить обычным пределом.

Особо отметим случай $\operatorname{spr} a = 0$ или, что равносильно, $\sigma(a) = \{0\}$. В этом случае из (1.5.4) следует, что $|a^n|^{1/n} \to 0$ при $n \to \infty$. Элементы a с этим свойствам называют квазинильпотентными. Термин нильпотентный сохраняется для элементов a, удовлетворяющих условию $a^n = 0$ с некоторым натуральным n. Минимальное натуральное n с этим свойством называется порядком (нильпотентности) элемента a.

Пусть скалярная функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности $\sigma(a)$. Выберем гладкий контур $\Gamma \subseteq D$, охватывающий внутри себя спектр $\sigma(a)$ и положительно ориентированный по отношению к нему. Тогда справедлива формула Коши

$$f(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)(z-\nu)^{-1} dz, \quad \nu \in \sigma(a).$$

По определению значением $f(z)$ от элемента $a \in A$ называется интеграл

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)(z-a)^{-1} dz, \tag{1.5.5}$$

который соответствует формальной замене ν на a в формуле Коши. В силу теоремы Коши это определение не зависит от выбора контура Γ. Заметим, что для $f(z) = z^m$, $m = 0, 1, \ldots$ это определение согласуется с равенством (1.5.2), где в силу теоремы Коши интеграл можно брать по контуру Γ.

Из определения (1.5.5) и свойства (1.4.14) интеграла вытекает оценка

$$|f(a)| \leqslant \frac{L}{2\pi} \max_{z \in \Gamma} |f(z)(z-a)^{-1}| \tag{1.5.6}$$

нормы элемента $f(a)$, где L означает длину контура Γ.

Кроме того, для обратимого элемента $b \in A$ преобразование подобия $x \to b^{-1}xb$ коммутирует с операцией (1.5.5):

$$b^{-1}[f(a)]b = f(b^{-1}ab). \tag{1.5.7}$$

Это непосредственно следует из очевидного соотношения $b^{-1}(z-a)^{-1}b = [z - (b^{-1}ab)]^{-1}$.

В случае, когда функция f аналитична в окрестности круга $|z| \leqslant \operatorname{spr} a$, определению (1.5.5) можно придать несколько иную, более естественную форму. В этом случае при некотором $r > \operatorname{spr} a$ эта функция раскладывается в равномерно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k, \quad |z| \leqslant r$$

Утверждается, что

$$f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a^k. \tag{1.5.8}$$

В самом деле, в силу оценки (1.5.3) леммы 1.5.1 ряд в правой части (1.5.8) сходится абсолютно. В случае конечной суммы (1.5.7) равенство (1.5.8) является, как было отмечено выше, следствием (1.5.2) и теоремы Коши. В общем случае последовательность многочленов $f_n(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n$ сходится к $f(z)$ равномерно на окружности $|\lambda| = r$. Поэтому на основании оценки (1.5.6), примененной к разности $f - f_n$, последовательность $f_n(a) \to f(a)$ при $n \to \infty$. В результате в пределе приходим к справедливости (1.5.8) в общем случае.

Функции от элементов банаховой алгебры естественным образом связаны с операциями умножения функций и их суперпозиции.

Теорема 1.5.2. *Если функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в окрестности $\sigma(a)$, то*

$$f(a)g(a) = (fg)(a). \tag{1.5.9}$$

Спектр $\sigma[f(a)]$ совпадает с множеством $f(\sigma) = \{f(\nu) \mid \nu \in \sigma\}$. Если функция $h(z)$ аналитична в окрестности круга $|z| \leqslant \operatorname{spr}[f(a)]$, то

$$h[f(a)] = (h \circ f)(a), \quad (h \circ f)(z) = h[f(z)]. \tag{1.5.10}$$

Доказательство. Запишем аналогично (1.5.5)

$$g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} g(z_1)(z_1 - a)^{-1} dz_1,$$

где контур $\Gamma_1 \subseteq D$ выберем так, чтобы Γ лежал строго внутри него. Тогда результат произведения интегралов можно записать в форме повторного интеграла

$$f(a)g(a) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma_1} f(z)g(z_1)(z-a)^{-1}(z_1-a)^{-1} dz dz_1.$$

С помощью очевидного тождества

$$(z-a)^{-1}(z_1-a)^{-1} = -(z-z_1)^{-1}[(z-a)^{-1} - (z_1-a)^{-1}]$$

интеграл в правой части предыдущего равенства можно переписать в виде:

$$f(a)g(a) = -\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma_1} f(z)g(z_1)(z-z_1)^{-1}(z-a)^{-1} dz dz_1 +$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma_1} f(z)g(z_1)(z-z_1)^{-1}(z_1-a)^{-1} dz dz_1.$$

Поскольку по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1} g(z_1)(z-z_1)^{-1} dz_1 = -g(z), \quad \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)(z-z_1)^{-1} dz = 0,$$

отсюда приходим к (1.5.9).

Если $f(\nu) = 0$ для некоторого $\nu \in \sigma = \sigma(a)$, то $f(z) = (z-\nu)g(z)$, где $g(z)$ аналитична в D и на основании (1.5.9) имеем равенство $f(a) = (a-\nu)g(a) = g(a)(a-\nu)$. Оно означает, что $f(a)$ не может быть обратимым элементом, так как тогда были бы обратимыми $a-\nu$ и $g(a)$, что невозможно по выбору ν. Таким образом, $f(\sigma) \subseteq \sigma[f(a)]$. Обратно, если $\nu \notin f(\sigma)$, то элемент $\nu - f(\lambda) \neq 0,\ \lambda \in \sigma$ и, значит, функция $g(\lambda) = [\nu - f(\lambda)]^{-1}$ аналитична в окрестности σ. На основании (1.5.9) отсюда $\nu \notin \sigma[f(a)]$. В случае $h(z) = z^k$ соотношение (1.5.10) является следствием (1.5.9). Поэтому оно справедливо и для многочленов $h(z) = p(z)$. В общем случае остается, как и при доказательстве (1.5.8), воспользоваться предельным переходом. □

В качестве следствия теоремы 1.5.2 отметим, что экспоненты

$$\exp a = \sum_{n \geqslant 0} \frac{a^n}{n!}$$

образуют окрестность 1. В самом деле, пусть $x = 1 + y$ и $\operatorname{spr} y < 1$. Тогда на основании теоремы

$$x = \exp a, \quad a = \ln x = -\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-y)^n}{n}.$$

Очевидно, экспоненты $\exp a$ принадлежат единичной компоненте $G_0(A)$ группы $G(A)$, т. к. функция $x(t) = \exp(ta)$ непрерывна по $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $x(0) = 1$. В частности, по теореме 1.4.1(c) любой элемент $x \in G_0(A)$ представим в виде конечного произведения экспонент: $x = \exp a_1 \exp a_2 \cdots \exp a_n$.

Особенно простое выражение для $f(a)$ получается в случае, когда спектр $\sigma(a)$ состоит из единственной точки $\nu \in \mathbb{C}$, т. е. когда элемент $\nu - a$ квазинильпотентен. В этом случае, очевидно,

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\nu)}{n!}(a-\nu)^n, \quad \sigma(a) = \{\nu\}. \tag{1.5.11}$$

Если элемент $a - \nu$ нильпотентен и его порядок равен m, то ряд здесь конечен и обрывается на $n = m$. В этом случае для резольвенты $R(z) = (z-a)^{-1} = [(z-\nu) - (\nu - a)]^{-1}$ имеем разложение

$$(z-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{m-1} (z-\nu)^{-n-1}(a-\nu)^n,$$

так что она в точке $z = \nu$ имеет полюс порядка m.

Особо отметим случай банаховой алгебры $A = \mathcal{L}(X)$ ограниченных линейных операторов, действующих в банаховом пространстве X. По определению точка λ принадлежит спектру $\sigma(N)$ оператора $N \in \mathcal{L}(X)$, если оператор $\lambda - N$ как элемент $\mathcal{L}$ не обратим, или, что равносильно, этот оператор не имеет ограниченного обратного оператора. Согласно теореме Банаха из пункта 1.2, последнее возможно в двух случаях: когда ядро $\ker N$ ненулевое и когда $\ker N = 0$, но образ $\operatorname{Im} N$ не совпадает со всем пространством X. В первом случае точки λ спектра называются собственными значениями оператора N. Соответственно ненулевые векторы ядра $\ker N$, т. е. решения $x \in X$ однородного уравнения $\lambda x - Nx = 0$, носят название собственных векторов, отвечающих данному собственному значению.

1.6. Числовые матрицы

Рассмотрим банахову алгебру $\mathbb{C}^{n\times n}$ числовых матриц, элементы которой обозначаем большими латинскими буквами $A = (A_{ij})_1^n$, $B, \ldots$. Матрицу A удобно также рассматривать как линейное преобразование, т. е. как линейный оператор $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, который переводит вектор $x \in \mathbb{C}^n$ в вектор с координатами $(Ax)_i = A_{i1}x_1 + \ldots + A_{in}x_n$, $i = 1, \ldots, n$. Если столбцы матрицы обозначать $A_{(j)} = (A_{1j}, \ldots, A_{nj})$ и считать их элементами $\mathbb{C}^n$, то в этих обозначениях произведение матриц можно выразить в форме

$$(AB)_{(j)} = AB_{(j)} = B_{1j}A_{(1)} + \ldots + B_{nj}A_{(n)}. \tag{1.6.1}$$

По отношению к стандартному базису $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ столбец $A_{(j)}$ представляет собой линейную комбинацию $Ae_j = A_{1j}e_1 + \ldots + A_{nj}e_n$. Аналогичным образом можно поступить и по отношению к произвольному базису $b_1, \ldots, b_n$ пространства $\mathbb{C}^n$, полагая

$$Ab_j = J_{1j}b_1 + \ldots + J_{nj}b_n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{1.6.2}$$

с некоторыми $J_{ik} \in \mathbb{C}$. Матрица $J = (J_{ik})_1^n$ называется матрицей оператора A в базисе $b_1, \ldots, b_n$. Если матрица B составлена из b_j как столбцов, т. е. $B_{(j)} = b_j$, то в силу (1.6.1) соотношение (1.6.2) можно переписать в форме матричного равенства $AB = BJ$, т.е матрица $J = B^{-1}AB$ подобна A. Аналогичный прием можно осуществить и для подпространств $X \subseteq \mathbb{C}^n$, инвариантных относительно A. В этом случае будем иметь прямоугольную матрицу B.

Лемма 1.6.1. *Пусть подпространство $X \subseteq \mathbb{C}^n$ размерности l инвариантно относительно матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и столбцы матрицы $B \in \mathbb{C}^{n\times l}$ образуют базис X. Тогда существует такая единственная матрица $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$, что $AB = BJ$. Если $\tilde{B}, \tilde{J}$ — другая пара матриц с этим свойством, то $\tilde{B} = BD$, $\tilde{J} = D^{-1}JD$ для некоторой обратимой матрицы $D \in \mathbb{C}^{l\times l}$.*

Доказательство. Оно почти очевидно. По условию

$$AB_{(j)} = J_{1j}B_{(1)} + \ldots + J_{lj}B_{(l)}, \quad 1 \leqslant j \leqslant l,$$

с некоторыми $J_{ik} \in \mathbb{C}$. Как и выше, это соотношение можно переписать в форме матричного равенства $AB = BJ$. Если $\tilde{B}, \tilde{J}$ — другая пара матриц с этим свойством, то

$$\tilde{B}_{(j)} = D_{1j}B_{(1)} + \ldots + D_{lj}B_{(l)}$$

с некоторыми $D_{ik} \in \mathbb{C}$, причем матрица $D = (D_{ik})_1^l$ обратима. В силу (1.6.1) это соотношение можно переписать в форме $\tilde{B} = BD$. Подставляя данное равенство в соотношение $A\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{J}$, получим $AB = BJ_1$ с матрицей $J_1 = D\tilde{J}D^{-1}$. Остается заметить, что в силу единственности отсюда $J_1 = J$. □

Как и выше, матрицу J естественно назвать матрицей оператора A в инвариантном подпространстве X (относительно некоторого базиса). Если все пространство $\mathbb{C}^n$ раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств X_k, $k = 1, \ldots, m$, и матрицы B_k и J_k построены по X_k как в лемме, то по отношению к обратимой матрице $B = (B_1, \ldots, B_m) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеем равенство

$$B^{-1}AB = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_m). \tag{1.6.3}$$

Другими словами, в этом случае A приводится подходящей матрицей B к блочно-диагональному виду.

Важный пример инвариантных подпространств связан со спектром $\sigma(A)$ матрицы A. Этот спектр состоит из различных корней $\nu_1, \ldots, \nu_m$ характеристического многочлена $\chi(z) = \det(z - A)$, которые также называются собственными значениями матрицы A. В разложении

$$\chi(z) = (z - \nu_1)^{k_1} \cdots (z - \nu_m)^{k_m}, \; n = k_1 + \ldots + k_m, \tag{1.6.4}$$

этого многочлена на множители показатель k_j есть кратность собственного значения ν_j. Резольвента $(z-A)^{-1}$ представляет собой матричный многочлен, деленный на характеристический многочлен χ. Поэтому в точке ν_j функция $R(z)=(z-a)^{-1}$ имеет полюс, порядок r_j которого не превосходит кратности k_j и называется порядком собственного значения ν_j. Если многочлен $\chi_0(z)$ получается из (1.6.4) заменой k_j на r_j, то для матрицы-функции $\chi_0(z)(z-A)^{-1}$ особые точки ν_j устранимы, так что она является многочленом. В частности, интеграл (1.5.5) для $f=\chi_0$ обращается в нуль, т. е. $\chi_0(A)=0$. Многочлен $\chi_0(z)$ называется минимальным многочленом матрицы A. Из этих же соображение и $\chi(A)=0$, что составляет содержание известной теоремы Гамильтона—Кэли. Вообще для любой функции $f(z)$, аналитической в окрестности спектра $\sigma(A)$ матрицы A, и многочлена $p(z)$, подобранного по ней условием $f(z)-p(z)=O(1)(z-\nu_j)^{r_j}$ в окрестности ν_j, $j=1,\ldots,m$, имеем равенство $f(A)=p(A)$. Это обстоятельство дает практический способ вычисления матрицы $f(A)$.

Рассмотрим функцию $p_j(z)$, которая равна 1 в окрестности ν_j и нулю в окрестности остальных точек $\nu\in\sigma(a)$. Очевидно, в окрестности спектра имеем соотношения $p_ip_j=\delta_{ij}p_i$, где δ — символ Кронекера, и $p_1+\ldots+p_m=1$. На основании теоремы 1.5.2 отсюда следует, что $P_j=p_j(A)$ являются проекторами с аналогичным свойством $P_iP_j=\delta_{ij}P_i$ и $P_1+\ldots+P_m=1$. Следовательно, пространство $\mathbb{C}^n$ раскладывается в прямую сумму $X_1\oplus\ldots\oplus X_m$, $X_i=\operatorname{Im}P_i$. Так как $AP_i=P_iA$, подпространство X_i инвариантно относительно преобразования A, оно называется собственным подпространством, отвечающим собственному значению ν_j.

Если $A_j\in\mathcal{L}(X_j)$ означает сужение A на X_j, то оператор $\nu-A_j$ обратим при $\nu\neq\nu_j$ и $(\nu_j-A_j)^{r_j}=0$. Таким образом, для любого $x\in X_j$ найдется такое натуральное $r\leqslant r_j$, что $(\nu_j-A)^rx=0$ и $(\nu_j-A)^{r-1}x\neq 0$. Векторы $x\in\mathbb{C}^n$ с этим свойством называются присоединенными векторами матрицы A, отвечающие собственному значению ν_j. Полагая $x_1=(\nu_j-A)^{r-1}x$, $x_2=(\nu_j-A)^{r-2}x,\ldots,\, x_r=x$, получим цепочку собственных и присоединенных векторов, связанных соотношениями

$$(\nu-A)x_1=0,\quad (\nu-A)x_2=x_1,\quad \ldots,(\nu-A)x_s=x_{s-1}, \tag{1.6.5}$$

где для краткости $\nu=\nu_j$.

Выбирая в качестве столбцов матрицы B последовательно элементы базисов подпространств X_j, в результате можно привести матрицу A к блочно-диагональному виду (1.6.3). Матрица J_j здесь подобна оператору A_j, действующему в пространстве X_j. В частности, характеристический многочлен (1.6.4) совпадает с произведением аналогичных многочленом $\det(z-A_j)=(z-\nu_j)^{k_j}$ и $k_j=\dim X_j$.

Из (1.6.3) с учетом (1.5.7), (1.5.11) получается следующая формула для вычисления функции $f(A)$ от матрицы A:

$$B^{-1}f(A)B=\operatorname{diag}[f(J_1),\ldots,f(J_m)],\quad f(J_j)=\sum_{k\geqslant 0}\frac{f^{(k)}(\nu_j)}{k!}(J_j-\nu_j)^k. \tag{1.6.6}$$

Ряд здесь конечен и обрывается на порядке $k=r_j$ собственного значения ν_j.

Особенно простой вид $f(A)$ имеет для так называемой клетки Жордана $A=J$, у которой на главной диагонали стоят элементы ν, на следующей диагонали над главной — элемент 1, а все остальные элементы равны нулю. Таким образом,

$$J_{ij}=\nu\delta_{ij}+\delta_{i+1,j}, \tag{1.6.7}$$

где δ_{ij} означает символ Кронекера. Простая проверка показывает, что для этой матрицы $[(J-\nu)^k]_{ij}=\delta_{i+k,j}$. Поэтому формула (1.5.11) приводит к следующему явному выражению:

$$[f(J)]_{ij}=\begin{cases} 0, & j-i<0,\\ f^{(j-i)}(\nu)/(j-i)!, & j-i\geqslant 0.\end{cases} \tag{1.6.8}$$

Условимся блочно-диагональную матрицу, составленную из ν-клеток Жордана, называть также (составной) клеткой. Соответственно матрицы (1.6.7) относим к простым клеткам.

Следующий классический результат составляет основную теорему линейной алгебры (см., например, Мальцев [33]).

Теорема 1.6.1 (Жордан). *Каждая матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, спектр $\sigma(A)$ которой состоит из точек $\nu_1,\ldots,\nu_m$, приводится некоторой обратимой матрицей $B = (B_1,\ldots,B_m) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ к блочно-диагональному виду* (1.6.3), *в котором J_j является составной ν_j-клеткой Жордана. Столбцы матрицы B_j последовательно составлены из цепочек собственных и присоединенных векторов, отвечающих ν_j. При этом число простых клеток Жордана одного порядка, входящих в состав J_j, является инвариантом матрицы A, т. е. не зависит от выбора B.*

Доказательство. В соответствии с леммой 1.6.1 достаточно показать, что в собственном подпространстве $X = X_j$ матрицы A, отвечающем собственному значению $\nu = \nu_j$, можно выбрать базис, состоящий из цепочек собственных и присоединенных векторов. Заменяя A на $A - \nu$, не ограничивая общности, можно считать $\nu = 0$. Тогда $A^r X = 0$ и $A^{r-1}X$ есть собственное ненулевое подпространство X, где r — порядок собственного значения $\nu = 0$. Выберем подпространство $Y_1 \subseteq X$ из условия

$$A^{r-1}X = A^{r-1}Y_1, \quad Y_1 \cap \ker A^{r-1} = 0. \tag{1.6.9}$$

В частности, его размерность совпадает с размерностью образа $A^{r-1}X$ и

$$X = A^{r-1}Y_1 \oplus X_0, \quad X_0 \subseteq \ker A^{r-1}. \tag{1.6.10}$$

Утверждается, что сумма подпространств $Y_1 + AY_1 + \ldots + A^{r-1}Y_1$ прямая. В самом деле, пусть $y_1 + Ay_2 + \ldots + A^{r-1}y_r = 0$ для некоторых $y_j \in Y_1$. Действуя на это равенство оператором A^{r-1}, получим $A^{r-1}y_1 =$, что с учетом (1.6.9) возможно только при $y_1 = 0$. Таким образом, $Ay_2 + \ldots + A^{r-1}y_r = 0$, и действуя на это равенство оператором A^{r-2}, получим $y_2 = 0$. Повторяя эту процедуру, убеждаемся, что все $y_j = 0$. Итак, указанная сумма прямая. Поскольку подпространства $A^j Y_1$ при $j \geqslant 1$ содержатся в $\ker A^{r-1}$, совместно с (1.6.10) отсюда приходим к разложению

$$X = Y_1 \oplus \ldots \oplus A^{r-1}Y_1 \oplus \tilde{X}, \quad \tilde{X} \subseteq \ker A^{r-1}. \tag{1.6.11}$$

Применяя к $\tilde{X}$ аналогичные рассуждения и повторяя эту процедуру, в результате получим разложение

$$X = (Y_1 \oplus \ldots \oplus A^{r-1}Y_1) \oplus (Y_2 \oplus \ldots \oplus A^{r-2}Y_2) \oplus \ldots \oplus (Y_{r-1} \oplus AY_{r-1}) \oplus Y_r, \tag{1.6.12}$$

где

$$Y_j \cap \ker A^{r-j} = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant r-1, \quad Y_1 \subseteq \ker A.$$

Заметим, что некоторые из пространств Y_j в этом разложении могут быть нулевыми, поскольку в (1.6.11) и аналогичных последующих соотношениях может оказаться, что $\tilde{X} \subseteq \ker A^{r-s}$ с некоторым $s > 1$.

Выберем теперь в пространстве Y_j базис e_k^j, $1 \leqslant k \leqslant s_j$. Тогда согласно (1.6.12) вектора $A^i e_k^j$, $0 \leqslant i \leqslant r-j-1$, образуют цепочку собственных и присоединенных векторов, и все эти цепочки составляют базис пространства X. □

Матрица J, о которой идет речь в этой теореме, называется жордановой формой матрицы A. В этом случае столбцы матрицы B имеют следующий геометрический смысл.

Часто вместо (1.6.3) удобнее рассматривать «укрупненное» разложение, соответствующее разбиению спектра $\sigma(A)$ на три множества $\sigma_0 = \mathbb{R}\cap\sigma$, $\sigma_\pm = \{\nu \in \sigma \mid \pm\mathrm{Im}\,\nu > 0\}$ на плоскости, определяемые вещественной осью $\mathbb{R}$. Пусть X_0 и $X_\pm$ отвечают прямой сумме собственных пространств X_j, отвечающих, соответственно, значениям $\nu_j \in \sigma_0$ и $\nu_j \in \sigma_\pm$. Размерности этих пространств обозначим n_0 и $n_\pm$. Тогда $\mathbb{C}^n = X_0 \oplus X_+ \oplus X_-$ и в соответствии с этим (1.6.3) переходит в

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(J_0, J_+, J_-),\ \sigma(J_0) = \sigma_0,\ \sigma(J_\pm) = \sigma_\pm, \tag{1.6.13}$$

с матрицей $B = (B_0, B_+, B_-)$, где $B_0 \in \mathbb{C}^{n\times n_0}$, $J_0 \in \mathbb{C}^{n_0\times n_0}$ и аналогичный смысл имеют матрицы $B_\pm$, $J_\pm$ по отношению к $n_\pm = \dim X_\pm$.

Если матрица A вещественна, то $n_+ = n_-$ и операция комплексного сопряжения $x \to \overline{x}$ инвариантна на X_0 и переводит X_+ на X_-. В соответствии с этим базисы в этих пространствах, составляющие столбцы матриц B_0 и $B_\pm$, можно выбрать так, чтобы

$$B_0 \in \mathbb{R}^{n\times n_0},\ J_0 \in \mathbb{R}^{n_0\times n_0},\ B_- = \overline{B}_+,\ J_- = \overline{J}_+. \tag{1.6.14}$$

Иногда в (1.6.13) удобнее перейти от B_- и J_- к комплексно сопряженным матрица, так что спектр $\sigma(J_-) = \overline{\sigma}_-$ лежит в верхней полуплоскости. В этом случае для вещественной матрицы A в (1.6.14) следует положить $J_+ = J_-$.

Более подробные сведения о числовых матрицах можно найти в монографии Гантмахера [10].

1.7. Полу-почти-периодические функции

Рассмотрим банахову алгебру C всех непрерывных и ограниченных на прямой $\mathbb{R}$ функций, снабженную поточечными операциями и sup-нормой

$$|x|_0 = \sup_t |x(t)|.$$

Подпространство C^0 всех исчезающих на ∞ функций является замкнутым идеалом этой алгебры. Очевидно, условие

$$\inf_t |x(t)| > 0$$

необходимо и достаточно для обратимости x в C. Функции $x(t)$ с этим свойством условимся называть невырожденными.

По определению функция $x(t) \in C$ почти-периодична, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $l > 0$, что в каждом интервале длины l найдется число τ со свойством

$$|x(t+\tau) - x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.7.1}$$

Подробное изложение теории почти-периодических функций (кратко — п.п.-функций) можно найти в книге Левитана [29]. В частности, известно, что класс всех п.п.-функций образует в C замкнутую подалгебру, причем тригонометрические многочлены, т. е. конечные суммы вида

$$x(t) = \sum c_k e^{ia_k t}, \quad c_k \in \mathbb{C},\ a_k \in \mathbb{R}, \tag{1.7.2}$$

плотны в этом классе. Один из основных результатов теории п.п.-функций состоит в следующем.

Теорема (об аргументе п.п.-функции). *Если п.п.-функция $x(t)$ невырождена, то непрерывная ветвь ее логарифма представима в виде*

$$\ln x(t) = iat + y(t) \tag{1.7.3}$$

с некоторыми $a \in \mathbb{R}$ и п.п.функцией y. В частности, обратная функция x^{-1} также почти-периодична.

Условимся говорить, что функция $c \in C$ обладает (односторонними) средними значениями $m^{\pm}x$ на $\pm\infty$, если существуют пределы

$$m^+x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_n^{2n} x(t)dt, \quad m^-x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{-2n}^{-n} x(t)dt. \tag{1.7.4}$$

Очевидно, класс функций, для которых существуют эти средние значения, образует замкнутое подпространство в C. В случае, когда оба односторонних средних значения совпадают, говорим просто о среднем значении mx функции x. Очевидно,

$$m(e^{-iat}) = \begin{cases} 0, & a \neq 0, \\ 1, & a = 0. \end{cases} \tag{1.7.5}$$

В частности, среднее значение mu существует для тригонометрических полиномов (1.7.2), причем его коэффициенты $c_k = m(e^{-a_k t}u)$ для заданного набора a_j определяются однозначно. В силу соображений плотности отсюда заключаем, что среднее значение mx существует для всех п.п.-функций. Из этих же соображений в случае, когда (1.7.2) является абсолютно сходящимся рядом, его коэффициенты c_k определяются однозначно по x.

Класс всех таких функций обозначим W, очевидно, он является алгеброй, которая банахова относительно нормы

$$|x| = \sum_k |c_k|.$$

Более подробно коммутативная банахова алгебра W изучена в книге Гельфанда, Райкова, Шилова [8]. В частности, теорема об аргументе п.п.-функций сохраняет свою силу и для этой алгебры, т. е. если функция $x \in W$ невырождена, то в разложении (1.7.3) функция $y \in W$.

Условимся функцию $x \in C$ называть полупочти периодической (п.п.п.-), если существуют такие п.п.-функции $x^{\pm}(t)$, что

$$x(t) - x^{\pm}(t) \to 0 \text{ при } t \to \pm\infty. \tag{1.7.6}$$

Из определения (1.7.1) почти периодичности непосредственно следует, что функции $x^{\pm}$ определяются по x однозначно и справедлива оценка

$$|x^{\pm}|_0 \leqslant |x|_0 \tag{1.7.7}$$

для sup-норм. Функции $x^{\pm}$ называются односторонними (верхней и нижней) п.п.-компонентами x. Оценка (1.7.7) показывает, что класс п.п.п.-функций образует в C замкнутую подалгебру и линейные отображения $x \to x^{\pm}$ являются гомоморфизмами алгебр, причем $m^{\pm}x = mx^{\pm}$.

Если функция $x(t)$ допускает пределы $c^{\pm} \in \mathbb{C}$ при $t \to \pm\infty$, то их можно рассматривать как постоянные п.п.-функции. Другими словами, эта функция полу-почти-периодична с односторонними п.п.-компонентами $c^{\pm}$.

Если п.п.п.-периодическая функция $x(t)$ удовлетворяет условию невырожденности, то в силу (1.7.6) найдется также такое натуральное n, что

$$\inf_{\pm t \geqslant n} |x^{\pm}(t)| > 0.$$

На основании определения почти-периодичности (1.7.2) отсюда заключаем, что функции $x^{\pm}$ также невырождены. Следовательно, обратная функция x^{-1} полу-почти-периодична и $(x^{-1})^{\pm} = (x^{\pm})^{-1}$. Поскольку произведение $x(x^{\pm})^{-1} \to 1$ при $t \to \pm\infty$, на основании теоремы об аргументе, примененной к $x^{\pm}$, непрерывная ветвь логарифма

$$\ln x(t) - ia^{\pm}t - y^{\pm}(t) \to 0 \text{ при } t \to \pm\infty \tag{1.7.8}$$

для некоторых $a^{\pm} \in \mathbb{R}$ и п.п.-функции $y^{\pm}$. Данное соотношение можно рассматривать как аналог этой теоремы для п.п.п.-функций.

Заметим, что хотя непрерывная ветвь $\ln x(t)$ определена с точностью до аддитивного слагаемого $2\pi ik$ с целым k, разность $y^{+} - y^{-}$ уже не зависит от этой неопределенности. Деленное на $2\pi i$ среднее значение этой разности назовем индексом Коши функции x и обозначим

$$\operatorname{Ind}_{\mathbb{R}} x = \frac{1}{2\pi i} m(y^{+} - y^{-}). \tag{1.7.9}$$

В случае, когда $x(t)$ имеет пределы на $\pm\infty$, функция $\ln x(t)$ обладает этим же свойством и (1.7.9) совпадает с классическим определением индекса Коши как приращения непрерывной ветви логарифма функции $\ln x$, т. е.

$$\operatorname{Ind}_{\mathbb{R}} x = \frac{1}{2\pi i} \ln x(t) \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Очевидно, индекс Коши обладает групповым свойством (1.4.11), т.е

$$\operatorname{Ind}_{\mathbb{R}}(x_1 x_2) = \operatorname{Ind}_{\mathbb{R}} x_1 + \operatorname{Ind}_{\mathbb{R}} x_2, \quad \operatorname{Ind}_{\mathbb{R}} 1 = 0. \tag{1.7.10}$$

Кроме того, как комплексная функция на группе обратимых элементов алгебры C он непрерывно зависит от x по sup-норме. В самом деле, если $|x_n - x|_0 \to 0$, то $x_n = x(1 + x_n^0)$, где $x_n^0 \in C$ и $x_n^0 \to 0$ по sup-норме. Соответственно в соотношении (1.7.8) для x_n функции $y^{\pm}$ следует заменить на $y^{\pm} + [\ln(1 + x_n^0)]^{\pm}$. Остается заметить, что $\ln(1 + x_n^0) \to 0$ по sup-норме при $n \to \infty$ и воспользоваться оценкой (1.7.7). Таким образом, в соответствии с (1.7.10) он является индексом Коши в смысле определения из пункта 1.3.

Заметим, что разложение (1.7.5) для п.п.-компонент $x^{\pm}$ функции x имеет вид

$$\ln x^{\pm}(t) = ia^{\pm}t + y^{(\pm)}(t) \tag{1.7.11}$$

где $a^{\pm}$ фигурируют в (1.7.8). Что касается функций $y^{(\pm)}$, то они отличаются от $y^{\pm}$ некоторым постоянным слагаемым $2\pi ik^{\pm}$ с целыми $k^{\pm}$. Следовательно,

$$\operatorname{Ind}_{\mathbb{R}} x = \frac{1}{2\pi i} m[y^{(+)} - y^{(-)}] + \quad \text{целое число}. \tag{1.7.12}$$

Особо остановимся на случае, когда функция $\ln x$ ограничена, т.е $a^+ = a^- = 0$ в (1.7.8).

Теорема 1.7.1. *Пусть п.п.п.-функция $x(t)$ невырождена и $\ln x$ ограничена. Тогда*

$$\mathrm{Ind}_{\mathbb{R}}\, x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{n}^{2n} [(\ln x)(t) - (\ln x)(-t)]dt, \tag{1.7.13}$$

причем существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \frac{(\ln x)(t)dt}{t-i} \tag{1.7.14}$$

влечет равенство $\mathrm{Ind}\, x = 0$.

Доказательство. В обозначениях (1.7.8) рассмотрим п.п.-функцию $y(t) = y^+(t) - y^-(-t)$. Поскольку $my = m(y^+ - y^-)$, по определению $\mathrm{Ind}_{\mathbb{R}}\, x = my$. С другой стороны, для п.п.-функции y имеем равенство

$$my = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{n}^{2n} y(t)dt.$$

Вспоминая, что $y_0(t) = [(\ln x)(t) - (\ln x)(-t)] - y(t) \to 0$ при $t \to \infty$, отсюда следует (1.7.13).

Пусть далее предел (1.7.14) существует. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \left[\frac{(\ln x)(t)}{t-i} - \frac{(\ln x)(-t)}{t+i}\right] dt = 0,$$

Интеграл под знаком предела можно представить в виде суммы

$$\int\limits_{n}^{2n} \frac{y(t)dt}{t-i} + \int\limits_{n}^{2n} \frac{y_0(t)dt}{t-i} + 2i \int\limits_{n}^{2n} \frac{(\ln x)(-t)dt}{t^2+1}.$$

Поскольку последние два слагаемых стремятся к нулю при $n \to \infty$, это свойство справедливо и для первого слагаемого:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{n}^{2n} \frac{y(t)dt}{t-i} = 0. \tag{1.7.15}$$

Обозначим линейный функционал, определяемый интегралом под знаком предела, через $I_n y$. Очевидно,

$$|I_n y| \leqslant \max_{n\leqslant t\leqslant 2n} |y(t)|. \tag{1.7.16}$$

Для $y(t) = e^{iat}$, где $a \neq 0$, интегрирование по частям дает равенство

$$I_n y = \frac{1}{ia}\left[e^{iat}\Big|_{n}^{2n} - \int\limits_{n}^{2n} \frac{e^{iat}dt}{(t-i)^2}\right],$$

так что $I_n y \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, этот факт справедлив и для тригонометрических полиномов y с $my = 0$, т.е для конечных сумм вида (1.7.2), в которых все $a_j \neq 0$. На основании (1.7.16) отсюда заключаем, что $I_n y \to 0$ при $n \to \infty$ для любых п.п.-функций y с $my = 0$.

Обратимся к п.п.-функции y, фигурирующей в (1.7.15). Поскольку $m(y - my) = 0$, на основании указанного выше свойства равенство (1.7.15) влечет $my = 0$. Остается напомнить, что $my = \mathrm{Ind}\, x$. □

Заметим, что существование предела (1.7.14) влечет существование аналогичного предела

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \frac{(\ln x)(t)dt}{t-z}$$

для любой точки z, $\operatorname{Im} z \neq 0$, который определяет аналитическую вне $\mathbb{R}$ функцию $F(z)$ на комплексной плоскости. Для доказательства достаточно представить F в виде

$$F(z) = F_0(z) + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(\ln x)(t)dt}{t-i}, \quad F_0(z) = (z-i)\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{(\ln x)(t)dt}{(t-z)(t-i)},$$

и учесть, что для ограниченной функции $\ln x$ интеграл в правой части второго равенства понимается в обычном смысле и определяет функцию, аналитическую вне $\mathbb{R}$. Из этих же соображений точку i в теореме можно заменить любой другой точкой z, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

В дальнейшем важную роль будет играть аналог алгебры C в полосе $\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant \lambda_2$ комплексной плоскости переменной ζ, которую кратко обозначаем $[\lambda_1, \lambda_2]$, отличие этого обозначения от отрезка прямой будет видно из контекста. Обозначим $C[\lambda_1, \lambda_2]$ банахову алгебру всех непрерывных и ограниченных в этой полосе функций, аналитических внутри нее (при $\lambda_1 < \lambda_2$). Все предыдущие понятия естественным образом распространяются и на функции $x(\zeta) \in C[\lambda_1\lambda_2]$. Так, определение их почти периодичности получается заменой (1.7.1) условием $|x(\zeta + i\tau) - x(\zeta)| \leqslant \varepsilon$, $\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant \lambda_2$. Роль тригонометрических полиномов здесь играют конечные линейные комбинации функций $e^{a_k\zeta}$ с показателями $a_k \in \mathbb{R}$. Разложение (1.7.3) в теореме об аргументе в рассматриваемом случае следует заменить на $\ln x(\zeta) = a\zeta + y(\zeta)$. Средние значения $m^{\pm}x$ функций $x \in C[\lambda_1, \lambda_2]$ определяется аналогично (1.7.4) как пределы

$$m^+x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{in}^{2in} x(\zeta)d\zeta, \quad m^-x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{-2in}^{-in} x(\zeta)d\zeta. \tag{1.7.17}$$

Если функция $x(\zeta)$ допускает пределы $x(\pm\infty) = \lim x(\zeta)$ при $\operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty$ равномерно в полосе $[\lambda_1, \lambda_2]$, то односторонние средние значения $m^{\pm}x$ существуют и совпадают с $x(\pm\infty)$. Примером такой функции служит, например, функция $s(\zeta) = \operatorname{th}\zeta$, которая принадлежит $C[\lambda_1, \lambda_2]$ для любых $\lambda_1 < \lambda_2$ и для которой $s(\pm\infty) = \pm 1$.

Аналогичным образом переносится на функции $x \in C[\lambda_1, \lambda_2]$ определение (1.7.7) полу почти периодичности. При условии невырожденности $x(\zeta)$ можно ввести п.п.-функции $y^{\pm}(\zeta)$, заменяя (1.7.8) условием $x(\zeta) - x^{\pm}(\zeta) \to 0$ при $\operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty$. С помощью этих функций индекс Коши определяется той же формулой (1.7.9). Очевидно, свойства (1.7.10), (1.7.12) индекса Коши сохраняют силу и в рассматриваемом случае.

Аналогичным образом сохраняется и аналог теоремы 1.7.1. В соответствии с замечанием к этой теореме роль сингулярного интеграла (1.7.14) играет интеграл

$$\int\limits_{\operatorname{Re}\zeta=\lambda} \frac{(\ln x)(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\lambda-in}^{\lambda+in} \frac{(\ln x)(\zeta)d\zeta}{\zeta-\zeta_0},$$

где $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$ и точка ζ_0 лежит вне полосы $[\lambda_1, \lambda_2]$.

Отметим также связь индекса Коши с инволюцией сопряжения $x \to \overline{x}$ в алгебре $C[\lambda_1, \lambda_2]$, определяемой равенством

$$\overline{x}(\zeta) = \overline{x(\overline{\zeta})}, \tag{1.7.18}$$

где черта справа означает комплексное сопряжение. По отношению к $\overline{x}$ аналогом (1.7.8) служит предел $\ln \overline{x}(\zeta) - a^{\pm}\zeta - \overline{y}^{\mp}(\zeta) \to 0$ при $\operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty$. С учетом очевидного равенства $m\overline{y} = \overline{my}$ для среднего значения п.п.-функции отсюда приходим к соотношению

$$\operatorname{Ind}\bar{x} = -\overline{\operatorname{Ind} x}, \tag{1.7.19}$$

где черта справа означает комплексное сопряжение.

В дальнейшем наряду со скалярными функциями будут широко встречаться и матричные п.п.п.-функции. В соответствии с соглашением в пункте 1.1, пространство $n \times n$-матриц-функций, элементы которых принадлежат $C[\lambda_1, \lambda_2]$, обозначаем тем же символом. Условие невырожденности для матриц-функций формулируется по отношению к их определителю $\det x$. Аналогично понимается и индекс Коши $\operatorname{Ind} x = \operatorname{Ind}(\det x)$. Заметим, что поскольку $(x_1x_2)^{\pm} = x_1^{\pm}x_2^{\pm}$, определитель $\det x^{\pm}$ совпадает с $(\det x)^{\pm}$. Поэтому (1.7.11), (1.7.12) справедливо и по отношению к $\det x$.

Если условие невырожденности выполняется по отношению только к некоторым прямым $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$, то приращение (1.7.9), взятое по отношению к $\ln\det x(\lambda + it)$, вообще говоря, зависит от λ.

Лемма 1.7.1. *Пусть $n \times n$-матрица-функция $x(\zeta)$ полу-почти-периодична в полосе $\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \lambda_2$, причем ее п.п.-компоненты $x^{\pm}$ невырождены, а сама функция $x(\zeta)$ невырождена на граничных прямых $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_k$ этой полосы. Тогда существует такая рациональная матрица-функция $r(\zeta) \in C[\lambda_1, \lambda_2]$, исчезающая на бесконечности, что $x(\zeta) + r(\zeta)$ невырождена в рассматриваемой полосе. Кроме того, разность*

$$\operatorname{Ind} x(\lambda_2 + it) - \operatorname{Ind} x(\lambda_1 + it)$$

совпадает с числом нулей функции $\det x(\zeta)$ в полосе $\lambda_1 < \operatorname{Re}\zeta < \lambda_2$, взятых с учетом кратности.

Доказательство. Так как $x(\zeta) - x^{\pm}(\zeta) \to 0$ при $\operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty$ и функции $x^{\pm}$ невырождены, существует такое натуральное n, что

$$\inf_{|\operatorname{Im}\zeta| \geqslant n} |x(\zeta)| > 0.$$

С учетом невырожденности $x(\lambda_j + it)$ число m нулей $\det x$, о которых идет речь в лемме, действительно конечно. Если $m = 0$, т. е. эти нули отсутствуют, то $x(\zeta)$ невырождены во всей полосе.

Пусть ζ_1 — один из нулей функции $\det x$. Тогда $(\det x)(\zeta_1) = 0$ и, значит, найдется такой ненулевой вектор $\xi \in \mathbb{C}^n$, что $x(\zeta_1)\xi = 0$. Рассмотрим матрицу $p \in \mathbb{C}^{n\times n}$, которая как линейный оператор осуществляет проектирование $\mathbb{C}^n$ на одномерное пространство, натянутое на вектор ξ. Таким образом, $p^2 = p$ и $x(\zeta_1)p = 0$. Согласно данному пункту, матрица p подобна диагональной матрице, у которой все диагональные элементы, кроме одного, равны нулю. Следовательно, для любого ненулевого $c \in \mathbb{C}$ имеем соотношения

$$\det(cp + 1 - p) = c, \quad (cp + 1 - p)^{-1} = c^{-1}p + 1 - p. \tag{1.7.20}$$

Зафиксируем $\lambda > \lambda_2$ и рассмотрим матрицу-функцию

$$x_1(\zeta) = x(\zeta)r_1^{-1}(\zeta), \quad r_1(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \lambda}p + 1 - p.$$

Очевидно, рациональная матрица-функция

$$r_1(\zeta) - 1 = \frac{\lambda - \zeta_0}{\zeta - \lambda}p \in C^0[\lambda_1, \lambda_2]$$

и с учетом (1.7.20) и равенства $x(\zeta_1)p = 0$ функция

$$x_1(\zeta) = [x(\zeta) - x(\zeta_1)]r_1^{-1} + x(\zeta_1)(1 - p) \in C[\lambda_1, \lambda_2].$$

Матрица-функция $x_1(\zeta)$ удовлетворяет всем условиям леммы с той разницей, что ее определитель $\det x = (\zeta - \zeta_1)^{-1}\det x(\zeta)$ имеет по сравнению с $\det x$ на один нуль меньше. Продолжая эту процедуру, после m шагов функцию $x(\zeta)$ можно разложить в произведение

$$x(\zeta) = x_m(\zeta)r_m(\zeta), \tag{1.7.21}$$

где функция $x_m \in C[\lambda_1, \lambda_2]$ невырождена, а функция $r_m(\zeta)$ рациональна, имеет единственный полюс в точке $\zeta = \lambda$ и стремится к 1 при $\zeta \to \infty$. Полагая $r = r_m - 1$, в результате приходим к справедливости первого утверждения леммы.

Что касается второго ее утверждения, то в силу (1.7.10) его достаточно установить для второго сомножителя $r_m(\zeta)$ в (1.7.21). В этом случае оно является следствием известной теоремы Руше о приращении логарифма аналитической функции по граничному контуру. $\square$

1.8. Интеграл Лебега и обобщенные функции

Напомним некоторые сведения из теории интеграла Лебега, хорошо известные из курса математического анализа. Не останавливаясь на понятиях измеримого по Лебегу множества $G \subseteq \mathbb{R}^k$ и его меры Лебега $\operatorname{mes} G$, а также измеримых функций и определения интеграла Лебега, рассмотрим класс $L(G)$ суммируемых на измеримом множестве $E \subseteq \mathbb{R}^k$ функций. Этот класс является векторным пространством, а равенство

$$|f|_L = \int\limits_G |f(x)|dx \tag{1.8.1}$$

определяет в нем норму (в предположении, что две функции, отличающиеся на множестве меры нуль, отождествлены).

Известно, что относительно нормы (1.8.1) пространство L банахово. Это свойство полноты L является одним из основных достоинств интеграла Лебега. Другим важнейшим свойством интеграла Лебега является та свобода, с которой осуществляется предельный переход под знаком интеграла.

Теорема (Лебега о мажорированной сходимости)**.** *Пусть последовательность измеримых функций $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для почти всех $x \in G$ и существует такая неотрицательная суммируемая функция φ, что $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$ для всех n. Тогда предельная функция f суммируема и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_G f_n dx = \int\limits_G f dx.$$

В качестве следствия теоремы Лебега можно отметить свойство счетной аддитивности интеграла:

$$\int\limits_G f dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{G_i} f dx, \quad G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i,$$

где множества G_i попарно не пересекаются. Для этого достаточно эту теорему применить к последовательности функций $f_n(x)$, равных $f(x)$ для $x \in G_1 \cup \ldots \cup G_n$ и нулю в противном случае. Роль φ в этом случае играет функция $|f(x)|$. Здесь учтено свойство конечной аддитивности интеграла, вытекающее из его линейности.

На практике обычно банахово пространство $L(G)$ рассматривается для открытых или замкнутых множеств G. Пусть множество D открыто и $C_0(D)$ означает класс непрерывных функций с компактным носителем, содержащимся в D. Этот класс плотен в $L(D)$, причем имеет место равенство

$$|f|_L = \sup_{|\varphi|_C \leqslant 1} (f, \varphi), \quad (f, \varphi) = \int\limits_D f(x)\varphi(x)dx, \tag{1.8.2}$$

где sup берется по функциям $\varphi \in C_0(D)$.

Пусть $B(x, r)$ означает шар радиуса r с центром x. Точки x, для которых

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\operatorname{mes} B(x,\varepsilon)} \int\limits_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|dy = 0, \tag{1.8.3}$$

называются точками Лебега функции f. Заметим, что все точки, в которых функция f непрерывна, заведомо являются ее точками Лебега.

Теорема (о точках Лебега)**.** *Для локально суммируемой функции f предел* (1.8.3) *имеет место для почти всех x.*

По определению функция $\varphi \in C(D)$ непрерывно дифференцируема на открытом множестве D, если ее частные производные $\partial\varphi/\partial x_i$ существуют и непрерывны в каждой точке $x \in D$. Этот факт можно выразить по отношению к вектору-градиенту условием

$$\varphi' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) \in C(D). \tag{1.8.4}$$

В случае m-вектор-функции φ этот градиент следует рассматривать как $m\times k$-матрицу Якоби $\mathcal{D}\varphi$, столбцами которой служат частные производные $\partial\varphi/\partial x_j$.

Теорема Лебега о мажорируемой сходимости наиболее часто используется в следующей ситуации.

Теорема 1.8.1. *Пусть функция $\varphi(x,y)$ задана на произведении $G\times G$, где G — открытое подмножество $\mathbb{R}^s$, суммируема по y для каждого x и непрерывна по $x\in G$ для почти всех y. Кроме того, существует такая неотрицательная функция $f\in L(G)$, что $|\varphi(x,y)|\leqslant f(y)$ для всех $x\in G$ и почти всех $y\in G$. Тогда интеграл*

$$\psi(x)=\int\limits_G \varphi(x,y)dy$$

определяет непрерывную в G функцию.

Если дополнительно функция $\varphi(x,y)$ непрерывно дифференцируема по x и ее частные производные $\partial\varphi/\partial x_i$ удовлетворяют тем же условиям, что и φ, то $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема и ее производные можно вычислять под знаком интеграла:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i}=\int\limits_G \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x,y)dy.$$

Доказательство. Первое утверждение является непосредственным следствием теоремы Лебега. Что касается второго утверждения, то достаточно убедиться, что частная производная по переменной x_i существует и совпадает с функцией ψ_i, определяемой интегралом от соответствующей частной производной φ. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать $s=1$, а G — открытым интервалом прямой. Зафиксируем $a\in G$ и выберем последовательность $x_n\to a$ точек G. Требуется показать, что разность

$$\frac{\psi(x_n)-\psi(a)}{x_n-a}-\int\limits_G \frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,y)dy$$

стремится к нулю при $n\to\infty$. Но этот факт является следствием теоремы о мажорированной сходимости, примененной к последовательности функций

$$\varphi_n(y)=\frac{\varphi(x_n,y)-\varphi(a,y)}{x_n-a}-\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,y).$$

$\square$

Отметим еще две хорошо известные формулы изменения порядка интегрирования и замены переменных под знаком интеграла.

Теорема (Фубини)**.** *Пусть функция $\varphi(x,y)$ суммируема на произведении $G\times G$, где $G\subseteq\mathbb{R}^s$. Тогда она суммируема по y на G для почти всех $x\in G$, интеграл по y определяет суммируемую на G функцию и справедливо равенство*

$$\int\limits_G\left[\int\limits_G \varphi(x,y)dy\right]dx=\int\limits_{G\times G}\varphi(x,y)dxdy.$$

Если функция φ неотрицательна, то верно и обратное — существование повторного интеграла в левой части этого равенства влечет суммируемость функции φ на $G\times G$.

Теорема (о замене переменных)**.** *Пусть множество $D\subseteq\mathbb{R}^k$ открыто и k-вектор-функция $\alpha(y)\in C^1(D)$ осуществляет его гомеоморфизм на $G=\alpha(D)$. Тогда для $f(x)\in L(G)$ функция $f[\alpha(y)]|(\det\mathcal{D}\alpha)(y)|$, где $\mathcal{D}\alpha=(\partial\alpha_i/\partial y_j)_1^k$ означает матрицу Якоби, суммируема на D и справедливо равенство*

$$\int\limits_G f(x)dx=\int\limits_D f[\alpha(y)]|\det(\mathcal{D}\alpha)(y)|dy.$$

Интеграл Лебега с аналогичными свойствами можно ввести и на гладких поверхностях по отношению к $(k-1)$-мерной мере Лебега. В качестве такой поверхности рассмотрим единичную сферу Ω, состоящую из точек $y \in \mathbb{R}^k$ с $|y| = 1$. Преобразование $(r, y) \to ry$ переводит $[r_1, r_2] \times \Omega$ на шаровой слой $r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2$ и предыдущие две теоремы для этого преобразования приводят к равенству

$$\int\limits_{r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2} \varphi(x) dx = \int\limits_{r_1}^{r_2} r^{k-1} dr \int\limits_{\Omega} \varphi(ry) d_{k-1} y. \tag{1.8.5}$$

В частности, функция $\varphi(x) = |x|^{-\alpha}$ суммируема в шаре $|x| < R$ при $\alpha < k$ и в его дополнении при $|\alpha| > k$. Более точно,

$$\begin{aligned} \int\limits_{|x|<R} |x|^{-\alpha} dx &= \frac{\operatorname{mes}\Omega}{k-\alpha} R^{k-\alpha}, \quad \alpha < k; \\ \int\limits_{|x|>R} |x|^{-\alpha} dx &= \frac{\operatorname{mes}\Omega}{\alpha-k} R^{\alpha-k}, \quad \alpha > k, \end{aligned} \tag{1.8.6}$$

где $\operatorname{mes}\Omega$ означает площадь $(k-1)$-мерной единичной сферы Ω.

Аналогичное утверждение справедливо и для функции $\varphi(x) = (\ln|x|)^n |x|^{-\alpha}$.

С интегрированием на гладких поверхностях тесно связана следующая формула Грина, которую также называют формулой интегрирования по частям.

Теорема (формула Грина). *Пусть функции $\varphi_j \in C(\overline{D})$, $1 \leqslant j \leqslant k$, непрерывно дифференцируемы в области D, ограниченной гладкой поверхностью Γ, причем их частные производные $\partial\varphi_j/\partial x_j$ суммируемы в этой области. Тогда*

$$\int\limits_{D} \left(\sum_{1}^{k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx = \int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{1}^{k} \varphi_j(y) n_j(y) \right) d_{k-1} y, \tag{1.8.7}$$

где вектор $n(y) = (n_1, \ldots, n_k)$ означает единичную внешнюю нормаль в точке y к поверхности Γ.

Обозначим $C^n(D)$ класс всех n раз непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$ на открытом множестве D, т. е. функций, все частные производные которых

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k} \varphi}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_k}}$$

до порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k \leqslant n$ существуют и непрерывны в каждой точке множества D. Здесь упорядоченный набор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ неотрицательных целых чисел называется мультииндексом длины $|\alpha|$.

Класс $C^\infty(D)$ бесконечно дифференцируемых функций определяется как пересечение по n классов C^n. Символ $C_0^\infty(D)$ закрепляется за классом бесконечно дифференцируемых функций φ, обращающихся в нуль вне некоторого компакта, содержащегося в D. Для $\varphi \in C_0^\infty(D)$ пересечение всех компактов, вне которых $\varphi = 0$, является, очевидно, также компактом, который называется носителем функции φ и обозначается $\operatorname{supp}\varphi$.

Широкий класс бесконечно дифференцируемых функций можно получить с помощью усредняющего ядра. Пусть неотрицательная функция $h(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ удовлетворяет условиям

$$h(y) = 0 \quad \text{при} \quad |y| \geqslant 1, \qquad \int\limits_{|y| \leqslant 1} h(y) dy = 1. \tag{1.8.8}$$

Такой выбор всегда возможен. Например, можно положить $h(y) = ce^{1/(1-|y|^2)}$ при $|y| < 1$ с подходящей постоянной $c > 0$.

Исходя из функции $\varphi(x)$, локально суммируемой во всем $\mathbb{R}^k$ (т. е. суммируемой на любом компакте K), рассмотрим семейство функций

$$(T_\varepsilon\varphi)(x) = \frac{1}{\varepsilon^k}\int\limits_{\mathbb{R}^k} h\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\varphi(y)dy, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{1.8.9}$$

Очевидно, интеграл здесь имеет смысл, поскольку в силу (1.8.8) он фактически берется по шару $B(x,\varepsilon) = \{y,\ |y-x| \leqslant \varepsilon\}$. Если x меняется в шаре $|x| < R$, то из тех же соображений интеграл можно брать по шару $|y| < R+1$, так что на основании теоремы 1.8.1 все функции $T_\varepsilon\varphi$ принадлежат классу $C^\infty(\mathbb{R}^k)$. Ясно, что если функция φ обращается в нуль вне некоторого компакта, т. е.. имеет компактный носитель, то аналогичным свойством обладают и функции $T_\varepsilon\varphi$, т. е. принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$.

Конструкция (1.8.9) используется для аппроксимации функции φ.

Лемма 1.8.1. *Пусть функция $\varphi(x)$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^k$. Тогда $T_\varepsilon\varphi \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ по* sup-*норме.*

Доказательство. Так как функция φ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^k$,

$$\omega(\varepsilon) = \sup_{|x-y|\leqslant\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(y)| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

С помощью подстановки $x - y = \varepsilon z$ перепишем интеграл (1.8.9) в виде

$$(T_\varepsilon\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} h(z)\varphi(x - \varepsilon z)dz.$$

С учетом (1.8.8) отсюда

$$(T_\varepsilon\varphi - \varphi)(x) = \int\limits_{|y|\leqslant 1} h(y)[\varphi(x-\varepsilon y) - \varphi(x)]dy,$$

что дает оценку

$$|T_\varepsilon\varphi - \varphi|_0 \leqslant \omega(\varepsilon)\int\limits_{|y|\leqslant 1} h(y)dy = \omega(\varepsilon).$$

Эта оценка показывает, что $T_\varepsilon\varphi \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ по sup-норме. □

Пусть компакт K содержится в области D, так что расстояние

$$r = \inf_{x\in K,\, y\in\partial D} |x-y|$$

от K до границы этой области положительно. Тогда, если суммируемая функция φ равна нулю вне K, то при $\varepsilon \leqslant \delta < r$ функция $T_\varepsilon\varphi$ принадлежат классу $C_0^\infty(D)$. В самом деле, введем расстояние

$$d(x,K) = \inf_{y\in K} |x-y| \tag{1.8.10}$$

от точки x до K. Эта функция непрерывна, так что множество $K_1 = \{x,\ d(x,K) \leqslant \delta\}$ является также компактом, содержащимся в D. Если $x \notin K_1$, то шар $B(x,\varepsilon)$ не пересекается с K и, следовательно, функция $\varphi = 0$ на этом шаре и соответственно $(T_\varepsilon\varphi)(x) = 0$. Таким образом, функция $T_\varepsilon\varphi \in C^\infty(D)$ равна нулю вне компакта $K_1 \subseteq D$, т. е. принадлежит $C_0^\infty(D)$.

Точно так же, если $\varphi = 1$ на компакте K_1 и $\varphi = 0$ вне этого компакта, то для достаточно малых ε неотрицательная функция $\chi = T_\varepsilon\varphi$ принадлежит $C_0^\infty(D)$ и тождественно равна 1 на компакте K. Функции этого типа называют срезающими. Их значение состоит в том, что для любой функции $\varphi \in C^\infty(D)$ произведение $\chi\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Приведенные соображения вместе с леммой 1.8.1 показывают, что верхнюю грань в (1.8.2) в действительности можно брать по $\varphi \in C_0^\infty(D)$. В самом деле, на основании этой леммы для каждой функции $\varphi \in C_0(D)$ последовательность $T_\varepsilon\varphi$ принадлежит $C_0^\infty(D)$ для достаточно малых ε и равномерно сходится к φ при $\varepsilon \to 0$.

Кроме того, срезающие функции приводят к так называемому разбиению единицы.

Лемма 1.8.2. *Пусть компакт K содержится в объединении открытых множеств $V_1, \dots, V_m$. Тогда существуют такие неотрицательные функции $\chi_j \in C_0^\infty(V_j)$, что их сумма тождественно равна 1 на K.*

Доказательство. Поскольку компакт $K_j = \overline{V_j \cap K}$ содержится в V_j, существует срезающая функция $\varphi_j \in C_0^\infty(V_j)$, тождественно равная 1 на K_j. Поэтому неотрицательная функция $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ не меньше 1 в точках $x \in K$. Следовательно, найдется такое открытое множество $V \supseteq K$, что $\varphi(x) \geqslant 1/2$ для $x \in V$. Поэтому $1/\varphi \in C^\infty(V)$ и функции $\chi_j = \varphi_j/\varphi$ удовлетворяют требованиям леммы. □

Введем понятие обобщенных функций в области D. С этой целью в классе $C_0^\infty(D)$ определим следующее понятие сходимости. Последовательность $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ в этом классе, если при достаточно больших k носитель функций φ_k и функции φ содержится в некотором компакте $K \subseteq D$ и все частные производные

$$\frac{\partial^\alpha \varphi_k}{\partial x^\alpha} \to \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}$$

при $k \to \infty$ равномерно на компакте K.

Линейные функционалы $u(\varphi)$ над классом $C_0^\infty(D)$, непрерывные по отношению к этой сходимости, называются обобщенными функциями. Класс всех таких функционалов является векторным пространством, он обозначается $(C_0^\infty)'(D)$.

Если функция f локально суммируема на D, т. е. суммируема на каждом компакте $K \subseteq D$, то равенство

$$\tilde{f}(\varphi) = \int\limits_D f(y)\varphi(y)dy \tag{1.8.11}$$

определяет линейный функционал $\tilde{f}$ над классом $C_0^\infty(D)$. Очевидно, он непрерывен относительно введенной сходимости, т. е. является обобщенной функцией. Как было отмечено, верхнюю грань в (1.8.2) можно брать по всем $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Поэтому, если $\tilde{f} = 0$, т. е. $\tilde{f}(\varphi) = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(D)$, то $f = 0$ почти всюду. Таким образом, обобщенная функция $\tilde{f}$ определяется по f однозначно, и ее можно отождествить с f, что и будет предполагаться в дальнейшем. Обобщенные функции этого типа называются регулярными.

Если $f \in C^\infty(D)$, то вместе с $u \in (C_0^\infty)'(D)$ линейный функционал $\tilde{u}(\varphi) = u(f\varphi)$ будет также обобщенной функцией. Он обозначается $\tilde{u} = fu$ и называется произведением f и u. Очевидно, сходимость $\varphi_n \to \varphi$ в C_0^∞ влечет аналогичное свойство и для частных производных. Поэтому в классе обобщенных функций можно ввести операцию дифференцирования, полагая

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(\varphi) = -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right). \tag{1.8.12}$$

В случае регулярных обобщенных функций $u \in C^1(D)$ она соответствует обычному дифференцированию. В самом деле, пусть $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Выберем область D_0 с гладкой границей так, чтобы $\overline{D}_0 \subseteq D$ и $\varphi \in C_0^\infty(D_0)$. Тогда по формуле Гаусса—Остроградского

$$\int\limits_D \frac{\partial u}{\partial x_j}\varphi dy = -\int\limits_D u\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dy,$$

поскольку интегралы по ∂D_0 исчезают. В соответствии с определением (1.8.11) регулярной обобщенной функции это равенство соответствует (1.8.12). Аналогичным образом определяются частные производные $\partial^\alpha u/\partial x^\alpha$ любого порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_k$.

В векторном пространстве $(C_0^\infty)'(D)$ введем понятие поточечной сходимости: по определению последовательность $u_n \to u$, если $u_n(\varphi) \to u(\varphi)$ при $n \to \infty$ для любого $\varphi \in C_0^\infty(D)$.

Теорема (о полноте пространства обобщенных функций). *Пусть $u_n \in (C_0^\infty)'(D)$, $n = 1, 2 \ldots$, и существует предел $u(\varphi) = \lim u_n(\varphi)$ для любого $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Тогда $u \in (C_0^\infty)'(D)$.*

Предположим, что для некоторого открытого множества $D_0 \subseteq D$ обобщенная функция u обращается в нуль на функциях $\varphi \in C_0^\infty(D_0)$. В этом случае говорим, что $u = 0$ на D_0. Дополнение к объединению всех открытых множеств, на которых $u = 0$, определяет носитель $\operatorname{supp} u$ обобщенной функции u. Примером обобщенной функции с компактным носителем служит δ-функция $\delta = \delta_a$, сосредоточенная в точке $a \in D$. Она определяется равенством

$$\delta_a(\varphi) = \varphi(a), \quad \varphi \in C_0^\infty. \tag{1.8.13}$$

Ее носитель состоит из одной точки $\{a\}$.

Как линейный функционал обобщенная функция u с компактным носителем естественным образом может быть определена на всем классе $C^\infty(D)$. В самом деле, рассмотрим срезку $\chi \in C_0^\infty(D)$, равную 1 на $\operatorname{supp} u$. Тогда $\chi u = u$ и можно положить $u(\varphi) = u(\chi\varphi)$, $\varphi \in C^\infty(D)$. Таким образом, класс обобщенных функций с компактным носителем естественно обозначить $(C^\infty)'(D)$. Как показывает следующая лемма, действие обобщенной функции с компактным носителем на функциях, зависящих от параметра, коммутирует с операциями дифференцирования и интегрирования по этому параметру.

Лемма 1.8.3. *Пусть заданы обобщенная функция u с компактным носителем $\operatorname{supp} u \subseteq D$, область $G \subseteq \mathbb{R}^s$ и функция $\varphi(x,t) \in C^\infty(G \times D)$. Тогда функция $\psi(x) = u_t[\varphi(x,t)] \in C^\infty(G)$, причем*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = u_t\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, \ldots, s. \tag{1.8.14}$$

Кроме того, для любого компакта $Q \subseteq G$ интеграл

$$\int\limits_Q \psi(x)dx = u\left[\int\limits_Q \varphi(x,t)dx\right]. \tag{1.8.15}$$

Здесь символ u_t означает, что u действует на функцию по переменной t.

Доказательство. Для простоты ограничимся одномерным случаем, когда $G \subseteq \mathbb{R}$ является интервалом. Пусть срезающая функция $\chi \in C_0^\infty(D)$ равна 1 на носителе $\operatorname{supp} u$. Если $x \in G$ и $x_n \to x$, то $\chi(t)\varphi(x_n,t) \to \chi(t)\varphi(x,t)$ в $C_0^\infty(D)$, так что функция ψ непрерывна в точке x. Аналогичным образом

$$\chi(t)\frac{\varphi(x+\varepsilon,t) - \varphi(x,t)}{\varepsilon} \to \chi(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

при $\varepsilon \to 0$ в $C_0^\infty(D)$. Поэтому

$$\frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon} = u_t\left[\frac{\varphi(x+\varepsilon,t) - \varphi(x,t)}{\varepsilon}\right] \to u\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$

откуда следует (1.8.14).

Пусть далее отрезок $Q = [a,b] \subseteq G$. Разделим его на n равных частей точками $x_0 = a$, $x_1, \ldots, x_n = b$ и рассмотрим сумму Римана

$$S_n\psi = \frac{1}{n}\sum_1^n \psi(x_k).$$

Очевидно, при $n \to \infty$ аналогичная сумма

$$\chi(t)(S_n\varphi)(t) = \frac{1}{n}\sum_1^n \chi(t)\varphi(x_k,t) \to \int\limits_Q \chi(t)\varphi(x,t)dx$$

в $C_0^\infty(D)$, так что и

$$S_n\psi = u[(S_n\varphi)(t)] \to u\left[\int\limits_Q \varphi(x,t)dx\right].$$

В результате приходим к равенству (1.8.15). $\square$

1.9. Уравнения Фредгольма второго рода

Свойства фредгольмовых операторов проиллюстрируем на примере интегральных уравнений второго рода. Исходя из компакта $G \subseteq \mathbb{R}^k$ и непрерывной функции $q(x,y) \in C(G\times G)$, рассмотрим интегральный оператор

$$(T\varphi)(x) = \int\limits_G \frac{q(x,y)}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)dy, \quad x \in G, \tag{1.9.1}$$

где $0 < \alpha < k$. В силу (1.8.6) интеграл здесь существует для любой ограниченной измеримой функции φ. Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что

$$k/2 < \alpha < k. \tag{1.9.2}$$

Если функция $q(x,y) = 0$ при $|x-y| \leqslant \delta$ для некоторого малого δ, то ядро $q(x,y)|x-y|^{-\alpha}$ интегрального оператора непрерывно на $G\times G$ и оператор T компактен в пространстве $C(G)$, т. е. принадлежит $\mathcal{T}(C)$. Это факт легко следует из теоремы Арцела—Асколи, поскольку для ограниченной в $C(G)$ последовательности φ_n последовательность функций $(T\varphi_n)(x)$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна.

В действительности отмеченный факт справедлив и в общем случае.

Лемма 1.9.1. *Для любой функции $q \in C(G\times G)$ оператор $T(q)$ компактен в пространстве $C(G)$.*

Доказательство. Пусть $|\cdot|_0$ означает sup-норму функций. Тогда в силу (1.8.6) имеем оценку $|(T\varphi)(x)| \leqslant C|q|_0|\varphi|_0$ с постоянной

$$C = \sup_{x\in G}\int\limits_G |x-y|^{-\alpha}dy,$$

так что

$$|T\varphi|_0 \leqslant C|q|_0|\varphi|_0. \tag{1.9.3}$$

Точно так же проверяется, что если дополнительно $q(x,y) = 0$ при $|x-y| \geqslant \delta$, то

$$|T\varphi|_0 \leqslant C\delta^{k-\alpha}|q|_0|\varphi|_0. \tag{1.9.4}$$

Пусть неотрицательная функция $\chi_n(s) \in C(\mathbb{R})$ не превосходит 1, причем $\chi_n(s) = 0$ при $|s| \leqslant 1/2n$ и $\chi_n(s) = 1$ при $|s| \geqslant 1/n$. Тогда оператор $T(q_n)$ с $q_n(x,y) = \chi_n(|x-y|)q(x,y)$ компактен в пространстве $C(G)$. Применяя (1.9.3) к разности $T(q) - T(q_n) = T(q-q_n)$, получим оценку

$$|T(q-q_n)\varphi|_0 \leqslant Cn^{\alpha-k}|q|_0|\varphi_0|. \tag{1.9.5}$$

Она показывает, что последовательность непрерывных функций $T(q_n)\varphi$ равномерно сходится к $T(q)\varphi$, так что последняя функция также непрерывна. С учетом (1.9.3) отсюда заключаем, что оператор $T(q)$ ограничен в пространстве C. В действительности оценка (1.9.5) означает, что последовательность операторов $T(q_n) \in \mathcal{T}(C)$ сходится к $T(q)$ по операторной норме. На основании теоремы 1.2.3 отсюда заключаем, что компактен и оператор $T(q)$. $\square$

Лемма 1.9.1 совместно с теоремой Рисса—Шаудера из пункта 1.3 означает, что оператор $1 - T(q)$ фредгольмов и его индекс равен нулю. Легко видеть, что оператор $T(q)$ допускает союзный относительно билинейной формы

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_G \varphi(y)\psi(y)dy,$$

который принадлежит к тому же типу:

$$[T(q)]' = T(\widetilde{q}), \quad \widetilde{q}(x,y) = q(y,x).$$

Следовательно, союзный оператор $[1-T(q)]' = 1 - T(\widetilde{q})$ также фредгольмов индекса нуль и по теореме 1.3.2 оператор $N = 1 - T(q)$ союзно фредгольмов.

Таким образом, для уравнения Фредгольма второго рода

$$\varphi(x) - [T(q)\varphi](x) = f(x), \quad x \in G, \tag{1.9.6}$$

справедливы следующие классические альтернативы:

1) *соответствующее* (1.9.6) *однородное уравнение имеет конечное число* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(G)$ *линейно независимых решений*;
2) *однородное союзное уравнение* $\psi(x) - [T(\widetilde{q})\psi](x) = 0$ *имеет то же число линейно-независимых решений* $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C(G)$;
3) *неоднородное уравнение* (1.9.6) *разрешимо тогда и только тогда, когда* $(f, \psi_j) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Если ядро $\ker[1 - T(q)]$ нулевое, то оператор $1 - T(q)$ обратим. Основная цель дальнейших рассмотрений — убедиться, что обратный оператор имеет тот же вид, т. е. $[1 - T(q)]^{-1} = 1 - T(q_1)$ с некоторой функцией $q_1 \in C(G \times G)$.

С этой целью введем в классе $C(G \times G)$ билинейную операцию $p * q$ по формуле

$$(p * q)(x, y) = |x - y|^\alpha \int\limits_G \frac{p(x, z)q(z, y)}{|x - z|^\alpha\, |y - z|^\alpha} dz, \quad x \neq y \tag{1.9.7}$$

Это определение мотивировано тем, что перестановка повторного интегрирования $T(p)[T(q)\varphi]$ приводит к равенству

$$T(p)T(q) = T(p * q). \tag{1.9.8}$$

Однако предварительно необходимо убедиться, что операция (1.9.7) не выводит из класса $C(G \times G)$.

Лемма 1.9.2. *Билинейное отображение* (1.9.7) *ограничено* $C \times C \to C$. *Кроме того, при фиксированном* p *линейный оператор* $R(p)q = p * q$ *компактен в пространстве* $C(G \times G)$.

Доказательство. Эта лемма доказывается по той же схеме, что и лемма 1.9.1. При $x \neq y$ имеем:

$$|(p * q)(x, y)| \leqslant |p|_0 |q|_0 \int\limits_{\mathbb{R}^k} \frac{|x - y|^\alpha dz}{|z - x|^\alpha\, |z - y|^\alpha},$$

где интеграл понимается как несобственный по отношению к $z = x$, $z = y$ и $z = \infty$. В силу (1.8.6) и (1.9.2) этот интеграл существует. Замена $z = y + |x - y|z'$ переводит его в

$$|x - y|^{k-\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \frac{dz}{|z|^\alpha |z - e|^\alpha}, \quad e = \frac{x - y}{|x - y|}.$$

Очевидно,

$$\frac{1}{|z|^\alpha |z - e|^\alpha} \leqslant 2^\alpha \begin{cases} |z|^{-\alpha}, & |z| \leqslant 1/2, \\ |z - e|^{-\alpha}, & 1/2 \leqslant |z| \leqslant 2, \\ |z|^{-2\alpha}, & |z| \geqslant 1/2, \end{cases}$$

Поэтому с учетом (1.8.6) интеграл здесь ограничен равномерно по $|e| = 1$. Таким образом,

$$|p * q|_0 \leqslant C |p|_0 |q|_0. \tag{1.9.9}$$

Если функция $q(z, y) \equiv 0$ при $|z - y| \geqslant \delta$, то аналогичным образом можно записать

$$|(p * q)(x, y)| \leqslant |x - y|^{k-\alpha} |p|_0 |q|_0 \int\limits_{|x-y||z| \leqslant \delta} \frac{dz}{|z|^\alpha\, |z - e|^\alpha}.$$

При $|x - y| \leqslant \sqrt{\delta}$ имеем очевидное неравенство

$$|x - y|^{k-\alpha} \int\limits_{|x-y||z| \leqslant \delta} \frac{dz}{|z|^\alpha\, |z - e|^\alpha} \leqslant \delta^{(k-\alpha)/2} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \frac{dz}{|z|^\alpha\, |z - e|^\alpha}.$$

Если $|x - y| \geqslant \sqrt{\delta}$, то шар $\{|z| \leqslant \delta / |x - y|\}$ содержится в $\{|z| \leqslant \sqrt{\delta}$, и поэтому

$$|x - y|^{k-\alpha} \int\limits_{|x-y||z| \leqslant \delta} \frac{dz}{|z|^\alpha\, |z - e|^\alpha} \leqslant R^{k-\alpha} \delta^{(k-\alpha)/2},$$

где R — диаметр G. В результате приходим к оценке

$$|p * q|_0 \leqslant C |p|_0 |q|_0 \delta^{(k-\alpha)/2}. \tag{1.9.10}$$

Совершенно аналогично эта оценка устанавливается и в случае, когда $p(x,y)=0$ при $|x-y|\geqslant\delta$.

Пусть p_n и q_n определяются по, соответственно, p и q, как при доказательстве леммы 1.9.1. Тогда, записывая

$$p*q-p_n*q_n=(p-p_n)*q+p_n*(q-q_n)$$

и применяя к слагаемым в правой части этого равенства оценку (1.9.10), получим

$$|p*q-p_n*q_n|\leqslant 2Cn^{(\alpha-k)/2}|p|_0|q|_0, \tag{1.9.11}$$

так что последовательность функций $p_n*q_n\in C(G\times G)$ равномерно сходится к $p*q$. Совместно с (1.9.9) отсюда заключаем, что билинейное отображение $*$ ограничено $C\times C\to C$.

Оператор $R_nq=p_n*q$ запишем в форме

$$(R_nq)(x,y)=\int\limits_G\frac{r_n(x,z)q(y,z)}{|y-z|^\alpha}dz$$

с непрерывной функцией $r_n(x,z)=p_n(x,z)|x-z|^{-\alpha}$. Если переменную y рассматривать как параметр, то этот оператор имеет вид (1.9.1), где роль $q(x,z)$ играет функция $r_n(x,z)$. Поэтому, как и при доказательстве леммы 1.9.1, убеждаемся, что оператор R_n компактен в пространстве $C(G\times G)$. Аналогично (1.9.11) можно получить оценку

$$|R(p_n)q-R(p)q|_0\leqslant Cn^{(\alpha-k)/2}|p|_0|q|_0,$$

на основании которой последовательность $R(p_n)$ сходится к $R(p)$ по операторной норме. Следовательно, оператор $R(p)$ компактен. $\square$

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1.9.1. *Существует такое дискретное (не более чем счетное) множество $\Lambda\subseteq\mathbb{C}$, что оператор $1-\lambda T(q)$ обратим для всех $\lambda\notin\Lambda$. При этом*

$$[1-\lambda T(q)]^{-1}=1-T(r_\lambda), \tag{1.9.12}$$

где функция $r_z(x,y)\in C(G\times G)$ аналитична по z в открытом множестве $\mathbb{C}\setminus\Lambda$ и в точках $\lambda\in\Lambda$ допускает полюса.

Основываясь на понятии аналитических вектор-функций со значениями в банаховом пространстве, которое было введено в конце пункта 1.4, свойства фредгольмовых операторов пункта 1.3 дополним следующим результатом.

Теорема 1.9.2. *Пусть задано банахово пространство X, снабженное двойственностью относительно билинейной формы $(\ ,\ )$ на $X\times X$. Пусть оператор-функция $N(\lambda)\in\mathcal{L}(X)$ аналитична по λ в круге $|\lambda|<1$ и оператор $N(0)$ фредгольмов индекса нуль. Тогда существует такое $0<r<1$ и натуральное m, что оператор $N(\lambda)$ обратим при $0<|\lambda|<r$ и оператор-функция $\lambda^mN^{-1}(\lambda)$ аналитична в круге $|\lambda|<r$.*

Доказательство. По предположению существуют в X такие линейно независимые системы векторов $x_1,\dots,x_n$ и $y_1,\dots,y_n$, что

$$\ker N(0)=[x_1,\dots,x_n],\quad X=[y_1,\dots,y_n]\oplus\operatorname{Im}N(0). \tag{1.9.13}$$

Пусть система $\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_n$ биортогональна к $x_1,\dots,x_n$. Рассмотрим оператор

$$\widetilde{N}(\lambda)x=N(\lambda)x-\sum_{j=1}^n(x,\widetilde{x}_j)y_j,\quad x\in X. \tag{1.9.14}$$

В силу (1.9.13) равенство $\widetilde{N}(0)x=0$ влечет $N(0)x=0$, $(x,\widetilde{x}_j)=0$, $1\leqslant j\leqslant n$, что равносильно $x=0$. Таким образом, оператор $\widetilde{N}(0)$ фредгольмов индекса нуль и его ядро нулевое. Следовательно, он обратим, так что существует такое $0<r<1$, что обратим и оператор $\widetilde{N}(\lambda)$ при $|\lambda|<r$. Ясно, что оператор-функция $\widetilde{N}^{-1}(\lambda)$ аналитична в круге $|\lambda|<r$. Из (1.9.14) следует, что

$$\widetilde{N}^{-1}(\lambda)N(\lambda)x=x-\sum_{j=1}^n(x,\widetilde{x}_j)\widetilde{y}_j(\lambda),\quad \widetilde{y}_j(\lambda)=\widetilde{N}^{-1}(\lambda)y_j. \tag{1.9.15}$$

Рассмотрим $n \times n$-матрицу $A(\lambda)$ с элементами $A_{ij}(\lambda) = \delta_{ij} - (\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j(\lambda))$. Очевидно, она аналитична в круге $|\lambda| < r$. Пусть m есть порядок нуля функции $\det A(\lambda)$ в точке $\lambda = 0$ (при $\det A(0) \neq 0$ полагаем $m = 0$). Выберем $r > 0$ столь малым, что $\det A(\lambda) \neq 0$ при $0 < |\lambda| < r$. Тогда функция $B(\lambda) = \lambda^m A^{-1}(\lambda)$ аналитична в круге $|\lambda| < r$. При $0 < |\lambda| < r$ уравнение

$$x - \sum_{j=1}^{n} (x, \tilde{x}_j)\tilde{y}_j(\lambda) = y \tag{1.9.16}$$

однозначно разрешимо. В самом деле, умножая его скалярно на $\tilde{x}_i$, для вектора $\xi \in \mathbb{C}^n$ с элементами $\xi_i = (x, \tilde{x}_i)$ получим систему $A(\lambda)\xi = \eta$, где $\eta_i = (y, \tilde{x}_i)$. Обращая эту систему, получим:

$$(x, \tilde{x}_j) = \lambda^{-m} \sum_{k=1}^{n} B_{jk}(\lambda)(y, \tilde{x}_k), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

В результате приходим к формуле обращения системы (1.9.16):

$$x = y + \lambda^{-m} \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} B_{jk}(\lambda)(y, \tilde{x}_k) y_j(\lambda).$$

Обозначая правую часть этого выражения $\lambda^{-m} M(\lambda) y$, в соответствии с (1.9.15) заключаем, что оператор $N(\lambda)$ обратим и $N^{-1}(\lambda) = \lambda^{-m} M(\lambda) \widetilde{N}^{-1}(\lambda)$. □

Доказательство теоремы 1.9.1. Зафиксируем $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ и к оператору $N(z) = 1 - (z + \lambda_0)T(q)$ применим теорему 1.9.2. На основании этой теоремы найдутся такие $r > 0$ и неотрицательное целое m, что оператор $1 - \lambda T(q)$ обратим при $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$ и оператор-функция $(\lambda - \lambda_0)^m [1 - \lambda T(q)]^{-1}$ аналитична в круге $|\lambda - \lambda_0| < r$.

В силу (1.9.8) операторное равенство $[1 - T(\lambda q)][1 - T(r_\lambda)] = 1$ равносильно соотношению

$$\lambda q + r_\lambda = \lambda q * r_\lambda, \tag{1.9.17}$$

которое будем рассматривать как уравнение относительно r_λ. Если $\widetilde{r}_\lambda$ есть некоторое другое его решение, то тогда

$$[1 - T(\lambda q)][1 - T(r_\lambda)] = [1 - T(\lambda q)][1 - T(\widetilde{r}_\lambda)] = 1.$$

Поскольку оператор $1 - T(\lambda q)$ обратим при $\lambda \neq \lambda_0$, отсюда $z_\lambda = \widetilde{r}_\lambda$. Таким образом, уравнение (1.9.17) может допускать только одно решение. В обозначениях леммы 1.9.2 его можно записать в форме

$$[1 - \lambda R(q)] r_\lambda = -\lambda q$$

с компактным оператором $R(q)$, действующим в пространстве $C(G \times G)$. Поэтому уравнение (1.9.17) однозначно разрешимо.

Итак, для фиксированного $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ существует такое $r > 0$ и функция $r_\lambda(x, y) \in C(G \times G)$, аналитическая по λ в области $0 < |\lambda - \lambda_0| < r$, что

$$[1 - \lambda T(q)]^{-1} = 1 - T(r_\lambda).$$

При этом функция $r_\lambda(x, y)$ может допускать в точке $\lambda = \lambda_0$ полюс порядка не выше m.

Поскольку точка λ_0 была выбрана произвольной, отсюда следует утверждение теоремы. □

Подробное изложение теории интегральных уравнений Фредгольма второго рода, перекрывающее материал данного раздела, приведено в книге Рисс, Секефальви-Надь [45].

Глава 2

ГЕЛЬДЕРОВЫ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Условие Гельдера

Пусть $C(G)$ означает класс всех непрерывных функций $\varphi(x)$ на множестве $G \subseteq \mathbb{R}^k$. Заметим, что при дополнительном требовании равномерной непрерывности на G функция φ продолжается по непрерывности до $\tilde{\varphi} \in C(\overline{G})$.

В самом деле, если последовательность x_n сходится к $x \in \overline{G} \setminus G$, то в силу равномерной непрерывности φ числовая последовательность $\varphi(x_n)$ является последовательностью Коши. Поэтому существует предел $\lim \varphi(x_n)$, который обозначим $\tilde{\varphi}(x)$ и который не зависит от выбора последовательности. Полагая $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$, $x \in G$, в результате получим функцию $\tilde{\varphi}$, которая, как легко видеть, непрерывна на $\overline{G}$.

По сравнению с равномерно непрерывными функциями более узкий класс образуют функции, удовлетворяющие условию Гельдера. По определению функция φ удовлетворяет на множестве G условию Гельдера с показателем $0 < \mu < 1$ (условию Липшица при $\mu = 1$), если выполнена оценка

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C|x-y|^{\mu}, \quad x, y \in G, \tag{2.1.1}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от x, y. Наименьшая постоянная C в этом условии Гельдера представляет собой верхнюю грань

$$[\varphi]_{\mu} = \sup_{x,y \in G,\, x \neq y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^{\mu}}. \tag{2.1.2}$$

Это равенство определяет полунорму, т. е. для $[\ ]_{\mu}$ выполнены все условия 1)–3) нормы из пункта 1.1, кроме первого: если $[\varphi]_{\mu} = 0$, то функция φ постоянна на множестве G. Обозначение (2.1.2) используем и для случая $\mu = 0$, в этом случае $[\varphi]_0$ есть точная верхняя грань $|\varphi(x) - \varphi(y)|$ и характеризует колебание φ на множестве G. В дальнейшем при необходимости зависимость полунормы (2.1.2) от G указываем обозначением $[\varphi]_{\mu,G}$.

Из определения (2.1.1) видно, что функция φ равномерно непрерывна на множестве G и потому продолжается по непрерывности на замыкание $\overline{G}$ с сохранением той же оценки. По этой причине условие Гельдера обычно рассматривают для замкнутых множеств G, что никак не снижает общности.

Рассмотрим несколько примеров. Неравенство $1 - s^{\mu} \leqslant 1 - s \leqslant (1-s)^{\mu}$ при $0 \leqslant s \leqslant 1$ показывает, что $[\varphi]_{\mu} = 1$ для функции $\varphi(t) = t^{\mu}$ на полуоси $t > 0$. В частности,

$$||x|^{\mu} - |y|^{\mu}| \leqslant ||x| - |y||^{\mu} \leqslant |x-y|^{\mu}. \tag{2.1.3}$$

Фигурирующее здесь второе неравенство является следствием неравенства треугольника, оно означает, что функция $\varphi(x) = |x|$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $[\varphi]_1 = 1$. Другой пример функции такого типа доставляет расстояние $d(x, F)$ от точки x до множества F:

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} |x - z|. \tag{2.1.4}$$

Утверждается, что эта функция удовлетворяет условию Липшица:

$$|d(x, F) - d(y, F)| \leqslant |x - y|. \tag{2.1.5}$$

В самом деле, для $z \in F$ в силу неравенства треугольника $d(x) \leqslant |x-y| + |y-z|$ и, следовательно, $d(x) \leqslant |x-y| + d(y)$. Поскольку точки x и y можно поменять местами, отсюда следует (2.1.5).

Заметим, что функция $\varphi(x) = d(x, F)$ обращается в нуль на замкнутом множестве $\overline{F}$ и положительна вне его. Нетрудно видеть также, что ее полунорма $[\varphi]_1$ в точности равна 1.

Аналогично (2.1.4) можно ввести и расстояние между множествами как нижнюю грань

$$d(E, F) = \inf_{x \in E,\, y \in F} |x - y|.$$

Если эти множества замкнуты и не пересекаются, причем одно из них ограничено (т. е. компактно), то расстояние $d(E, F) > 0$.

Отметим некоторые элементарные оценки полунормы $[\ ]_{\mu}$ от произведения и суперпозиции функций:

$$\begin{aligned} &a) \quad [\varphi\psi]_{\mu} \leqslant |\varphi|_0 [\psi]_{\mu} + [\varphi]_{\mu} |\psi|_0; \\ &b) \quad [f \circ \varphi]_{\mu,G} \leqslant [f]_{1,D} [\varphi]_{\mu,G}, \quad \varphi(G) \subseteq D; \\ &c) \quad [\varphi \circ \alpha]_{\mu,\widetilde{G}} \leqslant [\varphi]_{\mu,G} [\alpha]^{\mu}_{1,\widetilde{G}}, \quad \alpha(\widetilde{G}) \subseteq G. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Подчеркнем, что условие Гельдера в равной мере можно использовать как для скалярных функций, так и для вектор-функций $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_s)$, принимающих значения в $\mathbb{R}^s$. В последнем случае под $|\varphi(x)-\varphi(y)|$ в левой части (2.1.1) понимается какая-либо фиксированная норма пространства $\mathbb{R}^s$. В этом смысле функцию φ в (2.1.6)(b) можно считать вектор-функцией со значениями в $D\subseteq\mathbb{R}^s$ и аналогично α в (2.1.6)(c) является вектор-функцией со значениями в $G\subseteq\mathbb{R}^k$.

Особо отметим следующее интерполяционное свойство полунормы Гельдера:

$$[\varphi]_\mu \leqslant [\varphi]_0^{1-\mu/\nu}[\varphi]_\nu^{\mu/\nu}, \quad 0\leqslant\mu\leqslant\nu, \tag{2.1.7}$$

которое непосредственно вытекает из равенства

$$\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu} = |\varphi(x)-\varphi(y)|^{1-\mu/\nu}\left[\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\nu}\right]^{\mu/\nu}.$$

Это неравенство хорошо известно и часто используется в теории интерполяции операторов [26].

Подробное изложение свойств функций, удовлетворяющих условию Гельдера, содержится в книге Н. И. Мусхелишвили [36]. Наиболее часто эти пространства (в той или иной мере) встречаются при исследовании дифференциальных уравнений (см., например, [27, 28]). Однако ниже рассмотрены и некоторые дополнительные вопросы, для которых не всегда можно указать ссылки на литературу.

Условие Гельдера часто достаточно проверять локально в окрестности точек. Например, пусть множество G ограничено и для каждой точки $a\in\overline{G}$ найдется такой шар $B(a)$ с центром в этой точке, что φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ внутри этого шара. Тогда можно выбрать конечное число этих шаров $B(a_j)$, $1\leqslant j\leqslant m$, покрывающих $\overline{G}$. Следующая теорема показывает, что тогда φ удовлетворяет условию Гельдера на всем множестве.

Условимся под окрестностями ∞ понимать множества, содержащие внешность некоторого шара.

Теорема 2.1.1. *Пусть замкнутое множество $\overline{G}$ содержится в объединении открытых множеств $V_1,\dots,V_m$, причем одно из них является окрестностью ∞, если G неограничено. Тогда справедлива оценка*

$$[\varphi]_{\mu,G}\leqslant C\max(|\varphi|_{0,G},[\varphi]_{\mu,G\cap V_1},\dots,[\varphi]_{\mu,G\cap V_m}), \tag{2.1.8}$$

где постоянная $C>0$ не зависит от φ.

Доказательство. Существует такое $r>0$, что любая пара точек $x,y\in G$, расстояние между которыми не превосходит r, лежит в некотором G_i. В самом деле, в противном случае найдутся такие последовательности $x_n,y_n\in G$, что $x_n-y_n\to 0$ при $n\to\infty$ и при каждом n точки x_n,y_n принадлежат двум различным множествам V_i. Переходя к подпоследовательностям, можно считать, что либо обе последовательности сходятся к одной точке $a\in\overline{G}$, либо $|x_n|\to\infty$. Пусть множество V_i содержит a в первом случае и является окрестностью ∞ во втором случае. Тогда в обоих случаях для достаточно больших n обе точки x_n,y_n принадлежат одному множеству V_i, что приводит к противоречию с принятым предположением.

Итак, любая пара точек $x,y\in G$, расстояние между которыми не превосходит r, лежит в некотором G_i. Поэтому

$$|\varphi(x)-\varphi(y)||x-y|^{-\mu}\leqslant\max([\varphi]_{\mu,G_1},\dots,[\varphi]_{\mu,G_m}).$$

при $x,y\in G$, $|x-y|\leqslant r$. С другой стороны, при $|x-y|>r$ имеем очевидное неравенство

$$|\varphi(x)-\varphi(y)||x-y|^{-\mu}\leqslant r^{-\mu}[\varphi]_{0,G},$$

так что в (2.1.8) можно положить $C=\max(1,r^{-\mu})$. $\square$

В общем случае, если G представлено в виде объединения множеств $G_1,\dots,G_m$ и заданная на G функция φ удовлетворяет условию Гельдера на каждом из множеств G_i, то возникает вопрос, выполнено ли это условие по отношению ко всему множеству G. То, что оно не всегда выполнено, показывает следующий пример.

Пусть $G=G_0\cup G_1\subseteq\mathbb{R}^2$, где G_0 есть отрезок $\{x_2=0,\ 0\leqslant x_1\leqslant 1\}$, а G_1 — дуга параболы $\{x_2=x_1^2,\ 0\leqslant x_1\leqslant 1\}$. Рассмотрим на G функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\in G_0,\\ x_1, & x\in G_1.\end{cases}$$

Легко видеть, что эта функция удовлетворяет условию Липшица на G_1. С другой стороны, для точек $x = (t, 0),\ y = (t, t^2) \in G$ отношение

$$|\varphi(x) - \varphi(y)||x - y|^{-\mu} = t^{1-2\mu}$$

неограничено при $\mu > 1/2$.

При некоторых предположениях относительно множества G рассматриваемый вопрос можно решить положительно.

Как известно, простой (или жордановой) дугой $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^k$ называется гомеоморфный образ $\gamma(I)$ отрезка I прямой $\mathbb{R}$. Само отображение γ называется параметризацией дуги, оно определяет естественный порядок ее точек, т. е. ориентацию кривой. По определению дуга Γ спрямляема, если она допускает параметризацию γ, которая является вектор-функцией ограниченной вариации. Другими словами, существует такая постоянная $C > 0$, что

$$|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| + |\gamma(t_2) - \gamma(t_3)| + \ldots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)| \leqslant C$$

для любого набора точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ отрезка I. Заметим, что геометрически сумма здесь представляет собой длину ломаной, вписанной в кривую Γ. По этой причине верхнюю грань этой суммы естественно назвать длиной $l(\Gamma)$ дуги.

Связное множество линейно связно, если любые две его точки можно соединить жордановой дугой. Например, открытые связные множества, называемые областями, линейно связны. Данное определение можно усилить. Множество G назовем равномерно связным, если существует такая постоянная $M > 0$, что любые две точки $x, y \in G$ можно соединить спрямляемой дугой $\Gamma_{x,y} \subseteq G$, длина которой допускает оценку

$$l(\Gamma_{x,y}) \leqslant M|x - y|, \quad x, y \in G. \tag{2.1.9}$$

Чтобы подчеркнуть зависимость этого определения от постоянной M, эти множества называем также M-равномерно связными. Их иногда также называют множествами, регулярными в смысле Уитни [69].

Очевидным примером равномерно связных множеств служат выпуклые множества, для которых в качестве дуги $\Gamma_{x,y}$ можно выбрать отрезок, так что (2.1.9) переходит в равенство с $M = 1$.

Теорема 2.1.2. *Пусть M-равномерно связное множество G представлено в виде объединения своих подмножеств $G_1, \ldots, G_m$. Тогда имеет место оценка*

$$[\varphi]_{\mu,G} \leqslant (m - 1)M^\mu \max([\varphi]_{\mu,G_1}, \ldots, [\varphi]_{\mu,G_m}). \tag{2.1.10}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать множества G и $G_1, \ldots, G_m$ замкнутыми. Пусть $x, y \in G$ и $\Gamma = \Gamma_{x,y}$ — дуга, о которой идет речь в (2.1.9). Тогда на этой дуге можно выбрать такие $n < m$ точек $x_1 = x,\ x_2, \ldots, x_n = y$ (в порядке следования ее ориентации), что любые две соседние из них принадлежат одному множеству G_k. Этот факт легко установить индукцией по m. Для $m = 1$ доказывать нечего. Предположим, что утверждение справедливо для $m - 1$ множеств G_k и рассмотрим случай множеств $G_1, \ldots, G_m$. Не ограничивая общности, можно считать, что точки x и y принадлежат различным множествам G_k, пусть для определенности $x \notin G_m,\ y \in G_m$. Выберем на Γ ближайшую к x точку $y' \in G_m$, что в силу замкнутости G_m возможно. В силу связности дуги Γ эта точка принадлежит и множеству $G_1 \cup \ldots \cup G_{m-1}$, Тогда дуга $\Gamma' \subseteq \Gamma$ с концами x, y' покрыта $m - 1$ множествами $G_1, \ldots, G_{m-1}$, и остается воспользоваться предположением индукции.

Итак, пусть любые две соседние точки дуги Γ последовательности $x_1 = x,\ x_2, \ldots,\ x_n = y$, $n \leqslant m - 1$, принадлежат одному из множеств $G_1, \ldots, G_m$. Тогда

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| + \ldots + |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_m)| \leqslant$$
$$\leqslant \max(|\varphi|_{\mu,G_1}, \ldots, |\varphi|_{\mu,G_m})(|x_1 - x_2|^\mu + \ldots + |x_{n-1} - x_n|^\mu).$$

Поскольку $|x_{i-1} - x_i| \leqslant l(\Gamma_{x,y})$, отсюда с учетом (2.1.9) приходим к оценке (2.1.10). □

В качестве иллюстрации теоремы рассмотрим следующую ситуацию. Пусть множество G произвольно и функция $\varphi \in C^\mu(\overline{G})$ обращается в нуль на границе ∂G. Тогда функция $\tilde{\varphi}$, продолженная нулем на все $G = \mathbb{R}^k$, будет удовлетворять условию теоремы с $G_1 = G,\ G_2 = \mathbb{R}^k \setminus G$ и $M = 1$. Согласно (2.1.10) в этом случае $[\tilde{\varphi}]_\mu = [\varphi]_{\mu,G}$.

Как показывает доказательство теоремы 2.1.1, для некоторого $r > 0$ полунорма

$$[\varphi]'_{\mu,G} = \sup_{x,y\in G,\, |x-y|\leqslant r} \frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^{\mu}} \tag{2.1.11}$$

конечна. По отношению к этой полунорме имеем очевидную оценку

$$[\varphi]_{\mu} \leqslant \max(r^{-\mu}[\varphi]_0, [\varphi]'_{\mu}).$$

В случае, когда множество G связно, ее можно усилить.

Теорема 2.1.3. *Если множество G ограничено и связно, то в обозначениях* (2.1.11) *имеет место оценка*

$$[\varphi]_{\mu} \leqslant C[\varphi]'_{\mu},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от r и диаметра R множества G.

Доказательство. Оно сводится к оценке $[\varphi]_0$ через $[\varphi]'_{\mu}$. Пусть замкнутый шар B радиуса R содержит множество G. Этот шар можно покрыть конечным числом открытых шаров $B_1,\ldots,B_m$ радиуса $r/3$. Очевидно, минимальное число m этих шаров зависит только от r и R. Рассмотрим те из них, которые имеют непустое пересечение с G, и пусть открытое множество D есть объединение этих шаров. Поскольку G связно, множество D также связно. В частности, любые две точки $x,y\in G$ можно соединить дугой $\Gamma\subseteq D$. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 2.1.2, можно выбрать такие точки $x_1 = x,\ x_2,\ldots,x_n = y$, $n\leqslant m$, что любые две соседние точки x_k, x_{k+1} из них принадлежат одному из множеств $B_{j_k}\subseteq D$. По условию для любого $1 < k < n$ найдется точка $z_k\in B_{j_k}\cap G$, так что

$$|z_k - z_{k+1}| \leqslant |z_k - x_k| + |x_k - x_{k+1}| + |z_{k+1} - x_{k+1}| \leqslant r.$$

Полагая $z_1 = x$ и $z_n = y$, отсюда

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant [\varphi]'_{\mu}\sum_{k=1}^{n-1}|z_k - z_{k+1}|^{\mu} \leqslant nr^{\mu}[\varphi]'_{\mu},$$

что завершает доказательство теоремы. □

Отдельно выделим следующее важное свойство гельдеровых функций.

Лемма 2.1.1. *Пусть функция $\psi(x,y)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем ν на множестве $G\times G$ и обращается в нуль при $x = y$. Тогда для $0 < \mu < \nu$ функция $\psi_0(x,y) = |x-y|^{\mu-\nu}\psi(x,y)$, доопределенная нулем при $x = y$, удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ и допускает оценку*

$$[\psi_0]_{\mu} \leqslant 6[\psi]_{\nu}. \tag{2.1.12}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что

$$|\psi(x,y)| = |\psi(x,y)-\psi(x,x)| \leqslant [\psi]_{\nu}|x-y|^{\nu}$$

и, следовательно, $\psi_(x,y)\to 0$ при $x-y\to 0$.

Зафиксируем $x_0\in G$ и рассмотрим функции $\varphi(x) = \psi(x,x_0)$, $\varphi_0(x) = \psi_0(x,x_0)$ одной переменной x. Эти функции связаны аналогичным соотношением $\varphi_0(x) = |x-x_0|^{\mu-\nu}\varphi(x)$. Утверждается, что

$$[\varphi_0]_{\mu} \leqslant 3[\varphi]_{\nu}. \tag{2.1.13}$$

Очевидно, эту оценку достаточно установить в предположении $x_0 = 0$ (в противном случае достаточно сделать замену $x' = x - x_0$, не меняющую полунорму $[\ ]_{\mu}$). Пусть $x,y\in G$ и для определенности $|y|\leqslant|x|$. Полагая для краткости $\varepsilon = \nu-\mu$, запишем

$$|\varphi_0(x)-\varphi_0(y)| \leqslant |\varphi(x)-\varphi(y)||x|^{-\varepsilon} + |\varphi(y)|\,\big||x|^{-\varepsilon}-|y|^{-\varepsilon}\big|$$

и воспользуемся тем, что $|\varphi(y)|\leqslant[\varphi]_{\nu}|y|^{\mu+\varepsilon}$. Тогда

$$\frac{|\varphi_0(x)-\varphi_0(y)|}{|x-y|^{\mu}} \leqslant [\varphi]_{\nu}\Delta, \quad \Delta = \frac{|x-y|^{\varepsilon}}{|x|^{\varepsilon}} + \frac{(|x|^{\varepsilon}-|y|^{\varepsilon})|y|^{\mu}}{|x-y|^{\mu}|x|^{\varepsilon}}.$$

Очевидно,

$$\Delta \leqslant \frac{(|x|+|y|)^\varepsilon}{|x|^\varepsilon} + \frac{(|x|^\varepsilon - |y|^\varepsilon)|y|^\mu}{(|x|-|y|)^\mu |x|^\varepsilon} = (1+t)^\varepsilon + t\frac{1-t^\varepsilon}{(1-t)^\varepsilon},$$

где $t = |y|/|x| \leqslant 1$. Поскольку $1 - t^\varepsilon \leqslant 1 - t \leqslant (1-t)^\mu$, отсюда заключаем, что $\Delta \leqslant 3$ и, соответственно, имеет место оценка (2.1.13).

Обращаясь к оценке (2.1.12), запишем

$$|\psi_0(x,y) - \psi_0(x',y')| \leqslant |\psi_0(x,y) - \psi_0(x',y)| + |\psi_0(x',y) - \psi_0(x',y')|$$

и к слагаемым в правой части применим (2.1.13). Тогда получим:

$$|\psi_0(x,y) - \psi_0(x',y')| \leqslant 3[\psi]_\nu(|x-x'|^\mu + |y-y'|^\mu).$$

Так как каждая из величин $|x-x'|$ и $|y-y'|$ здесь не превосходит расстояния между точками (x,y) и (x',y') в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$, в результате приходим к оценке (2.1.12). □

В заключение остановимся на следующем простом предложении, дополняющем теорему 2.1.2. Условимся под конусом K с вершиной τ понимать любое множество, которое вместе с каждой своей точкой x содержит луч $\{\tau + t(x-\tau),\ t > 0\}$.

Лемма 2.1.2. *Пусть замкнутые конусы $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ пересекаются только по своей общей вершине τ. Тогда число*

$$r = \min[d(K_1 \cap \Omega, K_2), d(K_2 \cap \Omega, K_1)],$$

где Ω означает единичную сферу $\{\xi,\ |\xi| = 1\}$ в $\mathbb{R}^k$, положительно, и

$$|x_1 - x_2| \geqslant r(|x_1 - \tau| + |x_2 - \tau|), \quad x_j \in K_j. \tag{2.1.14}$$

В частности, если множество G содержится в $K_1 \cup K_2$, то

$$[\varphi]_{\mu,G} \leqslant r^{-\mu} \max(|\varphi|_{\mu,G\cap K_1}, |\varphi|_{\mu,G\cap K_2}). \tag{2.1.15}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau = 0$. Поскольку по условию $K_1 \cap K_2 = \{0\}$, пересечение $K_1 \cap \Omega$ представляет собой компакт, не имеющий общих точек с K_2. Поэтому расстояние $d(K_1 \cap \Omega, K_2)$ между этими множествами положительно, так что положительно и число r. Таким образом, можно написать неравенства $|x_1 - x_2| \geqslant r|x|_j$, справедливые для любых $x_j \in K_j$, $j = 1,2$. Складывая эти неравенства, получим (2.1.14).

Пусть далее множество G, которое без ограничения общности можно считать замкнутым, содержится в $K_1 \cup K_2$. Тогда для $x_j \in G \cap K_j,\ j = 1,2$, имеем:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant |\varphi(x_1) - \varphi(0)| + |\varphi(0) - \varphi(x_2)| \leqslant \max(|\varphi|_{\mu,G_i}, |\varphi|_{\mu,G_j})(|x_1|^\mu + |x_2|^\mu).$$

Поскольку $1 + t^\mu \leqslant (1+t)^\mu$ при $t > 0$, совместно с (2.1.14) отсюда

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant r^{-\mu} \max(|\varphi|_{\mu,G_i}, |\varphi|_{\mu,G_j})|x_1 - x_2|^\mu.$$

Так как аналогичное неравенство очевидно имеет место для $x_1, x_2 \in G \cap K_j$, в результате приходим к оценке (2.1.15). □

2.2. Пространство Гельдера $C^\mu(G)$

Рассмотрим в $C(G)$ класс всех ограниченных непрерывных функций, который обозначим $C^0(G)$. Очевидно, это пространство банахово относительно sup-нормы

$$|\varphi|_0 = \sup_{x\in G} |\varphi(x)|. \tag{2.2.1}$$

Если множество G компактно, то требование ограниченности функций в данном определении можно опустить и, соответственно, sup-норму заменить на $\max|\varphi(x)|$. Однако для множеств G, не являющихся компактами, классы $C(G)$ и $C^0(G)$ следует различать. В общем случае на множество G не накладывается никаких ограничений, наиболее употребительны случаи замкнутых или открытых множеств.

Обозначим $C^\mu(G)$, $0 < \mu < 1$, пространство всех ограниченных функций φ, удовлетворяющих на G условию Гельдера с показателем μ. Это пространство снабжается нормой

$$|\varphi|_{C^\mu} = |\varphi|_0 + [\varphi]_\mu. \tag{2.2.2}$$

В случае $\mu = 1$ аналогичный класс липшицевых функций обозначим $C^{0,1}(G)$. Это обозначение вызвано необходимостью отличать данный класс от класса $C^{1,0}(G)$, под которым будет ниже пониматься класс непрерывно дифференцируемых ограниченных функций. Для единообразия аналогичное обозначение $C^\mu = C^{0,\mu}$ часто используем и для $0 \leqslant \mu < 1$, оно особенно существенно при определении в пункте 2.7 гельдеровых пространств дифференцируемых функций. В дальнейшем, если не оговорено особо, предполагается $0 < \mu \leqslant 1$.

Убедимся, что каждое из пространств $C^{0,\mu}$ является полным, т. е. банаховым. Пусть последовательность φ_n фундаментальна в $C^{0,\mu}(G)$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $|\varphi_n - \varphi_m|_\mu \leqslant \varepsilon$ при $m, n \geqslant N$. Из полноты пространства C^0 отсюда следует, что существует функция $\varphi \in C^0$, к которой эта последовательность сходится по sup-норме. Для любых фиксированных $x, y \in G$ имеем неравенство $|(\varphi_n - \varphi_m)(x) - (\varphi_n - \varphi_m)(y)| \leqslant \varepsilon |x-y|^\mu$ при $m, n \geqslant N$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получим аналогичное неравенство для $\varphi_n - \varphi$. Оно показывает, что $\varphi \in C^{0,\mu}(G)$ и $|\varphi_n - \varphi|_\mu \to 0$ при $n \to \infty$.

Из неравенства (2.1.6)(a) непосредственно следует, что норма (2.1.2) обладает свойством $|\varphi\psi|_\mu \leqslant |\varphi|_\mu |\psi|_\mu$, согласно которому пространство C^μ является банаховой алгеброй по умножению. Предполагая элементы этой алгебры комплексными скалярными функциями, нетрудно убедиться, что условие $\inf\limits_x |\varphi(x)| > 0$ необходимо и достаточно для их обратимости. Этот факт также является очевидным следствием (2.1.6)(b). Соотношение (2.1.6)(c) означает, что линейный оператор суперпозиции $T(\alpha)\varphi = \varphi \circ \alpha$ ограничен $C^\mu(\overline{G}) \to C^\mu(G)$ и его норма не превосходит $[\alpha']_\mu$.

Заменяя в интерполяционном неравенстве (2.1.7) обе величины $[\varphi]_0$ и $[\varphi]_\nu$ их максимумом, приходим к оценке

$$|\varphi|_{C^\mu} \leqslant 2|\varphi|_{C^\nu}, \quad \mu < \nu \leqslant 1, \tag{2.2.3}$$

для норм Гельдера.

Другое применение этого неравенства связано с оператором приближения T_ε, введенным в пункте 1.8. Утверждение леммы 1.8.1 для него можно распространить и на пространство Гельдера.

Лемма 2.2.1. *Если $\varphi \in C^\nu(\mathbb{R}^k)$ и $0 < \mu < \nu$, то $T_\varepsilon \varphi \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ по норме пространства $C^\mu(\mathbb{R}^k)$.*

Доказательство. Как установлено при доказательстве леммы 1.8.1, для sup-нормы разности $\psi_\varepsilon = T_\varepsilon\varphi - \varphi$ справедлива оценка $|\psi_\varepsilon|_0 \leqslant \omega(\varepsilon)$, где ω означает модуль непрерывности

$$\omega(\varepsilon) = \sup_{|x-y| \leqslant \varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

функции φ. В случае $\varphi \in C^\nu(\mathbb{R}^k)$ очевидно, $\omega(\varepsilon) \leqslant [\varphi]_\nu \varepsilon^\nu$, так что $[\psi_\varepsilon]_0 \leqslant [\varphi]_\nu \varepsilon^\nu$. На основании (2.1.7) отсюда следует оценка

$$[\psi_\varepsilon]_\mu \leqslant \left(2[\varphi]_\nu \varepsilon^\nu\right)^{1-\mu/\nu} [\varphi]_\nu^{\mu/\nu} = 2\varepsilon^{\nu-\mu}[\varphi]_\nu,$$

которая завершает доказательство леммы. □

Неравенство (2.2.3) показывает, что семейство банаховых пространств (C^μ) монотонно убывает по вложению. В соответствии с этим удобно ввести класс

$$C^{\mu+0} = \bigcup_{\varepsilon > 0} C^{\mu+\varepsilon}, \quad 0 \leqslant \mu < 1, \tag{2.2.4}$$

функций, удовлетворяющих условию Гельдера с некоторым показателем, большим μ. При $\mu = 0$ его записываем C^{+0}. Заметим, что в классических руководствах по сингулярным интегральным уравнениям с ядром Коши [11, 36] используется обозначение H для класса C^{+0}.

В качестве другого следствия (2.1.7) отметим следующее важное свойство пространства Гельдера: если последовательность функций φ_n ограничена в C^ν и сходится к функции φ по sup-норме, то $\varphi \in C^\nu$ и $\varphi_n \to \varphi$ в C^μ для любого $\mu < \nu$.

В самом деле, по условию $[\varphi_n]_\nu \leqslant C$ для всех n. Переходя в неравенстве $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leqslant C|x-y|^\nu$ к пределу при $n \to \infty$, убеждаемся, что $\varphi \in C^\nu$. Заменяя в (2.1.7) функцию φ на $\varphi - \varphi_n$, получим $[\varphi - \varphi_n]_\mu \to 0$ при $n \to \infty$.

В частности, если множество G ограничено, то с учетом теоремы Асколи—Арцела отсюда следует, что при $0 < \nu < \nu \leqslant 1$ вложение $C\nu(G) \subseteq C^\mu(G)$ компактно. Нужно только принять во внимание, что множество G можно считать замкнутым и, следовательно, компактом.

Функцию расстояния (2.1.4) удобно использовать для приближения функций, обращающихся в нуль на F и ∞, функциями, равными нулю в окрестности этих множеств. Под окрестностями F в дальнейшем понимаются множества вида $\{x,\ d(x,F) < r\}$ с положительными r.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\varphi \in C^\nu(G)$ и $\varphi = 0$ на множестве $F \subseteq \overline{G}$. Кроме того, пусть $\varphi(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$, если множество G неограничено. Тогда существует последовательность функций $\varphi_n \in C^\nu(G)$, тождественно равных нулю в окрестности F и (в случае неограниченного множества G) в окрестности ∞, которая сходится к φ по норме пространства $C^\mu(G)$, $0 < \mu < \nu$.*

Доказательство. Пусть функция $h(t) \in C^{0,1}(\mathbb{R})$ равна 1 при $|t| \leqslant 1$, нулю при $|t| > 2$ и $h(t) = 2-t$ при $1 \leqslant |t| \leqslant 2$. Очевидно, для этой функции $|h|_0 = [h]_1 = 1$. Полагая для краткости $d(x) = d(x,F)$, рассмотрим функцию

$$\chi_\varepsilon(x) = h[\varepsilon^{-1} d(x)], \quad \varepsilon > 0, \tag{2.2.5}$$

которая, очевидно, тождественно равна единице в ε-окрестности множества F и нулю вне его 2ε-окрестности. С учетом (2.1.5), (2.1.6) для нее имеем оценку

$$|\chi_\varepsilon|_0 \leqslant 1, \quad [\chi_\varepsilon]_1 \leqslant \varepsilon^{-1}. \tag{2.2.6}$$

Утверждается, что

$$[\chi_\varepsilon \varphi]_\nu \leqslant 5[\varphi]_\nu. \tag{2.2.7}$$

Отметим прежде всего, что обращение функции φ на F приводит к оценке

$$|\varphi(x)| \leqslant [\varphi]_\nu d^\nu(x). \tag{2.2.8}$$

В самом деле, если $z \in F$, то $|\varphi(x)| = |\varphi(x) - \varphi(z)| \leqslant [\varphi]_\nu |x-z|^\nu$. Поскольку точка $z \in F$ выбрана произвольно, отсюда следует (2.2.8).

Обращаясь к доказательству (2.2.7), рассмотрим величину

$$\Delta_\varepsilon = \frac{|\chi_\varepsilon(x)\varphi(x) - \chi_\varepsilon(y)\varphi(y)|}{|x-y|^\nu},$$

которая, очевидно, равна нулю при $\min[d(x), d(y)] \geqslant 2\varepsilon$. Поэтому при ее оценке сверху, не ограничивая общности, можно считать, что $\min[d(x), d(y)] \leqslant 2\varepsilon$.

Два возможных случая $2|x-y| \geqslant d(y)$ и $2|x-y| \leqslant d(y)$ разберем отдельно. В первом случае $d(x) \leqslant |x-y| + d(y) \leqslant 3|x-y|$, так что с учетом (2.2.8)

$$\Delta_\varepsilon \leqslant |h|_0 [\varphi]_\nu \left(\frac{[d(x)]^\nu}{|x-y|^\nu} + \frac{d(y)]^\nu}{|x-y|^\nu} \right) \leqslant |h|_0 (3^\nu + 2^\nu)[\varphi]_\nu. \tag{2.2.9}$$

Пусть теперь $2|x-y| \leqslant d(y)$. В этом случае запишем

$$\Delta_\varepsilon \leqslant |\chi_\varepsilon(x)| \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x-y|^\nu} + |\varphi(y)| \frac{|\chi_\varepsilon(x) - \chi_\varepsilon(y)|}{|x-y|^\nu}.$$

Совместно с (2.2.6), (2.2.8) отсюда

$$\Delta_\varepsilon \leqslant |h|_1 [\varphi]_\nu [1 + \varepsilon^{-1} d^\nu(y) |x-y|^{1-\nu}].$$

Из неравенств $|d(x) - d(y)| \leqslant |x-y| \leqslant d(y)/2$ следует, что $d(x) \leqslant 2d(y)$ и $d(y) \leqslant 2d(x)$. Вспоминая, что $\min[d(x), d(y)] \leqslant 2\varepsilon$, отсюда имеем $\max[d(x), d(y)] \leqslant 4\varepsilon$, так что

$$\Delta_\varepsilon \leqslant [\varphi]_\nu \{1 + \varepsilon^{-1} [d(y)]^\nu [d(y)/2]^{1-\nu}\} \leqslant 5[\varphi]_\nu.$$

Совместно с (2.2.9) в результате приходим к справедливости оценки (2.2.7).

В обозначениях (2.2.5) введем теперь последовательность функций

$$\varphi_n(x) = [1 - \chi_\varepsilon(x)] h(\varepsilon |x|) \varphi(x), \quad \varepsilon = 1/n, \tag{2.2.10}$$

каждая из которых, очевидно, тождественно равна нулю в окрестности F и ∞. На основании (2.2.8) нормы этих функций в $C^\nu(G)$ равномерно ограничены по $n = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, разность $\varphi(x) - \varphi_n(x) = 0$ при $d(x) \geqslant 2/n$, $|x| \leqslant n$. Поскольку $|\varphi_n(x)| \leqslant |\varphi(x)|$, отсюда

$$|\varphi - \varphi_n|_0 \leqslant 2 \max_{d(x)\leqslant 2/n} |\varphi(x)| + 2 \max_{|x|\geqslant n} |\varphi(x)|.$$

С учетом (2.2.8) каждое из слагаемых в правой части неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому на основании (2.1.7) последовательность $\varphi_n - \varphi \to 0$ по норме пространства $C^\mu(G)$. $\square$

До сих пор множество G было произвольным. Рассмотрим случай открытого множества, которое обозначим D. Как известно, связные открытые множества называются областями. Отметим попутно, что по отношению к бесконечно удаленной точке все области можно разбить на три класса: конечные, если они ограничены, т. е. лежат в конечной части пространства $\mathbb{R}^k$, бесконечные, если они являются окрестностью ∞, т. е. содержат внешность некоторого шара, и, наконец, полубесконечные, если их граница некомпактна.

Рассмотрим класс $C^1(D)$ всех функций, непрерывно дифференцируемых в области D. Напомним, что с $\varphi \in C^1(D)$ связывается вектор-градиент

$$\varphi' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right) \in C(D). \tag{2.2.11}$$

В случае m-вектор-функции φ этот градиент следует рассматривать как $m \times k$-матрицу Якоби $\mathcal{D}\varphi$, столбцами которой служат частные производные $\partial\varphi/\partial x_j$. Запись $\mathcal{D}\varphi$ иногда используем и для $m = 1$, понимая под ней матрицу-строку. Соответствующие формулы дифференцирования

$$\mathcal{D}(\varphi\psi) = \psi\mathcal{D}\varphi + \varphi\mathcal{D}\psi, \quad \mathcal{D}(f \circ \varphi) = (\mathcal{D}f \circ \varphi)\mathcal{D}\varphi \tag{2.2.12}$$

понимаются тогда в смысле перемножения прямоугольных матриц Якоби.

В качестве примера рассмотрим случай, когда отрезок $[a, b]$ лежит в области определения скалярной функции φ, тогда можно рассмотреть функцию $\varphi_0(t) = \varphi[ta + (1-t)b]$ переменной $0 \leqslant t \leqslant 1$. Для ее производной имеем равенство

$$\varphi_0'(t) = \varphi'[ta + (1-t)b](a - b), \tag{2.2.13}$$

где справа стоит скалярное произведение векторов φ' и $a - b$.

Запись $C^{1,0}$ используется для пространства функций $\varphi \in C^1(D)$, для которых $\varphi, \varphi' \in C^0(D)$. Очевидно, это пространство банахово относительно нормы $|\varphi| = |\varphi|_0 + |\varphi'|_0$. По определению класс $C^1(\overline{D})$ состоит из функций $\varphi \in C(\overline{D})$, производная φ' которых продолжается по непрерывности на замыкание $\overline{D}$. Обозначения (2.2.11) сохраняются и для предельных значений производной в граничных точках $x \in \partial D$. Аналогичный смысл имеет и соответствующее пространство $C^{1,0}(\overline{D})$ ограниченных функций. Наконец, обозначим $C^{1,\mu}(D)$, $0 < \mu \leqslant 1$, пространство всех функций $\varphi \in C^1(D)$, которые вместе со всеми своими частными производными первого порядка принадлежат $C^\mu(D)$. Относительно нормы

$$|\varphi| = |\varphi|_{C^\mu} + |\varphi'|_{C^\mu}$$

это пространство банахово.

Возникает вопрос как связано пространство $C^{0,1}$ функций, удовлетворяющих условию Липшица, с классом C^1 непрерывно дифференцируемых функций.

Теорема 2.2.2. *Пусть функция φ непрерывно дифференцируема в области D и конечная область D_0 содержится в D вместе со своим замыканием. Тогда справедлива оценка*

$$[\varphi]_{1,D_0} \leqslant C|\varphi'|_{0,D}, \tag{2.2.14}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от диаметра области D_0 и ее расстояния до границы ∂D.

Если спрямляемая дуга Γ с концами a, b длины l содержится в D, то

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant \max_{x\in\Gamma} |\varphi'(x)|\, l. \tag{2.2.15}$$

В частности, если область D является M-равномерно связной, то

$$[\varphi]_{1,D} \leqslant M|\varphi'|_{0,D}, \tag{2.2.16}$$

Доказательство. Пусть $2r = d(D_0, \partial D)$ и расстояние между точками $a, b \in D_0$ не превосходит r. Тогда отрезок с концами a, b содержится в D, и согласно (2.2.12) можно написать

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| = \left| \int_0^1 \varphi_0'(t)dt(a-b) \right| \leqslant |\varphi'|_{0,D}.$$

Поэтому оценка (2.2.14) непосредственно вытекает из теоремы 2.1.3.

Что касается второго утверждения теоремы, то предположим сначала, что Γ есть ломаная с вершинами $a = c_0, c_1, \ldots, c_n = b$. Тогда аналогично предыдущему

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant \sum_{i=1}^n |\varphi(c_{i-1}) - \varphi(c_i)| \leqslant |\varphi'|_0\, l(\Gamma).$$

Пусть далее Γ является спрямляемой дугой и $2r$ есть расстояние от нее до границы ∂D. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant r$ множество $G_\varepsilon = \{x \mid d(x, \Gamma) \leqslant \varepsilon\}$ содержится в D и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\varphi'|_{0,G_\varepsilon} = |\varphi'|_{0,\Gamma}.$$

Выберем на этой дуге точки $a = c_0, c_1, \ldots, c_n = b$ так, чтобы $|c_{i-1} - c_i| \leqslant r$ для всех i. Тогда ломаная Γ_ε с вершинами в этих точках содержится в G_ε и, следовательно,

$$|\varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant \max_{x \in G_\varepsilon} |\varphi'(x)|\; l(\Gamma_\varepsilon).$$

Поскольку $l(\Gamma_\varepsilon) \leqslant l(\Gamma)$, в пределе при $\varepsilon \to 0$ это неравенство переходит в (2.2.15).

Наконец, если область D равномерно связна и $x, y \in D$, то по определению (2.1.9) точки x, y можно соединить спрямляемой дугой $\Gamma \subseteq D$ длины $l \leqslant M|x - y|$. На основании (2.2.15) отсюда следует (2.2.16). □

Оценка (2.2.16) показывает, что для равномерно связных областей имеет место вложение

$$C^{1,0}(D) \subseteq C^{0,1}(D). \tag{2.2.17}$$

В качестве следствия отметим, что теорема 2.2.2 сохраняет свою силу и в случае, когда область D является окрестностью ∞ и подобласть D_0 неограничена. В самом деле, область D содержит внешность B' некоторого шара B, которая, очевидно, является равномерно связной областью. Таким образом, замкнутую область $\overline{D}_0$ можно покрыть некоторым шаром B_0 и B'. К каждому из этих множеств можно применить оценку (2.2.16), так что остается воспользоваться теоремой 2.1.1.

Отметим еще следующее полезное предложение, дополняющее теорему 2.2.2.

Лемма 2.2.2. *Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема в цилиндре $B = \{|\widetilde{x}| < r_1, |x_k| < r_2\} \subseteq \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}$ переменных $x = (\widetilde{x}, x_k)$ и ее производная-градиент φ' допускает оценку*

$$|\varphi'(x)| \leqslant M x_k^{\mu-1}, \quad x \in B. \tag{2.2.18}$$

Тогда $\varphi \in C^\mu(B)$ и $[\varphi]_\mu \leqslant CM$, где постоянная $C > 0$ зависит только от μ и r_1, r_2.

Доказательство. Пусть точки $x, y \in B$ таковы, что отрезок $[x, y]$ наклонен к основанию $x_k = 0$ цилиндра под углом $\pi/4$, так что

$$|x - y| = \sqrt{2}|x_k - y_k|. \tag{2.2.19}$$

Тогда принимая во внимание (2.2.13), из (2.2.18) выводим неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant M|x - y| \int_0^1 [tx_k + (1-t)y_k]^{\mu-1} dt.$$

С учетом (2.1.3) для интеграла здесь имеем оценку

$$\int_0^1 [tx_k + (1-t)y_k]^{\mu-1} dt = \frac{|x_k^\mu - y_k^\mu|}{\mu|x_k - y_k|} \leqslant \frac{1}{\mu|x_k - y_k|^{1-\mu}}.$$

Совместно с (2.2.19) отсюда

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C_0 M|x - y|^\mu, \quad C_0 = \sqrt{2}^{1-\mu}/\mu. \tag{2.2.20}$$

Пусть далее точки x, y таковы, что отрезок $[x, y]$ параллелен либо ортогонален основанию цилиндра и двумерная плоскость P проходит через эти точки ортогонально основанию. Рассмотрим точки $x', y' \in P$, для которых четырехугольник является ромбом с противоположными парами вершин x, y и x', y'. Тогда при

$$|x - y| < \min(r_1, r_2) \tag{2.2.21}$$

по крайней мере одна из точек x', y' (пусть x') принадлежит B. Поскольку отрезки $[x, x']$ и $[y, x']$ наклонены к основанию цилиндра под углом $\pi/4$ и $|x-y|^2 = |x-x'|^2+|x'-y|^2$, на основании (2.2.20) приходим к неравенству

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x')| + |\varphi(x') - \varphi(y)| \leqslant 2C_0 M|x - y|^\mu.$$

Рассмотрим далее точки $x = (\widetilde{x}, x_k)$, $y = (\widetilde{y}, y_k) \in B$ и положим $z = (\widetilde{x}, y_k) \in B$. Тогда в предположении (2.2.21) к парам точек x, z и y, z можно применить предыдущее неравенство. Поскольку, как и выше, $|x - y|^2 = |x - z|^2 + |z - y|^2$, в результате получим неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 4C_0 M|x - y|^\mu. \tag{2.2.22}$$

Наконец, пусть точки $x, y \in B$ произвольны, очевидно, для них $|x - y|^2 < 4r_1^2 + r_2^2$. Выберем натуральное n по условию $\sqrt{4r_1^2 + r_2^2} \leqslant n \min(r_1, r_2)$ и разделим отрезок $[x, y]$ на n равных частей. Тогда к соседним точкам деления можно применить неравенство (2.2.22), и в результате приходим к оценке

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 4nC_0 M|x - y|^\mu,$$

завершающей доказательство леммы. □

2.3. Липшицевы отображения и области

Гомеоморфное отображение $\widetilde{x} = \alpha(x)$ множества $G \subseteq \mathbb{R}^k$ на множество $\widetilde{G} \subseteq \mathbb{R}^s$ называется липшицевым, если оно вместе со своим обратным удовлетворяет условию Липшица. По отношению к постоянной $M = \max([\alpha]_1, [\alpha^{-1}]_1)$ это условие можно записать в форме двусторонней оценки

$$M^{-1}|x - y| \leqslant |\alpha(x) - \alpha(y)| \leqslant M|x - y|, \quad x, y \in G. \tag{2.3.1}$$

Чтобы при необходимости указывать явно эту постоянную, в этом случае отображение α называем M-липшицевым.

В соответствии с определением (2.1.4) оценка (2.3.1) распространяется и на расстояние от точки до множества: если $F \subseteq \overline{G}$, то

$$M^{-1}d(x, F) \leqslant d[\alpha(x), \alpha(F)] \leqslant M d(x, F). \tag{2.3.2}$$

Точно так же, если шар $B(a, r) = \{|x - a| \leqslant r\}$ содержится в G, то

$$B[\alpha(a), r/M] \subseteq \alpha[B(a, r)] \subseteq B[\alpha(a), Mr]. \tag{2.3.3}$$

В самом деле, если $|\alpha(x)-\alpha(a)| \leqslant r/M$, то в силу (2.3.1) имеем неравенства $|x-a|/M \leqslant |\alpha(x)-\alpha(a)| \leqslant r/M$, откуда $\alpha(x) \in \alpha[B(a, r)]$. Второе включение в (2.3.3) рассматривается аналогично.

Аналогично проверяется, что образ $\widetilde{\Gamma} = \alpha(\Gamma)$ спрямляемой дуги Γ является также спрямляемой дугой и

$$M^{-1}l(\Gamma) \leqslant l(\widetilde{\Gamma}) \leqslant Ml(\Gamma). \tag{2.3.4}$$

В самом деле, по определению Γ допускает параметризацию $\gamma : I \to \Gamma$, являющуюся вектор-функцией ограниченной вариации. Тогда вектор-функция $\gamma_1 = \alpha \circ \gamma$ также принадлежит к этому типу. В самом деле, согласно (2.3.1) для любого набора точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ отрезка I сумма $|\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2)| + \ldots + |\gamma_1(t_{n-1}) - \gamma_1(t_n)|$ не превосходит

$$M(|\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| + \ldots + |\gamma(t_{n-1}) - \gamma(t_n)|) \leqslant Ml(\Gamma).$$

Следовательно, дуга Γ_1 спрямляема и ее длина $l(\Gamma_1) \leqslant Ml(\Gamma)$. Поскольку дуги Γ и Γ_1 можно поменять местами, отсюда следует (2.3.4).

Из последнего предложения в свою очередь следует, что равномерно связные множества инвариантны при липшицевых преобразованиях.

С липшицевыми отображениями тесно связано понятие липшицевой области. По определению ограниченная область D называется липшицевой, если для каждой точки $a \in \partial D$ найдутся такие ее окрестность $V(a)$ и липшицево отображение $\alpha : V \to \widetilde{V}$ на шар $\widetilde{V} = \{|y| < r\}$, что

$$\alpha(V \cap D) = \{y \in \widetilde{V},\ y_k > 0\}, \quad \alpha(V \cap \partial D) = \{y \in \widetilde{V},\ y_k = 0\}. \tag{2.3.5}$$

Например, если в окрестности каждой ее точки $a \in \partial D$ существует такая декартова система координат с началом в точке a, что граница области D в этой окрестности представляет собой график $x_k = f(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}) \in G$, вещественной функции $f \in C^{0,1}(G)$, то область D липшицева. Это следует из того, что преобразование $\alpha(x', x_k) = (x', x_k - f(x'))$, множества $G \times \mathbb{R}$ на себя является липшицевым. В частности, конечные выпуклые области являются липшицевыми. Если в этом определении функция f непрерывно дифференцируема, то говорим об области D с гладкой границей.

Теорема 2.3.1. *Липшицевы области равномерно связны.*

Доказательство. Каждая область D линейно связна, и с каждой парой ее точек x, y можно связать число

$$l(x, y; D) = \inf l(\Gamma_{x,y}),$$

где нижняя грань берется по всем спрямляемым дугам $\Gamma_{x,y} \subseteq D$. Нетрудно проверить, что так определенная функция переменных x, y удовлетворяет всем трем аксиомам расстояния, она называется внутренней метрикой области D. Неравенство (2.1.9) определения равномерной связности равносильно оценке $l(x, y; D) \leqslant M|x - y|$ для этой метрики. Из этой оценки и неравенства треугольника следует, что

$$|l(x, y) - l(x_0, y)| \leqslant l(x, x_0) \leqslant M|x - x_0|.$$

Поэтому функция $l(x, y)$ непрерывна по обеим переменным.

Из определения (2.3.5) следует, что для каждой точки $a \in \partial D$ область $G = D \cap V(a)$ равномерно связна. Если $a \in D$, то найдется шар $G \subseteq D$ с центром в этой точке, который, очевидно, также равномерно связен.

Предположим, что область D не является равномерно связной. Тогда в соответствии с определением (2.1.9) существуют такие последовательности точек x_n, $y_n \in D$, что

$$l(x_n, y_n; D) \geqslant n|x_n - y_n|, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{2.3.6}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательности x_n, y_n сходятся к некоторым точкам, соответственно, $a, b \in \overline{D} \cup \infty$. Очевидно, в силу (2.3.6) случай $a \neq b$ невозможен. Однако случай $a = b \in \overline{D}$ также невозможен, так как тогда для достаточно больших n точки x_n и y_n попадают в одну окрестность G, где условие (2.3.6) не выполняется. $\square$

Понятие липшицевой области подробно рассмотрено в книге И. Стейна [64], где оно использовано для построения операторов продолжения функций с D на $\mathbb{R}^k$ во всей шкале соболевских пространств. Для липшицевых областей легко строится конструкция продолжения функции с сохранением свойства гельдеровости.

Теорема 2.3.2. *Пусть область D липшицева. Тогда существуют ограниченные операторы продолжения $p : C^\mu(\partial D) \to C^\mu(\mathbb{R}^k)$ и $P : C^\mu(\overline{D}) \to C^\mu(\mathbb{R}^k)$, т. е. операторы со свойствами $(p\varphi)(x) = \varphi(x)$, $x \in \partial D$, и $(P\varphi)(x) = \varphi(x)$, $x \in D$.*

Доказательство. Предположим сначала, что функция $\psi(x')$ переменных $x' = (x_1, \dots, x_{k-1})$ принадлежит классу C^μ в шаре $B_0 = \{|x'| < r\}$ и обращается в нуль в окрестности его границы. Пусть $\chi(t) \in C_0^\infty(B)$ в шаре $B = \{|x| < r\}$ и тождественно равна 1 в окрестности нуля. Тогда оператор $(q\psi)(x) = \chi(x)\psi(x')$, $x \in B$, ограничен $C^\mu(B') \to C^\mu(B)$, причем $(q\psi)(x) = 0$ в окрестности ∂B.

Покроем границу ∂D области D конечным числом окрестностей $V_1, \dots, V_n$, о которых идет речь в определении (2.3.5), и рассмотрим соответствующие липшицевы преобразования α_i множеств V_i на шар B (или его внешность). Пусть разбиение единицы (χ_i) определено по этому покрытию, как в лемме 1.8.2. Тогда оператор p_i, действующий по формуле

$$(p_i\varphi) \circ \alpha_i^{-1} = q[(\chi_i\varphi) \circ \alpha_i^{-1}], \tag{2.3.7}$$

ограничен $C^\mu(\partial D) \to C^\mu(V_i)$, причем $p_i\varphi = 0$ в окрестности ∂V_i. Поэтому, продолжая $p_i\varphi$ нулем, p_i можно рассматривать как ограниченный оператор $C^\mu(\partial D) \to C^\mu(\mathbb{R}^k)$. Если $x \in V_i \cap \partial D$ и $x = \alpha_i(y')$, $y' \in B_0$, то

$$(p_i\varphi)(x) = \chi(y)(\chi_i\varphi)(y') = \chi[\alpha_i(x)]\chi_i(x)\varphi(x).$$

Очевидно, функцию χ в определении оператора q можно выбрать так, чтобы $\chi_i(x)\chi[\alpha_i(x)] = \chi_i(x)$, $x \in V_i \cap \partial D$, для всех i. Поскольку $\sum \chi_i = 1$, оператор $p = \sum p_i$ будет оператором продолжения.

Обратимся к вопросу о продолжении функций с области D. Пусть функция $\psi \in C^\mu$ в полушаре $G = \{|x| \leqslant r, x_k > 0\}$ и обращается в нуль в окрестности $|x| = r$. Тогда оператор $(Q\psi)(x', x_k) = \chi(x)\psi(x', |x_k|)$ ограничен $C^\mu(G) \to C^\mu(B)$.

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны предыдущим. Рассмотрим открытое покрытие $V_1, \ldots, V_m$, $m \geqslant n$, замкнутой области D, где первые n множеств осуществляют покрытие границы и означают то же, что и выше, а остальные множества V_j являются либо шарами, расположенными в D вместе со своим замыканием, либо (в случае бесконечной области D), внешностью некоторого шара. Пусть разбиение единицы (χ_i) определено по этому покрытию, как в лемме 1.8.2. Введем операторы P_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, которые при $i \leqslant m$ определяются аналогично (2.3.7), а в остальных случаях $P_i\varphi = \chi_i\varphi$. Как и выше, непосредственно проверяется, что при подходящем выборе функции χ в определении Q оператор $P\varphi = \sum P_i\varphi$ будет удовлетворять необходимым требованиям. □

Отметим, что теорема 2.3.2 является частным случаем общего результата Уитни [37] о продолжении функции с любого компакта с сохранением ее гельдеровской гладкости.

В липшицевых областях допускает существенное усиление и теорема 2.2.1.

Лемма 2.3.1. *Пусть область D липшицева, тогда в условиях теоремы* 2.2.1 *последовательность φ_n можно выбрать в классе функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, обращающихся в нуль в окрестности F.*

Доказательство. Пусть функция $\varphi(x) \in C^\nu(D)$ равна нулю на некотором замкнутом подмножестве $F \subseteq \overline{D}$. Тогда функция $P\varphi \in C^\nu(\mathbb{R}^k)$ обладает этим же свойством. Зафиксируем $\mu < \nu_1 < \nu$ и применим к этой функции теорему 2.2.1, в которой роль μ и G играют, соответственно, ν_1 и $\mathbb{R}^k$. Таким образом, для заданного $\delta > 0$ найдется функция $\psi \in C^{\nu_1}(\mathbb{R}^k)$, которая обращается в нуль в окрестности F и для которой $|\varphi - \psi|_{\nu_1} \leqslant \delta$. В свою очередь, к функции ψ применим лемму 2.2.1 и подберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $|\psi - T_\varepsilon\psi|_\mu \leqslant \delta$. Очевидно, $T_\varepsilon\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$. Как и при доказательстве леммы 1.8.1, убеждаемся, что при достаточно малых ε функция $T_\varepsilon\psi$ обращается в нуль в окрестности F. Остается заметить, что с учетом (2.2.3) из предыдущих оценок $|\varphi - T_\varepsilon\psi|_\mu \leqslant 3\delta$. □

Еще одно важное свойство липшицевых областей выделим особо.

Лемма 2.3.2. *Пусть область D липшицева и функция $\varphi \in C^1(\overline{D})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$|\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(z)(x - y)| \leqslant \varepsilon|x - y| \tag{2.3.8}$$

для любых точек $x, y, z \in D$ при $|x - z| \leqslant \delta$ и $|y - z| \leqslant \delta$.

Доказательство. Достаточно доказать локальный вариант леммы, т. е. для любой точки $a \in \overline{D}$ найдется такая ее окрестность V, что неравенство (2.3.8) справедливо для любой тройки точек $x, y, z \in D \cap V$ при $|x - y| \leqslant \delta$ и $|z - y| \leqslant \delta$.

В самом деле, пусть этот локальный вариант имеет место, но во всей области D утверждение теоремы нарушено. Тогда существует такие $\varepsilon > 0$ и последовательности $x_n, y_n, z_n \in D$, что $|x_n - z_n| \leqslant 1/n$ и $|y_n - z_n| \leqslant 1/n$, но

$$|\varphi(x_n) - \varphi(y_n) - \varphi'(z_n)(x_n - y_n)| \geqslant \varepsilon|x_n - y_n|. \tag{2.3.9}$$

В силу компактности $\overline{D}$, не ограничивая общности, можно считать, что все три последовательности $x_n, y_n, z_n \in D$ сходятся к некоторой точке $a \in \overline{D}$. Но тогда для достаточно большого n они принадлежат окрестности V этой точки, которая фигурирует в локальном варианте теоремы, причем расстояния $|x_n - z_n|$ и $|y_n - z_n|$ не превосходят соответствующего числа δ, отвечающего окрестности V. В результате (2.3.9) приходит в противоречие с утверждением теоремы для локального варианта.

Обратимся к доказательству локального варианта леммы. Для любой точки $a \in \overline{D}$ найдется такая ее окрестность V, что существует липшицево отображение α области $G = D \cap V$ на некоторую выпуклую область $\widetilde{G}$. Для точек $a \in \partial D$ этот факт вытекает из определения липшицевой области, в случае $a \in D$ в качестве G можно взять шар с центром a достаточно малого радиуса, а в качестве α — тождественное отображение. Пусть рассматриваемое отображение M-липшицево, т. е. удовлетворяет условию (2.3.1) с этой постоянной. Поскольку вектор-функция α' равномерно непрерывна на компакте $\overline{G}$, найдется такое $\delta_0 > 0$, что

$$|\varphi'(x) - \varphi'(y)| \leqslant \varepsilon/M \quad \text{при} \quad |x - y| \leqslant \delta_0. \tag{2.3.10}$$

Полагая $\delta = \delta_0/M^2$, рассмотрим точки $x, y, z \in G$, для которых $|x - y| \leqslant \delta$, $|z - y| \leqslant \delta$. В силу выпуклости отрезок $[\widetilde{x}, \widetilde{y}]$ с концами $\widetilde{x} = \alpha(x)$ и $\widetilde{y} = \alpha(y)$ содержится в $\widetilde{G}$, и в силу (2.3.1) расстояния $|\widetilde{x} - \widetilde{z}|$ и $|\widetilde{y} - \widetilde{z}|$ не превосходят δ_0/M. Пусть спрямляемая дуга $\Gamma_{x,y} \subseteq G$ является прообразом этого отрезка при отображении α. Тогда $|\alpha(t) - \alpha(z)| \leqslant \delta_0/M$ для любой точки $t \in \Gamma_{x,y}$, и с учетом (2.3.1) отсюда

$$|t - z| \leqslant \delta_0 \quad \text{при} \quad t \in \Gamma_{x,y}. \tag{2.3.11}$$

Рассмотрим функцию $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi'(z)(x - y)$ с фиксированными y, z. Для этой функции $\psi'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(z)$ и на основании теоремы 2.2.2

$$|\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(z)(x - y)| = |\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \max_{t \in \Gamma_{x,y}} |\varphi'(t) - \varphi'(z)|\, l(\Gamma_{x,y}).$$

В силу (2.3.4) длина $l(\Gamma_{x,y}) \leqslant M|x - y|$, что совместно с (2.3.10), (2.3.11) приводит к неравенству (2.3.8). $\square$

Заметим, что если последовательность функций $\varphi_n \in C^1(\overline{D})$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к φ по норме пространства $C^1(\overline{D})$, то число δ в лемме можно выбрать единым для всех n. Это следует из того, что условию (2.3.10) можно удовлетворить все функции φ_n.

Пусть отображение α осуществляет гомеоморфизм $D \to \widetilde{D}$ открытых подмножеств $\mathbb{R}^k$ и вместе со своим обратным непрерывно дифференцируемо. Отображения такого типа называются диффеоморфизмами. Согласно цепному правилу его матрица Якоби $\alpha' = \mathcal{D}\alpha$ связана с аналогичной матрицей $\mathcal{D}\beta$ обратного отображения $\beta = \alpha^{-1}$ равенством $[(\mathcal{D}\beta) \circ \alpha]\mathcal{D}\alpha = 1$, где 1 означает единичную $k \times k$-матрицу. Поэтому $(\det \mathcal{D}\alpha)(x) \neq 0$, $x \in D$. На основании теоремы 2.2.2 отсюда заключаем, что для любого компакта $K \subseteq D$ отображение α как отображение K на компакт $\widetilde{K} = \alpha(K) \subseteq \widetilde{D}$ является липшицевым.

Из теоремы математического анализа об обратном отображении следует, что если k-вектор-функция $\alpha \in C^1(D)$ удовлетворяет условию $(\det \mathcal{D}\alpha)(a) \neq 0$ в фиксированной точке $a \in D$, то существует такая подобласть $D_0 \subseteq D$, содержащая эту точку, что α осуществляет гомеоморфизм этой области на некоторую область $\widetilde{D}_0$ и обратное отображение непрерывно дифференцируемо в области $\widetilde{D}_0$. Таким образом, если указанное условие выполнено всюду в D, то отображение α является локально липшицевым. При $s \geqslant k$ этот факт допускает распространение на непрерывно дифференцируемые s-вектор функции в замкнутых липшицевых областях.

Лемма 2.3.3. *Пусть $s \geqslant k$ и s-вектор-функция α непрерывно дифференцируема и взаимно однозначна в замкнутой липшицевой области $\overline{D} \subseteq \mathbb{R}^k$. Тогда если ранг матрицы Якоби*

$$\operatorname{rang}(\mathcal{D}\alpha)(x) = k, \ x \in \overline{D}, \tag{2.3.12}$$

то отображение α липшицево. Обратно, если это отображение липшицево, то имеет место (2.3.12).

Доказательство. В силу теорем 2.3.1 и 2.2.2 функция α удовлетворяет условию Липшица, поэтому в предположении (2.3.5) для отображения α достаточно установить левую часть двустороннего неравенства (2.3.1). По условию $(\mathcal{D}\alpha)(x)\xi \neq 0$ для любого единичного вектора $\xi \in \mathbb{R}^k$. Пусть Ω означает единичную сферу в $\mathbb{R}^k$, тогда функция $|(\mathcal{D}\alpha)(x)\xi|$ непрерывна на $\overline{D} \times \Omega$ и всюду отлична от нуля. Поэтому существует такая постоянная $m > 0$, что

$$|\mathcal{D}\alpha)(x)\xi| \geqslant 2m|\xi| \tag{2.3.13}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^k$ и $x \in \overline{D}$.

На основании леммы 2.3.2 найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\alpha(x) - \alpha(y) - (\mathcal{D}\alpha)(y)(x-y)| \leqslant m|x-y|$$

при $|x-y| \leqslant \delta$. С учетом (2.3.13) отсюда

$$|\alpha(x) - \alpha(y)| \geqslant |\mathcal{D}\alpha)(y)(x-y)| - m|x-y| \geqslant m|x-y|$$

при $|x-y| \leqslant \delta$. Остается заметить, что функция $f(x,y) = |\alpha(x) - \alpha(y)|/|x-y|$ непрерывна на компакте $\{(x,y) \in \overline{D} \times \overline{D},\ |x-y| \geqslant r\}$ и потому ограничена снизу положительной постоянной.

Обратно, пусть отображение $\alpha \in C^1(\overline{D})$ является M-липшицевым. В силу теоремы 2.3.2 можно в действительности считать, что функция α непрерывно дифференцируема в некотором открытом множестве $D^1 \supseteq \overline{D}$. Тогда для заданного $a \in \overline{D}$ в выражении

$$\alpha(x) - \alpha(a) - (\mathcal{D}\alpha)(a)(x-a) = |x-a|\sigma(x), \quad x \in D^1,$$

вектор-функция $\sigma(x) \to 0$ при $x \to a$. Как и выше, запишем

$$|\mathcal{D}\alpha)(a)(x-a)| \geqslant |\alpha(x) - \alpha(a)| - |\sigma(x)||x-a|$$

Полагая здесь $x = a + r\xi$, $r > 0$, с фиксированным $\xi \in \Omega$ и устремляя $r \to 0$, на основании (2.3.1) приходим к оценке (2.3.13) с $2m = 1/M$, что равносильно (2.3.12). $\square$

2.4. Гладкие поверхности

Обсудим кратко основные понятия, связанные с $(k-1)$-мерными поверхностями в $\mathbb{R}^k$ (кривыми при $k=2$). Пусть задана конечная липшицева область $G \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ и взаимно однозначная вектор-функция $\gamma \in C^1(\overline{G})$ со значениями в $\mathbb{R}^k$, матрица Якоби $(\mathcal{D}\gamma)(s)$ которой удовлетворяет условию

$$\operatorname{rang}(\mathcal{D}\gamma)(s) = k-1, \quad s \in \overline{G}. \tag{2.4.1}$$

Эта $k \times (k-1)$-матрица составлена из векторов

$$\frac{\partial\gamma}{\partial s_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$

как из столбцов, и условие (2.4.1) означает, что эти вектор линейно независимы. Образ $\Gamma = \gamma(G)$ называется гладкой поверхностью (с краем), а само отображение γ — ее гладкой параметризацией. По определению поверхность Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, если она допускает параметризацию γ этого класса. Точки $\gamma(s)$, $s \in \partial G$, составляют край $\partial\Gamma$ этой поверхности, остальные ее точки называем внутренними. Важно принять во внимание, что в силу леммы 2.3.3 гладкая параметризация $\gamma : \overline{G} \to \Gamma$ является липшицевым отображением. В частности, оператор $\varphi \to \varphi \circ \gamma$ ограничен и обратим $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(G)$.

В двумерном случае $k=2$ роль $\overline{G}$ играет отрезок прямой $\mathbb{R}$, соответственно Γ называется гладкой дугой, при этом концы отрезка переходят в концы этой дуги. Вектор $\gamma'(s)$ определяет касательную прямую к Γ в точке $t = \gamma(s)$. В общем случае $k \geqslant 3$ вектора $\partial\gamma/\partial s_j$ образуют базис касательной плоскости этой поверхности в точке $\gamma(s)$. Нормаль к данной плоскости можно описать следующим образом. Рассмотрим вектор

$$m = (m_1, \ldots, m_k), \quad m_j = (-1)^{j+k} \det M_j, \tag{2.4.2}$$

где $(k-1)\times(k-1)$-матрица M_j получается из $\mathcal{D}\gamma$ вычеркиванием j-ой строки.

Если к матрице $(\mathcal{D}\gamma)(s)$ добавить вектор $\xi \in \mathbb{R}^k$ в качестве k-го столбца, то, раскладывая определитель этой матрицы по k-ому столбцу, получим сумму $\sum\limits_1^k m_j(s)\xi_j$. Подстановка $\xi = \partial\gamma/\partial s_i$ в эту матрицу дает нулевой определитель, так что вектор $m(s) = (m_1(s), \ldots, m_k(s))$ ортогонален касательной плоскости в точке $\gamma(s)$ и единичный вектор нормали к Γ в этой точке можно определить равенством $n[\gamma(s)] = m(s)/|m(s)|$.

С помощью параметризации можно ввести интегрирование на поверхности, класс суммируемых функций φ определяется условием $\varphi \circ \gamma \in L(G)$ и по определению

$$\int\limits_\Gamma \varphi(y) d_{k-1}y = \int\limits_G \varphi[\gamma(s)]|m(s)| d_{k-1}s,$$

где вектор m определяется (2.4.2). Соответственно для измеримого подмножества $G_0 \subseteq G$ равенство

$$\mathrm{mes}[\gamma(G_0)] = \int\limits_{G_0} |m(s)|ds$$

определяет поверхностную лебегову меру множества $\gamma(G_0) \subseteq \Gamma$. Другими словами, $d_{k-1}y = |m(s)|d_{k-1}s$ есть элемент площади на поверхности. Нетрудно проверить, что эти определения не зависят от выбора параметризации. Все основные свойства интеграла, описанные в пункте 1.8, распространяются и на рассматриваемый случай.

Простейшим примером гладкой параметризации служит вектор-функция $\gamma(s) = (s, f(s))$, где скалярная функция $f \in C^1(\overline{G})$. Отвечающая ей поверхность $\Gamma = \gamma(G)$ является графиком функции f. Следующая теорема показывает, что подобным образом в окрестности своих внутренних точек a устроена любая гладкая поверхность Γ. Более точно, пусть задана локальная система декартовых координат $u = (\widetilde{u}, u_k) \in \mathbb{R}^k$ с началом в точке a, u_k-я ось которой направлена вдоль нормали $n(a)$. В этой системе координат введем окрестности точки a вида

$$C_\rho(a) = \{|\widetilde{u}| \leqslant \rho,\ |u_k| \leqslant 2\rho\}. \tag{2.4.3}$$

Теорема 2.4.1. *Пусть заданы гладкая поверхность Γ с краем, определяемая параметризацией $\gamma :\ G \to \Gamma$, и компакт $K \subseteq \Gamma \setminus \partial\Gamma$. Тогда существует такое $\rho_0 = \rho_0(\Gamma, K) > 0$, что для любой точки $a \in K$ пересечение Γ с окрестностью $C_\rho(a)$, $\rho \leqslant \rho_0$, в локальной системе координат описывается уравнением $u_k = f(\widetilde{u})$ в шаре $B_\rho = \{|\widetilde{u}| \leqslant \rho\}$ с некоторой непрерывно дифференцируемой функцией f, удовлетворяющей условиям*

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0, \quad |f'|_0 \leqslant 1. \tag{2.4.4}$$

Если Γ принадлежит классу $C^{1,\mu}$, то $f \in C^{1,\mu}(B_\rho)$ и полунорма $[f']_\mu$ зависит только от $[\gamma']_\mu$.

Доказательство. Согласно лемме 2.3.3 параметризация γ является M-липшицевым отображением. В соответствии с этим положим

$$2Mr = d(K, \partial\Gamma), \tag{2.4.5}$$

где, напомним, d есть расстояние от компакта K до края $\partial\Gamma = \gamma(\partial G)$.

В обозначениях (2.4.2) дополним прямоугольную $k \times (k-1)$-матрицу $(\mathcal{D}\gamma)(s)$ до квадратной матрицы $A(s)$ столбцом $m(s)$. Очевидно, ее определитель $\det A(s) = |m(s)|^2$, так что обратная матрица-функция $A^{-1}(s) \in C^1(\overline{G})$. В силу равномерной непрерывности $\mathcal{D}\gamma$ и леммы 2.3.2 существует такое $\delta > 0$, что

$$\begin{gathered} |A^{-1}(s_0)[(\mathcal{D}\gamma)(s_1) - (\mathcal{D}\gamma)(s_2)]| \leqslant 1/2 \quad \text{при } |s_1 - s_2| \leqslant 2\delta, \\ |A^{-1}(s_0)[\gamma(s_1) - \gamma(s_2) - (\mathcal{D}\gamma)'(s_0)(s_1 - s_2)]| \leqslant 1/2 \quad \text{при } |s_j - s_0| \leqslant \delta. \end{gathered} \tag{2.4.6}$$

Поскольку функция трех переменных $A^{-1}(s_0)[\gamma(s_1) - \gamma(s_2)]|s_1 - s_2|^{-1}$ нигде не обращается в нуль на компактном подмножестве $\overline{G}\times\overline{G}\times\overline{G}$, выделяемом неравенством $|s_1 - s_2| \geqslant \delta$, и непрерывна, можно ввести положительную постоянную

$$0 < q \leqslant 1, \quad 2q \leqslant \min_{s_0,\ |s_1 - s_2| \geqslant \delta} \frac{|A^{-1}(s_0)[\gamma(s_1) - \gamma(s_2)|}{|s_1 - s_2|}. \tag{2.4.7}$$

Исходя из r, δ и q, определим число ρ_0 по условию

$$\rho_0 = \min(r, \delta, q). \tag{2.4.8}$$

Замена переменных

$$(\widetilde{u}, u_k) = A^{-1}(s_0)(x - a) \tag{2.4.9}$$

в окрестности точки $a = \gamma(s_0) \in K$ дает указанную выше локальную декартову систему координат. В самом деле, (2.4.9) равносильно равенству $x - a = \gamma'(s_0)\widetilde{u} + m(s_0)u_k$, которое показывает, что ось u_k направлена вдоль нормали $n(a)$. В соответствии с этим рассмотрим вектор-функцию

$$(\widetilde{\alpha}(s), \alpha_k(s)) = A^{-1}(s_0)[\gamma(s) - \gamma(s_0)], \tag{2.4.10}$$

в шаре $B_0 = \{|s - s_0| \leqslant 2r\}$. Согласно (2.3.2) и (2.4.5) этот шар содержится в G и неравенства (2.4.6) выполнены для любых $s_1, s_2 \in B_0$. Заметим, что

$$\widetilde{\alpha}'(s_0) = 1, \quad \alpha_k'(s_0) = 0, \tag{2.4.11}$$

где 1 означает единичную $(k-1) \times (k-1)$-матрицу. Поэтому

$$A^{-1}(s_0)[\gamma'(s_1) - \gamma'(s_2)] = [\widetilde{\alpha}'(s_1) - \widetilde{\alpha}'(s_2), \alpha_k'(s_1) - \alpha_k'(s_2)],$$

$$A^{-1}(s_0)[\gamma'(s_1) - \gamma'(s_2)] = [\widetilde{\alpha}(s_1) - \widetilde{\alpha}(s_2) - (s_1 - s_2), \alpha_k(s_1) - \alpha_k(s_2)].$$

В силу (2.4.6) отсюда заключаем, что

$$|s_1 - s_2|/2 \leqslant |\widetilde{\alpha}(s_1) - \widetilde{\alpha}(s_2)| \leqslant 2|s_1 - s_2|. \tag{2.4.12}$$

и, в частности,

$$1/2 \leqslant |\alpha_k'(s)| \leqslant 2, \quad s \in B_0. \tag{2.4.13}$$

Следовательно, отображение $\widetilde{\alpha}$ липшицево и переводит шар B_0 в некоторую область $\widetilde{B}_0$, содержащую точку $\widetilde{u} = 0$. На основании леммы 2.3.3 оно осуществляет диффеоморфизм B_0 на $\widetilde{B}_0$.

Положим

$$\beta = \widetilde{\alpha}^{-1}, \; f(\widetilde{u}) = \alpha_k[\beta(\widetilde{u})].$$

В силу (2.4.12) для производной β' имеем неравенства $|\xi|/2 \leqslant |\beta'(\widetilde{u})\xi| \leqslant 2|\xi|$, $\widetilde{u} \in \widetilde{B}_0$. Совместно с (2.4.13) отсюда получаем оценку $|f'|_0 \leqslant 1$ для производной функции f, так что с учетом (2.4.11) условия (2.4.5) для нее выполнены.

Таким образом, вектор-функция $\widetilde{\gamma}(\widetilde{u}) = (\widetilde{u}, f(\widetilde{u}))$, $\widetilde{u} \in \widetilde{B}_0$, представляет собой гладкую параметризацию поверхности $\gamma(B_0)$. Другими словами, эта поверхность представляет собой график функции $u_k = f(\widetilde{u})$, $\widetilde{u} \in \widetilde{B}_0$, в локальной системе координат. В силу (2.4.12) расстояние от точки $\tilde{u} = 0$ до границы области $\widetilde{B}_0$ не меньше r, так что с учетом (2.4.8) шар $B_\rho = \{|\widetilde{u}| \leqslant \rho\}$ содержится в области $\widetilde{B}_0$. Поэтому остается рассмотреть функцию f в этом шаре и проверить, что пересечение поверхности Γ с окрестностью (2.4.4) представляет собой график этой функции.

Предположим, что вместе с точкой $(\widetilde{u}, f(\widetilde{u}))$ внутри $C_\rho(a)$ лежит и некоторая другая точка $(\widetilde{u}, u_k)$ поверхности Γ. Тогда

$$(\widetilde{u}, f(\widetilde{u})) = A^{-1}(s_0)[\gamma(s) - \gamma(s_0)], \quad (\widetilde{u}, u_k) = A^{-1}(s_0)[\gamma(s_*) - \gamma(s_0)],$$

с некоторыми $s \in B_0$, $s_* \notin B_0$, так что $|s_* - s_0| > 2r$. В силу (2.4.12) имеем неравенство $|s - s_0| \leqslant \rho/2$, откуда $|s - s_*| > 2r - \rho/2$. С другой стороны, равенство

$$(\widetilde{u}, f(\widetilde{u}) - u_k) = A^{-1}(s_0)[\gamma(s) - \gamma(s_*)]$$

совместно с (2.4.4), (2.4.7) показывает, что

$$3\rho \geqslant |f(\widetilde{u}) - u_k| = |A^{-1}(s_0)[\gamma(s) - \gamma(s_*)]| \geqslant 2q|s - s_*|.$$

Здесь учтено, что в силу (2.4.5) функция f удовлетворяет неравенству $|f(\widetilde{u})| \leqslant |\widetilde{u}|$, $\widetilde{u} \in B_\rho$. Таким образом, $3\rho > 2q(2r - \rho/2)$ и, значит, $4\rho \geqslant (3 + q)\rho > 4qr$, что противоречит (2.4.8).

Остается рассмотреть последнее утверждение теоремы. Если параметризация $\gamma \in C^{1,\mu}(\overline{G})$, то, очевидно, этому классу принадлежат и функции $\widetilde{\alpha}$ и α_k в (2.4.10). Поскольку $\beta' \circ \widetilde{\alpha} = (\widetilde{\alpha}')^{-1}$, совместно с (2.4.12) отсюда заключаем, что постоянная Гельдера $[\beta']_\mu$ в шаре $|\widetilde{u}| \leqslant \rho$ равномерно ограничена по $a \in K$. Следовательно, этим свойством обладает и производная функции $f = \alpha_k \circ \beta$. □

Пусть задана гладкая поверхность с краем Γ, тогда согласно теореме 2.4.1 для любой точки $a \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$ найдется такое $\rho > 0$, что окрестность $C_\rho(a)$ разбивается поверхностью Γ на две связные компоненты $C_\rho^{\pm}(a)$, выделяемые условием $\pm[f(\widetilde{u}) - u_k] > 0$. Их называем левой и правой полуокрестностями для, соответственно, верхнего и нижнего знаков. Конечно, знаки здесь зависят от выбора нормали $n(a)$. Условимся говорить, что некоторая область D лежит слева (справа) от Γ, если для любой точки $a \in \Gamma \setminus \partial\Gamma$ при достаточно малых ρ область D не пересекается с правыми (левыми) полуокрестностями этой точки. В этом случае, очевидно, $D \cap \Gamma = \varnothing$ и для точек $a \in \overline{D} \cap \Gamma$ вектор $n(a)$ является внутренней (внешней) нормалью по отношению к D.

С помощью теоремы 2.4.1 можно рассмотреть следующее обобщение леммы 2.2.2.

Теорема 2.4.2. *Пусть граница конечной области D содержит гладкую поверхность с краем Γ, относительно которой эта область лежит с одной стороны, и подобласть $D_0 \subseteq D$ такова, что $\Gamma_0 = \overline{D}_0 \cap \partial D \subseteq \Gamma \setminus \partial\Gamma$. Пусть функция φ непрерывно дифференцируема в области D и ее производная-градиент φ' допускает оценку*

$$|\varphi'(x)| \leqslant M d^{\mu-1}(x, \Gamma), \quad x \in D_0, \tag{2.4.14}$$

с некоторыми $M > 0$ и $0 < \mu \leqslant 1$. Тогда $\varphi \in C^{0,\mu}(D_0)$ и $[\varphi]_\mu \leqslant CM$, где для заданного μ постоянная $C > 0$ зависит только от Γ и расстояния от области D_0 до $\partial D \setminus \Gamma$.

Доказательство. Пусть для определенности область D лежит слева от Γ и для краткости $\Gamma' = \partial D \setminus \Gamma$. По условию число $2r_0 = d(D_0, \Gamma')$ положительно и можно ввести компакт $K = \{a \in \Gamma, d(a, \Gamma') \geqslant r_0\}$, который, очевидно, содержит Γ_0. Пусть число $\rho_0 = \rho_0(\Gamma, K)$ выбрано, как в теореме 2.4.1 по отношению к данному компакту.

Зафиксируем число $2\rho = \min(\rho_0, r_0)$, которое, очевидно, вместе с K зависит только от расстояния от области D_0 до Γ', и рассмотрим окрестность $C_\rho(a)$ точки $a \in K$, фигурирующую в теореме 2.4.1. Вместе с ней введем еще окрестность $D_\rho(a) \subseteq C_\rho(a)$, определяемую в локальных координатах неравенствами $|f(\widetilde{u}) - u_k| \leqslant \rho$, $|\widetilde{u}| < \rho\}$. Пусть односторонние полуокрестности $D^\pm_\rho(a)$, как и выше, определяются знаком $f(\widetilde{u}) - u_k$.

Заметим, что шар с центром a радиуса $\rho/\sqrt{2}$ содержится в этой окрестности. В самом деле, достаточно проверить, что $|\widetilde{u}|^2 + |f(\widetilde{u}) + \rho|^2 \leqslant \rho^2/2$. Поскольку $|f(\widetilde{u})| \leqslant |\widetilde{u}|$, это неравенство сводится к соотношению $s^2 + (\rho - s)^2 \geqslant \rho^2/2$ при $0 \leqslant s \leqslant \rho$, которое очевидно. Принимая во внимание, что по предположению область D лежит слева, отсюда следует, что пересечение области D с кругом $\{|x - a| < \rho/\sqrt{2}\}$ содержится в $D^+_\rho(a)$.

Обозначим для краткости $\Gamma_2 = \Gamma \cap C_{2\rho}(a)$. Утверждается, что

$$d(x, \Gamma) \geqslant d(x, \Gamma_2)/9, \quad x \in C_\rho(a). \tag{2.4.15}$$

В самом деле, окрестность $C_{2\rho}(a)$ содержится в шаре $\{|x - a| \leqslant 2\sqrt{5}\rho\}$ и, следовательно, $d(x, \Gamma_2) \leqslant 3\sqrt{5}\rho < 9\rho$. Поскольку расстояние между $C_\rho(a)$ и $\Gamma \setminus \Gamma_2$ не меньше ρ, отсюда

$$d(x, \Gamma) = \min[d(x, \Gamma_2), d(x, \Gamma \setminus \Gamma_2)] \geqslant \min\left[\frac{\rho}{d(x, \Gamma_2)}, 1\right] d(x, \Gamma_2),$$

что дает оценку (2.4.15).

В локальных координатах преобразование $\alpha(u) = (\widetilde{u}, f(\widetilde{u}) - u_k)$ переводит $D^+_\rho(a)$ в цилиндр $B_\rho = \{|\widetilde{u}| < \rho,\ |u_k| < \rho\}$, а граничную поверхность $\Gamma \cap C_\rho(a)$ — в основание этого цилиндра. Поскольку $\alpha(u) - \alpha(v) = (0, s)$, где $s = f(\widetilde{u}) - f(\widetilde{v}) - (u_k - v_k)$, и $[f]_1 \leqslant 1$, вектор-функция α удовлетворяет условию Липшица с полунормой $[\alpha]_1 \leqslant 2$. Обратное преобразование $\beta = \alpha^{-1}$ действует по правилу $\alpha(u) = (\widetilde{u}, u_k - f(\widetilde{u}))$ и, следовательно, удовлетворяет аналогичному условию Липшица. Таким образом, преобразование α липшицево с постоянной $M = 2$ в (2.3.1).

В силу выбора ρ в этих утверждениях можно ρ заменить на 2ρ. Поэтому на основании (2.3.2) и (2.4.15) имеем неравенство $d(\beta(y), \Gamma) \geqslant y_k/18$, $y \in B_\rho$. Совместно с (2.4.14) отсюда следует, что к функции $\psi(y) = \varphi[\beta(y)$ в цилиндре B_ρ можно применить лемму 2.2.2, согласно которой функция ψ принадлежит $C^\mu(B_\rho)$ с соответствующей оценкой своей полунормы. Следовательно, и $\varphi \in C^\mu(D^+_\rho)$ и ее полунорма $[\varphi]_\mu \leqslant C_0 M$, где постоянная $C_0 > 0$ зависит только от μ и ρ.

Рассмотрим теперь две произвольные точки $x, y \in D_0$, для которых $|x - y| \leqslant \rho/8$, и предположим сначала, что $d(x, \Gamma) \leqslant \rho/2$. Пусть расстояние $d(x, \Gamma)$ реализуется в точке $a \in \Gamma$, т. е. $d(x, \Gamma) = |x - a|$. Так как $\rho(a, \Gamma') \geqslant \rho(x, \Gamma') - |x - a| \geqslant 2r_0 - \rho/2 > r_0$, точка a принадлежит K. Поскольку $|y - a| \leqslant |y - x| + |x - a| < \rho/\sqrt{2}$, обе точки x, y принадлежат $D^+_\rho(a)$ и по доказанному выше

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C_0 M |x - y|^\mu. \tag{2.4.16}$$

Рассмотрим теперь случай $d(x, \Gamma) \geqslant \rho/8$. В этом случае шар B с центром в точке a радиуса $\rho/8$ содержит точку y и расстояние $d(B, \Gamma) \geqslant \rho/4$. Так как и $d(B, \Gamma') \geqslant 2r_0 > \rho/4$, расстояние шара B до всей границы ∂D не меньше $\rho/4$, и по теореме 2.2.2 в этом случае имеем оценку

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C_1 M |x - y|^\mu,$$

где постоянная $C_1 > 0$ зависит только от ρ. Совместно с (2.4.16) эта оценка позволяет применить теорему 2.1.3, в которой роль r и G играют, соответственно, $\rho/8$ и D_0, что завершает доказательство теоремы. □

Покажем, что при некоторых условиях постоянная C в теореме 2.4.2 устойчива относительно изменения поверхности Γ. Условимся говорить, что последовательность поверхностей с краем Γ_n, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к Γ в классе C^1 при $n \to \infty$, если существуют их параметризации $\gamma_n : G \to \Gamma_n$ в некоторой липшицевой области G, сходящиеся к параметризации γ поверхности Γ в пространстве $C^1(\overline{G})$. Аналогичный смысл имеет сходимость в классе $C^{1,\nu}$ по отношению к пространству $C^{1,\nu}(G)$.

Лемма 2.4.1. *Пусть условия теоремы* 2.4.2 *выполнены по отношению к последовательностям* Γ_n, D_n *и* $D_n^0 \subseteq D_n$, *причем диаметры областей* D_n *равномерно ограничены, поверхности* $\Gamma_n \to \Gamma$ *при* $n \to \infty$ *в классе* C^1 *и*

$$\inf_n d(D_n^0, \partial D_n \setminus \Gamma_n) > 0, \tag{2.4.17}$$

Тогда если функции $\varphi_n \in C^1(D_n)$ *допускают оценку*

$$|\varphi_n'(x)| \leqslant M_n d^{\mu-1}(x, \Gamma_n), \quad x \in D_n^0.$$

то имеет место оценка

$$[\varphi]_{\mu, D_n^0} \leqslant C M_n, \tag{2.4.18}$$

где постоянная $C > 0$ *не зависит от* n.

Доказательство. Обозначим $2r_0$ нижнюю грань (2.4.17) и аналогично доказательству теоремы 2.4.2 положим $K_n = \{a \in \Gamma_n,\ d(a, \Gamma') \geqslant r_0\}$. Утверждается, что последовательность $\rho_0(K_n, \Gamma_n)$, определяемую теоремой 2.4.1, можно подчинить условию

$$\inf_n d(K_n, \partial\Gamma_n) = \rho_0 > 0.$$

В самом деле, по условию последовательность параметризаций $\gamma_n : \overline{G} \to \Gamma_n$ сходится к в классе $C^1(\overline{G})$. С помощью леммы 2.3.3 легко убедиться, что параметризации γ_n липшицевы равномерно по n, т. е. M-липшицевы для некоторого M. Пусть $r > 0$ подчинено условию $2Mr \leqslant r_0$, что соответствует выбору (2.4.5) по отношению к K_n и $\partial\Gamma_n$. В силу замечания к лемме 2.3.2 число δ в (2.4.6) также можно выбрать единым для всех γ_n и, очевидно, аналогичным свойством обладает q в (2.4.7). Поэтому остается воспользоваться выбором (2.4.8) для числа ρ_0.

Полагая $2\rho = \min(\rho_0, r_0)$ и принимая во внимание, что в дальнейших рассуждениях теоремы 2.4.2 участвует только ρ и диаметр области D_n, отсюда следует оценка (2.4.18) с постоянной C, не зависящей от n. □

Теорема 2.4.1 согласуется с определением областей с гладкой границей, данным в пункте 2.3. Она позволяет дать следующее общее определение: множество $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^k$ называется открытой гладкой поверхностью, если каждая ее точка обладает окрестностью вида (2.4.4), внутри которой оно является графиком непрерывно дифференцируемой функции $f(\widetilde{u})$, $|\widetilde{u}| \leqslant \rho$. Эта поверхность принадлежит классу $C^{1,\mu}$, если функция f принадлежит данному классу. В случае, когда множество Γ компактно, говорим о замкнутой гладкой поверхности. В этом случае число ρ, фигурирующее в теореме, можно выбрать единым для всех точек $a \in \Gamma$.

В самом деле, поверхность Γ можно покрыть конечным числом поверхностей Γ_j с краем, $1 \leqslant j \leqslant m$, таких, что открытые поверхности $\Gamma_j \setminus \partial\Gamma_j$ покрывают Γ. Более того, можно выбрать компакты $K_j \subseteq \Gamma_j \setminus \partial\Gamma_j$, обладающие аналогичным свойством. Поэтому если ρ_j определяется по Γ_j и K_j, как в теореме 2.4.1, то достаточно положить

$$\rho = \min_{1 \leqslant j \leqslant m} (\rho_j, r_j),$$

где $3r_j$ означает расстояние от K_j до $\Gamma \setminus \Gamma_j$. Нужно только учесть, что окрестность (2.4.3) содержится в шаре $|x - a| \leqslant 3\rho$. Так определенное число ρ часто называют стандартным радиусом замкнутой гладкой поверхности Γ.

Рассуждения теоремы 2.4.2 можно провести и по отношению ко всей области D, границей которой служит гладкая замкнутая поверхность Γ. Именно, если функция $\varphi \in C^1(D)$ допускает оценку (2.4.14), то $\varphi \in C^{0,\mu}(D)$ и $[\varphi]_\mu \leqslant CM$, где постоянная $C > 0$ зависит только от стандартного радиуса ρ и диаметра области D.

2.5. Гладкие и кусочно-гладкие кривые

В двумерном случае $k = 2$ роль поверхностей играют кривые на плоскости, в этом случае поверхности с краем переходят в гладкие дуги. Удобно рассматривать двумерное пространство $\mathbb{R}^2$ как комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Соответственно этому параметризацией гладкой дуги Γ служит взаимно однозначная комплекснозначная функция $\gamma \in C^1[0,l]$ на отрезке $[0,l]$ действительной оси, производная которой всюду отлична от нуля. Конечно, в качестве области определения параметризации может быть выбран и любой другой отрезок. Функция γ определяет единичный касательный вектор

$$e(t) = \gamma'(s)/|\gamma'(s)|, \quad t = \gamma(s), \tag{2.5.1}$$

в точке $t \in \Gamma$ дуги и задает ее ориентацию, т. е. естественный порядок точек, определяемый параметром s. Концам отрезка I и его внутренним точкам отвечают соответствующие точки дуги. С учетом леммы 2.3.3 класс $C^{1,\mu}$ гладких дуг можно в обозначениях (2.5.1) определить условием $e \in C^\mu(\Gamma)$.

Как и в случае поверхностей, выражение $d_1 t = |\gamma'(s)| ds$ представляет собой элемент длины дуги. В соответствии с этим понимается и интеграл

$$\int\limits_\Gamma \varphi(t) d_1 t = \int\limits_0^l \varphi[\gamma(s)] |\gamma'(s)| ds, \tag{2.5.2}$$

который, очевидно, не зависит от выбора параметризации. В частности, равенство

$$\operatorname{mes}_1 \Gamma = \int\limits_0^l |\gamma'(s)| ds$$

определяет длину всей кривой Γ. Каждая гладкая дуга допускает так называемую естественную параметризацию γ_0, для которой $|\gamma_0'(s)| \equiv 1$, в этом случае l совпадает с длиной кривой. Исходя из произвольной гладкой параметризации $\gamma : [0,1] \to \Gamma$, естественную параметризацию можно определить равенством $\gamma_0(s) = \gamma[\alpha(s)]$, $0 \leqslant s \leqslant l$, где отображение α отрезка $[0,l]$ на $[0,1]$ обратно к функции

$$\beta(r) = \int\limits_0^r |\gamma'(u)| du, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1.$$

Таким образом, параметр s естественной параметризации играет роль длины дуги, отсчитываемый от ее конца.

На ориентируемой дуге можно ввести операцию дифференцирования $\varphi \to \varphi'_s$ по естественному параметру s, с помощью которой вводится класс $C^1(\Gamma)$. Связь этой операции с произвольной параметризацией γ, согласованной с ориентацией, дается равенством

$$\varphi' \circ \gamma = (\varphi \circ \gamma)' |\gamma'|^{-1}. \tag{2.5.3}$$

Очевидно, если комплекснозначная функция $\alpha \in C^1(\Gamma)$ взаимно однозначна и производная $\alpha'(t) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$, то образ $\alpha(\Gamma)$ является гладкой дугой с параметризацией $\alpha \circ \gamma$. Отображения этого типа назовем сдвигами гладких дуг. Ясно, что сдвиг α является липшицевым отображением, поскольку этим свойством обладают γ и $\alpha \circ \gamma$. В этом смысле отображение γ^{-1}, обратное к параметризации $\gamma : [0,l] \to \Gamma$, является сдвигом $\Gamma \to [0,l]$.

С помощью единичной функции $e = e_1 + ie_2 \in C(\Gamma)$, фигурирующей в (2.5.1), можно ввести на ориентируемой гладкой дуге Γ и криволинейные интегралы с комплексным дифференциалом $dz = dx + idy$ по формуле

$$\int\limits_\Gamma f_1(z) dx + f_2(z) dy = \int\limits_\Gamma (f_1 e_1 + f_2 e_2) d_1 z, \quad e = e_1 + ie_2. \tag{2.5.4}$$

Заметим, что изменение ориентации на противоположную меняет знак этих интегралов.

Условимся под кусочно-гладкой кривой Γ на плоскости понимать объединение конечного числа гладких дуг, которые попарно могут пересекаться лишь по своим концам. Интеграл от функции φ, заданной на такой кривой, понимается как сумма интегралов (2.5.2) по соответствующим дугам. Если все связные компоненты рассматриваемой кривой гомеоморфны окружности, то говорим о кусочно-гладком контуре. Для областей, ограниченных кусочно-гладким контуром, формулу Грина из пункта 1.8 можно переформулировать в терминах криволинейных интегралов типа (2.5.4).

Теорема (формула Грина). *Пусть область D на плоскости ограничена кусочно-гладким контуром Γ, ориентированным положительно по отношению к D* (*т. е. при движении по Γ в положительном направлении область D остается слева*). *Тогда, если функции $f, g \in C(\overline{D})$ непрерывно дифференцируемы в области D, то*

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) d_2 z = \int\limits_\Gamma f dy - g dx$$

при условии, что подынтегральное выражение в левой части равенства интегрируемо в области D.

Для доказательства достаточно заметить, что если направление единичного касательного вектора e согласовано с ориентацией контура, то он связан с единичным вектором $n = n_1 + in_2$ внешней нормали равенством $e = in$.

Один класс гладких дуг выделим отдельно. По определению дуга Γ радиальна по отношению к своему концу a, если она допускает параметризацию вида

$$\gamma(r) = a + re^{if(r)}, \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho, \tag{2.5.5}$$

где вещественная функция f непрерывно дифференцируема на $(0, \rho]$ и имеет пределы $\lim f(r) = \theta$ и $\lim r f'(r) = 0$ при $r \to 0$.

Очевидно, так определенная функция $\gamma(r)$ взаимно однозначна на $[0, \rho]$, причем ее производная $\gamma'(r) = [1 + r\theta'(r)]e^{i\theta(r)}$ непрерывна на этом отрезке и всюду отлична от нуля. Таким образом, формула (2.5.5) действительно определяет гладкую параметризацию. Ее параметром служит $r = |t - a|$, $t \in \Gamma$, в частности, ρ есть расстояние между концами дуги. Если единичный касательный вектор $e(t)$ $t \in \Gamma$, определяется по этой параметризации аналогично (2.5.1), то его значение на конце a совпадает с $e^{i\theta}$.

Параметризацию (2.5.5) также называем радиальной. Следующая лемма дает простой критерий радиальности дуги.

Лемма 2.5.1. *Пусть Γ является гладкой дугой и колебание $m = [e]_0$ ее единичного касательного вектора $e(t)$ удовлетворяет условию*

$$m = \max_{t_j \in \Gamma} |e(t_1) - e(t_2)| \leqslant 1/4. \tag{2.5.6}$$

Тогда эта дуга радиальна по отношению к любому своему концу a и производная ее радиальной параметризации $\gamma(r)$ допускает оценку

$$1/3 \leqslant |\gamma'(r)| \leqslant 3, \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho. \tag{2.5.7}$$

Сама дуга Γ лежит в секторе раствора $\pi/2$ с вершиной a и биссектрисой вдоль вектора $e(a)$.

Доказательство. Пусть $\gamma_0(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$ — естественная параметризация дуги Γ с концом $a = \gamma_0(0)$. Рассмотрим в квадрате $I = \{0 \leqslant s_0, s \leqslant l\}$ функцию

$$q(s_0, s) = \frac{\gamma_0(s) - \gamma_0(s_0)}{s - s_0} = \int\limits_0^1 \gamma_0'[rs + (1 - r)s_0]dr,$$

которая при $s = s_0$ принимает значение $\gamma_0'(s)$. Поскольку $e[\gamma_0(s)] = \gamma_0'(s)$, величина m совпадает с колебанием функции $\gamma_0'(s)$. Очевидно, это верно и по отношению к колебанию функции $q(s_0, s)$ в квадрате $I \times I$. Таким образом, $||q(u)| - |q(v)|| \leqslant |q(u) - q(v)| \leqslant m$, где $u, v, \ldots$ означают точки квадрата. Поскольку $|q(v)| = |\gamma'(s_0)| = 1$ для $v = (s_0, s_0)$, отсюда $|q(u)| \geqslant 1 - m$. Следовательно, для любых $u, v \in I \times I$ имеем:

$$\left|\frac{q(u)}{|q(u)|} - \frac{q(v)}{|q(v)|}\right| \leqslant \frac{|q(u)||q(u)| - |q(v)|| + |q(v)||q(u) - q(v)||}{|q(u)||q(v)|} \leqslant \frac{2m}{1-m}.$$

С учетом (2.5.7) отсюда

$$\left|\frac{q(u)}{|q(u)|} - \frac{q(v)}{|q(v)|}\right| \leqslant \frac{2}{3}. \tag{2.5.8}$$

Из этого неравенства следует, что угол φ между двумя единичными векторами $e_1 = q(u)/|q(u)|$ и $e_2 = q(v)/|q(v)|$ удовлетворяет неравенству $1 - \cos\varphi \leqslant 2/9$, откуда $\varphi \leqslant \pi/4$. Для $u = (s, 0)$ и $v = (0, 0)$ этот угол совпадает с углом между вектором $\gamma_0(s) - \gamma_0(s_0)$ и касательной к Γ в точке $a = \gamma_0(0)$, что доказывает последнее утверждение леммы.

Рассмотрим далее функции $\alpha(s) = |\gamma_0(s) - \gamma_0(0)|$ и $a(s) = \arg[\gamma_0(s) - \gamma_0(0)]$. Очевидно, $a(s) \to \theta$ при $s \to 0$, где $e^{i\theta} = e(a)$. Для производных этих функций имеем выражения

$$\alpha'(s) = \operatorname{Re}\frac{[\gamma_0(s) - \gamma_0(0)]\overline{\gamma_0'(s)}}{|\gamma_0(s) - \gamma_0(0)|} = \operatorname{Re}\frac{[q(s,0)\overline{q(s,s)}]}{|q(s,0)|}, \quad a'(s) = \operatorname{Im}\frac{\gamma_0'(s)}{\gamma_0(s) - \gamma_0(0)}.$$

В частности, $sa'(s) \to 0$ при $s \to 0$. Очевидно,

$$1 - \alpha'(s) = \operatorname{Re} Q, \quad Q = \left[q(s,s) - \frac{q(s,0)}{|q(s,0)|}\right]\overline{q(s,s)},$$

и в силу (2.5.8) величина $|Q| \leqslant 2/3$, так что

$$1/3 \leqslant \alpha'(s) \leqslant 3, \ 0 \leqslant s \leqslant l. \tag{2.5.9}$$

Поэтому существует функция $s = \beta(r)$, $0 \leqslant r \leqslant \rho = \alpha(l)$, обратная к α. Очевидно, функция $f(r) = a[\beta(r)] \to \theta$ и $rf'(r) \to 0$ при $r \to 0$, и в обозначении $\gamma(r) = \gamma_0[\beta(r)]$ равенство $\gamma_0(s) - \gamma_0(0) = \alpha(s)e^{ia(s)}$ можно записать в форме (2.5.4), так что дуга Γ радиальна. Поскольку производная β' удовлетворяет аналогичной (2.5.9) оценке на отрезке $[0, \rho]$, с учетом равенства $\gamma' = (\gamma_0' \circ \beta)\beta'$ отсюда приходим к оценке (2.5.7), завершающей доказательство леммы. □

Лемма 2.5.1 показывает, что любая гладкая дуга Γ в достаточно малой окрестности своего конца является радиальной по отношению к этому концу.

В рассматриваемом двумерном случае окрестность (2.4.3) представляет собой прямоугольник $C_\rho(a) = \{|u_1| \leqslant \rho, \ |u_2| \leqslant 2\rho\}$, содержащий круг $\{|z - a| \leqslant \rho\}$. Если a является внутренней точкой гладкой дуги Γ, то локальная система координат u_1, u_2 с началом в точке a однозначно определяется кривой, поскольку ось u_1 направлена вдоль касательного вектора $e(a)$, а ось u_2 — вдоль нормали к кривой. Теорему 2.4.1 в этом случае можно несколько уточнить.

Лемма 2.5.2. *Пусть a является внутренней точкой гладкой дуги Γ и ρ выбрано, как в теореме 2.4.1, по отношению к $K = \{a\}$. Тогда точка a разбивает дугу $\Gamma_a = \Gamma \cap C_\rho(a)$ на две дуги, которые радиальны по отношению к своему общему концу a. В частности, пересечение $\Gamma \cap \{|z - a| \leqslant \rho\}$ является также дугой с внутренней точкой a.*

Доказательство. Согласно теореме 2.4.1 дуга Γ_a представляет собой график функции $u_2 = f(u_1)$, где функция $f \in C^1[-\rho, \rho]$ удовлетворяет условиям $f(0) = f'(0) = 0$ и $|f'(u_1)| \leqslant 1$ для всех $|u_1| \leqslant 1$.

Необходимо показать, что график функции $y = f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \rho$, является радиальной дугой по отношению к точке $z = 0$. Как и при доказательстве леммы 2.5.1, достаточно убедиться, что производная функции $r = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ положительна, т. е. что $x + f(x)f'(x) > 0$ при $x > 0$. Этот факт легко следует из условия $|f'| \leqslant 1$.

В самом деле, предположим противное, и пусть $f'(c)[f(c)/c] = -1$ для некоторого $c > 0$. Поскольку оба числа $|f(x)|/x$ и $|f'(x)|$ не превосходят 1, отсюда

$$f'(c) = \pm 1, \ f(c) \pm c = 0. \tag{2.5.10}$$

Но последнее равенство здесь можно записать в форме

$$\int_0^1 [1 \pm f'(tc)]dt = 0,$$

что возможно только при $f'(x) = \mp 1,\ 0 \leqslant x \leqslant c$. Но это свойство противоречит первому равенству в (2.5.10). $\square$

Обратимся к общей кусочно-гладкой кривой Γ. Точка $\tau \in \Gamma$ является внутренней, если пересечение кривой с кругом $\{|z-\tau| \leqslant \rho\}$ достаточно малого радиуса ρ представляет собой гладкую дугу, для которой точка τ внутренняя. Остальные точки кривой называются граничными, число их конечно и они образуют границу $\partial\Gamma$. В частности, граница гладкой дуги состоит из двух точек — ее концов. Случай $\partial\Gamma = \varnothing$ не исключается, в этом случае Γ является гладким контуром. Согласно лемме 2.5.1 круг с центром $\tau \in \partial\Gamma$ достаточно малого радиуса ρ разбивается кривой на конечное число n_τ радиальных дуг $\Gamma_{\tau,j}$ с общим концом τ. Таким образом,

$$\Gamma \cap \{|z-\tau| \leqslant \rho\} = \bigcup_{j=1}^{n_\tau} \Gamma_{\tau,j}; \quad \Gamma_{\tau,i} \cap \Gamma_{\tau,j} = \{\tau\},\ i \neq j. \tag{2.5.11}$$

В этом случае говорим также, что дуги $\Gamma_{\tau,j}$ сходятся к τ.

Очевидно, для внутренних точек $\tau \in F \backslash \partial\Gamma$ угол между дугами $\Gamma_{\tau,1}$ и $\Gamma_{\tau,2}$ равен π, т. е. эти дуги составляют гладкую кривую. В общем случае при $n_\tau \geqslant 2$ может случиться, что угол между двумя дугами $\Gamma_{\tau,i}$ и $\Gamma_{\tau,j}$ равен нулю, т. е. они внутренним образом касаются другу друга в точке τ. В этом случае τ называем точкой возврата кривой Γ.

При $n_\tau = 1$ граничную точку τ естественно назвать концом кривой Γ. Если $n_\tau = 2$ для всех τ, то кривая Γ является кусочно-гладким контуром, т. е. ее связные компоненты гомеоморфны окружности. Если все граничные точки являются концами, т. е. $n_\tau = 1$ для всех $\tau \in \partial\Gamma$, то Γ есть объединение попарно не пересекающихся гладких дуг. Наконец, возможен крайний случай, когда граница $\partial\Gamma$ состоит из одной точки τ, в этом случае все связные компоненты гомеоморфны открытому интервалу прямой, их называем открытыми гладкими дугами (с общим концом τ).

Более точно, открытой гладкой дугой $\dot\Gamma$ назовем образ интервала $(0,1)$ комплекснозначной функции $\gamma \in C^1[0,1]$, которая взаимно однозначна на полуоткрытых интервалах $(0,1]$ и $[0,1)$ и производная $\gamma'(s) \neq 0$ для всех $0 \leqslant s \leqslant 1$. Как и в случае обычной дуги, функцию γ также называем параметризацией. Как и выше, запись $\dot\Gamma \in C^{1,\mu}$ означает, что параметризация $\gamma \in C^{1,\mu}[0,1]$.

Открытую дугу $\dot\Gamma$ называем разомкнутой при $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ и сомкнутой в противном случае. Таким образом, разомкнутая открытая дуга $\dot\Gamma$ получается из гладкой дуги Γ отбрасыванием ее концов. Сомкнутая открытая дуга $\dot\Gamma$ вместе с общим концом $\tau = \gamma(0) \neq \gamma(1)$ образует простой кусочно-гладкий контур (возможно гладкий).

Понятие сдвига открытых дуг $\alpha : \dot\Gamma \to \dot\Gamma_1$ вводится аналогично предыдущему — если γ есть параметризация $\dot\Gamma$, то $\alpha \circ \gamma$ имеет аналогичный смысл по отношению к $\dot\Gamma_1$. Таким образом, функция α непрерывно дифференцируема на $\dot\Gamma$ и вместе со своей производной α' имеет пределы на концах дуги (односторонние пределы на общем конце в случае сомкнутой дуги), причем α' всюду отлична от нуля, включая эти пределы на концах.

Принятая терминология открытых дуг удобна тем, что для любого конечного подмножества F кривой Γ, содержащего все ее граничные точки, связными компонентами множества $\Gamma \backslash F$ являются либо простые гладкие контура, либо открытые гладкие дуги (сомкнутые или разомкнутые). Таким образом,

$$\Gamma \setminus F = \Gamma_0 \cup \dot\Gamma_1 \cup \ldots \cup \dot\Gamma_m, \quad \partial\Gamma \subseteq F, \tag{2.5.12}$$

где Γ_0 является гладким контуром (вообще говоря, составным), $\dot\Gamma_j$ — открытыми гладкими дугами и все эти кривые попарно не пересекаются. Как правило, множество F содержится в Γ, хотя иногда в него удобно включать и некоторые точки вне этой кривой. Как легко видеть, в обозначениях (2.5.11) удвоенное число $2m$ совпадает с суммой всех $n_\tau,\ \tau \in \Gamma \cap F$.

Отметим, что если область D ограничена кусочно-гладким контуром, угловые точки которого не являются точками возврата, то эта область липшицева. В самом деле, пусть a является угловой точкой контура, так что к ней сходятся две дуги $\Gamma_{\tau,1}$ и $\Gamma_{\tau,2}$. Рассмотрим локальную систему декартовых координат с началом в точке a, ось y которой направлена вдоль прямой, делящей внутренний угол области D в точке a пополам. Тогда дуги $\Gamma_{\tau,1}$ и $\Gamma_{\tau,2}$ составляют график некоторой кусочно-гладкой функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условию Липшица. Поэтому, как отмечено в пункте 2.3, область D является липшицевой в окрестности a.

Пусть граница ∂D открытого множества D является кусочно-гладкой кривой Γ (такие множества называем кратко кусочно-гладкими). Рассмотрим семейство подобластей $D_j \subseteq D$, $1 \leqslant j \leqslant n$, каждая из которых ограничена кусочно-гладким контуром, подчиненное условию $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_n$. По определению функция $\varphi \in C(D)$ принадлежит классу $C(\widehat{D}, F)$, если ее сужения на D_j принадлежат $C(\overline{D}_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Очевидно, это определение не зависит от выбора $D_1, \ldots, D_n$ и пространство $C(\widehat{D})$ банахово относительно нормы

$$|\varphi| = \max_j |\varphi|_{C(\overline{D}_j)}.$$

Данное определение вводится для того, чтобы учитывать возможные односторонние предельные значения в граничных точках $a \in \partial D$. Остановимся на этом обстоятельстве подробнее. Замыкание $\overline{D}$ множества D имеет своей границей некоторый кусочно-гладкий контур $\Gamma_1 \subseteq D$, так что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, где кусочно-гладкая кривая Γ_2 имеет с Γ_1 конечное число общих точек. Остальные точки этой кривой являются внутренними для $\overline{D}$. Очевидно, в окрестности точки $a \in \Gamma_1 \setminus \partial\Gamma$ ($a \in \Gamma_2 \setminus \partial\Gamma$) множество D лежит с одной стороны (с обеих сторон) от Γ. В этой связи кривую Γ_2 называем разрезом множества D. Соответственно этим двум случаям функция $\varphi \in C(\widehat{D})$ имеет в точке a одно (два) предельных значения.

Можно дать более строгое описание этих граничных значений. Выберем компакт $K \subseteq \Gamma \setminus \partial\Gamma$, тогда в силу теоремы 2.4.1 и леммы 2.5.2 существует такое $\rho > 0$, что для любой точки $a \in K$ пересечение Γ с кругом $B(a) = \{|z-a| \leqslant \rho\}$ представляет собой гладкую дугу $\Gamma_\rho(a)$, для которой a является внутренней точкой. В частности, дополнение $B(a) \setminus \Gamma$ состоит из двух связных компонент $B^\pm(a)$. Очевидно, каждая из них лежит в некоторой связной компоненте $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, так что имеются две возможности, когда либо одна из этих компонент содержится в D, а вторая — в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$, либо обе они содержатся в D. В первом случае точка принадлежит Γ_1 и функция $\varphi \in C(\widehat{D})$ имеет в этой точке одно предельное значение, которое обозначим

$$\varphi^{(+)}(a) = \lim_{x \to a} \varphi(x), \quad a \in K \cap \Gamma_1, \tag{2.5.13}$$

а во втором случае она имеет два предельных значения

$$\varphi^\pm(a) = \lim_{x \to a,\, x \in B^\pm(a)} \varphi(x), \quad a \in K \cap \Gamma_2. \tag{2.5.14}$$

Знаки односторонних окрестностей $B^\pm(a)$ удобно фиксировать ориентацией дуги $\Gamma(a)$ так, чтобы при движении по этой дуге в положительном направлении множество $B^+(a)$ оставалось слева. Таким образом, функция φ имеет одно граничное значение $\varphi^{(+)} \in C(\Gamma_1 \setminus \partial\Gamma)$ и два граничных значения $\varphi^\pm \in C(\Gamma_2 \setminus \partial\Gamma)$. В точках $a \in \partial\Gamma$ таких граничных значений может быть несколько (более точно, в обозначениях (2.5.11) число этих предельных значений равно n_τ). Таким образом, $\widehat{D}$ можно рассматривать как некоторую компактификацию открытого множества D, определяемую описанными односторонними окрестностями.

Пространство $C^\mu(\widehat{D})$ вводится аналогично предыдущему — если, как и выше, подобласти $D_j \subseteq D$ ограничены кусочно-гладкими контурами и $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_n$, то это пространство состоит из всех функций $\varphi \in C(D)$, принадлежащих $C^\mu(\overline{D}_j)$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$.

Лемма 2.5.3. *Пространство $C^\mu(\widehat{D})$ не зависит от выбора подобластей $D_1, \ldots, D_n$ и банахово относительно нормы*

$$|\varphi| = \max_j |\varphi|_{C^\mu(\overline{D}_j)}. \tag{2.5.15}$$

Доказательство. Аналогично теореме 2.3.1 легко показать, что любая область, ограниченная кусочно-гладким контуром, равномерно связна. Пусть задано другое семейство подобластей $D'_j \subseteq D$, $1 \leqslant j \leqslant n'$, объединение замыканий которых совпадает с $\overline{D}$, и $|\varphi|'$ определяется аналогично (2.5.14) по этому семейству. Тогда каждое D'_j есть объединение подмножеств $D \cap D_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

и на основании теоремы 2.1.2
$$|\varphi|_{C^\mu(D_j')} \leqslant C|\varphi|,$$
откуда $|\varphi|' \leqslant C|\varphi|$. Точно так же доказывается и противоположное неравенство, так что нормы $\varphi|$ и $|\varphi|'$ эквивалентны. □

2.6. Пространство $C_*^\mu(G)$ на сфере Римана

Для неограниченного множества $G \subseteq \mathbb{R}^k$ обозначим $C_*(G)$ класс функций $\varphi \in C(G)$, допускающих предел $\varphi(\infty) = \lim \varphi(x)$ при $|x| \to \infty$. В этой связи удобно ввести одноточечную компактификацию $\overline{\mathbb{R}^k} = \mathbb{R}^k \cup \{\infty\}$ евклидового пространства $\mathbb{R}^k$ с помощью нового элемента ∞ — бесконечно удаленной точки. По определению ее окрестностями в этой компактификации служат дополнения к шарам. В частности, $C_*(G)$ можно рассматривать как класс функций, непрерывных на $G \cup \infty$ в этой топологии. При $n = 2$ стереографическая проекция устанавливает гомеоморфизм компакта $\overline{\mathbb{C}}$ на единичную сферу Ω трехмерного пространства, по этой причине он носит название сферы Римана. Подобную проекцию можно ввести и при $k \geqslant 3$, так что указанный термин можно сохранить и в этом случае.

Очевидно, инверсия
$$\delta(x) = \frac{x-a}{|x-a|^2} \tag{2.6.1}$$
относительно сферы $|x-a| = 1$ с центром в точке a осуществляет гомеоморфизм компакта $\overline{\mathbb{R}^k}$ на себя, причем $\delta(a) = \infty$ и $\delta(\infty) = 0$. При $a = 0$ это преобразование обозначаем $\delta(x) = x^*$, очевидно, оно переставляет точки 0, ∞ и взаимно обратно. В общем случае обратным к (2.6.1) служит преобразование $y \to a + y^*$.

Компакт $\overline{\mathbb{R}^k}$ можно наделить естественной структурой метрического пространства. С этой целью с каждой парой его точек x, y свяжем неотрицательное число $d(x,y)$ по формуле
$$\begin{gathered} d(x,y) = (1+|x|)^{-1}(1+|y|)^{-1}|x-y|, \quad x \neq \infty,\, y \neq \infty, \\ d(x,\infty) = d(\infty,x) = (1+|x|)^{-1},\ x \neq \infty; \quad d(\infty,\infty) = 0. \end{gathered} \tag{2.6.2}$$
Заметим, что тогда $d(x,y) \to d(x,\infty)$ при $y \to \infty$.

Лемма 2.6.1. *Функция $d(x,y)$ является расстоянием, относительно которого инверсия* (2.6.1) *удовлетворяет двусторонней оценке*
$$(1+|a|)^{-2} d(x,y) \leqslant d[\delta(x),\delta(y)] \leqslant (1+|a|)^2 d(x,y). \tag{2.6.3}$$

Доказательство. Первое утверждение доказывается проверкой неравенства треугольника для тройки точек $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}^k}$. Если одна из точек совпадает с ∞, это неравенство устанавливается непосредственно. Поэтому требуется доказать неравенство
$$\frac{|x-z|}{(1+|x|)(1+|z|)} \leqslant \frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)} + \frac{|y-z|}{(1+|y|)(1+|z|)},$$
или, что равносильно, неравенство
$$(1+|y|)|x-z| \leqslant (1+|z|)|x-y| + (1+|x|)|y-z|.$$
Достаточно убедиться, что $|y||x-z| \leqslant |z||x-y| + |x||y-z|$. Это неравенство очевидно, если одна из точек x, y, z совпадает с 0. В общем случае после деления на $|x||y||z|$ оно переходит в
$$\left|\frac{\tilde{x}}{|z|} - \frac{\tilde{z}}{|x|}\right| \leqslant \left|\frac{\tilde{x}}{|y|} - \frac{\tilde{y}}{|x|}\right| + \left|\frac{\tilde{y}}{|z|} - \frac{\tilde{z}}{|y|}\right|,$$
где положено $\tilde{x} = x/|x|$ и аналогично для $\tilde{y}, \tilde{z}$. Поскольку
$$\left|\frac{\tilde{x}}{|z|} - \frac{\tilde{z}}{|x|}\right|^2 = \frac{1}{|z|^2} + \frac{1}{|x|^2} - 2\frac{\tilde{x}\tilde{y}}{|x||z|} = \left|\frac{\tilde{x}}{|x|} - \frac{\tilde{z}}{|z|}\right|^2 = |x^* - z^*|^2$$
и аналогично для остальных пар точек, это неравенство совпадает с неравенством треугольника по отношению к евклидовой метрики.

Доказательство второго утверждения леммы основывается на равенстве

$$|x^* - y^*| = \frac{|x-y|}{|x|\,|y|}, \tag{2.6.4}$$

которое, очевидно, равносильно

$$||y|^2 x - |x|^2 y\,|^2 = |x|^2|y|^2|x-y|^2.$$

Левая часть этого выражения равна

$$|y|^4|x|^2 - 2|x|^2|y|^2 xy + |x|^4|y|^2 = |x|^2|y|^2(|x|^2 + |y|^2 - 2xy),$$

что совпадает с его правой частью.

В силу (2.6.1), (2.6.4) расстояние $d[\delta(x), \delta(y)]$ можно записать в виде

$$\left(1 + \frac{1}{|x-a|}\right)^{-1}\left(1 + \frac{1}{|y-a|}\right)^{-1}\frac{|x-y|}{|x-a||y-a|} = \frac{|x-y|}{(1+|x-a|)(1+|y-a|)},$$

откуда

$$d[\delta(x), \delta(y)] = q(x)q(y)d(x,y), \quad q(x) = \frac{1+|x|}{1+|x-a|}.$$

Остается заметить, что в силу очевидного неравенства $1 + |x+b| \leqslant (1+|x|)(1+|b|)$ выполнена оценка $(1+|a|)^{-1} \leqslant q(x) \leqslant 1 + |a|$. □

Условие Гельдера можно ввести для функций, заданных на произвольном метрическом пространстве, по отношению к его метрике $d(x,y)$ путем замены $|x-y|^\mu$ в правой части (2.1.1) на $[d(x,y)]^\mu$. Соответствующий класс обозначим $C^\mu(G) = C^\mu(G; d)$, указывая при необходимости метрику. Это пространство снабжается соответствующей нормой

$$|\varphi|_\mu = |\varphi|_0 + [\varphi]_\mu, \quad [\varphi]_\mu = \sup_{x \neq y}\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{[d(x,y)]^\mu}, \tag{2.6.5}$$

относительно которой оно банахово. Можно также ввести класс $C^\mu(G_1, G_2)$ отображений α из метрического пространства G_1 в G_2 с помощью условия Гельдера $d_2[\alpha(x), \alpha(y)] \leqslant C[d_1(x,y)]^\mu$.

Соотношения (2.1.6), (2.1.7), (2.2.3) и теорема 2.1.1 сохраняют свою силу и в рассматриваемом случае, поскольку при их доказательстве специфика евклидового расстояния никак не использовалась.

В дальнейшем наряду с евклидовым расстоянием в основном будет использоваться метрика (2.6.2), по отношению к которой пространство $C^\mu(G)$ будет обозначаться специальным символом $C_*^\mu(G)$, аналогичный смысл имеет и обозначение $C_*^\mu(G_1, G_2)$ по отношению к этой метрике для отображений $G_1 \to G_2$. Например, в силу леммы 2.6.1 инверсия (2.6.1) принадлежит классу $C_*^{1,0}(\overline{\mathbb{R}^k}, \overline{\mathbb{R}^k})$.

Очевидно, если множество G ограничено и, например, содержится в шаре $|x| \leqslant R$, то пространства $C_*^\mu(G)$ и $C^\mu(G)$ совпадают с эквивалентностью соответствующих норм. Это следует из того, что в указанном шаре метрика (2.6.2) эквивалентна евклидовой:

$$(1+R)^{-2}|x-y| \leqslant d(x,y) \leqslant |x-y|.$$

По аналогии с пунктом 2.3 гомеоморфизм $\alpha : G_1 \to G_2$ двух множеств $G_j \subseteq \overline{\mathbb{R}^k}$ назовем липшицевым отображением (в обобщенном смысле), если выполнена двусторонняя оценка

$$M^{-1}d(x,y) \leqslant d[\alpha(x), \alpha(y)] \leqslant Md(x,y). \tag{2.6.6}$$

Например, согласно лемме 2.6.1 к этому типу относится инверсия. Как показывает следующая лемма, с помощью композиции с инверсией их всегда можно свести к липшицевым преобразованиям в обычном смысле.

Лемма 2.6.2. *Пусть α осуществляет гомеоморфизм $G_1 \to G_2$, причем оба множества G_j неограничены и*

$$\alpha(\infty) = \infty. \tag{2.6.7}$$

Тогда α липшицево относительно метрики d в том и только в том случае, когда оно липшицево в обычном смысле. В частности, любое преобразование, липшицево относительно *метрики d, можно представить в виде суперпозиции липшицева преобразования в обычном смысле и инверсии* (2.6.1).

Доказательство. В силу (2.6.7) функция

$$q(x) = \frac{1 + |\alpha(x)|}{1 + |x|}$$

ограничена на множестве E_1 сверху и снизу положительными постоянными. Поскольку

$$\frac{d[\alpha(x), \alpha(y)]}{d(x, y)} = \frac{|\alpha(x) - \alpha(y)|}{|x - y|} q(x) q(y),$$

условия (2.3.1) и (2.6.7) равносильны. □

Условимся неограниченную область D называть липшицевой, если с помощью подходящей инверсии она переходит в ограниченную область, которая является липшицевой. Аналог теоремы 2.3.1 справедлив и в этом случае.

Теорема 2.6.1. *Неограниченные липшицевы области равномерно связны.*

Доказательство. Пусть неограниченная область D липшицева, так что она является образом ограниченной липшицевой области D_0 при некоторой инверсии. Не ограничивая общности, можно считать, что $0 \in \overline{D_0}$ и инверсией служит преобразование $\delta(x) = x/|x|^2$. В соответствии с определением из пункта 2.3 липшицевых областей можно также предполагать, что в случае $0 \in \partial D_0$ пересечение некоторой окрестности точки $x = 0$ с D_0 является полушаром $\{|x| < \rho,\, x_k > 0\}$. Но тогда пересечение $V_\infty \cap D$ соответствующей окрестности V_∞ точки $\infty \in \partial D$ с D является внешностью полушара, т. е. множеством вида $\{|x| > 1/\rho,\, x_k > 0\}$. Нетрудно видеть, что это множество равномерно связно. Если точка $0 \in D_0$, то подобной окрестностью ∞ служит, очевидно, внешность шара, которая содержится в D и также является равномерно связным множеством. Поэтому остается повторить соответствующие рассуждения теоремы 2.3.1. Нужно только учесть, что если последовательности x_n, y_n со свойством (2.3.9) сходятся к ∞, то для достаточно больших n они попадают в $V_\infty \cap D$. □

Пространство $C^\mu_*(G)$ можно описать, не прибегая к расстоянию (2.6.2). Именно, покроем сферу Римана двумя перекрывающимися окрестностями

$$U_0 = \{|x| < 2\}, \quad U_1 = \{|x| > 1\}. \tag{2.6.8}$$

точек 0 и ∞. С функцией φ, заданной на множестве $G \subseteq \mathbb{R}^k$, свяжем пару функций

$$\varphi_0(x) = \varphi(x),\ x \in G_0 = G \cap U_0; \quad \varphi_1(x) = \varphi(x^*),\ x \in G_1 = (G \cap U_1)^*, \tag{2.6.9}$$

где E^* означает образ множества E при инволюции $x \to x^*$. Тогда в силу теоремы 2.1.1 и леммы 2.6.1 равенство

$$|\varphi| = \max_{k=0,1} |\varphi_k|_{C^\mu} \tag{2.6.10}$$

определяет эквивалентную норму пространства $C^\mu_*(G)$. Конечно, одно из множеств $G \cap U_k$ может оказаться пустым, в этом случае норма $|\varphi_k|$ в правой части (2.6.10) полагается равной нулю.

Точно так же можно поступить для отображений $\varphi : G \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^s$. Пусть обозначения (2.6.8) сохраняются по отношению к обоим пространствам $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^s$. Тогда $\varphi \in C^\mu_*(G, \mathbb{R}^s)$ равносильно тому, что

$$\varphi_{kr}(x) \in C^\mu(G_k), \quad k, r = 0, 1, \tag{2.6.11}$$

где φ_{k0} и φ_{k1} определяются аналогично (2.6.9) по отношению к, соответственно, функциям $\varphi(x)$ и $[\varphi(x)]^*$.

В случае, когда множество G является некоторой областью D, совершенно аналогично можно определить и классы $C^n_*(D)$. Сферу $\overline{R^k}$ можно рассматривать как компактное k-мерное многообразие класса C^∞ (см., например, [30]), определяемое с помощью двух карт (2.6.8). В этом смысле класс $C^n_*(D)$ по отношению к D как области на этом многообразии совпадает с классом $C^n(D)$. Заметим, что инволюцию (2.6.1) можно рассматривать как диффеоморфизм рассматриваемого многообразия $\overline{R^k}$ на себя класса C^∞.

В заключение остановимся подробнее на случае $k=2$ плоскости, которую, как и в пункте 2.5, удобно считать комплексной. В этом случае $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\infty$ является классической сферой Римана, а инверсия (2.6.1) с точностью до комплексного сопряжения является дробно линейной функцией:

$$\delta(z)=\frac{1}{\bar z-\bar a}.$$

Обратно, любая дробно линейная функция может быть выражена соответствующим образом через инволюции. Поэтому класс C_*^μ можно определять условием инвариантности относительно дробно-линейных преобразований плоскости. Совершенно аналогично определяются и гладкие дуги и кусочно-гладкие кривые на сфере Римана. Другими словами, бесконечная кривая Γ называется кусочно-гладкой, если при дробно-линейном преобразовании $z\to z/(z-a)$, где $a\notin\Gamma$, образ $\widetilde\Gamma$ этой кривой, лежащий в конечной части плоскости, является кусочно-гладкой кривой в смысле определения из пункта 2.5. При такой кривой бесконечно удаленная точка ∞ всегда будет включаться в составе ее границы $\partial\Gamma$. Вся соответствующая терминология пункта 2.5 сохраняется без изменений. В частности, определены классы $C_*^\mu(\widehat D)$ для областей с кусочно-гладкой бесконечной границей.

Остановимся подробнее на понятии радиальных дуг с концом $\tau=\infty$. Как отмечена выше, по определению дуга Γ радиальна по отношению к данному концу, если этим свойством обладает дуга $\widetilde\Gamma$ по отношению к концу $\tau=0$. Если второй конец дуги Γ не совпадает с точкой $z=0$, то аналогично (2.5.5) эту дугу можно задавать параметризацией

$$\gamma(r)=\frac{e^{if(r)}}{r},\quad 0<r\leqslant\rho, \tag{2.6.12}$$

где по-прежнему вещественная функция $f\in C[0,\rho]$ непрерывно дифференцируема на $(0,\rho]$ и $rf'(r)\to 0$ при $r\to 0$. В самом деле, при инверсии $z\to 1/\bar z$ это равенство переходит в (2.5.5). Часто удобно, заменяя $f(r)$ на $f(1/r)$, задавать эту дугу в форме

$$\gamma(r)=re^{if(r)},\quad r\geqslant\rho, \tag{2.6.13}$$

где функция $f(r)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\rho,\infty)$ и имеет пределы

$$\lim_{r\to\infty}\theta(r)=\theta_\infty,\quad \lim_{r\to\infty}r\theta'(r)=0. \tag{2.6.14}$$

Возможен крайний случай бесконечной дуги с концами $\tau=0$ и $\tau=\infty$, которая радиальна по отношению к обоим концам. В этом случае она определяется радиальной параметризацией (2.6.13) по отношению к интервалу $(0,\infty)$, где в дополнение к (2.6.14) функция $\theta(r)$ удовлетворяет аналогичным условиям и при $r\to 0$, т. е.

$$\lim_{r\to 0}\theta(r)=\theta_0,\quad \lim_{r\to 0}r\theta'(r)=0. \tag{2.6.15}$$

2.7. Однородное пространство $C_0^\mu(G)$

Очевидно, полунорма (2.1.2) инвариантна относительно переносов $x\to x+a$, так что аналогичным свойством обладает и пространство C^μ. Следующее равенство

$$\{\varphi\}_\mu=\sup_{x,y\in G}\frac{|x|^\mu|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu}, \tag{2.7.1}$$

определяет полунорму, которая обладает аналогичным свойством относительно растяжений $x\to rx$, $r>0$. Конечно, точка $x=0$ здесь не входит в область определения функции φ, т.е эта функция задана на $G\setminus 0$. Поскольку точки x и y можно поменять местами, фактически множитель $|x|^\mu$ под знаком sup можно заменить симметричным выражением $\max[|x|^\mu,|y|^\mu]$.

Как и в пункте 2.1, из определения (2.7.1) непосредственно следуют аналогичные (2.1.6) соотношения

$$\begin{gathered} a)\quad \{\varphi\psi\}_\mu\leqslant|\varphi|_0\{\psi\}_\mu+\{\varphi\}_\mu|\psi|_0,\\ b)\quad \{f\circ\varphi\}_{\mu,G}\leqslant[f]_{1,D}\{\varphi\}_{\mu,G},\quad \varphi(G)\subseteq D.\\ c)\quad \{\varphi\circ\alpha\}_{\mu,\widetilde G}\leqslant(M[\alpha]_{1,\widetilde G})^\mu\{\varphi\}_{\mu,G},\quad \alpha(\widetilde G)\subseteq G,\end{gathered} \tag{2.7.2}$$

где $M=\sup\limits_{x\in\widetilde G}(|\alpha(x)|^{-1}|x|)$.

Точно так же непосредственно из определения следует и аналогичное (2.1.7) интерполяционное свойство

$$\{\varphi\}_\mu \leqslant [\varphi]_0^{1-\mu/\nu}\{\varphi\}_\nu^{\mu/\nu}, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant \nu, \tag{2.7.3}$$

рассматриваемой полунормы.

Введем пространство $C_0^\mu(G)$ всех ограниченных функций φ на $G \setminus 0$, для которых полунорма $\{\varphi\}_\mu$ конечна. Как и в пункте 2.2, показывается, что относительно нормы

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \{\varphi\}_\mu \tag{2.7.4}$$

это пространство банахово. При $\mu = 1$ данное пространство обозначаем $C_0^{1,0}$, сохраняя символ C_0^1 для других целей.

Точки $\tau = 0, \infty$, предельные для G, играют особую роль для функций $\varphi \in C_0^\mu(G)$. Очевидно, вне окрестности этих точек функция φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ, оставаясь при приближении к τ ограниченной. Если обе эти точки не являются предельными, т. е. если множество G содержится в шаровом слое $\delta \leqslant |x| \leqslant \delta^{-1}$ с некоторым $\delta > 0$, то полунормы (2.1.2) и (2.7.1) эквивалентны, так что пространства C^μ и C_0^μ совпадают.

В качестве примера убедимся, что функция

$$\sin(\ln|x|) \in C_0^\mu(B), \quad B = \{x,\ |x| \leqslant 1\}. \tag{2.7.5}$$

В самом деле, в рассматриваемом случае в качестве ρ_μ в (2.7.1) можно взять функцию $\rho(x) = |x|^\mu$, поэтому достаточно оценить разностное отношение

$$\frac{|x|^\mu|\sin(\ln|x|) - \sin(\ln|y|)|}{|x-y|^\mu} \leqslant \frac{|x|^\mu|\ln|x| - \ln|y||}{||x|-|y||^\mu} = \frac{t^\mu|\ln t|}{|1-t|^\mu}, \quad t = \frac{|x|}{|y|}.$$

Поскольку выражение в правой части этого неравенства как функция от t ограничено на полуоси $t > 0$, по определению (2.7.4) отсюда следует (2.7.5).

Как и в пункте 2.2, с помощью интерполяционного неравенства (2.7.3) показывается, что при $\mu < \nu \leqslant 1$ справедливо аналогичное (2.2.3) неравенство

$$|\varphi|_{C_0^\mu} \leqslant 2|\varphi|_{C_0^\nu}, \tag{2.7.6}$$

что означает вложение $C_0^{0,\nu} \subseteq C_0^{0,\mu}$ банаховых пространств.

Из соотношения (2.7.2)(a) следует, что относительно поточечных операций $C_0^\mu(G)$ является банаховой алгеброй. Аналогично соотношение (2.7.2)(b) означает, что для любой (вообще говоря) вектор-функции $\varphi \in C_0^\mu(G)$ и функции $f \in C^{0,1}(\widetilde{G})$, где $\widetilde{G}$ содержит образ $\varphi(G)$, суперпозиция $f \circ \varphi$ принадлежит $C_0^\mu(G, F)$. В частности, условие

$$\inf_G |\varphi(x)| > 0 \tag{2.7.7}$$

необходимо и достаточно для обратимости скалярной комплексной функции φ в банаховой алгебре C_0^μ. В самом деле, при выполнении этого условия существует столь малое $\delta > 0$, что кольцо $\delta < |z| < 1/\delta$ на комплексной плоскости содержит образ $\varphi(G)$ функции φ. Остается заметить, что функция $f(z) = 1/z$ удовлетворяет в этом кольце условию Липшица.

Следующая важная лемма описывает связь между полунормами (2.1.2) и (2.7.1).

Лемма 2.7.1. *Пространство $C_0^\mu(G)$ состоит из всех ограниченных функций φ, для которых функция $\psi(x) = |x|^\mu\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ на G. При этом равенство*

$$|\varphi| = |\psi(c)| + [\psi]_\mu, \tag{2.7.8}$$

где c — фиксированная точка множества G, определяет эквивалентную норму в $C_0^\mu(G)$.

Доказательство. Если $\varphi \in C_0^\mu(G)$, то

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant |x|^\mu|\varphi(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y)|||x|^\mu - |y|^\mu|,$$

откуда с учетом (2.1.3) приходим к оценкам

$$[\psi]_\mu \leqslant \{\varphi\}_\mu + |\varphi|_0, \quad |\psi(c)| \leqslant |c|^\mu|\varphi|_0. \tag{2.7.9}$$

Обратно, пусть функция φ ограничена и $\psi(x) = |x|^\mu\varphi(x)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ на G. Тогда найдется такая постоянная $C > 0$, не зависящая от φ, что

$$|\varphi(x)| = |\psi(x)||x|^{-\mu} \leqslant C(|\psi(c)| + [\psi]_\mu), \quad x \in G. \tag{2.7.10}$$

В самом деле, если $0 \in \overline{G}$, то $|\psi(x)| \leqslant [\psi]_\mu|x|^\mu$ и эта оценка очевидна. Если $0 \notin \overline{G}$, то множество G не пересекается с некоторой окрестностью точки $\tau = 0$ и, следовательно, обе функции $|x|^{-\mu}$ и $|x-c|^\mu|x|^{-\mu}$ ограничены на G. Поэтому неравенство

$$|\psi(x)||x|^{-\mu} \leqslant (|\psi(c)| + [\psi]_\mu|x-c|^\mu)|x|^{-\mu}$$

показывает, что оценка (2.7.10) справедлива и в этом случае.

Переходя к оценке полунормы $\{\varphi\}_\mu$, предположим сначала, что $x, y \in G$ и

$$1/2 \leqslant |x|^{-1}|y| \leqslant 2. \tag{2.7.11}$$

Тогда с учетом (2.7.10) имеем:

$$\frac{|x|^\mu|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu} = \frac{||y|^\mu\psi(x) - |x|^\mu\psi(y)|}{|y|^\mu|x-y|^\mu} \leqslant$$

$$\leqslant [\psi]_\mu + C(|\psi(c)| + [\psi]_\mu)M, \quad M = \frac{|x|^\mu||x|^\mu - |y|^\mu|}{|y|^\mu|x-y|^\mu}.$$

Очевидно,

$$M \leqslant \frac{|x|^\mu||x|^\mu - |y|^\mu|}{|y|^\mu||x|-|y||^\mu} = \frac{s^\mu|s^\mu - 1|}{|s-1|^\mu}, \quad s = \frac{|x|}{|y|},$$

и в силу (2.7.11) величина M ограничена постоянной, зависящей только от μ.

Если условие (2.7.11) нарушено, то

$$\frac{|x|^\mu|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu} \leqslant 2|\varphi|_0\frac{|x|^\mu}{||x|-|y||^\mu} \leqslant 2^{1+\mu}|\varphi|_0,$$

где учтено, что $s^\mu|1-s|^{-\mu} \leqslant 2^\mu$ при $0 < s < 1/2$ и при $s > 2$.

Объединяя полученные неравенства, с учетом (2.7.10) приходим к оценке

$$\{\varphi\}_\mu \leqslant \max(C + M, 2^{1+\mu}C)(|\psi(c)| + [\psi]_\mu),$$

которая совместно с (2.7.9) завершает доказательство леммы. □

Следующие две теоремы дают еще два различных описания пространства C_0^μ в терминах C^μ.

Теорема 2.7.1. *Пусть* $0 < \delta < 1$ *и* $G_j = \{\delta < |y| < \delta^{-1}, \delta^j y \in G\}$, $j = 0, \pm 1, \ldots$ *Тогда пространство* $C_0^\mu(G)$ *можно задать эквивалентной нормой*

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + \sup_j[\varphi_j]_{\mu,G_j}, \quad \varphi_j(y) = \varphi(\delta^j y). \tag{2.7.12}$$

Отметим, что норма (2.7.12) имеет смысл для функции φ, удовлетворяющей условию Гельдера с показателем μ на G вне любой окрестности точек 0 и ∞. Поскольку открытые множества $\delta^{j+1} < |y| < \delta^{j-1}$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, покрывают $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, по теореме 2.1.1 функция φ обладает указанным свойством тогда и только тогда, когда $\varphi_j(y) = \varphi(\delta^j y) \in C^\mu(G_j)$ для всех j. Конечно, некоторые из множеств G_j могут оказаться пустыми, и в этом случае $[\varphi_j]_{\mu,G_j}$ полагается равной нулю.

Доказательство. Если $x, y \in G$ и выполнено одно из неравенств $|y| \leqslant \delta|x|$ или $|x| \leqslant \delta|y|$, то соответственно $|x-y| \geqslant |x| - |y| \geqslant (1-\delta)|x|$ или $|x-y| \geqslant (1-\delta)|y|$. В обоих случаях

$$|x|^\mu\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu} \leqslant \frac{2|\varphi|_0}{1-\delta}.$$

Поэтому норма (2.7.4) эквивалентна норме

$$|\varphi| = |\varphi|_0 + [\varphi]'_\mu, \quad [\varphi]'_\mu = \sup_{\delta|x| \leqslant |y| \leqslant \delta^{-1}|x|} |x|^\mu\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{|x-y|^\mu}. \tag{2.7.13}$$

Пусть $x', y' \in G_j$ и для определенности $|y'| \leqslant |x'|$. Тогда точки $x = \delta^j x'$, $y = \delta^j x'$ принадлежат G, причем $\delta^2|x| \leqslant |y| \leqslant |x|$. Поэтому

$$\frac{|\varphi_j(x') - \varphi_j(y')|}{|x' - y'|^\mu} = \delta^{j\mu}\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\mu} \leqslant \frac{|x|^\mu}{\delta^\mu}\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\mu},$$

откуда следует оценка нормы (2.7.13) через норму (2.7.12), где δ нужно заменить на δ^2.

Обратно, пусть $x, y \in G$ и $\delta|x| \leqslant |y| \leqslant \delta^{-1}|x|$. Выберем целое j по условию $\delta^{j+1} \leqslant |y| \leqslant \delta^j$. Тогда $\delta^{j+1} \leqslant |x| \leqslant \delta^{j-1}$, так что точки $x' = \delta^{-j}x$, $y' = \delta^{-j}x$ принадлежат G_j. Следовательно,

$$|x|^\mu\frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\mu} = |x'|^\mu\frac{|\varphi_j(x') - \varphi_j(y')|}{|x' - y'|^\mu} \leqslant \frac{1}{\delta^\mu}\frac{|\varphi(x') - \varphi(y')|}{|x' - y'|^\mu},$$

что дает противоположную оценку нормы (2.7.13) через норму (2.7.12). □

В качестве простого следствия теоремы отметим следующее предложение.

Лемма 2.7.2. *Если функция $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^k \setminus 0)$ ограничена и ее вектор-градиент φ' допускает оценку*

$$|\varphi'(x)| \leqslant C/|x|, \tag{2.7.14}$$

то $\varphi \in C_0^{0,1}(\mathbb{R}^k)$.

Доказательство. В силу (2.7.14) последовательность функций $\varphi_j(x) = \varphi(\delta^j x)$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, вместе со своими производными равномерно ограничены в шаровом слое $S = \{\delta < |x| < 1/\delta\}$. Так как область S равномерно связна, на основании теоремы 2.2.2 эти функции равномерно ограничены и по норме пространства $C^{0,1}(S)$, так что на основании теоремы 2.7.1 функция $\varphi \in C_0^{0,1}(\mathbb{R}^k)$. □

Из леммы, в частности, следует, что для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $n = 0, 1, \ldots$ функции

$$\begin{aligned} &|x|^{i\alpha+\varepsilon}\ln^n|x| \in C_0^{0,1}(G), \quad G = \{|x| \leqslant R\}, \\ &|x|^{i\alpha-\varepsilon}\ln^n|x| \in C_0^{0,1}(G), \quad G = \{|x| \geqslant R\}. \end{aligned} \tag{2.7.15}$$

Пусть Ω означает единичную сферу пространства $\mathbb{R}^k$. Очевидно, преобразование

$$\omega(s, u) = e^s u, \quad (s, u) \in \mathbb{R} \times \Omega, \tag{2.7.16}$$

осуществляет гомеоморфизм $\mathbb{R} \times \Omega$ на $\mathbb{R}^k \setminus 0$. Обратным к нему служит отображение $x \to (\ln|x|, x/|x|)$.

Теорема 2.7.2. *Пусть множество $\widetilde{G} \subseteq \mathbb{R} \times \Omega$ есть образ $G \setminus 0$ при отображении $\omega^{-1}(x) = (\ln|x|, x/|x|)$. Тогда оператор $\psi \to \psi \circ \omega$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C^\mu(\widetilde{G}) \to C_0^\mu(G)$.*

Доказательство. По отношению к группе переносов $(s, u) \to (s + s_0, u)$ множества $\mathbb{R} \times \Omega$ на себя для пространства $C^\mu(\widetilde{G})$ справедлив соответствующий аналог теоремы 2.1.1. Именно, исходя из фиксированного $r > 0$, рассмотрим последовательность множеств

$$\widetilde{G}_j = \{(s, u) \in (-r, r) \times \Omega, \mid (s + jr, u) \in \widetilde{G}\}, \quad j = 0, \pm 1, \ldots,$$

и заданной на $\widetilde{G}$ функции ψ поставим в соответствие последовательность функций

$$\psi_j(s, u) = \psi(s + jr, u), \quad (s, u) \in \widetilde{G}_j.$$

Тогда пространство $C^\mu(\widetilde{G})$ можно задать эквивалентной нормой

$$|\psi| = \sup_j |\psi_j|_{C^\mu}. \tag{2.7.17}$$

Положим $r = |\ln\delta|$, где δ фигурирует в теореме 2.7.1. В обозначениях этой теоремы подстановка (2.7.15) осуществляет гомеоморфизм $\widetilde{G}_j$ на G_j и равенство $\varphi = \psi \circ \omega$ равносильно $\varphi_j = \psi_j \circ \omega$ для всех j. Непосредственно проверяется, что вектор-функции ω и ω^{-1} удовлетворяют условию Липшица на, соответственно, множествах $[-r, r] \times \Omega$ и $S = \{x \in \mathbb{R}^k,\ \delta^{-1} < |x| < \delta\}$. Поэтому оператор $\psi \to \psi \circ \omega$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C^{0,\mu}([-r, r] \times \Omega) \to C_0^{n,\mu}(\overline{S})$, так что нормы (2.7.13) и (2.7.17) эквивалентны. □

В качестве непосредственного приложения теоремы 2.7.2 отметим, что пространство C^μ_0 инвариантно относительно инволюции $x^* = x/|x|^2$. Более точно, оператор суперпозиции $\varphi(x) \to \varphi(x^*)$ обратим $C^\mu_0(G) \to C^\mu_0(G^*)$, где $G^* = \{x,\ x^* \in G\}$.

Доказательство почти очевидно: при подстановке (2.7.16) инволюция $x \to x^*$ переходит в преобразование $(s,u) \to (-s,u)$.

2.8. Весовое пространство $C^\mu_\lambda(G,F)$

Условимся понимать замыкание $\overline{G}$ множества $G \subseteq \mathbb{R}^k$ по отношению к сфере Римана, т.е оно содержит бесконечно удаленную точку ∞ в случае, когда множество G неограничено. Это соглашение молчаливо предполагалось и в предыдущем пункте 2.7.

Пусть конечное множество $F \subseteq \overline{G}$, причем оно обязательно включает ∞, если G неограничено. Рассмотрим окрестности

$$\begin{aligned} B_\rho(\tau) = \{|x-\tau| \leqslant \rho\}, \quad \tau \neq \infty,\\ B_\rho(\tau) = \{|x| \geqslant 1/\rho\}, \quad \tau = \infty, \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

точек данного множества, где $\rho > 0$ выбрано столь малым, что эти окрестности попарно не пересекаются.

С каждой функцией φ, заданной на $G \setminus F$, свяжем семейство функций

$$\begin{aligned} \varphi_\tau(x) = \varphi(x+\tau), &\quad x \in G_\tau = G \cap B_\rho(\tau) - \tau,\ \tau \neq \infty,\\ \varphi_\tau(x) = \varphi(x), &\quad x \in G_\tau = G \cap B_\rho(\tau),\ \tau = \infty,\\ \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x), &\quad x \in \widetilde{G} = G \setminus \bigcup_\tau B_{\rho/2}(\tau). \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

Исходя из семейства $\lambda = (\lambda_\tau,\ \tau \in F)$ вещественных чисел, обозначим $C^\mu_\lambda(G,F)$ класс всех функций φ, для которых $\widetilde{\varphi}_\tau(x) = |x|^{-\lambda_\tau}\varphi_\tau(x) \in C^\mu_0(G_\tau)$, $\tau \in F$, и $\widetilde{\varphi} \in C^\mu(\widetilde{G})$. Относительно нормы

$$|\varphi| = \max_\tau |\widetilde{\varphi}_\tau|_{C^\mu_0(G_\tau)} + |\widetilde{\varphi}|_{C^\mu(\widetilde{G})} \tag{2.8.3}$$

это пространство, очевидно, банахово. При $\mu = 1$, как обычно, это пространство обозначаем $C^{0,1}_\mu(G,F)$. Иногда удобно в множество F включать и точки τ, не принадлежащие $\overline{G}$. Конечно, в этом случае (2.8.2) и (2.8.3) понимаются по отношению к $\tau \in F \cap \overline{G}$. Для единообразия удобно пространство $C^\mu_\lambda(G,F)$ рассматривать и для пустого множества F, отождествляя его с $C^\mu(G)$.

Заметим, что в этих обозначениях пространство $C^\mu_0(G)$ предыдущего пункта можно записать в форме

$$C^\mu_0(G) = \left\{ \begin{array}{ll} C^\mu_0(G,0), & 0 \in \overline{G},\ G \subseteq \{|x| \leqslant R\},\\ C^\mu_0(G,\infty), & \infty \in \overline{G},\ G \subseteq \{|x| \geqslant R\},\\ C^\mu_0(G;0,\infty), & 0,\infty \in \overline{G}. \end{array}\right.$$

Из определения видно, что пространство $C^\mu_0(G,F)$ состоит из ограниченных функций и является банаховой алгеброй по умножению, коль скоро это верно для пространств C^μ и C^μ_0, введенных в пунктах 2.2 и 2.7. Из этих же соображений, если $\varphi \in C^\mu_0(G,F)$ и функция f удовлетворяет условию Липшица на образе $\varphi(G)$, то $f \circ \varphi$ также принадлежит $C^\mu_0(G,F)$. В частности, как и в пункте 2.7, для комплексных функций φ условие (2.7.7) необходимо и достаточно для обратимости φ в алгебре C^μ_0.

Аналогичные соображения с учетом (2.2.3), (2.7.6) и (2.7.15) показывают, что семейство банаховых пространств $C^\mu_\lambda(G,F)$ монотонно убывает (в смысле вложений) по каждому из параметров μ и λ_τ, $\tau \neq \infty$, и монотонно возрастает по λ_∞. Из определения (2.8.2), (2.8.3) также непосредственно следует, что произведение функций как билинейное отображение $(\varphi_1,\varphi_2) \to \varphi_1\varphi_2$ ограничено $C^\mu_{\lambda_1} \times C^\mu_{\lambda_2} \to C^\mu_{\lambda_1+\lambda_2}$. По этой причине C^μ_λ называем весовым пространством, а семейство $\lambda = (\lambda_\tau,\ \tau \in F)$ — весовым порядком. В случае, когда λ_τ не зависит от τ, весовой порядок отождествляем с вещественным числом.

Условимся функцию ρ, которая всюду на $G \setminus F$ отлична от нуля, называть весовой для пространства C^μ_λ, если $\rho^{\pm 1} \in C^\mu_{\pm\lambda}$. Очевидно, оператор умножения $\varphi \to \rho\varphi$ на эту весовую функцию осуществляет изоморфизм банаховых пространств $C^\mu_0 \to C^\mu_\lambda$ и вообще $C^\mu_{\lambda'} \to C^\mu_{\lambda+\lambda'}$.

Простейшим примером служит функция

$$\rho_\lambda(x,F) = \prod_{\tau\in F} \rho_{\lambda_\tau}(x,\tau), \tag{2.8.4}$$

где положено

$$\rho_\delta(x,\tau) = \begin{cases} |x-\tau|^\delta(1+|x|)^{-\delta} & \tau\neq\infty, \\ (1+|x|)^\delta, & \tau=\infty, \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что эта функция принадлежит $C^{0,1}_\lambda(G,F)$ для любого λ. Действительно, в силу леммы 2.7.2 функция

$$a_\tau(x) = \begin{cases} |x|^{-\lambda_\tau}\rho_\lambda(x+\tau), & \tau\neq\infty, \\ |x|^{-\lambda_\tau}\rho_\lambda(x), & \tau=\infty, \end{cases} \in C^{0,1}_0(B),$$

где $B=\{|x|\leqslant\rho\}$ при $\tau\neq\infty$ и $B=\{|x|\geqslant\rho\}$ при $\tau=\infty$.

Принадлежность функции $\rho_\lambda(x,F)$ пространству $C^{0,1}_\lambda(G,F)$ сохраняется и в случае, когда некоторые точки $\tau\in F$ лежат вне $\overline{G}$. Это следует из того, что при $F_0\cap\overline{G}=\varnothing$ функция $\rho_\lambda(x,F_0)$ принадлежит $C^{0,1}_0(G,F)$ для любого весового порядка λ на F_0.

Лемма 2.7.1 в рассматриваемом случае допускает следующий почти дословный аналог.

Лемма 2.8.1. *Пространство $C^\mu_\mu(G,F)$ состоит из функций $\psi(x)$, которые удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ и обращаются в нуль в конечных точках $\tau\in F$. При этом равенство*

$$|\psi| = |\psi(c)| + [\psi]_\mu, \tag{2.8.5}$$

где c — фиксированная точка множества G, определяет эквивалентную норму в $C^\mu_\mu(G,F)$.

Доказательство. Пусть $\psi\in C^\mu_\mu(G,F)$. Тогда на основании леммы 2.7.1 и определения (2.8.2), (2.8.3) заключаем, что на каждом из множеств $G\cap B(\tau)$, $\tau\in F$, и $\widetilde{G}$ функция ψ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ с соответствующими оценками норм

$$[\psi]_{\mu,G\cap B(\tau)} + |\psi(c_\tau)| \leqslant C|\psi|_{C^\mu_\mu}, \quad [\psi]_{\mu,\widetilde{G}} + |\psi(\widetilde{c})| \leqslant C|\psi|_{C^\mu_\mu},$$

где точки $c_\tau\in G\cap B(\tau)$ и $\widetilde{c}\in\widetilde{G}$ фиксированы. В случае $\tau\neq\infty$ можно положить $c_\tau=\tau$, так что слагаемое $|\psi(c_\tau)|$ в приведенной оценке можно опустить.

В силу теоремы 2.1.1 отсюда следует, что ψ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ на всем множестве G и норма (2.8.5) оценивается через норму $|\psi|$ в C^μ_μ. Нужно только учесть, что точки c_τ с $\tau=\infty$ и $\tilde{c}$ можно выбрать совпадающими с точкой c.

Обратно, пусть функция ψ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ и обращается в нуль в конечных точках $\tau\in F$. Тогда в силу леммы 2.7.1 функции $|x|^{-\lambda_\tau}\psi_\tau(x)\in C^\mu_0(G_\tau)$, так что по определению $\psi\in C^\mu_\mu(G,F)$ с оценкой соответствующих норм. □

С помощью леммы 2.8.1 теоремы 2.1.1, 2.1.2 и лемма 2.1.2 непосредственно распространяются на пространства C^μ_λ.

Теорема 2.8.1.

(a) *Пусть открытые множества V_j, $1\leqslant j\leqslant m$, осуществляют покрытие $\overline{G}$ и одно из них является окрестностью ∞, если G неограничено. Тогда равенство*

$$|\varphi| = \max_{1\leqslant j\leqslant m} |\varphi|_{C^\mu_\lambda(G\cap V_j,F)}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $C^\mu_\lambda(G,F)$.

(b) *Пусть множество G равномерно связно и представлено в виде объединения $G_1\cup\ldots\cup G_m$. Тогда для $\varphi\in C(G\setminus F)$ равенство*

$$|\varphi| = \max_{1\leqslant j\leqslant m} |\varphi|_{C^\mu_\lambda(G_j,F)}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $C^\mu_\lambda(G,F)$.

(c) *В условиях леммы* 2.1.2 *равенство*

$$|\varphi| = \max_{j=1,2} |\varphi|_{C^\mu_\lambda(G_j,\tau)}$$

определяет эквивалентную норму в пространстве $C^\mu_\lambda(G,\tau)$.

Напомним, что пространства $C^\mu(G)$ и $C^\mu(\overline{G})$ совпадают. В случае $\mu=0$, который каждый раз оговаривается, эти пространства следует различать. Аналогичное положение сохраняется, очевидно, и для весовых пространств. Исключение делается только для пространства $C^\mu(\widehat{D})$ в двумерных областях D с кусочно-гладкой границей, введенного в пункте 2.5, в рамках которого различаются односторонние граничные значения его элементов. Теорема 2.8.1(b) позволяет аналогичным образом ввести и весовые пространства $C^\mu_\lambda(\widehat{D},F)$. Именно, если подобласти $D_j \subseteq D$ ограничены кусочно-гладкими контурами и $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \ldots \cup \overline{D}_n$, то $C^\mu_\lambda(\widehat{D},F)$ состоит из всех функций $\varphi \in C(D)$, сужения которых на D_j принадлежат $C^\mu_\lambda(D_j,F)$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Это пространство снабжается нормой

$$|\varphi| = \max_j |\varphi|_{C^\mu_\lambda(D_j),F},$$

относительно которой оно банахово. То, что данное определение не зависит от выбора подобластей $D_1,\ldots,D_n$, с учетом теоремы 2.8.1(b) доказывается совершенно аналогично лемме 2.5.3. Впрочем, при $\lambda=\mu$ этот факт вытекает из леммы 2.5.3 и леммы 2.8.1, а для остальных весовых порядков достаточно воспользоваться умножением на подходящую весовую функцию.

Из леммы 2.8.1 также легко вывести, что если множество G ограничено, то в случае строгих неравенств $\mu<\nu$ и $\lambda<\lambda'$ вложение $C^\nu_{\lambda'} \subseteq C^\mu_\lambda$ компактно.

В самом деле, пусть $\varepsilon>0$ выбрано столь малым, что $\nu-\mu \geqslant \varepsilon$ и $\lambda'-\lambda \geqslant \varepsilon$ для всех τ. Тогда достаточно установить компактность вложения $C^{\mu+\varepsilon}_{\lambda+\varepsilon} \subseteq C^\mu_\lambda$. Умножая эти пространства на весовую функцию $\rho_{\mu-\lambda}$, не ограничивая общности, можно считать $\lambda=\mu$. В этом случае остается воспользоваться леммой 2.8.1 и компактностью вложения $C^{\mu+\varepsilon} \subseteq C^\mu$, установленной в пункте 2.2.

Рассмотрим вопрос об ограниченности оператора суперпозиции $T(\alpha)\varphi = \varphi\circ\alpha$ в весовых пространствах, определяемого непрерывным отображением $\alpha : G \to G_1$.

Теорема 2.8.2. *Пусть $G \subseteq \mathbb{R}^k$, $G_1 \subseteq \mathbb{R}^s$ и отображение $\alpha : G \to G_1$ удовлетворяет условию Липшица, причем $\alpha(\infty)=\infty$ в случае, когда множество G неограничено. Пусть образ $\alpha(F)$ содержится в конечном множестве $F_1 \subseteq \overline{G}_1$ и для некоторых попарно непересекающихся окрестностей U_τ точек $\tau \in F$ выполнено условие*

$$|\alpha(x)-\alpha(\tau)| \geqslant q|x-\tau|, \quad x \in G\cap U_\tau, \tag{2.8.6}$$

с некоторой постоянной $0<q<1$ в случае $\tau\neq\infty$ и условие

$$|\alpha(x)| \geqslant q|x|, \quad x \in G\cap U_\infty \tag{2.8.7}$$

в случае $\tau=\infty$.

Тогда оператор $T(\alpha)\varphi=\varphi\circ\alpha$ ограничен $C^\mu_{\lambda_1}(G_1,F_1) \to C^\mu_\lambda(G,F)$, где весовые порядки λ и λ_1 на, соответственно, F и F_1 связаны соотношением $\lambda_1[\alpha(\tau)]=\lambda(\tau)$, $\tau\in F$.

Заметим, что если отображение α липшицево, то условия (2.8.6) и (2.8.7) выполняются автоматически. Некоторого обоснования требует только (2.8.7). В силу условия Липшица, которому удовлетворяет α, имеем неравенство $|\alpha(x)| \leqslant |\alpha(c)| + [\alpha]_1|x-c|$, где точка $c\in G$ фиксирована. Поэтому $|\alpha(x)| \leqslant (1+[\alpha]_1)|x|$ при $|x| \geqslant |\alpha(c)|+[\alpha]_1|c|$. Применяя эти рассуждения к обратному отображению $\beta=\alpha^{-1}$, приходим к справедливости условия (2.8.7).

Доказательство. Условимся одно и то же обозначение (2.8.4) для весовой функции использовать по отношению к обоим множествам G и G_1. Если эту весовую функцию рассматривать как оператор умножения, то достаточно убедиться, что оператор $A=\rho^{-1}_{\lambda-\mu}T(\alpha)\rho_{\lambda-\mu}$ ограничен $C^\mu_\mu(G_1,F_1) \to C^\mu_\mu(G,F)$. Этот оператор действует по формуле

$$(A\varphi)(x) = a(x)\varphi[\alpha(x)], \quad a(x) = \frac{\rho_{\lambda_1-\mu}[\alpha(x)]}{\rho_{\lambda-\mu}(x)}.$$

Поэтому на основании леммы 2.8.1 и (2.1.6)(c) достаточно убедиться, что функция $a\in C^\mu_0(G,F)$. Если множество $K\subseteq G$ лежит вне некоторой окрестности F, то этим же свойством обладает и образ $K_1 = \alpha(K)$ по отношению к F_1. Поэтому функции $\rho_{\mu-\lambda} \in C^\mu(K)$, $\rho_{\lambda_1-\mu} \in C^\mu(K_1)$ и на основании (2.1.6)(c) и функция $a \in C^\mu(K)$. Таким образом, в соответствии с теоремой 2.8.1 достаточно убедиться, что $a \in C_0^\mu(G_\tau, \tau)$ для любой точки $\tau \in F$, где $G_\tau = G \cap V_\tau$ с подходящей окрестностью V_τ этой точки. Более точно, пусть $V_\tau = \{|x-\tau| \leqslant \delta\}$ для конечных точек τ и $V_\tau = \{|x| \geqslant 1/\delta\}$ для $\tau = \infty$, где $\delta > 0$ выбрано по условию $V_\tau \subseteq U_\tau$.

Рассмотрим сначала случай конечной точки τ. В этом случае

$$a(x) = a_0(x)[b(x)]^{\lambda(\tau)-\mu}, \quad b(x) = \frac{|\alpha(x) - \alpha(\tau)|}{|x-\tau|},$$

где функция $a_0 \in C^\mu(G_\tau)$. Очевидно, функция $c(x) = |\alpha(x) - \alpha(\tau)|$ удовлетворяет условию Липшица и обращается в нуль в точке τ. Поэтому на основании леммы 2.8.1 она принадлежит $C_1^{0,1}(G_\tau, \tau)$, так что $b(x) = |x-\tau|^{-1}c(x) \in C_0^{0,1}(G_\tau, \tau)$. В силу (2.8.6) это же верно по отношению к функции $b^{\lambda(\tau)-\mu}$, так что и $a \in C_0^\mu(G_\tau, \tau)$.

Рассмотрим далее случай $\tau = \infty$. В этом случае можно записать

$$a(x) = f(x)g[\alpha(x)][b(x)]^{\lambda_\tau-\mu}, \quad b(x) = \frac{|\alpha(x)|}{|x|}, \quad x \in G_\tau, \tag{2.8.8}$$

где функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в области $V = \{|x| \geqslant 1/\delta\}$ и ее производная допускает оценку $|f'(x)| \leqslant C|x|^{-1}$, а функция $g(y)$ с учетом (2.8.7) задана в области $V_1 = \{|y| \geqslant q/\delta\}$ и обладает аналогичным свойством в этой области. Поэтому на основании леммы 2.7.2 функция $f \in C_0^{0,1}(V, \tau)$ и аналогично $g \in C_0^{0,1}(V_1, \tau)$. В терминах этих функций равенство (2.8.8) можно переписать в форме

$$a(x) = f(x)h(x)[b(x)]^{\lambda_\tau}, \tag{2.8.9}$$

где положено $h(x) = |x|^{-\mu}g_1[\alpha(x)]$ и $g_1(y) = |y|^\mu g(y)$. В силу леммы 2.7.1 функция $g_1(y)$ удовлетворяет условию Липшица на V_1, так что этому условию удовлетворяет и функция $g_1[\alpha(x)]$ на G_τ. Опять пользуясь леммой 2.7.1 применительно $g_1 \circ \alpha$ и α, заключаем, что функции $h(x)$ и $b(x)$ принадлежат $C_0^{0,1}(G_\tau, \tau)$. Значения функции b лежат вне окрестности нуля, где функция $|t|^{\lambda_\tau}$ удовлетворяет условию Липшица. Поэтому вместе с b классу $C_0^{0,1}$ принадлежит и b^λ. Итак, все три сомножителя в произведении (2.8.9) принадлежат этому классу, так что и $a \in C_0^{0,1}(G_\tau, \tau)$. $\square$

Теорему 2.8.2 можно дополнить операторами суперпозиции, определяемыми инверсией. Поскольку любую инверсию можно разложить в суперпозицию инверсии $x \to x^*$ и параллельного переноса, который, очевидно, удовлетворяет условию теоремы 2.8.2, достаточно ограничиться случаем $\alpha(x) = x^*$.

Лемма 2.8.2. *Пусть отображение $\alpha(x)$ является инверсией $x^* = x/|x|^2$ и точка $x = 0$ либо принадлежит F, либо лежит вне $\overline{G}$. Тогда по отношению к $G^* = \alpha(G)$, $F^* = \alpha(F)$ и весовому порядку*

$$\lambda_\tau^* = \begin{cases} \lambda_{\tau^*}, & \tau \neq 0, \infty, \\ -\lambda_{\tau^*}, & \tau = 0, \infty, \end{cases} \tag{2.8.10}$$

оператор $T(\alpha)$ ограничен и обратим $C_{\lambda^*}^\mu(G^*, F^*) \to C_\lambda^\mu(G, F)$.

Доказательство. Пусть $F_0 = F \cap \{0, \infty\}$, $F_1 = F \setminus F_0$ и в обозначениях (2.8.1) положим $G_k = G \cap U_k$, $k = 0, 1$, где

$$U_0 = \bigcup_{\tau \in F_0} B_\rho(\tau), \quad U_1 = \mathbb{R}^k \setminus \bigcup_{\tau \in F_0} B_{\rho/2}(\tau).$$

На основании теоремы 2.8.2 оператор $T(\alpha)$ ограничен и обратим $C_{\lambda^*}^\mu(G_1^*, F_1^*) \to C_\lambda^\mu(G_1, F_1)$. Поскольку $[B_\rho(\tau) \cap G]^* = B_\rho(\tau^*) \cap G^*$, аналогичное утверждение для G_0 вытекает из замечания к теореме 2.7.2 и определения (2.8.2), (2.8.3). Поэтому остается воспользоваться теоремой 2.8.1(a). $\square$

В соответствии с леммой 2.6.2 теорема 2.8.2 совместно с леммой 2.8.2 охватывают все липшицевы отображения по отношению к расстоянию на сфере Римана. Из этих же соображений на основании леммы 2.8.1 в обозначениях пункта 2.6 пространство $C_{-\mu}^\mu(G, \infty)$ совпадает с подпространством $C_*^\mu(G)$ функций, обращающихся в точке $\tau = \infty$ в нуль. В частности, при $\lambda' > \lambda$ и $0 < \mu < \nu \leqslant 1$ вложение пространств $C_\lambda^\nu(G, \infty) \subseteq C_{\lambda'}^\mu(G, \infty)$ компактно.

Отметим, что широко употребителен следующий стандартный способ введения весовых пространств. Если $X(G)$ — некоторое основное банахово пространство функций, заданных на множестве G, то исходя из положительной на G весовой функции ρ весовое пространство $X(G,\rho)$ определяется условием $\rho\varphi \in X(G)$. Относительно соответствующей нормы

$$|\varphi| = |\rho\varphi|_{X(G)}$$

это пространство банахово.

Применительно к гельдеровым пространствам обычно выбирается $X = C^\mu$ или его некоторое подпространство $\widetilde{C}^\mu(G)$ конечной коразмерности. Например, пусть в качестве последнего подпространства выбран класс всех функций φ, которые удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ и обращаются в нуль в конечных точках $\tau \in F$, снабженный нормой (2.8.5). Тогда согласно лемме 2.8.1 пространство $\widetilde{C}^\mu(G,\rho_{\lambda-\mu})$ совпадает с $C^\mu_\lambda(G,F)$. Это обстоятельство приводит к тому, что, как будет показано в главе 5, критерий фредгольмовости классических сингулярных операторов на кусочно-гладкой кривой, рассматриваемых в весовом пространстве $\widetilde{C}^\mu(G,\rho_\delta)$, зависит не только от δ, но и от μ.

В принятой форме весовые пространства C^μ_λ были введены автором в монографии [54], где описаны их основные свойства, составляющие содержание данного и следующих двух разделов.

2.9. Пространства Гельдера дифференцируемых функций

Рассмотрим класс $C^n(D)$ функций, n-кратно непрерывно дифференцируемых в области D. Напомним, что под $C^0(\overline{D}) = C^{0,0}(\overline{D})$ понимается банахово пространство функций, непрерывных и ограниченных в замкнутой области $\overline{D}$. В соответствии с соглашением пункта 2.2 вектор-градиент (2.2.11) называем производной функции $\varphi \in C^1$, хотя, строго говоря, под производной в точке $a \in D$ должно пониматься линейное отображение $\xi \to \varphi'(a)\xi$ в $\mathbb{R}^k$. Обозначением C^1 охватываются и вектор-функции, в этом случае φ' является матрицей со столбцами $\partial\varphi/\partial x_i$. По аналогии с (2.2.11) для функций $\varphi \in C^n(D)$ можно ввести упорядоченный (каким-либо образом) набор

$$\varphi^{(m)} = \left(\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}, \quad |\alpha| = m\right).$$

частных производных порядка m, полученный вектор $\varphi^{(m)}$ также называем производной порядка m. При $m = 0$, конечно, полагается $\varphi^{(0)} = \varphi$.

Обозначим $C^{n,\mu}(\overline{D})$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, пространство функций $\varphi \in C^n(D)$, все частные производные $\varphi^{(m)}$ которых порядка $m \leqslant n$ ограничены, продолжаются по непрерывности на границу области D и принадлежат классу $C^{0,\mu}(\overline{D})$. Обозначение этих производных сохраняется и для их предельных значений в граничных точках. Конечно, требование непрерывной продолжимости функций имеет смысл только при $\mu = 0$, при $0 < \mu \leqslant 1$ оно выполняется автоматически и $C^{n,\mu}(D) = C^{n,\mu}(\overline{D})$. Относительно нормы

$$|\varphi| = \sum_{m \leqslant n} |\varphi^{(m)}|_{C^{0,\mu}} \tag{2.9.1}$$

это пространство банахово.

В самом деле, если последовательность φ_s фундаментальна в $C^{n,0}(\overline{D})$, то для любого мультииндекса α порядка $|\alpha| \leqslant n$ последовательность $\partial^\alpha\varphi_s/\partial x^\alpha$ сходится к некоторой функции φ^α по sup-норме при $s \to \infty$. Из курса математического анализа хорошо известно, что в этом случае функция $\varphi = \varphi^0$ принадлежит классу C^n и ее соответствующие частные производные совпадают с φ^α. Следовательно, $\varphi \in C^{n,\mu}(\overline{D})$ и $\varphi_s \to \varphi$ в этом пространстве.

В дальнейшем, если не оговорено особо, предполагается $\mu > 0$, так что черту над D можно опустить. Исключением служит пространство $C^{n,\mu}(\widehat{D})$ для двумерных кусочно-гладких открытых множеств D, которое определяется исходя из $C^\mu(\widehat{D})$ аналогично предыдущему.

По аналогии с (2.2.18) пространство $C^{n,\mu}(D)$ можно ввести индуктивно по n условиями $\varphi, \varphi' \in C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ с соответствующим определением и его нормы:

$$|\varphi| = |\varphi|_{C^{n-1,\mu}} + |\varphi'|_{C^{n-1,\mu}}. \tag{2.9.2}$$

Последовательное применение этого равенства приводит к выражению (2.9.1).

Согласно замечанию в конце пункта 2.6 сферу $\overline{\mathbb{R}^k}$ можно рассматривать как многообразие класса C^∞ и в соответствии с этим с помощью карт (2.6.8) можно ввести и пространство $C_*^{n,\mu}(D)$. Конечно, в случае ограниченного множества D символ «звезду» в этом обозначении можно опустить.

Все основные свойства введенных пространств удобно объединить в одной теореме, где в соответствии с соглашением пункта 2.2 предполагается $0 < \mu \leqslant 1$. Конечно, этот результат сохраняется и при $\mu = 0$ для пространств, рассматриваемых в замыкании областей.

Теорема 2.9.1.

(a) *При $\mu < \nu \leqslant 1$ имеет место вложение $C^{n,\mu}(D) \subseteq C^{n,\nu}(D)$ банаховых пространств. Если область D равномерно связна, то справедливо и вложение $C^{n,0}(\overline{D}) \subseteq C^{n-1,1}(\overline{D})$.*

(b) *Произведение функций как билинейное отображение $(\varphi_1, \varphi_2) \to \varphi_1\varphi_2$ ограничено $C^{n,\mu} \times C^{n,\mu} \to C^{n,\mu}$, так что пространство $C^{n,\mu}(D)$ является банаховой алгеброй по умножению. Если s-вектор-функция $\varphi \in C_0^{n,\mu}(D, F)$ и функция $f \in C^{n,1}(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^s$, причем образ $\varphi(D) \subseteq \overline{G}$, то суперпозиция $f \circ \varphi \in C^{n,\mu}(D)$. В частности, условие (2.7.7) необходимо и достаточно для обратимости ее элементов.*

(c) *Пусть вектор-функция $\alpha \in C^n(D)$ удовлетворяет условию Липшица, образ $\alpha(D) \subseteq \overline{D}_1$ и $\mathcal{D}\alpha \in C^{n-1,\mu}(\overline{D})$ (при $n \geqslant 1$). Тогда оператор $\varphi \to \varphi \circ \alpha$ ограничен $C^{n,\mu}(\overline{D}_1) \to C^{n,\mu}(\overline{D})$.*

Если дополнительно отображение α липшицево и $D_1 = \alpha(D)$ является областью в $\mathbb{R}^k$, то обратное отображение $\beta = \alpha^{-1}$ принадлежит классу $C^n(D_1)$ и его производная $\mathcal{D}\beta \in C^{n-1,\mu}(D_1)$.

Доказательство. Первое утверждение (a) является следствием (2.2.3) и индуктивного определения (2.9.2) нормы пространства $C^{n,\mu}$. Второе утверждение для $n = 0$ охватывается теоремой 2.2.2. Пусть оно справедливо для пространств порядка не выше $n - 1$ и $\varphi \in C^{n,0}$, $n \geqslant 2$. Тогда по предположению индукции $\varphi' \in C^{n-1,0} \subseteq C^{n-2,1}$. Точно так же и $\varphi \in C^{n-1,0} \subseteq C^{n-2,1}$. Следовательно, $\varphi, \varphi' \in C^{n-2,1}$ и по индуктивному определению пространств $\varphi \in C^{n-1,1}$ с соответствующей оценкой норм.

При $n = 0$ предложение (b) и первая часть (c) являются следствиями соотношений (2.1.6). В общем случае, как и выше, воспользуемся индукцией по n и предположим, что эти утверждения имеют место по отношению к $C^{n-1,\mu}$. Тогда для нормы в $C^{n-1,\mu}$ имеем неравенство $|\varphi\psi| \leqslant C|\varphi||\psi|$ с постоянной $C > 0$, не зависящей от φ, ψ. По правилу дифференцирования произведения имеем: $(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$. С учетом (2.9.1) отсюда следует аналогичная оценка и для нормы в $C^{n,\mu}$. Точно так же по правилу дифференцирования суперпозиции функций имеем: $\mathcal{D}(f \circ \varphi) = (\mathcal{D}f \circ \varphi)\mathcal{D}\varphi$, где справа стоит произведение матриц Якоби. На основании предположения индукции отсюда $\mathcal{D}(f \circ \varphi) \in C^{n-1,\mu}$ и, значит, $f \circ \varphi \in C^{n,\mu}$. Доказательство утверждения (c) совершенно аналогично.

Обратимся ко второй части (c). То, что отображение β непрерывно дифференцируемо и его производная как матрица Якоби связана с $\mathcal{D}\alpha$ равенством

$$\mathcal{D}\beta = (\mathcal{D}\alpha \circ \beta)^{-1}, \tag{2.9.3}$$

вытекает из леммы 2.3.1. Поскольку отображение β липшицево и матрица-функция $\mathcal{D}\alpha$ вместе со своей обратной принадлежит классу $C^\mu(D)$, на основании (2.9.3) функция $\mathcal{D}\beta \in C^\mu(D_1)$. Далее воспользуемся индукцией и предположим, что для некоторого $1 \leqslant m < n$ функция $\mathcal{D}\beta \in C^{m-1,\mu}(D_1)$. Тогда на основании предложения (c), примененного к β, функция $\mathcal{D}\alpha \circ \beta \in C^{m,\mu}(D_1)$, так что в силу (2.9.3) и $\mathcal{D}\beta \in C^{m,\mu}(D_1)$. Таким образом, после конечного числа шагов получим $\mathcal{D}\beta \in C^{n-1,\mu}(D_1)$. $\square$

Аналогично (2.2.4) удобно ввести класс

$$C^{n,\mu+0} = \bigcup_{\varepsilon > 0} C^{n,\mu+\varepsilon}, \quad 0 \leqslant \mu < 1, \tag{2.9.4}$$

который при $\mu = 0$ записываем кратко $C^{n,+0}$. Очевидно, этот класс является алгеброй по умножению и все утверждения (b), (c) теоремы сохраняют свою силу (без требования ограниченности оператора в (c)).

В обозначениях теоремы 2.4.1 класс $C^{n,\mu}$ гладких поверхностей (или кривых) можно ввести условием $f(\tilde{u}) \in C^{n,\mu}$ в шаре $|\tilde{u}| \leqslant \rho$ по отношению к каждой точке $a \in \Gamma$. Для поверхностей с краем, определяемых параметризацией $\gamma : \overline{G} \to \Gamma$, этот класс вводится условием $\gamma \in C^{n,\mu}(\overline{G})$.

Аналогичным образом на поверхностях $\Gamma \in C^{n,\mu}$, $n \geqslant 1$, с помощью параметризации $\gamma \in C^{n,\mu}(G)$ можно ввести класс $C^{n,\mu}(\Gamma)$ дифференцируемых функций условием $\varphi \circ \gamma \in C^{n,\mu}(G)$. Это определение согласовано с аналогичным классом для k-мерных областей в том смысле, что если Γ содержится в замкнутой области $\overline{D} \subseteq \mathbb{R}^k$, то оператор сужения $\varphi \to \varphi|_\Gamma$ ограничен $C^{n,\mu}(D) \to C^{n,\mu}(\Gamma)$. Доказательство можно провести индукцией по n, исходя из правила $\mathcal{D}(\varphi \circ \gamma) = [(\mathcal{D})\varphi \circ \gamma]\mathcal{D}\gamma$ дифференцирования суперпозиции функций.

Аналогично (2.9.2) однородное пространство $C_0^{n,\mu}(D)$ определим индуктивно условиями

$$\varphi(x),\ \psi(x) = |x|\varphi'(x) \in C_0^{n-1,\mu}(D), \tag{2.9.5}$$

относительно соответствующей нормы

$$|\varphi| = |\varphi|_{C_0^{n-1,\mu}} + |\psi|_{C_0^{n-1,\mu}} \tag{2.9.6}$$

оно банахово.

Теорема 2.9.2. *В утверждениях теорем* 2.7.1 *и* 2.7.2 *символ* C^μ *можно заменить на* $C^{n,\mu}$.

Доказательство. В соответствии с индуктивным определением (2.9.5) предположим, что утверждение теоремы 2.7.1 справедливо для пространства $C_0^{n-1,\mu}(D)$. Пусть $|\varphi|_{(n)}$ обозначает норму (2.9.6) и

$$|\varphi|^1_{(n)} = \sup_j |\varphi_j|_{C^{n,\mu}}$$

по отношению к последовательности $\{\varphi_j\}$, фигурирующей в (2.7.12). Тогда в соответствии с указанным индуктивным определением норм можно написать

$$|\varphi|_{(n)} = |\varphi|_{(n-1)} + |\psi|_{(n-1)}, \quad |\varphi|^1_{(n)} = |\varphi|^1_{(n-1)} + |\varphi'|^1_{(n-1)}. \tag{2.9.7}$$

Очевидно, соответствующая последовательность $\{\psi_j\}$ связана с $\{\varphi_j\}$ соотношением

$$\psi_j(x) = |x|\varphi_j'(x),\ x \in D_j. \tag{2.9.8}$$

Функции $|x|^{\pm 1}$ принадлежат $C^{m,\mu}$ в шаровом слое $\{\delta < |x| < \delta^{-1}\}$ для любого m. Из доказательства теоремы 2.9.1 видно, что в оценке нормы произведения

$$|a\varphi|_{C^{m,\mu}} \leqslant C_m |a|_{C^{m,\mu}} |\varphi|_{C^{m,\mu}}$$

функций $a, \psi \in C^{n,\mu}(D)$ постоянная C_m не зависит от множества D. Применительно к функции $a(x) = |x|^{\pm 1}$ в (2.9.8) отсюда приходим к двусторонним оценкам

$$|\psi|^1_{n-1} \leqslant C|\varphi'|^1_{n-1}, \quad |\varphi'|^1_{n-1} \leqslant C|\psi|^1_{n-1}.$$

Совместно с (2.9.7) и предположением индукции отсюда следует справедливость леммы и для пространства $C_0^{n,\mu}(D)$.

Обратимся к теореме 2.7.2. Очевидно, преобразование ω в (2.7.16) осуществляет гомеоморфизм $\mathbb{R} \times \Omega$ на $\mathbb{R}^k \setminus 0$ и обратным к нему служит отображение $x \to (\ln|x|, x/|x|)$. На областях единичной сферы Ω пространства $\mathbb{R}^k$ также естественным образом можно ввести пространства $C^{n,\mu}$. Проще всего это сделать следующим образом, не прибегая к структуре Ω как дифференцируемого многообразия. Для функции φ, заданной в окрестности точки a сферы Ω, положим

$$\varphi'(a) = \left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_k}\right)(a), \tag{2.9.9}$$

где $\widetilde{\varphi}$ получено продолжением φ в окрестность точки a пространства $\mathbb{R}^k$ по правилу $\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x/|x|)$. Тогда для открытого множества $G \subseteq \Omega$ пространство $C^{n,\mu}(G)$ можно по-прежнему определять индуктивно. Аналогичный смысл это пространство имеет и в случае $G \subseteq \mathbb{R} \times \Omega$.

Повторяя рассуждения доказательства теоремы 2.7.2, достаточно убедиться, что оператор $\psi \to \psi \circ \omega$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств

$$C^{n,\mu}([-r, r] \times \Omega) \to C_0^{n,\mu}(S).$$

Как было отмечено выше, вектор-функции $\omega \in C^\infty([-r,r]\times\Omega)$ и $\alpha = \omega^{-1} \in C^\infty(\overline{S})$ удовлетворяют условию Липшица на, соответственно, $[-r,r]\times\Omega$ и S. Поэтому указанное утверждение является следствием теоремы 2.9.1(c), которое для многообразия $[-r,r]\times\Omega$ доказывается совершенно аналогично. Нужно только принять во внимание формулы дифференцирования

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial s}\frac{x_i}{|x|^2} + \frac{\partial\widetilde{\psi}}{\partial u_i}\frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^3}$$

функции $\varphi(x) = \psi(\ln|x|, x/|x|)$, вытекающие из определения (2.9.9). $\square$

Обозначим $\mathcal{H}_\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$, класс всех функций $Q(\xi)\in C^\infty(\mathbb{R}^k\setminus 0)$, однородных степени λ, т. е. обладающих свойством $Q(r\xi) = r^\lambda Q(\xi)$, $r>0$. Нетрудно видеть, что операция дифференцирования $Q\to Q'$ действует $\mathcal{H}_\lambda\to\mathcal{H}_{\lambda-1}$ и, следовательно, весовая операция $Q(\xi)\to|\xi|Q'(\xi)$ инвариантна в $\mathcal{H}_\lambda$. Поскольку по теореме 2.7.2 класс $\mathcal{H}_0\subseteq C_0^{0,1}(\mathbb{R}^k)$, отсюда по индуктивному определению

$$\mathcal{H}_0 \subseteq C_0^{0,1}(\mathbb{R}^k) \tag{2.9.10}$$

для любого натурального n.

Простейшим представителем класса $\mathcal{H}_1$ служит функция $Q(\xi) = |\xi|$, так что все ее производные $Q^{(m)}$ порядка m принадлежат $\mathcal{H}_{1-m}$. Поэтому аналогично (2.9.1) вместо индуктивного определения (2.9.6) нормы пространства $C_0^{n,\mu}$ можно выбрать эквивалентную ей норму

$$|\varphi| = \sum_{m\leqslant n} |\psi_m|_{C_0^\mu}, \quad \psi_m(x) = |x|^m\varphi^{(m)}(x).$$

Пусть конечное множество F содержится в $\overline{D}$, причем, как обычно, $\infty\in F$ в случае, когда открытое множество D неограничено. Некоторые точки могут принадлежать D, и в этом случае они являются изолированными граничными точками для $D\setminus F$. Например, если граница ∂D компактна, то ∞ рассматривается как изолированная граничная точка D (на сфере Римана).

Для функций $\varphi\in C^n(D\setminus F)$ пространство $C_\lambda^{n,\mu}(D,F)$ может быть определено двумя эквивалентными способами. Можно действовать аналогично пункту 2.8, исходя из пространств $C^{n,\mu}(D)$ и $C_0^{n,\mu}(D)$. Другой способ заключается в индуктивном определении условиями

$$\varphi\in C_\lambda^{n-1,\mu}, \quad \varphi'\in C_{\lambda-1}^{n-1,\mu}. \tag{2.9.11}$$

Норму в этом пространстве можно ввести индуктивно, исходя из этого определения, либо воспользоваться непосредственно равенством

$$|\varphi| = \sum_{m\leqslant n} |\varphi^{(m)}|_{C_{\lambda-m}^{0,\mu}}.$$

Ясно, что относительно этой нормы введенное пространство банахово.

Из индуктивного определения (2.9.11) немедленно следует, что теорема 2.8.1 сохраняет свою силу и по отношению к пространству $C_\lambda^{n,\mu}$. В качестве другого следствия этого определения отметим, что в случае ограниченной области D, т.е при $\infty\notin F$, имеет место вложение банаховых пространств

$$C_{n+\mu}^{n,\mu}(D,F)\subseteq C^{n,\mu}(D). \tag{2.9.12}$$

При этом все производные $\varphi^{(m)}$, $0\leqslant m\leqslant n$, функций $\varphi\in C_{\mu+n}^{n,\mu}$ в точках $\tau\in F$ обращаются в нуль.

Все основные свойства этого пространства удобно объединить в двух предложениях.

Теорема 2.9.3.

(a) *Семейство банаховых пространств $C_\lambda^{n,\mu}$ монотонно убывает по отношению к параметрам μ, λ_τ, где $\tau\neq\infty$, и монотонно возрастает по отношению к λ_∞. При этом в случае, когда $\mu<\nu$, $\lambda_\tau<\lambda'_\tau$, $\tau\neq\infty$, и $\lambda_\tau>\lambda'_\tau$ $\tau=\infty$, вложение $C_{\lambda'}^{n,\nu}\subseteq C_{\lambda''}^{n,\mu}$ компактно.*

Если область D равномерно связна, то справедливо и вложение $C_\lambda^{n,0}(\overline{D},F)\subseteq C_\lambda^{n-1,1}(D,F)$.

(b) *Произведение функций как билинейное отображение* $(\varphi_1, \varphi_2) \to \varphi_1\varphi_2$ *ограничено* $C^{n,\mu}_{\lambda_1} \times C^{n,\mu}_{\lambda_2} \to C^{n,\mu}_{\lambda_1+\lambda_2}$, *так что пространство* $C^{n,\mu}_0(D,F)$ *является банаховой алгеброй по умножению. Если* s*-вектор-функция* $\varphi \in C^{n,\mu}_0(D,F)$ *и функция* $f \in C^{n,1}(G)$, $G \subseteq \mathbb{R}^s$, *причем образ* $\varphi(D) \subseteq \overline{G}$, *то суперпозиция* $f \circ \varphi \in C^{n,\mu}_0(D,F)$. *В частности, условие* (2.7.7) *необходимо и достаточно для обратимости ее элементов.*

Доказательство. Первая часть предложения (a) и (b) доказывается совершенно аналогично теореме 2.9.1 индукцией по n. Вторую часть предложения (a) достаточно установить для $n = 1$ и далее воспользоваться индукцией по n. Таким образом, пусть область D равномерно связна и функция $\varphi \in C^1(D)$ допускает оценки

$$|\varphi(x)| \leqslant C_0\rho_\lambda(x), \quad |\varphi'(x)| \leqslant C_1\rho_{\lambda-1}(x), \tag{2.9.13}$$

с некоторыми постоянными $C_j > 0$.

Из определения (2.8.4) видно, что функция $\rho_{1-\lambda}$ непрерывно дифференцируема и ее вектор-градиент представим в виде $\rho'_{1-\lambda} = a\rho_{-\lambda}$, где вектор-функция ограничена и ее sup-норма $|a|_0$ зависит только от λ. Рассмотрим функцию $\psi = \rho_{1-\lambda}\varphi$, «производная» которой $\psi' = a\rho_{-\lambda}\varphi + \rho_{1-\lambda}\varphi'$. В силу (2.9.10) эта функция принадлежит $C^{1,0}(D)$ и обращается в нуль порядка 1 в конечных точках $\tau \in F$. Более точно,

$$|\psi|_0 + |\psi'|_0 \leqslant (1 + |a|_0)C_0 + C_1.$$

Поэтому к ней можно применить теорему 2.2.2, согласно которой ψ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $[\psi]_1 \leqslant M|\psi'|_0$. На основании леммы 2.8.1 отсюда $\rho_{-\lambda}\varphi = \rho_{-1}\psi$ принадлежит $C^{0,1}_0(D,F)$ и, следовательно, функция $\varphi \in C^{0,1}_0(D,F)$ с соответствующей оценкой для ее нормы.

Очевидно, весовая функция ρ_λ в (2.8.4) принадлежит классу $C^{n+1,0}_\lambda(\mathbb{R}^k, F)$ для любого n (в рассматриваемом случае множество $D = \mathbb{R}^k$ неограничено, так что $\infty \in F$). Поэтому на основании последнего утверждения теоремы 2.9.3(a) эта функция принадлежит $C^{n,1}_\lambda(\mathbb{R}^k, F)$. В частности, оператор умножения на ρ_λ осуществляет изоморфизм $C^{n,\mu}_{\lambda'}(D,F)$ на $C^{n,\mu}_{\lambda+\lambda'}(D,F)$. □

Совершенно аналогично теореме 2.9.1 индукцией по n теорему 2.8.2 также можно распространить на случай пространств $C^{n,\mu}_\lambda$.

Теорема 2.9.4. *Пусть* $n \geqslant 1$ *и в условиях теоремы* 2.8.2 *производная* $\mathcal{D}\alpha \in C^{n-1,\mu}_0(D,F)$, *Тогда оператор* $\varphi \to \varphi \circ \alpha$ *ограничен* $C^{n,\mu}_{\lambda_1}(D_1,F_1) \to C^{n,\mu}_\lambda(D,F)$.

Если дополнительно $s = k$, *отображение* α *липшицево и* $D_1 = \alpha(D)$, *то обратное отображение* $\beta = \alpha^{-1}$ *принадлежит классу* $C^n(D_1)$ *и его производная* $\mathcal{D}\beta \in C^{n-1,\mu}_0(D_1,F_1)$.

Лемма 2.8.2 также допускает соответствующий аналог для рассматриваемых пространств, т. е. в этой лемме символ C^μ можно заменить на $C^{n,\mu}$. Нужно только в доказательстве этой леммы принять во внимание, что в силу леммы 2.9.1 замечание к теореме 2.7.2 относительно операции $\varphi(x) \to \varphi(x^*)$ сохраняет свою силу и по отношению к $C^{n,\mu}$.

С помощью леммы 2.8.2, примененной к $C^{n,\mu}_\lambda$, аналогичное (2.9.12) вложение банаховых пространств можно написать и в случае неограниченной области D. Пусть эта область лежит вне некоторой окрестности $\tau = 0$ и D^* есть образ D при отображении $x \to x^*$. Согласно определению пункта 2.6 при этом отображении пространство $C^{n,\mu}_*(D)$ перейдет в $C^{n,\mu}(D^*)$. Поэтому

$$C^{n,\mu}_{-n-\mu}(D,\infty) \subseteq C^{n,\mu}_*(D). \tag{2.9.14}$$

Из теоремы 2.9.3(a) следует, что имеют смысл классы

$$C^{n,\mu}_{\lambda+0} = \cup C^{n,\mu}_{\lambda+\delta}, \quad C^{n,\mu}_{\lambda-0} = \cap C^{n,\mu}_{\lambda-\delta}, \tag{2.9.15}$$

где объединение и пересечение берутся по весовым порядкам δ, удовлетворяющих условию $\delta_\tau > 0$ при $\tau \neq \infty$ и $\delta_\tau < 0$ при $\tau = \infty$. В случае $\lambda = 0$ символ λ в обозначениях этих классов опускаем.

В качестве примера отметим, что аналогично (2.7.15) для любых $Q(x) \in \mathcal{H}_m$ и $\zeta_0, \zeta_1 \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots$, функция

$$|x|^{\zeta_0}(1 + |x|)^{\zeta_1} \ln^n |x| Q(x) \in C^{n,1}_{\lambda-0}(\mathbb{R}^k; 0, \infty) \tag{2.9.16}$$

с весовым порядком $\lambda_0 = m + \operatorname{Re}\zeta_0$ и $\lambda_\infty = m + \operatorname{Re}(\zeta_0 + \zeta_1)$.

Из определения (2.9.15) непосредственно выводятся следующие свойства этих классов.

Лемма 2.9.1. *Пространство* $C^{n,\mu}_{\lambda}$ *заключено между классами* (2.9.15), *т. е.*

$$C^{n,\mu}_{\lambda+0} \subseteq C^{n,\mu}_{\lambda} \subseteq C^{n,\mu}_{\lambda-0}, \tag{2.9.17}$$

при этом операция произведения $(\varphi_1, \varphi) \to \varphi_1\varphi_2$ *действует* $C^{n,\mu}_{\lambda_1-0} \times C^{n,\mu}_{\lambda_2+0} \to C^{n,\mu}_{\lambda_1+\lambda_2+0}$.

С помощью (2.9.16) можно конструировать более сложные функции. Пусть носитель функции $\chi_\tau(x) \in C^\infty$ лежит внутри области $B_\rho(\tau)$ в (2.8.1), причем $\chi(x) \equiv 1$ в окрестности τ. Пусть комплексные числа $\zeta_{\tau,j}$ лежат на прямой $\mathrm{Re}\,\zeta = \lambda_\tau$ и заданы однородные функции $Q_{\tau,j}(\xi) \in \mathcal{H}_0$ и многочлены $p_{\tau,j}(\xi)$, $1 \leqslant j \leqslant m_\tau$. Обозначим $\dot{C}^{n,\mu}_{\lambda}(D,F)$ класс всех функций вида

$$\varphi(x) = \sum_{\tau\in F} \chi_\tau(x) \sum_{1\leqslant j\leqslant m_\tau} |x-\tau|^{\zeta_{\tau,j}} Q_{\tau,j}(x-\tau) p_{\tau,j}(\ln|x-\tau|) + \varphi_0(x), \tag{2.9.18}$$

где $x-\tau$ надо заменить на x при $\tau = \infty$ и $\varphi_0 \in C^{n,\mu}_{\lambda+0}(G,F)$.

Ясно, что этот класс также заключен между классами (2.9.15), т. е. удовлетворяет соотношениям (2.9.17). Он оказывается полезным при выделении асимптотики функций $\varphi \in C^{n,\mu}_{\lambda-0}$ в окрестности особых точек τ при изучении сингулярных интегральных уравнений [50] и эллиптических краевых задач [51].

2.10. Модифицированное пространство $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$

Согласно пункту 2.9 пространство $C^{n,\mu}_{\lambda}$ определяется условиями $\varphi^{(m)} \in C^{\mu}_{\lambda-m}$ для всех $0 \leqslant m \leqslant n$. Возникает вопрос, что можно сказать о функции φ при выполнении только последнего условия $\varphi^{(n)} \in C^{\mu}_{\lambda-n}$. Например, при каких условиях эта функция с точностью до гладкого слагаемого принадлежит $C^{n,\mu}_{\lambda}(D,F)$.

В этой связи удобно ввести следующее определение. Область D в своей граничной точке τ удовлетворяет условию конуса, если для некоторых открытого связного конуса K с вершиной в нуле, окрестности V_τ точки τ и некоторого $\delta > 0$ существует липшицево отображение α множества $D_\tau = D \cap V_\tau$ на

$$\alpha(D_\tau) = G, \quad G = \begin{cases} K \cap \{|x| < \delta\}, & \tau \neq \infty, \\ K \cap \{|x| > 1/\delta\}, & \tau = \infty, \end{cases} \tag{2.10.1}$$

причем $\alpha(\tau) = 0$, $\tau \neq \infty$, и $\alpha(\infty) = \infty$.

Например, из определений пунктов 2.3 и 2.6 следует, что липшицева область (как ограниченная, так и неограниченная) удовлетворяет условию конуса в каждой своей граничной точке. Другой пример доставляют изолированные граничные точки области D, когда в качестве конуса K можно взять все пространство с выделенной точкой τ, играющей роль вершины конуса.

Теорема 2.10.1. *Пусть область* D *равномерно связна, удовлетворяет условию конуса в точках* $\tau \in F$ *и производная* φ' *функции* $\varphi \in C^1(D)$ *принадлежит* $C^0_{\lambda-1}(\overline{D},F)$, *где* $\lambda_\tau \neq 0$, $\tau \in F$. *Тогда существует такая функция* $\varphi_0 \in C^1(D)$, *постоянная в окрестности точек* $\tau \in F$, *что* $\varphi - \varphi_0 \in C^{0,1}_{\lambda}(D,F)$.

Доказательство. Рассмотрим окрестность V_τ точки $\tau \in F$, о которой идет речь в условии конуса, и липшицево отображение α_τ области D_τ. Уменьшая при необходимости δ в (2.10.1), не ограничивая общности, можно считать, что замкнутые множества $\overline{D}_\tau$, $\tau \in F$, попарно не пересекаются. Пусть D^0 есть дополнение в D к объединению этих множеств. Утверждается, что функция φ в области D^0 ограничена:

$$|\varphi(x)| \leqslant C^0, \quad x \in D^0. \tag{2.10.2}$$

Для доказательства предположим противное. Тогда, поскольку множество D^0 ограничена, найдется последовательность его точек x_n, сходящаяся к некоторой точке $a \in \partial D \cap \partial D^0$, для которой

$$\lim_{x_n\to a} |\varphi(x_n)| = +\infty. \tag{2.10.3}$$

Пусть B означает шар с центром a радиуса r, который подчиним условию

$$B_1 \cap F = \varnothing, \quad B_1 = \{|z-a| \leqslant (M+1)r\}, \tag{2.10.4}$$

где M означает постоянную равномерной связности области D. Пусть $x, y \in B \cap D$, тогда найдется спрямляемая дуга $\Gamma \subseteq D$ с концами x, y, длина $l(\Gamma)$ которой не превосходит $M|x-y| \leqslant 2Mr$.

Поэтому для любой точки $z \in \Gamma$ одно из расстояний $|z-x|$, $|z-y|$ не превосходит $l(\Gamma)/2 \leqslant Mr$, так что $|z-a| \leqslant (M+1)r$, т. е. Γ содержится в шаре B_1. В силу (2.10.4) производная φ' ограничена в $B_1 \cap D$, пусть $|\varphi'(x)| \leqslant C_1$, $x \in B_1 \cap D$. Тогда на основании теоремы 2.2.2

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant C_1 l(\Gamma) \leqslant C_1 M|x-y|,$$

т. е. функция φ удовлетворяет условию Липшица на $B_1 \cap D$ и, в частности, ограничена, что противоречит (2.10.3).

По условию в области D_τ производная функции φ удовлетворяет оценке

$$|\varphi'(x)| \leqslant C_\tau |x-\tau|^{\lambda_\tau - 1}, \quad x \in D_\tau, \tag{2.10.5}$$

где при $\tau = \infty$ следует $x-\tau$ заменить на x.

Покажем, что для некоторой постоянной c_τ разность $\varphi(x) - c_\tau \in C^0_{\lambda_\tau}(D_\tau, \tau)$. Другими словами, найдется такая постоянная $C^0_\tau > 0$, что

$$|\varphi(x) - c_\tau| \leqslant C^0_\tau |x-\tau|^{\lambda_\tau}, \quad x \in D_\tau, \tag{2.10.6}$$

где в случае $\tau = \infty$ следует $x-\tau$ заменить на x.

Доказательство этой оценки достаточно провести для случая конечных точек $\tau \in F$, поскольку случай $\tau = \infty$ сводится к $\tau = 0$ с помощью инверсии $x^* = x/|x|^2$, переводящей область D_∞ на $D^*_\infty = D_0$. В самом деле, рассмотрим функцию $\varphi_0(x) = \varphi(x^*)$ в области D_0, которая в силу леммы 2.6.2 описывается аналогично (2.10.1) по отношению к $\tau = 0$ и липшицевому отображению $\alpha_0(x) = [\alpha_\infty(x^*)]^*$. Очевидно, ее производная дается равенством $\varphi_0'(x) = (x^*)'\varphi'(x^*)$. Фигурирующая здесь матрица Якоби $(x^*)'$ как функция от x однородна степени -2, так что $|(x^*)'| \leqslant M|x|^{-2}$, где постоянная $M > 0$ не зависит от x. Поэтому оценка (2.10.5) для $\tau = \infty$ перейдет в оценку

$$|\varphi_0'(x)| \leqslant M C_\infty |x|^{-\lambda_\infty - 1}, \quad x \in D_0,$$

имеющую вид (2.10.5) для $\tau = 0$. В результате для φ_0 получим оценку (2.10.6) с $\lambda_0 = -\lambda_\infty$, которая по отношению к $\varphi(x) = \varphi_0(x^*)$ перейдет в (2.10.6) по отношению к $\tau = \infty$.

Итак, пусть выполнена оценка (2.10.5) с $\tau \neq \infty$. По определению липшицевого отображения $\alpha = \alpha_\tau$ в (2.10.1) имеем двустороннее неравенство (2.3.1) и, в частности,

$$M^{-1}|x| \leqslant |\alpha(x) - \alpha(\tau)| \leqslant M|x|, \quad x \in D_\tau. \tag{2.10.7}$$

Поэтому достаточно убедиться, что аналогичной (2.10.6) оценке удовлетворяет функция $\psi(x) = \varphi[\alpha^{-1}(x)]$ в области G, т.е

$$|\psi(x) - c_\tau| \leqslant C|x|^{\lambda_\tau}, \quad x \in G. \tag{2.10.8}$$

Зафиксируем $0 < r < \delta$ и рассмотрим отрезок $I = [x,y]$ с концами x, y, расположенный в шаровом слое $S_r = \{r \leqslant |z| \leqslant \delta\}$. Как отмечено в пункте 2.3, его образ $\Gamma = \alpha^{-1}(I)$ при отображении α^{-1} является спрямляемой дугой длины $l(\Gamma) \leqslant M|x-y|$. В силу (2.10.7) эта дуга лежит в $D_\tau \cap \{|z-\tau| > r/M\}$. Поэтому на основании леммы 2.2.2, примененной к φ, приходим к оценке

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant \max_{z \in \Gamma} |\varphi'(z)|\, l(\Gamma) \leqslant C_\tau \left(\frac{r}{M}\right)^{\lambda - 1} M|x-y|.$$

Итак, существует такая постоянная $C_0 > 0$, зависящая только от C_τ, λ_τ и области D_τ, что

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant C_0 r^{\lambda_\tau - 1}|x-y| \tag{2.10.9}$$

для любой пары точек x, y, которые вместе с отрезком $[x,y]$ лежат в шаровом слое S_r.

Рассмотрим последовательность $x_k = \delta^k x$, $k = s, s+1, \ldots$, где целое число $s \leqslant 0$ определяется по условию

$$\delta^2 < |x_s| \leqslant \delta. \tag{2.10.10}$$

В силу (2.10.9) имеем неравенство

$$|\psi(x_k) - \psi(x_{k+1}| \leqslant C_0 |x_{k+1}|^{\lambda_\tau - 1}|x_k - x_{k+1}| = C_1 \delta^{k\lambda_\tau}|x|^{\lambda_\tau} \tag{2.10.11}$$

с постоянной $C_1 = C_0 \delta^{\lambda_\tau - 1}(1-\delta)$. Следовательно, при $\lambda_\tau > 0$ последовательность $\psi(x_k)$ сходится к некоторому пределу c_x при $k \to +\infty$. В действительности этот предел не зависит от выбора точки x. В самом деле, пусть $y_k = \delta^k y$ и для определенности $|x| \leqslant |y|$. Тогда на основании (2.10.9) получим неравенство

$$|\psi(x_k) - \psi(y_k| \leqslant C_0 |x_k|^{\lambda_\tau - 1} |x_k - y_k| = C_0 \delta^{k\lambda_\tau} |x|^{\lambda_\tau} |x - y|,$$

которое означает, что $c_x = c_y$.

Пусть теперь точки x, y шарового слоя S_r произвольны. По условию конус K и, следовательно, множество S_r связны. Поэтому точки x и y можно соединить ломаной $L \subseteq S_r$ с вершинами $z_0 = x, z_1, \ldots, z_n = y$. Поскольку по доказанному выше $c_{x_{i-1}} = c_{x_i}$, отсюда $c_x = c_y$ и в общем случае.

Полагая $c_\tau = c_x,\ x \in S_r$, из (2.10.11) выводим оценку

$$|\psi(x) - c_\tau| \leqslant C_1 \sum_{k \geqslant 0} \delta^{k\lambda_\tau} |x|^{\lambda_\tau} \leqslant C|x|^{\lambda_\tau} \tag{2.10.12}$$

с постоянной $C = C_1/(1 - \delta^{\lambda_\tau})$.

Если $\lambda_\tau < 0$, то аналогичным образом

$$|\psi(x) - \psi(x_s)| \leqslant C_1 \sum_{s \leqslant k \leqslant 0} \delta^{k\lambda_\tau} |x|^{\lambda_\tau} \leqslant \frac{C_1}{1 - \delta^{-\lambda_\tau}} |x|^{\lambda_\tau}.$$

В силу (2.10.9) функция ψ ограничена в слое $\{x \in K,\ \delta^2 \leqslant |x| \leqslant \delta\}$, так что с учетом (2.10.10) предыдущее неравенство дает оценку $|\psi(x)| \leqslant C|x|^{\lambda_\tau}$ с некоторой постоянной $C > 0$. Полагая $c_\tau = 0$ при $\lambda_\tau < 0$, эту оценку совместно с (2.10.12) можно объединить в форме (2.10.8).

Выберем теперь функцию $\varphi_0 \in C^1(\overline{D})$, тождественно равную c_τ в области D_τ. Тогда на основании (2.10.2), (2.10.8) разность $\varphi - \varphi_0 \in C^0_\lambda(D, F)$ и, очевидно, производная этой функции вместе с φ' принадлежит $C^0_{\lambda-1}(D, F)$. Поэтому на основании теоремы 2.9.1(a) функция $\varphi - \varphi_0 \in C^{0,1}_\lambda(D, F)$, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Для вещественного λ обозначим P_λ конечномерный класс многочленов

$$p(x) = \sum_{|\alpha| < \lambda} a_\alpha x^\alpha \tag{2.10.13}$$

степени строго меньше λ. Здесь x^α означает одночлен $x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}$, определяемый мультииндексом $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$. Конечно, при $\lambda \leqslant 0$ этот класс полагается равным нулю. Для описания функций на сфере Римана, гладких в окрестности ∞, в соответствии с пунктом 2.6 введем класс

$$P^*_\lambda = \{p(x^*),\ p \in P_{-\lambda}\}. \tag{2.10.14}$$

Очевидно, многочлен $p(x) \in P_\lambda$ и связанную с ней функцию $p(x^*) \in P_{-\lambda}$ можно записать в форме

$$p(x) = \sum_{0 \leqslant k < \lambda} Q_k(x)|x|^k, \quad p(x^*) = \sum_{0 \leqslant k < \lambda} Q_k(x)|x|^{-k}, \tag{2.10.15}$$

где положено

$$Q_k(x) = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha \left(\frac{x}{|x|}\right)^\alpha.$$

Очевидно, функция Q_k однородна степени нуль и принадлежит классу $\mathcal{H}_0$, введенному в конце пункта 2.9.

Пусть, как и ранее, F есть конечное подмножество замкнутой области $\overline{D}$ и функции $\chi_\tau(x) \in C^\infty,\ \tau \in F$, означает то же, что и в определении (2.9.18) класса $\dot{C}^{n,\mu}_\lambda$. Обозначим $C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D, F)$ класс всех функций вида

$$\varphi = \sum_\tau p_\tau \chi_\tau + \varphi_0, \quad \varphi_0 \in C^{n,\mu}_\lambda, \tag{2.10.16}$$

где $p_\tau \in P_{\lambda_\tau}$ при $\tau \neq \infty$ и $p_\tau \in P^*_{-\lambda_\tau}$ при $\tau = \infty$. Этот класс рассматриваем только для весовых порядков λ, связанных с n условием

$$\lambda_\tau \leqslant n + 1,\ \tau \neq \infty; \quad \lambda_\tau \geqslant -n - 1,\ \tau = \infty. \tag{2.10.17}$$

Очевидно, он является конечномерным расширением $C^{n,\mu}_\lambda$ (и совпадает с последним классом, если $\lambda_\tau \leqslant 0$ при $\tau \neq \infty$ и $\lambda_\tau \geqslant 0$ при $\tau = \infty$). В частности, в соответствии с пунктом 1.1 норма пространства $C^{n,\mu}_{\lambda}$ индуцирует в этом классе норму, относительно которой он является банаховым пространством.

Заметим, что теорема 2.8.1(a), примененная к $C^{n,\mu}_{\lambda}$, сохраняет свою силу и для банахового пространства $C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,F)$. Это следует из того, что при достаточно малом ρ каждое из множеств $B_\rho(\tau)$ целиком содержится в одном из элементов V_j. Аналогичное утверждение справедливо и по отношению к лемме 2.8.2. В качестве приложения этих утверждений отметим следующее простое предложение.

Лемма 2.10.1. *Пусть в обозначениях пункта* 2.6 *функция* $\varphi(x)$ *принадлежит классу* C^{n+1}_* *в окрестности множества* $\overline{D}\cup\infty$ *на сфере Римана. Тогда* $\varphi\in C^{n,1}_{(\lambda)}(D,F)$, *где* $\lambda_\tau=n+1$ *при* $\tau\neq\infty$ *и* $\lambda_\tau=-n-1$ *при* $\tau=\infty$.

Доказательство. В силу теоремы 2.8.1, примененной к $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$, без ограничения общности можно считать, что F состоит из одной точки $\tau=0$ или $\tau=\infty$, причем в первом случае область D ограничена, а во втором случае неограниченная область D лежит вне некоторой окрестности нуля. Тогда второй случай сводится к первому с помощью инволюции $x^*=x/|x|^2$.

Итак, пусть область D ограничена и $0\in\partial D$, а функция $\varphi\in C^{n+1}(\widetilde{D})$ в некоторой области $\widetilde{D}\supseteq\overline{D}$. Требуется доказать, что $\varphi\in C^{n,1}_{(n+1)}(D,0)$. Покроем компакт $\widetilde{D}$ конечным числом замкнутых шаров $B_0,B_1,\dots,B_m$, содержащихся в $\widetilde{D}$, причем B_0 имеет своим центром точку $\tau=0$, а остальные шары не содержат этой точки. Тогда в соответствии с теоремой 2.8.1, примененной к $C^{n,\mu}_{\lambda}$, достаточно убедиться, что $\varphi\in C^{n,1}_{(n+1)}(B_0,0)$. С учетом теоремы 2.2.2 индукцией по n убеждаемся, что $\varphi\in C^{n,\mu}(B_k)$, $k\geqslant 1$. В шаре B_0 можно записать

$$\varphi(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant n}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial x^\alpha}(0)+\varphi_0(x), \tag{2.10.18}$$

где $\alpha!=\alpha_1!\dots\alpha_k!$. Пользуясь формулой Тейлора, убеждаемся, что функция φ_0 допускает оценку

$$|\varphi_0(x)|\leqslant C|x|^{n+1},\quad x\in B_0.$$

Дифференцируя равенство (2.10.18), для функций $\psi=\partial^\beta\varphi/\partial x^\beta$ и $\psi_0=\partial^\beta\varphi_0/\partial x^\beta$ получим аналогичное равенство с заменой n на $n-|\beta|$, $|\beta|\leqslant n+1$. Поэтому из тех же соображений

$$\left|\frac{\partial^\beta\varphi_0}{\partial x^\beta}(x)\right|\leqslant C|x|^{n+1-|\beta|},\quad x\in B_0,$$

для всех $|\beta|\leqslant n+1$. Следовательно, функция $\varphi_0\in C^{n+1,0}_{n+1}(B_0,0)$, так что по теореме 2.9.1(a) отсюда $\varphi_0\in C^{n,1}_{n+1}(B_0,0)$. На основании теоремы 2.8.1, примененной к пространству $C^{n,1}_{n+1}$, отсюда $\varphi_0\in C^{n,1}_{n+1}(D,0)$, что с учетом (2.10.18) завершает доказательство леммы. □

В терминах пространства $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$ теорема 2.10.1 позволяет дать следующий ответ на вопрос, поставленный в начале данного раздела.

Теорема 2.10.2. *Пусть область D ограничена, равномерно связна и удовлетворяет условию конуса в точках $\tau\in F$. Пусть для некоторого $m\leqslant n$ производная $\varphi^{(m)}$ функции $\varphi\in C^n(D)$ принадлежит $C^{n-m,\mu}_{(\lambda-m)}(D,F)$, $\lambda\leqslant n+1$. Тогда при*

$$\lambda_\tau\neq 0,\dots,m-1,\quad \tau\in F, \tag{2.10.19}$$

функция $\varphi\in C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,F)$.

Доказательство. Сначала докажем теорему для $m=1$. Зафиксируем $\tau\in F$ и рассмотрим область D_τ, фигурирующую в определении (2.10.1). По предположению теоремы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x)=p_j(x)+\varphi_j(x),\quad \varphi_j\in C^{n-1,\mu}_{\lambda_\tau-1}(D_\tau,0), \tag{2.10.20}$$

где степени многочленов p_j строго меньше $\lambda_\tau-1$. Утверждается, что

$$\frac{\partial p_\tau}{\partial x_j}=p_j,\quad 1\leqslant j\leqslant k, \tag{2.10.21}$$

для некоторого многочлена $p_\tau(x)$ степени меньше λ_τ. При $n = 1$ согласно (2.10.17) имеем неравенство $\lambda_\tau \leqslant 2$ и, следовательно, многочлены p_j постоянны, так что в этом случае утверждение очевидно. Пусть $n \geqslant 2$, тогда равенство (2.10.20) можно продифференцировать, так что

$$p_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \in C^0_{\lambda_\tau - 2}(D_\tau, \tau), \quad i \neq j.$$

Очевидно, степень многочлена p_{ij} меньше $\lambda_\tau - 2$, поэтому предыдущее представление возможно только при $p_{ij} = 0$. Тем самым существование многочлена p_τ со свойством (2.10.21) установлено.

Заменяя φ на функцию $\varphi - \sum\limits_\tau p_\tau \chi_\tau$, можно, таким образом, без ограничения общности считать, что $\varphi' \in C^{n-1,\mu}_{\lambda-1}(D, F)$. В частности, на основании теоремы 2.10.1 отсюда

$$\varphi_0 = \varphi - \sum_\tau c_\tau \chi_\tau \in C^0_\lambda(D, F)$$

с некоторыми постоянными c_τ. Ясно, что производная φ_0' вместе с φ' принадлежит классу $C^{n-1,\mu}_{\lambda-1}(D, F)$. Поэтому на основании теоремы 2.9.1(a) функция $\varphi_0 \in C^\mu_\lambda(D, F)$, так что $\varphi_0^{(k)} \in C^\mu_{\lambda-k}(D, F)$ для всех $0 \leqslant k \leqslant n$, т. е. $\varphi_0 \in C^{n\mu}_\lambda(D, F)$.

Итак, для $m = 1$ утверждение теоремы установлено. В общем случае рассмотрим некоторую частную производную $\psi = \partial^\alpha \varphi / \partial x^\alpha$ порядка $|\alpha| = m - 1$. Тогда по условию $\psi' \in C^{n-m}_{(\lambda-m)}$ и на основании доказанного утверждения, в котором λ следует заменить на $\lambda - m + 1$, функция $\psi \in C^{n-m+1}_{(\lambda-m+1)}$. Здесь учтено,что в силу (2.10.19) условие теоремы 2.10.1 для весового порядка $\lambda - m + 1$ выполнено. Таким образом, $\varphi^{(m-1)} \in C^{n-m+1}_{(\lambda-m+1)}$. Повторяя эту процедуру, после конечного числа шагов получим $\varphi \in C^n_{(\lambda)}$. □

В соответствии с соглашением пункта 1.1 в теореме молчаливо предполагалось, что $0 < \mu \leqslant 1$. Ясно, что эта теорема справедлива и по отношению к $\mu = 0$ в предположении, что весовые классы $C^{n-m,0}_{\lambda-m}$ и $C^{n,0}_\lambda$ рассматриваются в замкнутой области $\overline{D}$.

В качестве следствия теоремы отметим, что при выполнении ее условий пространство $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$ можно определять индуктивно условиями $\varphi, \varphi' \in C^{n-1}_{(\lambda-1)}$. Согласно лемме 2.8.1 для ограниченных множеств G пространства $C^\mu(G)$ и $C^\mu_{(\mu)}(G, F)$ совпадают. Поэтому если область D удовлетворяет условиям теоремы 2.10.2, то по индукции убеждаемся, что для любого n имеет место равенство

$$C^{n,\mu}(D) = C^{n,\mu}_{(n+\mu)}(D, F). \tag{2.10.22}$$

Этот факт дополняет вложение (2.9.12) для указанных областей. В частности, пространство $C^{n,\mu}(D)$ можно определять принадлежностью классу C^μ только для старших производных, т. е. условием $\varphi^{(n)} \in C^\mu(D)$. Из этих же соображений для $\varphi \in C^{n,\mu}(D)$ функция

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \sum_{|\alpha| \leqslant n} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}(\tau),$$

принадлежит пространству $C^\mu_{n+\mu}(D, \tau)$.

Если область D липшицева, то все эти свойства справедливы для любой точки $\tau \in \overline{D}$. В самом деле, все ее граничные точки удовлетворяют условию конуса. Что касается внутренних точек τ, то они являются граничными для области $D \setminus \{\tau\}$ и, очевидно, также удовлетворяют условию конуса по отношению к этой области.

Из определения (2.10.17) непосредственно следует, что теорема 2.9.2(a) сохраняет свою силу и для пространства $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$. Аналоги теорем 2.9.2(b) и 2.9.3 для этого пространства рассмотрим в предположении, что область D ограничена.

Теорема 2.10.3.

(a) *Пусть весовой порядок $\lambda_1 \geqslant 0$. Тогда произведение функций как билинейное отображение $(\varphi_1, \varphi_2) \to \varphi_1 \varphi_2$ ограничено $C^{n,\mu}_{(\lambda_1)} \times C^{n,\mu}_{(\lambda_2)} \to C^{n,\mu}_{(\lambda_1+\lambda_2)}$, так что при $\lambda \geqslant 0$ пространство $C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D, F)$ является банаховой алгеброй по умножению.*

(b) *Пусть вектор-функция φ принадлежит классу $C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,F)$, $\lambda \geqslant 0$, и открытое множество G содержит компакт $\overline{\varphi(D)}$. Тогда для $f \in C^{n+1}(G)$ суперпозиция $f \circ \alpha \in C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,F)$. В частности, в случае скалярной функции φ условие* (2.7.7) *необходимо и достаточно для ее обратимости в банаховой алгебре $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$.*

(c) *Пусть в условиях теоремы* 2.8.2 *отображение α принадлежит классу $C^{n,\mu}_{(\lambda^1)}\ (D,F)$, где $\lambda^1 = \max(\lambda, 1)$. Тогда оператор суперпозиции $T(\alpha)\varphi = \varphi \circ \alpha$ ограничен $C^{n,\mu}_{(\lambda_1)}(D_1,F_1) \to C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,F)$.*

Если дополнительно $s = k$, отображение α липшицево и $D_1 = \alpha(D)$, то обратное отображение $\beta = \alpha^{-1}$ также принадлежит классу $C^{n,\mu}_{(\lambda^1)}(D_1,F_1)$, где весовой порядок $\lambda_{\alpha(\tau)}$, $\tau \in F$, обозначен снова λ.

Доказательство. (a) В силу леммы 2.10.1 условие на степень многочлена p в определении (2.10.16) класса $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$ можно опустить, поэтому утверждение является непосредственным следствием теоремы 2.9.3(b).

(b) В силу теоремы 2.8.1, примененной к $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$, не ограничивая общности, можно считать, что $F = \{0\}$. Рассмотрим функцию $\chi \in C^\infty_0(G)$, тождественно равную 1 на компакте $\overline{\varphi(D)}$. Заменяя f на χf, не ограничивая общности, можно считать, что $f \in C^{n+1}(\mathbb{R}^s)$.

По определению разность $\varphi - p \in C^{n,\mu}_{\lambda}(D,0)$ для некоторого вектор-многочлена $p = (p_1,\dots,p_s)$. По условию теоремы функция $f \circ p$ принадлежит классу C^{n+1} в окрестности компакта $\overline{D}$, так что на основании леммы 2.10.1

$$f \circ p \in C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,0).$$

Поэтому остается убедиться, что разность

$$f \circ \varphi - f \circ p \in C^{n,\mu}_{\lambda}(D,0). \tag{2.10.23}$$

Пусть отрезок с концами z и y содержится в G. Тогда применяя к функции $f_0(t) = f[y+t(z-y)]$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, формулу Ньютона—Лейбница, получим:

$$f(z) - f(y) = \sum_{j=1}^{k} a_j(z,y)(z_j - y_j), \quad a_j(z,y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z_j}[y + t(z-y)]dt.$$

В соответствии с этим запишем

$$f[\varphi(x)] - f[p(x)] = \sum_{j=1}^{m} a_j(x)[\varphi_j(x) - p_j(x)], \quad a_j(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}[p(x) + t\varphi(x) - tp(x)]dt.$$

Поскольку $\varphi_j - p_j \in C^{n,\mu}_{\lambda}(D,0)$, достаточно убедиться, что функции a_j принадлежат пространству $C^{n,\mu}_0(D,0)$. С этой целью воспользуемся теоремой 2.7.2, в обозначениях которой функция $p[\omega(s,u)] + t\varphi[\omega(s,u)] - tp[\omega(s,u)]$ принадлежит пространству $C^{n,\mu}$ по совокупности переменных (s,u,t) на соответствующем множестве. По теореме 2.9.1(b) аналогичным свойством обладает и суперпозиция этой функции с f и, значит, интеграл по t от полученной функции. Опять пользуясь теоремой 2.7.2, приходим к справедливости (2.10.23).

(c) Условимся использовать обозначение для функций χ_τ, фигурирующих в (2.10.16), и по отношению к множеству F_1. Запишем $\varphi \in C^{n,\mu}_{(\lambda_1)}(D_1,F_1)$ аналогично (2.10.16) и заметим, что при $n \geqslant 1$ условие $\alpha \in C^{n,\mu}_{(\lambda^1)}$ теоремы влечет $\alpha' \in C^{n-1,\mu}_0$. Поэтому на основании теоремы 2.9.3 достаточно убедиться, что

$$\sum_{\tau \in F_1} (\chi_\tau p_\tau) \circ \alpha \in C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,F). \tag{2.10.24}$$

В силу теоремы 2.8.1, примененной к $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$, без ограничения общности можно считать, что множество F состоит из одной точки τ и, соответственно, $F_1 = \{\tau_1\}$ с $\tau_1 = \alpha(\tau)$. Поскольку при $\lambda \leqslant 0$ многочлен $p_\tau = 0$, можно считать, что $\lambda > 0$. Очевидно, функция $\chi_{\tau_1} \circ \alpha \in C^{n,\mu}(D)$ и тождественно равна 1 в окрестности τ, так что она принадлежит классу $C^{n,\mu}_{(\lambda)}(D,\tau)$. С другой стороны, на основании леммы 2.10.1 и предложения (a) теоремы этому классу принадлежит и функция $p_\tau \circ \alpha$, что завершает доказательство (2.10.24) и первого предложения (c). Второе предложение доказывается индукцией по n теми же рассуждениями, что и аналогичное предложение теоремы 2.9.1. $\square$

Отметим, что лемма 2.8.2, примененная к пространству $C^{n,\mu}_{(\lambda)}$, совместно с теоремой 2.10.3 позволяет охватить и случай неограниченных областей D и D_1. В самом деле, пусть инверсии δ и δ_1 переводят области D и, соответственно, D_1 в ограниченные области. Тогда дело сводится к применению теоремы 2.10.3 к отображению $\widetilde{\alpha} = \delta_1 \circ \alpha \circ \delta$. При этом отображение α должно быть таково, чтобы $\widetilde{\alpha}$ удовлетворяло условию теоремы 2.10.3.

Проиллюстрируем теоремы 2.10.2 и 2.10.3 на примере того, при каких условиях радиальная параметризация (2.5.5) принадлежит классу $C^{1,\mu}[0,\rho]$, т. е. когда радиальная дуга $\Gamma \in C^{1,\mu}$. Очевидно, отрезок прямой удовлетворяет условиям теоремы 2.10.2 и класс $C^{1,\mu}[0,\rho]$ совпадает с $C^{1,\mu}_{(1+\mu)}([0,\rho],0)$. Поэтому если $\gamma \in C^{1,\mu}[0,\rho]$, то $\gamma(r) = ar + \gamma_0(r)$ с некоторыми $\gamma_0 \in C^{1,\mu}_{1+\mu}([0,\rho],0)$ и постоянной a. Следовательно, $e^{i\theta(r)} \in C^{1+\mu}_{(\mu)}([0,\rho],0)$ и с учетом теоремы 2.10.3(b) это верно и по отношению к вещественной функции $\theta(r)$. На основании теоремы 2.10.2 данный факт равносилен тому, что $\theta'(r) \in C^{\mu}_{\mu-1}([0,\rho],0)$. Это и есть необходимое и достаточное условие принадлежности радиальной дуги Γ классу $C^{1,\mu}$.

Глава 3

ИНТЕГРАЛЫ С ОДНОРОДНЫМ РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

3.1. Однородные функции

Рассмотрим подробнее класс $\mathcal{H}_\lambda$ однородных функции, введенный в конце пункта 2.7. Напомним, что он состоит из функций $Q(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^k \setminus 0)$, удовлетворяющих условию однородности
$$Q(r\xi) = r^\lambda Q(\xi), \quad r > 0, \tag{3.1.1}$$
степени $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу однородности функция Q полностью определяется своим сужением на единичную сферу Ω. В одномерном случае $k = 1$ множество Ω состоит из двух точек ± 1 и, следовательно, любая однородная степени λ функция является линейной комбинацией функций $Q_1(\xi) = |\xi|^\lambda$ и $Q_2(\xi) = (\operatorname{sgn}\xi)|\xi|^\lambda$.

После дифференцирования по ξ_i равенство (3.1.1) показывает, что частная производная $\partial Q/\partial \xi_i$ принадлежит $\mathcal{H}_{\lambda-1}$. Точно так же операция умножения $Q(\xi) \to |\xi|^\delta Q(\xi)$ действует $\mathcal{H}_\lambda \to \mathcal{H}_{\lambda+\delta}$.

Напомним (пункт 2.8), что $Q^{(s)}$ означает упорядоченный набор всех частных производных порядка s. Рассматривая его на сфере Ω, введем в классе $\mathcal{H}_\lambda$ норму
$$|Q|_{(m)} = \sum_{0 \leqslant s \leqslant m} |Q^{(s)}|_{0,\Omega}. \tag{3.1.2}$$
Очевидно, для нее справедливы оценки
$$|Q'|_{(m)} \leqslant C|Q|_{(m-1)}, \quad ||\xi|^\delta Q(\xi)|_{(m)} \leqslant C|Q|_{(m)}, \tag{3.1.3}$$
где постоянная $C > 0$ зависит только от λ и δ.

Лемма 3.1.1. *Если $Q \in \mathcal{H}_\lambda$, то для любых ξ, η имеет место неравенство*
$$|Q(\xi) - Q(\eta)| \leqslant M|Q|_{(1)}(|\xi|^{\lambda-1} + |\eta|^{\lambda-1})|\xi - \eta|, \tag{3.1.4}$$
где постоянная $M > 0$ зависит только от λ.

Доказательство. В силу однородности (3.1.1) без ограничения общности можно считать $|\xi| = 1$. Тогда
$$|Q(\xi) - Q(\eta)| = \left|Q(\xi) - |\eta|^\lambda Q\left(\frac{\eta}{|\eta|}\right)\right| \leqslant [Q]_{1,\Omega}\left|\xi - \frac{\eta}{|\eta|}\right| + |Q|_{(0)}|1 - |\eta|^\lambda|.$$
Очевидно,
$$\left|\xi - \frac{\eta}{|\eta|}\right| \leqslant |\xi - \eta| + \left|1 - \frac{1}{|\eta|}\right| |\eta| \leqslant 2|\xi - \eta|,$$

где учтено, что $|1-|\eta||=||\xi|-|\eta||\leqslant|\xi-\eta|$. Точно так же

$$|1-|\eta|^{\lambda}|\leqslant|\lambda|\max(1,|\eta|^{\lambda-1})|1-|\eta||\leqslant|\lambda|(1+|\eta|^{m-1})|\xi-\eta|.$$

Объединяя эти неравенства, в результате приходим к оценке

$$|Q(\xi)-Q(\eta)|\leqslant(2[Q]_{1,\Omega}+|\lambda||Q|_{(0)})(1+|\eta|^{\lambda-1})|\xi-\eta|. \tag{3.1.5}$$

Очевидно, шаровой слой $S=\{1/2<|\xi|<2\}$ является равномерно связной областью, так что на основании теоремы 2.2.2 справедлива оценка

$$[Q]_{1,S}\leqslant M_1|Q'|_{0,S}.$$

С другой стороны, в силу однородности (3.1.1)

$$|Q'|_{0,S}\leqslant M_2|Q|^{(1)},$$

где постоянная M_2 зависит только от λ. Совместно с (3.1.5) отсюда следует (3.1.4). □

Заметим, что согласно (3.1.5) оценка (3.1.4) фактически справедлива для любой однородной функции степени λ, удовлетворяющей на единичной сфере Ω условию Липшица. При этом роль нормы $|Q|_{(1)}$ играет норма $|Q|_{C^{0,1}(\Omega)}$.

Рассмотрим случай, когда функция $Q(\xi)=Q(x,\xi)\in\mathcal{H}_\lambda$ зависит от точки $x\in G\subseteq\mathbb{R}^l$ как от параметра. Пусть как и выше $Q^{(s)}_\xi$ означает упорядоченный набор всех частных производных по ξ порядка s. Обозначим $C^{\nu(m)}(G)=C^{\nu(m)}(G,\mathcal{H}_\lambda)$ пространство всех функций $Q(x,\xi)$, которые вместе с производными $Q^{(s)}_\xi$, $s\leqslant m$, равномерно по $\xi\in\Omega$ принадлежат $C^\nu(G)$. Относительно нормы

$$|Q|_{C^{\nu(m)}}=\sum_{s\leqslant m}\sup_{\xi\in\Omega}|Q^{(s)}_\xi(x,\xi)|_{C^\nu(G)} \tag{3.1.6}$$

это пространство банахово. Очевидно, при $\nu=0$ и $s=0$ эта норма совпадает с sup-нормой функции $Q(x,\xi)$ на $G\times\Omega$.

В случае, когда G является областью D, аналогичным образом определяется и пространство $C^{n,\nu(m)}(D)=C^{n,\nu(m)}(D,\mathcal{H}_\lambda)$ функций $Q(x,\xi)$, для которых $Q^{(s)}_\xi(x,\xi)$, $0\leqslant s\leqslant m$, принадлежат $C^{n,\nu}(D)$ равномерно по $\xi\in\Omega$. Норма в этом пространстве определяется равенством (3.1.6), в котором символ C^ν надо заменить на $C^{n,\nu}$.

Из определений (3.1.2), (3.1.6) видно, что для $Q\in C^{\nu(m)}(G)$ и любых $x,y\in G$, $x\neq y$, справедливо неравенство

$$|\tilde Q|_{(m)}\leqslant|Q|_{C^{\nu(m)}},\quad \tilde Q(\xi)=\frac{Q(x,\xi)-Q(y,\xi)}{|x-y|^\nu}. \tag{3.1.7}$$

Отметим еще следующее простое предложение.

Лемма 3.1.2. *Пусть $Q(u,\xi)\in C^{\nu(1)}(G,\mathcal{H}_\lambda)$, $\lambda\leqslant 0$, и заданы отображения $\alpha:K\to G$, $\beta:K\to\mathbb{R}^k$, причем α удовлетворяет условию Липшица, $\beta\in C^\nu(K)$ и $|\beta(x)|\geqslant\delta$, $x\in K$ для некоторого $\delta>0$. Тогда функция $q(x)=Q[\alpha(x),\beta(x)]\in C^\nu(K)$.*

Доказательство. Очевидно, функция q по модулю не превосходит $|Q|_{C^{\nu(0)}}\delta^\lambda$ и с учетом леммы 3.1.1 для любых $|\xi|\geqslant\delta$, $|\eta|\geqslant\delta$ и $u,v\in G$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}|Q(u,\xi)-Q(v,\xi)|\leqslant\delta^\lambda|Q|_{C^{\nu(0)}}|u-v|^\nu,\\ |Q(u,\xi)-Q(u,\eta|\leqslant 2M\delta^{\lambda-1}|Q|_{C^{0(1)}}|\xi-\eta|.\end{gathered} \tag{3.1.8}$$

Остается применить к слагаемым в правой части неравенства

$$|q(x)-q(y)|\leqslant|Q[\alpha(x),\beta(x)]-Q[\alpha(y),\beta(x)]|+|Q[\alpha(y),\beta(x)]-Q[\alpha(y),\beta(y)]|$$

соответствующие оценки (3.1.8). □

Теорему 2.3.2 о продолжении можно применить и функциям $Q(x,\xi)$, рассматривая ξ как параметр. Более точно, пусть область G липшицева и Ω означает единичную сферу в $\mathbb{R}^k$. Рассмотрим ограниченный оператор продолжения $P:\ C^\nu(G)\to C^\nu(\mathbb{R}^k$, фигурирующий в теореме 2.3.2. Для $Q(x,\xi)\in C^{\nu(m)}(G)$ положим

$$Q^1(x,\xi)=[PQ(\cdot,\xi)](x), x\in\mathbb{R}^k,\ \xi\in\Omega, \tag{3.1.9}$$

где операция P действует для фиксированного ξ. Далее аналогично (3.1.1) функцию Q^1 продолжим с Ω по условию однородности:

$$Q^1(x,r\xi)=r^\lambda Q^1(x,\xi). \tag{3.1.10}$$

Лемма 3.1.3. *Оператор P^1, действующий по формулам* (3.1.9), (3.1.10)*, ограничен как оператор $P^1:C^{\nu(m)}(G,\mathcal{H}_\lambda)\to C^{\nu(m)}(\mathbb{R}^k,\mathcal{H}_\lambda)$.*

Доказательство. Для $m=0$ утверждение леммы следует непосредственно из определения оператора P^1. В общем случае покажем, что этот оператор сохраняет свойство бесконечной дифференцируемости по ξ. Более точно, имеют место соотношения

$$\frac{\partial Q^1}{\partial \xi_j}=P^1\left[\frac{\partial Q}{\partial \xi_j}\right],\quad 1\leqslant j\leqslant k. \tag{3.1.11}$$

В самом деле, пусть вектор e_j означает единичный орт вдоль оси ξ_j. Тогда, полагая $\tilde\xi=(\xi+se)/|\xi+se|$, $\xi\in\Omega$, где вещественное s меняется в окрестности нуля, в силу линейности оператора P и свойства однородности (3.1.10) разность $Q^1(x,\tilde\xi)-Q^1(x,\xi)$ можно представить в форме

$$|\xi+se|^\lambda Q^1(x,\tilde\xi)-Q^1(x,\xi)=P[|\xi+se|^\lambda Q(\cdot,\tilde\xi)-Q(\cdot,\xi)](x).$$

Деля это соотношение на s и переходя к пределу при $s\to 0$, приходим к соотношениям (3.1.11). Переход к пределу обосновывается аналогично лемме 1.8.3. В свою очередь в соответствии с определением (3.1.6) пространства $C^{\nu(m)}$ эти соотношения приводят к справедливости леммы и для $m>0$. □

Простейшим представителем класса $C^{\nu(0)})(G\times G,\mathcal{H}_\lambda)$ служит функция

$$Q(x,y,\xi)=q(x,y)|\xi|^\lambda,\quad q\in C^\nu(G\times G).$$

Подобным образом можно записать функцию Q и в общем случае, полагая $q(x,y)=Q_0(x,y,y-x)$, где $Q_0(x,y,\xi)=|\xi|^{-\lambda}Q(x,y,\xi)$ однородна степени нуль по ξ. Следующая теорема показывает, что при некоторых дополнительных условиях так определенная функция q принадлежит классу C^ν.

Теорема 3.1.1. *Пусть компакт $G\subseteq\mathbb{R}^k$ и функция $Q(x,y,\xi)\in C^{\nu(1)})(G\times G,\mathcal{H}_0)$ тождественно равна нулю при $x=y$. Тогда функция $a(x,y)=Q(x,y,y-x)$, доопределенная нулем при $x=y$, принадлежит классу $C^\nu(G\times G)$ с соответствующей оценкой норм $|a|_{C^\nu}\leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}$, где постоянная $C>0$ зависит только от диаметра R множества G*

Доказательство. В силу (3.1.7) имеем оценку

$$|a(x,y)|\leqslant |Q|_{C^{\nu(0)}}|x-y|^\nu\leqslant R^\nu|Q|_{C^{\nu(0)}},$$

так что соответствующей оценки требуют только разности $\Delta=a(x_1,y)-a(x_2,y)$ и $\Delta=a(x,y_1)-a(x,y_2)$. Поскольку переменные x и y равноправны в выражении a, достаточно рассмотреть первую из этих разностей. Положим $\delta=|x_1-x_2|$ и случаи $|x_1-y|\leqslant 2\delta$ и $|x_1-y|\geqslant 2\delta$ рассмотрим отдельно. В первом случае $|x_2-y|\leqslant 3\delta$ и, следовательно,

$$|\Delta|\leqslant |Q|_{C^{\nu(0)}}(|x_1-y|^\nu+|x_2-y|^\nu)\leqslant(2^\nu+3^\nu)|Q|_{C^{\nu(0)}}\delta^\nu. \tag{3.1.12}$$

Во втором случае с учетом неравенств треугольника $|y-x_1|-\delta\leqslant|y-x_2|\leqslant|y-x_1|+\delta$ должно быть

$$\delta\leqslant|y-x_2|\leqslant 2|y-x_1|. \tag{3.1.13}$$

Запишем

$$|\Delta|\leqslant|Q(x_1,y,y-x_1)-Q(x_2,y,y-x_1)|+|Q(x_2,y,y-x_1)-Q(x_2,y,y-x_2)|$$

и к слагаемым в правой части этого неравенства применим оценки (3.1.7) и (3.1.4) по отношению к соответствующим функциям

$$\tilde{Q}_1(\xi) = \frac{Q(x_1, y, \xi) - Q(x_2, y, \xi)}{|x_1 - x_2|^\nu}, \quad \tilde{Q}_2(\xi) = \frac{Q(x_2, y, \xi) - Q(y, y, \xi)}{|x_2 - y|^\nu} \in \mathcal{H}_0.$$

Тогда получим

$$|\Delta| \leqslant |Q|_{C^{\nu(0)}}\delta^\nu + M|Q|_{C^{\nu(1)}}\delta|x_2 - y|^\nu(|x_1 - y|^{-1} + |x_2 - y|^{-1}).$$

В силу (3.1.13) имеем:

$$\delta|x_2 - y|^\nu(|x_1 - y|^{-1} + |x_2 - y|^{-1}) \leqslant 3\delta|x_2 - y|^{\nu-1} \leqslant 3\delta^\nu.$$

Подставляя это неравенство в предыдущую оценку, совместно с (3.1.12) завершим доказательство теоремы. □

Из теоремы непосредственно следует, что если $Q(x, y, \xi) \in C^{\nu(1)}(G \times G, \mathcal{H}_0)$ и функция $a_0(x, y) \in C^\nu(G \times G)$, обращается в нуль при $x = y$, то произведение $a(x, y) = a_0(x, y)Q(x, y, y - x)$ также принадлежит классу $C^\nu(G \times G)$. В качестве $a(x, y)$ можно взять, например, функции $|x - y|\ln^n |x - y|$, $n = 1, 2\ldots$, которые принадлежат классу C^ν, $0 < \nu < 1$, на любом ограниченном подмножестве $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$.

В случае, когда G является гладким контуром на комплексной плоскости, теорему 3.1.1 можно дополнить следующим предложением.

Лемма 3.1.4. *Пусть гладкий контур Γ принадлежит $C^{1,\nu}$ с единичным касательным вектором $e(t)$, $t \in \Gamma$ и ядро $Q_0(t_0, t; \xi) \in C^{\nu(1)}(\Gamma \times \Gamma, \mathcal{H}_0)$ четно по переменной ξ. Тогда функция $a(t_0, t) = Q_0(t_0, t; t - t_0)$, доопределенная значением $Q(t_0, t_0; e(t_0)$ при $t = t_0$, принадлежит $C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$ с оценкой $|k|_{C^\nu} \leqslant C|Q_0|_{C^{\nu(0)}}$ соответствующих норм.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение леммы по отношению к каждой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Выберем параметризацию $\gamma : [0, 1] \to \Gamma_0$ этой дуги класса $C^{1,\nu}[0, 1]$. Поскольку эта параметризация является липшицевым отображением, лемму достаточно установить по отношению к функции $b(s_0, s) = a[\gamma(s_0), \gamma(s)]$ в квадрате $0 \leqslant s, s_0 \leqslant 1$. В силу однородности и четности ядра Q_0 эту функцию можно представить в виде

$$b(s_0, s) = Q_0[\gamma(s_0), \gamma(s); q(s_0, s)], \quad q(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0}.$$

Как и при доказательстве леммы 2.4.1, убеждаемся, что функция q принадлежит $C^\nu([0, 1] \times [0, 1])$ и по модулю отграничена от нуля. Поэтому остается применить к функции $Q_0[\gamma(s_0), \gamma(s); q(s_0, s)]$ лемму 3.1.2. □

В дальнейшем потребуется также и пространство $C_0^{\nu(m)}(G, F; \mathcal{H}_\lambda)$, которое по отношению к весовому пространству $C_0^\nu(G, F)$ нулевого порядка вводится совершенно аналогично предыдущему. Можно также при его определении действовать аналогично пункту 2.8, исходя из $C^{\nu(m)}(G, \mathcal{H}_\lambda)$ и пространства $C_0^{\nu(m)}(G, \mathcal{H}_\lambda)$, которое по отношению к однородному пространству $C_0^\nu(G)$ пункта 2.7 вводится, как выше. Нетрудно видеть, что оба эти способа эквивалентны и приводят к одному и тому же пространству.

Отметим, что теорема 2.7.1 сохраняет свою силу и для однородного пространства $C_0^{\nu(m)}(G, \mathcal{H}_\lambda)$. В этом легко убедиться, если в рассуждениях доказательства этой теоремы неравенства для норм получить для фиксированного ξ, а затем брать sup по $\xi \in \Omega$ сначала в правой части этих неравенств, а затем в левой их части.

3.2. Интегралы со слабой особенностью

Однородные функции естественным образом выступают в интегралах в качестве ядер специального типа. Проиллюстрируем их на примере интегралов со слабой особенностью, рассмотренных в пункте 1.9.

Пусть заданы компакт $G \subseteq \mathbb{R}^k$ и функция $q(x, y)$, удовлетворяющая условиям

$$q(x, y) \in C^\nu(G \times G), \quad q(x, x) \equiv 0, \tag{3.2.1}$$

с некоторым $0 < \nu < 1$. Рассмотрим интеграл

$$\psi(x) = \int\limits_G \frac{q(x,y)}{|y-x|^k}\varphi(y)dy, \ x \in G. \tag{3.2.2}$$

Поскольку $|q(x,y)| \leqslant [q]_\nu |x-y|^\nu$, ядро $q(x,y)|x-y|^{-k}$ суммируемо по y. Очевидно, функция $Q(x,y,\xi) = q(x,y)|\xi|^{-k}$ принадлежит классу $C^{\nu(1)}(G\times G, \mathcal{H}_{-k})$ и обращается тождественно в нуль при $x=y$. На основании теоремы 3.1.1 верно и обратное: если $Q(x,y,\xi) \in C^{\nu(1)}(G\times G, \mathcal{H}_{-k})$ и

$$Q(x,x,\xi) = 0, \quad x \in G, \tag{3.2.3}$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^k$, то $Q(x,y,\xi) = q(x,y)|\xi|^{-k}$ с функцией $q(x,y) = Q(x,y;y-x)|y-x|^{-k}$, удовлетворяющей (3.2.1). Таким образом, в принятом предположении равенство

$$\psi(x) = \int\limits_G Q(x,y,y-x)\varphi(y)dy, \quad x \in G, \tag{3.2.4}$$

может быть записано в форме (3.2.1).

Как установлено в пункте 1.9, интегральный оператор, действующий по формуле (3.2.1), компактен в пространстве $C(G)$ непрерывных функций. В действительности можно утверждать больше.

Теорема 3.2.1. *Пусть ядро* $Q \in C^{\nu(1)}(G\times G, \mathcal{H}_{-k})$ *и удовлетворяет условию* (3.2.3). *Тогда для любой ограниченной функции* φ *равенство* (3.2.4) *определяет функцию* $\psi \in C^\mu(G)$, $0 < \mu < \nu$, *с оценкой нормы*

$$|\psi|_{C^\mu} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}|\varphi|_0, \tag{3.2.5}$$

где для фиксированных μ *и* ν *постоянная* $C > 0$ *зависит только от диаметра* R *компакта* G.

Доказательство. Как отмечено выше, в силу теоремы 3.1.1 имеем оценку $|Q(x,y;y-x)| \leqslant C_0|y-x|^{\nu-k}$, откуда

$$|\psi|_0 \leqslant C|Q|_{C^{\nu(0)}}|\varphi|_0 \tag{3.2.6}$$

с постоянной

$$C = C_0 \int\limits_{|z|\leqslant R} |z|^{\nu-k}dz.$$

Таким образом, дело сводится к оценке полунормы $[\psi]_\mu$. Для любой функции $Q \in C^\nu(G\times G, \mathcal{H}_k)$ согласно (3.1.7) и лемме 3.1.1 имеем неравенства

$$\begin{gathered} |Q_0(\xi)| \leqslant |Q|_{C^{\nu(0)}}|x_1-x_2|^\nu|\xi|^{-k}, \quad Q_0(\xi) = Q(x_1,y;\xi) - Q(x_2,y;\xi); \\ |Q_0(\xi_1) - Q_0(\xi_2)| \leqslant M|Q|_{C^{\nu(1)}}|x_1-x_2|^\nu|\xi_1-\xi_2|(|\xi_1|^{-k-1} + |\xi_2|^{-k-1}). \end{gathered} \tag{3.2.7}$$

Полагая $x_1 = x, \ x_2 = y$, с учетом (3.2.3) отсюда

$$\begin{gathered} |Q(x,y,\xi)| \leqslant |Q|_{C^{\nu(0)}}|x-y|^\nu|\xi|^{-k}, \\ |Q(x,y,\xi_1) - Q(x,y,\xi_2)| \leqslant M|Q|_{C^{\nu(1)}}|x-y|^\nu|\xi_1-\xi_2|(|\xi_1|^{-k-1} + |\xi_2|^{-k-1}). \end{gathered} \tag{3.2.8}$$

Дальнейшие рассуждения осуществляются по той же схеме, что и в теореме 3.1.1. Зафиксируем две различные точки $x_1, x_2 \in G$, обозначим $\delta = |x_1 - x_2|$ и положим $G_\delta = \{y \in G, \ |y - x_1| \leqslant 2\delta\}$. Тогда

$$\psi(x_1) - \psi(x_2) = \int\limits_G [Q(x_1,y,y-x_1) - Q(x_2,y,y-x_2)]\varphi(y)dy = \Delta_1 + \Delta_2, \tag{3.2.9}$$

где Δ_1 отвечает интегралу по G_δ. На основании (3.2.7), (3.2.8) имеем оценки

$$|\Delta_1| \leqslant |\varphi|_0|Q|_{C^{\nu(0)}}I_1(\delta), \quad |\Delta_2| \leqslant |\varphi|_0|Q|_{C^{\nu(0)}}I_2'(\delta) + M|\varphi|_0|Q|_{C^{\nu(1)}}I_2''(\delta), \tag{3.2.10}$$

с интегралами

$$I_1(\delta)=\int\limits_{G_\delta}(|y-x_1|^{\nu-k}+|y-x_2|^{\nu-k})d_ky,\ I_2'(\delta)=\delta^\nu\int\limits_{G\setminus G_\delta}|y-x_1|^{-k}d_ky,$$
$$I_2''(\delta)=\delta\int\limits_{G\setminus G_\delta}|y-x_2|^\nu(|y-x_1|^{-k-1}+|y-x_2|^{-k-1})]d_ky. \tag{3.2.11}$$

Поскольку $|y-x_1|\leqslant 2\delta$ влечет $|y-x_2|\leqslant 3\delta$, имеем очевидные неравенства

$$I_1(\delta)\leqslant\int\limits_{|y-x_1|\leqslant 3\delta}|y-x_1|^{\nu-k}d_ky+\int\limits_{|y-x_2|\leqslant 3\delta}|y-x_2|^{\nu-k}d_ky\leqslant C_1\delta^\nu,$$

где постоянная $C_1>0$ зависит только от k и ν.

При $|y-x_1|\geqslant 2\delta$ можно воспользоваться неравенствами (3.1.13), согласно которым

$$I_2'(\delta)+I_2''(\delta)\leqslant\delta^\nu\int\limits_{2\delta\leqslant|y-x_1|\leqslant R}|y-x_1|^{-k}d_ky+\delta M2^{k+2}\int\limits_{\delta\leqslant|y-x_2|}|y-x_2|^{\nu-k-1}d_ky,$$

что дает оценку $I_2'(\delta)+I_2''(\delta)\leqslant C_2\delta^\nu(1+|\ln\delta|)$, где, как и выше, постоянная $C_2>0$ зависит только от k и ν. Подставляя эти оценки в (3.2.10), в соответствии с (3.2.9) получим неравенство

$$[\psi]_\mu\leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}|\varphi|_0, \tag{3.2.12}$$

которое совместно с (3.2.6) завершает доказательство (3.2.5).

Заметим, что интеграл (3.2.4) с ядром $Q\in C^{\nu(1)}(G\times G,\mathcal{H}_{-\alpha})$ при $\alpha<k$ охватывается теоремой 3.2.1. В самом деле, функция $Q_1(x,y,\xi)=|x-y|^{k-\alpha}|\xi|^{\alpha-k}Q(x,y,\xi)$ принадлежит классу $C^{\nu_1(1)}(G\times G,\mathcal{H}_{-k})$ с показателем $\nu_1=\min(k-\alpha,\nu)$ и, очевидно, $Q(x,y,y-x)=Q_1(x,y,y-x)$. Поэтому остается воспользоваться оценкой (3.2.5) с $\mu<\nu_1$. $\square$

Из теоремы 3.2.1 следует, что оператор $T(q)$, определяемый интегралом (3.2.2), ограничен в $C^0\to C^\nu$. Поскольку вложение $C^\nu\subseteq C^\mu$ компактно при $\mu<\nu$, этот оператор компактен $C^0\to C^\mu$ и, в частности, компактен в пространстве $C^\mu(G)$. Таким образом, для любого $\lambda\in\mathbb{C}$ оператор $1-\lambda T(q)$ фредгольмов в этом пространстве. При этом любое решение $\varphi\in C(G)$ уравнения $\varphi+\lambda T(q)\varphi=f$ с правой частью $f\in C^\mu(G)$ также принадлежит $C^\mu(G)$.

Как и в пункте 1.9, проверяется, что $T(p)T(q)=T(p*q)$ с функцией

$$(p*q)(x,y)=|x-y|^k\int\limits_G\frac{p(x,z)q(z,y)}{|x-z|^k\,|y-z|^k}dz,\quad x\neq y,$$

которая вместе с p,q удовлетворяет условиям (3.2.3). Лемма 1.9.2 сохраняет свою силу и для рассматриваемого билинейного отображения в классе (3.2.1). В результате аналогично пункту 1.9 приходим к следующему аналогу теоремы 1.9.1.

Теорема 3.2.2. *Существует такое дискретное* (*не более чем счетное*) *множество* $\Lambda\subseteq\mathbb{C}$, *что оператор* $1-\lambda T(q)$ *обратим для всех* $\lambda\notin\Lambda$. *При этом* $[1-\lambda T(q)]^{-1}=1-T(r_\lambda)$, *где функция* $r_z(x,y)\in C^\nu(G\times G)$ *удовлетворяет условию* (3.2.1), *аналитична по* z *в открытом множестве* $\mathbb{C}\setminus\Lambda$ *и в точках* $\lambda\in\Lambda$ *допускает полюса.*

По аналогии с (3.2.4) рассмотрим интеграл

$$\psi(x)=\int\limits_\Gamma Q(x,y,y-x)\varphi(y)d_{k-1}y,\quad x\in\Gamma, \tag{3.2.13}$$

на гладкой $(k-1)$-мерной поверхности Γ, где ядро $Q(x,y;\xi)$ по переменной ξ принадлежит $\mathcal{H}_{1-k}$.

Теорема 3.2.3. *Пусть* $\Gamma\subseteq\mathbb{R}^k$ *является гладкой поверхностью с краем и ядро* $Q\in C^{\nu(1)}(\Gamma\times\Gamma,\mathcal{H}_{1-k})$ *удовлетворяет аналогичному* (3.2.3) *условию* $Q(y,y;\xi)=0,\ y\in\Gamma$. *Тогда для любой ограниченной функции* φ *на* Γ *равенство определяет функцию* $\psi\in C^\mu(\Gamma)$, $0<\mu<\nu$, *с оценкой* (3.2.5) *ее нормы, где постоянная* $C>0$ *зависит только от* Γ.

Доказательство. Пусть $\gamma : \overline{G} \to \Gamma$ — гладкая параметризация поверхности, где $G \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ — некоторая липшицева область. Согласно лемме 2.3.3 эта параметризация является M-липшицевым отображением, т. е. для некоторой постоянной $M \geqslant 1$ выполнены неравенства

$$|s-t|/M \leqslant |\gamma(s)-\gamma(t)| \leqslant M|s-t|. \tag{3.2.14}$$

С помощью этой параметризации дальнейшие рассуждения следуют схеме доказательства теоремы 3.2.1.

В силу теоремы 3.1.1 имеем неравенство $|Q(x,y;y-x)| \leqslant C_0|y-x|^{\nu-k+1}$, что дает оценку

$$|\psi(x)| \leqslant |\varphi|_0 C_0 \int\limits_{\Gamma} |x-y|^{\nu-k+1} dy. \tag{3.2.15}$$

Интеграл здесь оценивается постоянной, зависящей только от γ и диаметра R области G:

$$\int\limits_{\Gamma} |x-y|^{\nu-k+1} dy \leqslant M^{k-1-\nu} \int\limits_{G} |s-t|^{\nu-k+1} |m(t)| dt, \quad x=\gamma(s),$$

где ограниченная функция $|m(s)|$ определяется по γ, как в пункте 2.4.

Зафиксируем две различные точки $x_j=\gamma(s_j)\in G$, $j=1,2$, и по отношению к $\delta=|s_1-s_2|$, как и выше, положим $G_\delta=\{t\in G,\ |t-s_1|\leqslant 2\delta\}$. Тогда можно написать равенство (3.2.9), где роль G и G_δ играют, соответственно, $\gamma(G)$ и $\gamma(G_\delta)$. Из неравенств (3.2.7), (3.2.8), где k нужно заменить на $k-1$, выводим оценки (3.2.10) с интегралами (3.2.10), где k нужно заменить на $k-1$ и роль G_δ и $G\setminus G_\delta$ играют, соответственно, $\gamma(G_\delta)$ и $\gamma(G\setminus G_\delta)$. Для этих интегралов имеем оценки

$$I_1(\delta) \leqslant \int\limits_{|t-s_1|\leqslant 3\delta} |\gamma(t)-\gamma(s_1)|^{\nu-k+1}|m(t)|dt + \int\limits_{|t-s_2|\leqslant 3\delta} |\gamma(t)-\gamma(s_2)|^{\nu-k+1}|m(t)|dt,$$

$$I_2'(\delta)+I_2''(\delta) \leqslant \delta^\nu \int\limits_{2\delta\leqslant|t-s_1|\leqslant R} |\gamma(t)-\gamma(s_1)|^{-k+1}|m(t)|dt +$$

$$+\delta M 2^{k+2} \int\limits_{\delta\leqslant|t-s_2|} |\gamma(t)-\gamma(s_2)|^{\nu-k}|m(t)|dt,$$

что с учетом (3.2.14) аналогично предыдущему дает оценки

$$I_1(\delta)\leqslant C_1\delta^\nu, \quad I_2'(\delta)+I_2''(\delta)\leqslant C_2\delta^\nu(1+|\ln\delta|),$$

где постоянные C_j зависят только от γ и диаметра R области G. Подставляя их в соотношения (3.2.9), (3.2.10) для рассматриваемого случая, отсюда приходим к оценке (3.2.12), которая совместно с (3.2.14) завершает доказательство теоремы. □

Заметим, что теорема 3.2.3 сохраняет свою силу и для интегралов (3.2.12), рассматриваемых на гладкой замкнутой поверхности. Для этого достаточно выбрать конечное число поверхностей с краем Γ_j, $1\leqslant j\leqslant m$, таких что открытые поверхности $\Gamma_j\setminus\partial\Gamma_j$ покрывают Γ, и применить к Γ_j теоремы 2.1.1 и 3.2.3.

3.3. Понятие сингулярного интеграла

Пусть задано конечное число точек $a_1,\ldots,a_{n-1}$ открытого (возможно неограниченного) множества $D\subseteq\mathbb{R}^k$ и функция $f(x)\in L(D)$. С каждым набором $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ положительных чисел свяжем ограниченное множество $D_\varepsilon=\{x\in D,\ |x-a_j|>\varepsilon_j,\ j=1,\ldots,n-1,\ |x|<1/\varepsilon_n\}$. Тогда согласно пункту 1.8 существует предел

$$\int\limits_D f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{D_\varepsilon} f(x)dx. \tag{3.3.1}$$

Этот предел может существовать и в случае, когда функция f только локально суммируема на множестве $\overline{D}\setminus\{a_1,\ldots,a_{n-1}\}$. Тогда этот предел называется сингулярным интегралом (в смысле главного значения) в особых точках a_j и, если область D содержит внешность некоторого шара, в особой точке $a_n=\infty$.

Очевидно, сингулярный интеграл сохраняет элементарные свойства линейности и аддитивности. Последнее свойство здесь формулируется следующим образом: если открытые множества D_1 и D_2 не пересекаются, охватывают все точки a_j и $\overline{D}_1 \cup \overline{D}_2 = \overline{D}$, то сингулярный интеграл по D равен сумме интегралов по D_1 и D_2.

Замена переменных $x = \alpha(y)$ в сингулярном интеграле требует определенной осторожности, поскольку для особой точки $x = a$ образ множества $\{|x - a| > \varepsilon\}$, т. е. множество $\{y, |\alpha(y) - \alpha(a)| > \varepsilon\}$, уже не будет, вообще говоря, дополнением к шару. В силу аддитивности сингулярного интеграла этот вопрос достаточно рассмотреть для случая одной точки $a = 0$. Опишем ситуацию, когда подобная замена возможна в многомерном случае.

Теорема 3.3.1. *Пусть конечная область D содержит $x = 0$ и α осуществляет диффеоморфизм этой области на G, причем с точностью до постоянного множителя матрица Якоби $\alpha'(0)$ ортогональна. Пусть функция $f(x)$ непрерывна при $x \neq 0$ и допускает оценку*

$$|f(x)| \leqslant C|x|^{-k}. \tag{3.3.2}$$

Тогда сингулярный интеграл по области D с особой точкой $x = 0$ допускает замену переменных

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_G f[\alpha(y)]|\det \alpha'(y)|dy$$

в том смысле, что оба интеграла существуют одновременно и совпадают.

Доказательство. Для линейных преобразований $\alpha(x) = \lambda Ax$, где $\lambda > 0$ и матрица A ортогональна, утверждение леммы очевидно. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $\alpha(0) = 0$ и $\alpha'(0)$ является единичной матрицей. В этом случае $|\alpha(y)|/|y| \to 1$ при $y \to 0$, так что функции

$$\sigma_1(r) = \min_{|y|=r} |\alpha(y)|, \quad \sigma_2(r) = \max_{|y|=r} |\alpha(y)| \tag{3.3.3}$$

обладают аналогичным свойством, т. е.

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sigma_j(r)}{r} = 1. \tag{3.3.4}$$

Обозначая для краткости $g(y) = f[\alpha(y)]|\det \alpha'(y)|$, запишем

$$\int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_{|\alpha(y)|\geqslant\varepsilon} g(y)dy.$$

Положим $G_{\varepsilon,j} = \{y \in G,\ \sigma_j(|y|) \geqslant \varepsilon\}$, $j = 1, 2$, и заметим, что в силу (3.3.3)

$$G_{\varepsilon,1} \subseteq \{y \in G,\ |\alpha(y)| \geqslant \varepsilon\} \subseteq G_{\varepsilon,2}.$$

Поэтому достаточно убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{G_{\varepsilon,2}\setminus G_{\varepsilon,1}} g(y)dy = 0.$$

Очевидно, функция $g(y)$ допускает аналогичную (3.3.2) оценку, поэтому $g(y)$ можно заменить функцией $|y|^{-k}$ и дело сводится к доказательству равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\Delta(\varepsilon)} \frac{dr}{r} = 0,$$

где положено $\Delta(\varepsilon) = \{r \,|\, \sigma_1(r) \leqslant \varepsilon \leqslant \sigma_2(r)\}$. В обозначениях

$$\delta_j^-(\varepsilon) = \min\{r \mid \sigma_j(r) = \varepsilon\}, \quad \delta_j^+(\varepsilon) = \max\{r \mid \sigma_j(r) = \varepsilon\}, \tag{3.3.5}$$

можно записать $\Delta(\varepsilon) \subseteq [\delta_2^-(\varepsilon), \delta_1^+(\varepsilon)]$, так что

$$\int\limits_{\Delta(\varepsilon)} \frac{dr}{r} \leqslant \int\limits_{\delta_2^-(\varepsilon)}^{\delta_1^+(\varepsilon)} \frac{dr}{r}$$

и остается убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\delta_1^+(\varepsilon)}{\delta_2^-(\varepsilon)} = 1. \tag{3.3.6}$$

Опуская индекс j в обозначениях, в соответствии с определением (3.3.5) для $\sigma(r^\pm) = \varepsilon$ можно написать

$$\frac{\delta^\pm(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{r^\pm}{\sigma(r^\pm)}.$$

С учетом (3.3.4) отсюда $\delta^\pm(\varepsilon)/\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, что завершает доказательство (3.3.6) и теоремы. □

С помощью инверсии $x^* = x/|x|^2$ теорема 3.3.1 позволяет охватить и случай бесконечно удаленной точки ∞. В самом деле, пусть область D является окрестностью ∞ и отделена от точки $x = 0$. Поскольку при этой инверсии область $\{x \in D,\ |x| \geqslant 1/\varepsilon\}$ переходит в $y \in D^*,\ |y| \geqslant \varepsilon\}$, равенство

$$\int\limits_D f(x)dx = \int\limits_{D^*} f(y^*)|\det(y^*)'|dy$$

справедливо и для сингулярных интегралов. Матрица Якоби $(y^*)'$ имеет своими элементами частные производные

$$\frac{\partial(y_i|y|^{-2})}{\partial y_j} = |y|^{-2}M_{ij}(y), \quad M_{ij}(y) = \delta_{ij} - 2\frac{y_i y_j}{|y|^2}.$$

Очевидно, матрица M здесь симметрична, однородна степени 0, и ее квадрат совпадает с единичной матрицей. В частности, $\det(y^*)' = |y|^{-2k}$ и условие (3.3.2) для функции f в окрестности ∞ переходит в аналогичное условие для функции $f(y^*)\det(y^*)'$ в окрестности нуля.

Данное обстоятельство позволяет переформулировать теорему 3.3.1 и по отношению к особой точке $x = \infty$. Не останавливаемся на этом, отметим только, что в предположении (3.3.2) сингулярный интеграл допускает замену переменных относительно сдвигов $x \to x - a$ и растяжений $x \to \lambda x$, $\lambda > 0$, оставляющих точку ∞ неподвижной.

Обсудим достаточные условия на функцию f, обеспечивающие существование сингулярного интеграла. Очевидно, можно ограничиться случаем одной точки $a = 0$, принадлежащей области $D = \{|x| < 1\}$. Предположим, что функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = Q(x) + f_0(x), \quad f_0 \in L(D), \tag{3.3.7}$$

где однородная функция принадлежит $\mathcal{H}_{-k}$.

В силу однородности функции Q имеем равенство

$$\int\limits_{\varepsilon<|x|<1} Q(x)dx = \left(\int\limits_\Omega Q(\xi)d\xi\right)\int\limits_\varepsilon^1 r^{-1}dr.$$

Поэтому существование сингулярного интеграла (3.3.1) в этом случае равносильно равенству

$$\int\limits_\Omega Q(\xi)d_{k-1}\xi = 0, \tag{3.3.8}$$

и при его выполнении сингулярный интеграл от f совпадает с обычным интегралом от f_0. Здесь и ниже при рассмотрении интегралов на множествах различной размерности последняя при необходимости указывается явно.

Понятие сингулярного интеграла в двумерном случае введено Трикоми [79], в общем случае $k > 2$ — Михлиным [34].

Отметим, что если функция $\varphi \in C_0^\infty(D)$, то произведение $f\varphi$ может быть аналогично (3.3.7) разложено в сумму $\varphi(0)Q(x)+f_1(x)$ с суммируемой функцией $f_1(x) = \varphi(x)f_0(x)+[\varphi(x)-\varphi(0)]Q(x)$. Поэтому сингулярный интеграл

$$(f,\varphi) = \int\limits_D f(x)\varphi(x)dx$$

совпадает с интегралом от функции f_1. Отсюда непосредственно следует, что линейный функционал $u(\varphi) = (f, \varphi)$ непрерывен относительно сходимости в $C_0^\infty(D)$, введенной в пункте 1.8, т. е. является обобщенной функцией. Как и в случае регулярных обобщенных функций, этот функционал также отождествляется с f.

Если в (3.3.7) область D совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^k$, то аналогичные соображения показывают, что сингулярный интеграл от функции $Q(x)$ с особыми точками $x = 0$ и $x = \infty$ существует и равен нулю. С учетом замечания к теореме 3.3.1 аналогичное равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} Q(x-a)dx = 0 \tag{3.3.9}$$

справедливо и в случае особых точек $x = a$ и $x = \infty$.

В одномерном случае $k = 1$ условие (3.3.8) следует, очевидно, заменить на $Q(-1) = -Q(1)$, так что $Q(x) = Q(1)/x$.

Опишем несколько примеров выполнения условия (3.3.8).

Лемма 3.3.1. *Условие* (3.3.8) *выполнено для любой нечетной функции* $Q(\xi) \in \mathcal{H}_{1-k}$. *Если функция* Q *четна и удовлетворяет* (3.3.8), *то аналогичное условие*

$$\int\limits_{\Omega^+} Q(\xi)d_{k-1}\xi = 0, \tag{3.3.10}$$

выполнено для любой полусферы $\Omega^+ = \xi \in \Omega,\ \xi n > 0$, *где* n — *некоторый единичный вектор и* ξn *означает скалярное произведение.*

Условие (3.3.8) *выполнено также для частных производных* $Q = \partial Q^0/\partial \xi_i$ *функции* $Q^0(\xi) \in \mathcal{H}_{1-k}$, $k \geqslant 2$.

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно, поскольку в силу нечетности замена $\xi = -\xi'$ меняет знак интеграла (3.3.8). Если функция Q четна, то

$$\int\limits_{\Omega} Q(\xi)d\xi = \int\limits_{\Omega^+} Q(\xi)d_{k-1}\xi + \int\limits_{\Omega^-} Q(\xi)d_{k-1}\xi = 2\int\limits_{\Omega^+} Q(\xi)d_{k-1}\xi,$$

что доказывает (3.3.10).

Что касается последнего утверждения леммы, то по формуле Грина из пункта 1.8 можно записать

$$\int\limits_{1<|\xi|<2} Q(\xi)d\xi = \int\limits_{\Omega_1} Q^0(\xi)\frac{\xi_i}{|\xi|}d_{k-1}\xi - \int\limits_{\Omega} Q^0(\xi)\frac{\xi_i}{|\xi|}d_{k-1}\xi,$$

где Ω_1 означает сферу $|\xi| = 2$. При замене $\xi = 2\xi'$, $\xi' \in \Omega$ с учетом соотношений $d_{k-1}\xi = 2^{k-1}\xi$ и $Q^0(2\xi') = 2^{1-k}Q^0(\xi')$ интеграл по Ω_1 переходит в соответствующий интеграл по Ω. Поэтому правая часть предыдущего равенства равна нулю. Остается заметить, что левая его часть преобразуется к виду

$$\left(\int\limits_{\Omega} Q(\xi)d\xi\right)\int\limits_1^2 r^{-1}dr.$$

□

Рассмотрим функции Q со свойством (3.3.10) более подробно.

Лемма 3.3.2. *Пусть функция* $Q \in \mathcal{H}_{-k}$ *удовлетворяет условию* (3.3.10) *по отношению к некоторому вектору* n *и* $P^\pm(n) = \{x \in \mathbb{R}^k,\ \pm xn > 0\}$. *Тогда для* $x \in P^-$ *сингулярный интеграл*

$$H(x) = \int\limits_{P^+} Q(y-x)dy, \quad x \in P^-, \tag{3.3.11}$$

с особой точкой ∞ существует и не зависит от x. При этом

$$\int\limits_{P^+} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y-x)dy = 0, \quad x \in P^-. \tag{3.3.12}$$

Доказательство. С использованием условия (3.3.10) убеждаемся аналогично предыдущему, что сингулярный интеграл от функции Q по области P^+ с особыми точками 0 и ∞ существует и равен нулю. Это же верно и по отношению к сингулярному интегралу (3.3.11). Преобразования $x \to x - a$, $an = 0$, и $x \to \lambda x$, $\lambda > 0$ оставляют полупространство P^+ инвариантным. Поэтому из тех же соображений выводим соотношения

$$H(x) = H(x-a), \quad H(x) = H(\lambda x),$$

которые возможны только для постоянной функции H, ее постоянное значение обозначим также H. Зафиксируем точку $a \in P_-$, тогда в силу леммы 3.1.1 функция $Q(y-x) - Q(y-a)$ интегрируема на P^+ и постоянную функцию

$$\int\limits_{P_+} [Q(y-x) - Q(y-a)]dy, \quad x \in P^-,\ x \neq a,$$

можно дифференцировать под знаком интеграла. В результате получим равенство (3.3.12). □

Сингулярные интегралы можно также рассматривать и на гладкой поверхности $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^k$ (кривой при $k = 2$).

Лемма 3.3.3. *Пусть гладкая $(k-1)$-мерная поверхность $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^k$ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и задано ядро $Q(y;\xi) \in C^{\nu(1)}(\Gamma, \mathcal{H}_{1-k})$, нечетное по переменной ξ. Тогда сингулярный интеграл*

$$\psi(a) = \int\limits_{\Gamma} Q(y, y-a)d_{k-1}y, \quad a \in \Gamma,$$

который аналогично предыдущему понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов, взятых по $\Gamma \cap \{|y-a| \leqslant \varepsilon\}$, существует.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что Γ является гладкой поверхностью с краем и a — ее внутренняя точка. Пусть $\rho > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4.1 по отношению к этой точке. Согласно этой теореме пересечение Γ с окрестностью $C_\rho(a)$ описывается в локальных координатах уравнением $u_k = f(\tilde{u})$, $|\tilde{u}| \leqslant \rho$ с непрерывно дифференцируемой функцией f в шаре $B_\rho = \{|s| \leqslant \rho\} \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$, удовлетворяющей условиям

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad |f'|_0 \leqslant 1. \tag{3.3.13}$$

Напомним, что ось u_k в локальной системе координат с началом в точке a направлена вдоль нормали к Γ в этой точке. Переход к этой системе координат можно осуществить с помощью ортогональной матрицы $U \in \mathbb{R}^{k\times k}$ равенством $x - a = U(\tilde{u}, u_k)$. В соответствии с этим поверхность $\Gamma(a) = \Gamma \cap C_\rho(a)$ описывается параметрическим уравнением $\gamma(s) = a + U(s, f(s))$, где s меняется в шаре B_ρ.

Покажем, что допустима формула

$$\int\limits_{\Gamma(a)} Q(a, y-a)dy = \int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}[s, f(s)]|m(s)|ds \tag{3.3.14}$$

замены переменных в сингулярных интегралах, где положено $\widetilde{Q}(\xi) = Q(a, U\xi)$ и в рассматриваемом случае $|m(s)| = \sqrt{1 + |f'(s)|^2}$. Строго говоря, теорема 3.3.1 для обоснования этой замены не совсем применима, поскольку отображение $\gamma(s) = a + U[s, f(s)]$ действует из $\mathbb{R}^{k-1}$ в $\mathbb{R}^k$. Однако данное отображение обладает свойством

$$\lim_{s\to 0} \frac{|\gamma(s) - a|}{|s|} = 1,$$

которое единственно и использовалось при ее доказательстве. Поэтому эта теорема сохраняет свою силу и для обоснования (3.3.14).

Что касается сингулярного интеграла в правой части (3.3.14), то согласно теореме 2.4.1 условие $\Gamma \in C^{1,\nu}$ влечет $f \in C^{1,\nu}(B_\rho)$. Совместно с (3.3.13) и леммой 3.1.1 отсюда легко следует, что функция $\widetilde{Q}[s, f(s)] - \widetilde{Q}(s, 0)$ суммируема в шаре B_ρ. Поэтому остается воспользоваться нечетностью функции $\widetilde{Q}$ и леммой 3.3.1. □

3.4. C^{μ}-ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим в конечной области $D \subseteq \mathbb{R}^k$ сингулярный интеграл

$$\psi(x) = \int_D Q(y, y - x)\varphi(y)dy, \ x \in D, \tag{3.4.1}$$

ядро $Q(y, \xi)$ которого по переменной ξ принадлежит $\mathcal{H}_{-k}$ и подчинено условию

$$\int_\Omega Q(x, \xi)d\xi = 0, \quad x \in D, \tag{3.4.2}$$

Предварительно остановимся на случае $\varphi = 1$.

Лемма 3.4.1. *Пусть ядро $Q(y, \xi)$ принадлежит классу $C^{\nu(1)}(D, \mathcal{H}_{-k})$ и по переменной ξ подчинено условию* (3.3.8). *Тогда для замкнутой подобласти $\overline{D}_0 \subseteq D$ сингулярный интеграл*

$$q(x) = \int_D Q(y, y - x)dy, \quad x \in D_0, \tag{3.4.3}$$

определяет функцию $q(x) \in C^{\mu}(D_0)$, $0 < \mu < \nu$, с оценкой

$$|q|_{C^{\mu}(D_0)} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}} \tag{3.4.4}$$

своей нормы, где постоянная $C > 0$ зависит только от расстояния от D_0 до ∂D.

Доказательство. Проведем доказательство сначала в предположении, что функция $Q(y, \xi)$ не зависит от y. Согласно (3.3.9) функцию q можно переписать в форме

$$q(x) = -\int_{\mathbb{R}^k \setminus D} Q(y - x) - Q(y - a)dy + \int_D Q(y - a)dy, \quad x \in D_0,$$

с фиксированной точкой $a \in D \setminus \overline{D}_0$. В силу леммы 3.1.1 функция $Q(y - x) - Q(y - a)$ интегрируема на $\mathbb{R}^k \setminus D$ и, следовательно, функцию $q(x)$ в этом равенстве можно дифференцировать под знаком интеграла. На основании теоремы 2.2.2 отсюда приходим к оценке

$$|q|_{0,D_0} + |q|_{1,D_0} \leqslant C|Q|_{(1)}. \tag{3.4.5}$$

Обратимся к общему случаю и для $x_1, x_2 \in D$ запишем

$$q(x_1) - q(x_2) = \int_D [Q(x_1, y - x_1) - Q(x_2, y - x_1)]dy +$$

$$+ \int_D [Q(x_2, y - x_1) - Q(x_2, y - x_2)]dy = \Delta_0 + \Delta_1.$$

Применяя к $Q_0(\xi) = Q(x_1, y - x_1) - Q(x_2, y - x_1)$ и $Q_1(\xi) = Q(x_2, \xi)$ оценку (3.4.5), получим:

$$|\Delta_0| \leqslant C|Q_0|_{(1)}, \quad |\Delta_1| \leqslant C|Q_1|_{(1)}|x_1 - x_2|.$$

В силу (3.1.7) имеем неравенство $|Q_0|_{(1)} \leqslant |Q|_{C^{\nu(1)}}|x_1 - x_2|^{\nu}$ и, очевидно, $|Q_1|_{(1)} \leqslant |Q|_{C^{0(1)}}$. Отсюда оценка (3.4.4) получается непосредственно. □

Теорема 3.4.1. *Пусть ядро $Q(y, \xi) \in C^{\nu(1)}(D, \mathcal{H}_{-k})$ удовлетворяет условию* (3.4.2) *и $\varphi \in C^{\mu}(D)$, $0 < \mu < \nu$. Тогда для замкнутой подобласти $\overline{D}_0 \subseteq D$ сингулярный интеграл* (3.4.1) *определяет функцию $\phi(x) \in C^{\mu}(D_0)$ с оценкой норм*

$$|\psi|_{C^{\mu}(D_0)} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}|\varphi|_{C^{\mu}}, \tag{3.4.6}$$

где при фиксированных μ, ν постоянная $C > 0$ зависит только от расстояния от D_0 до ∂D.

Если дополнительно ядро $Q(u,y,\xi)$ зависит от параметра $u \in G$, принадлежит пространству $C^{\nu(1)}(G \times D, \mathcal{H}_{-k})$ и для всех u, y удовлетворяет условию (3.4.2)*, то соответствующая функция*

$$\psi(u,x) = \int\limits_D Q(u,y,y-x)\varphi(y)dy, \;\; x \in D_0, \tag{3.4.7}$$

принадлежит $C^\mu(G \times D_0)$ с аналогичной (3.4.6) *оценкой норм.*

Доказательство. Представим интеграл (3.4.1) в виде суммы $\psi_0(x) + q(x)\varphi(x)$, где q фигурирует в (3.4.3) и ψ_0 определяется обычным интегралом по формуле

$$\psi_0(x) = \int\limits_D Q(y,y-x)[\varphi(y) - \varphi(x)]dy, \;\; x \in D_0,$$

В соответствии с леммой 3.4.1 оценку (3.4.6) достаточно установить по отношению к ψ_0. Поскольку $|\varphi(y) - \varphi(x)| \leqslant [\varphi]_\mu |x-y|^\mu$, для sup-нормы этой функции имеем оценку

$$|\psi_0|_{0,D_0} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(0)}}[\varphi]_\mu. \tag{3.4.8}$$

Для x_1, $x_2 \in D_0$ положим $\delta = |x_1 - x_2|$ и запишем

$$\psi_0(x_1) - \psi_0(x_2) = q(x_1)[\varphi(x_2) - \varphi(x_1)] + \Delta,$$

$$\Delta = \int\limits_D [Q(x_1, y-x_1) - Q(x_2, y-x_2)][\varphi(y) - \varphi(x_2)]dy = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где Δ_j имеют тот же смысл, что и при доказательстве теоремы 3.2.1 по отношению к $D_\delta = \{y \in D, \;\; |y - x_1| \leqslant 2\delta\}$. Для слагаемых Δ_j можно повторить соответствующие рассуждения доказательства этой теоремы. В частности, для этих слагаемых имеем аналогичные (3.2.10) оценки

$$|\Delta_1| \leqslant [\varphi]_\mu |Q|_{C^{\nu(0)}} I_1(\delta), \quad |\Delta_2| \leqslant |\varphi|_0 |Q|_{C^{\nu(0)}} I_2'(\delta) + M|\varphi|_0|Q|_{C^{\nu(1)}} I_2''(\delta),$$

с интегралами

$$I_1(\delta) = \int\limits_{D_\delta} |y-x_2|^\mu (|y-x_1|^{-k} + |y-x_2|^{-k}) d_k y, \;\; I_2'(\delta) = \delta^\nu \int\limits_{D \setminus D_\delta} |y-x_1|^{-k} d_k y,$$

$$I_2''(\delta) = \delta \int\limits_{D \setminus D_\delta} |y-x_2|^\mu (|y-x_1|^{-k-1} + |y-x_2|^{-k-1})] d_k y.$$

Как и при доказательстве теоремы 3.2.1, отсюда приходим к оценке

$$[\psi_0]_\mu \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}[\varphi]_\mu,$$

которая совместно с (3.4.8) завершит доказательство (3.4.6).

Второе предложение теоремы по существу является следствием оценки (3.4.6). В самом деле, при фиксированном u эта оценка означает, что

$$|\psi(u,x_1) - \psi(u,x_2)| \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}} |\varphi|_{C^\mu} |x_1 - x_2|^\mu.$$

С другой стороны, для различных точек $u_1, u_2 \in G$ на основании леммы 2.1.2 функция

$$\tilde{Q}(y,\xi) = |u_1 - u_2|^{-\mu}[Q(u_1,y,\xi) - Q(u_2,y,\xi)]$$

принадлежит классу $C^{\nu-\mu,(1)}$. Пусть $\tilde{\psi}(x)$ определяется по отношению к $\tilde{Q}$ аналогично (3.4.1). Тогда

$$\tilde{\psi}(x) = |u_1 - u_2|^{-\mu}[\psi(u_1,x) - \psi(u_2,x)]$$

и к этой функции можно применить первую часть теоремы 3.4.1, в которой роль ν и μ играют, соответственно, $\tilde{\nu} = \nu - \mu$ и $\tilde{\mu} < \min(\nu - \mu, \mu)$. В частности, справедлива соответствующая оценка для ее sup-нормы, равномерная по u_1, u_2, что и завершает доказательство теоремы. □

Опишем случай, когда возможно дифференцирование функции (3.4.7) под знаком интеграла.

Лемма 3.4.2. *Пусть в условиях теоремы* 3.4.1 *множество* G *является подобластью* $\mathbb{R}^s$, *ядро* $Q(u, y, \xi)$ *непрерывно дифференцируемо по переменной* u *и вместе со своими частными производными* Q'_u *принадлежит* $C^{\nu(1)}(G \times D)$. *Тогда для* $\varphi \in C^{\mu}(D)$, $0 < \mu < \nu$, *равенство* (3.4.7) *можно дифференцировать под знаком интеграла*:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_i}(u, x) = \int\limits_D \frac{\partial Q}{\partial u_i}(u, y, y - x)\varphi(y)dy, \; x \in D_0.$$

В частности, функция $\partial \psi / \partial u_i$ *принадлежит* $C^{\mu}(G \times D_0)$ *с аналогичной* (3.4.6) *оценкой норм.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать G интервалом действительной прямой. Пусть $\varepsilon_n \to 0$ и для фиксированного u положим

$$Q_n(y, \xi) = \varepsilon_n^{-1}[Q(u + \varepsilon_n, y, \xi) - Q(u, y, \xi)] - Q'_u(u, y, \xi) =$$
$$= \int\limits_0^1 [Q'_u(u + t\varepsilon_n, y, \xi) - Q'_u(u, y, \xi)]dt.$$

При фиксированном $\xi \in \Omega$ выражение в квадратных скобках под интегралом ограничено в $C^{\nu}(D)$ и равномерно по ξ стремится к нулю при $n \to \infty$. Аналогичным свойством обладают и производные по ξ_i этой последовательности. Поэтому согласно теореме 2.1.1 последовательность $Q_n \to 0$ в $C^{\mu(1)}(D)$ при $\mu < \nu$ и, в частности, на основании теоремы 3.4.1

$$\int\limits_D Q_n(y, y - x)\varphi(y)dy \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тем самым формула дифференцирования обоснована. По условию функция Q удовлетворяет соотношению

$$\int\limits_{\Omega} Q(u, y, \xi)d\xi = 0$$

тождественно по u и y. Это соотношение можно продифференцировать по u, так что аналогичное (3.4.2) условие выполнено и для ядра Q'_u. На основании теоремы 3.4.1 отсюда следует, что производная ψ'_u принадлежит $C^{\mu}(D_0)$. □

В одномерном случае теорема 3.4.1 принадлежит И. И. Привалову [43], в многомерном случае — Ж. Жиро [75]. При этом ядро сингулярного интеграла (3.3.1) обычно записывают в форме

$$Q(x, y; \xi) = \frac{Q_0(x, y, \xi)}{|\xi|^k},$$

где функция Q_0 однородна степени нуль по переменной ξ. Последнюю функцию называют характеристикой сингулярного интеграла [77].

По отношению ко всей области D в одномерном случае $k = 1$ теорема 3.4.1, вообще говоря, не имеет места. Проиллюстрируем этот факт на примере функции (3.4.3). Область D здесь представляет собой некоторый интервал (a, b) действительной оси, а ядро $Q(x; \xi)$ можно записать в форме $c(x)/\xi$ с $c(x) = Q(x; 1) \in C^{\nu}([a, b] \times [a, b]$.

В самом деле, роль единичной сферы Ω здесь играет двухточечное множество $\{\pm 1\}$ и условие (3.4.2) переходит в равенство $Q(x; 1) + Q(x; -1) = 0$. Другими словами, функция $Q(x; \xi)$ нечетна по ξ и, следовательно, имеет вид ядра Коши $Q(x; \xi) = Q(x; 1)\xi^{-1}$. Таким образом,

$$q(x) = c(x) \int\limits_a^b \frac{dy}{y - x}, \quad a < x < b.$$

По определению сингулярного интеграла имеем:

$$\int\limits_a^b \frac{dy}{y - x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_a^{x-\varepsilon} + \int\limits_{x+\varepsilon}^b \right) \frac{dy}{y - x} = \ln \frac{b - x}{x - a},$$

так что при $c(a) \neq 0$ функция q имеет логарифмическую особенность в точке a.

Как будет установлено ниже в теореме 3.5.1, в многомерном случае $k > 1$ при определенных предположениях относительно ядра Q и гладкости границы области D теорему 3.4.1 можно распространить на всю область $D_0 = D$. В случае $D = \mathbb{R}^k$ этот факт легко вывести из теоремы 3.4.1, если под знак интеграла (3.4.1) ввести множитель $\chi(y-x)$, где функция $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$.

Теорема 3.4.2. *Пусть $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ и ядро $Q(y,\xi) \in C^{\nu(1)}(\mathbb{R}^k, \mathcal{H}_{-k})$ удовлетворяет условию* (3.4.2). *Тогда сингулярный оператор*

$$(R\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} \chi(y-x)Q(y,y-x)\varphi(y)dy, \; x \in \mathbb{R}^k,$$

ограничен в пространстве $C^\mu(\mathbb{R}^k)$, $0 < \mu < \nu$.

Доказательство. Оно почти очевидно. Пусть носитель функции $\chi(x)$ содержится в шаре $|x| \leqslant R$. Тогда при $|x-a| \leqslant R$, где точка $a \in \mathbb{R}^k$ фиксирована, интеграл $(R\varphi)(x)$ можно записать в виде суммы

$$\int\limits_{|y-a|\leqslant 2R} [\chi(y-x) - \chi(0)]Q(y,y-x)\varphi(y)dy + \chi(0) \int\limits_{|y-a|\leqslant 2R} Q(y,y-x)\varphi(y)dy,$$

и на основании теорем 3.2.1 и 3.4.1 приходим к оценке

$$|R\varphi|_{C^\mu(B_1)} \leqslant C|R\varphi|_{C^\mu(B_2)},$$

где B_1 и B_2 означают шары, соответственно, $\{|x-a| \leqslant R\}$ и $\{|x-a| \leqslant 2R\}$, а постоянная $C > 0$ не зависит от a. Утверждение теоремы получается отсюда непосредственно. □

Полученный результат часто называют теоремой Корна—Жиро [4]).

3.5. Продолжение. Оценки вплоть до границы

Пусть подобласть $D_0 \subseteq D$ примыкает к гладкому участку Γ границы области D и по терминологии пункта 2.4 лежит по одну сторону от данного участка. Напомним, что это понятие определяется по отношению к выбранной единичной нормали $n(y) \in C(\Gamma)$ поверхности Γ. Аналогичным образом вектор нормали $n(y)$ разбивает единичную сферу $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ на полусферы $\Omega^\pm(y)$, состоящие из всех $\xi \in \Omega$, для которых скалярное произведение $\pm\xi n(y) \geqslant 0$.

Теорема 3.5.1. *Пусть граница конечной области D содержит гладкую поверхность с краем $\Gamma \in C^{1,\nu}$, по отношению к которой D лежит по одну сторону, и подобласть $D_0 \subseteq D$ такова, что $\Gamma_0 = \overline{D}_0 \cap \partial D \subseteq \Gamma \setminus \partial\Gamma$. Пусть ядро $Q(y,\xi) \in C^{\nu(2)}(D, \mathcal{H}_{-k})$ и в дополнение к* (3.4.2) *в граничных точках удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\Omega^+(y)} Q(y,\xi)d_{k-1}\xi = 0, \quad y \in \Gamma. \tag{3.5.1}$$

Тогда для $\varphi \in C^\mu(D)$, $0 < \mu < \nu$, функция ψ, определяемая интегралом (3.4.1)*, в области D_0 принадлежит классу $C^\mu(D_0)$ и допускает оценку*

$$|\psi|_{C^\mu} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(2)}}|\varphi|_{C^\mu} \tag{3.5.2}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от расстояния от области D_0 до $\partial D \setminus \Gamma$.

Доказательство. По теореме 2.3.2 существует ограниченный оператор продолжения $P : C^\mu(D) \to C^\mu(\mathbb{R}^k)$, а также на основании леммы 3.1.3 существует ограниченный оператор продолжения $P^1 : C^{\nu(1)}(D) \to C^{\nu(1)}(\mathbb{R}^k)$. Эти продолжения рассмотрим в конечной области D^1, содержащей область D вместе со своим замыканием. Полагая $\varphi^1 = P\varphi$ и $Q^1 = P^1 Q$, имеем таким образом соотношения $\varphi^1(y) = \varphi(y)$, $Q^1(y;\xi) = Q(y;\xi)$, $y \in D$ и соответствующие оценки

$$|\varphi^1|_{C^\mu} \leqslant C^1|\varphi|_{C^\mu}, \quad |Q^1|_{C^{\nu(2)}} \leqslant C^1|Q|_{C^{\nu(2)}}. \tag{3.5.3}$$

Очевидно, функцию ψ в области D_0 можно представить в виде разности двух интегралов

$$\psi^0(x) = \int\limits_{D^1} Q^1(y,y-x)\varphi^1(y)dy, \quad \psi^1(x) = \int\limits_{D^1\setminus D} Q^1(y,y-x)\varphi^1(y)dy, \quad x \in D_0,$$

из которых второй из них понимается в обычном смысле. По отношению к ψ^0 и паре D_0, D^1 условия теоремы 3.4.1 выполнены и, следовательно,

$$|\psi^0|_{C^\mu(D_0)} \leqslant C|Q^1|_{C^{\nu(1)}}|\varphi^1|_{C^\mu(D^1)}.$$

Поэтому с учетом (3.5.2) дело сводится к доказательству аналогичной оценки

$$|\psi^1|_{C^\mu(D_0)} \leqslant C|Q^1|_{C^{\nu(2)}}|\varphi^1|_{C^\mu(D^1\setminus D)} \tag{3.5.4}$$

для функции ψ^1.

Очевидно, функцию $\psi^1(x)$ можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial\psi^1}{\partial x_i}(x) = -\int\limits_{D^1\setminus D} Q_i(y, y-x)\varphi^1(y)dy, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

где для краткости положено $Q_i(y,\xi) = \partial Q^1/\partial\xi_i \in C^{\nu(1)}(D^1, \mathcal{H}_{-k-1})$.

Покажем, что частные производные функции ψ^1 допускают оценку

$$\left|\frac{\partial\psi^1}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant M|Q_i|_{C^{\nu(1)}}|\varphi^1|_{C^\mu} d^{\mu-1}(x,\Gamma), \quad x \in D_0, \tag{3.5.5}$$

где постоянная $M > 0$ зависит только от расстояния от области D_0 до $\partial D \setminus \Gamma$. Тогда с учетом очевидного неравенства

$$|Q_i|_{C^{\nu(1)}}| \leqslant |Q|_{C^{\nu(2)}}|$$

оценка (3.5.4) будет непосредственным следствием теоремы 2.4.2.

Как и при доказательстве теоремы 2.4.2, положим для краткости $\Gamma' = \partial D \setminus \Gamma$. Тогда по условию $\Gamma \cap \overline{\Gamma'} = \partial\Gamma$, так что число $2r_0 = d(D_0, \Gamma')$ положительно. Введем компакт $K = \{a \in \Gamma, d(a,\Gamma') \geqslant r_0\}$, который, очевидно, содержит Γ_0. Пусть число ρ_0 выбрано, как в теореме 2.4.1, по отношению к данному компакту, и положим

$$3\rho = \min(r_0, \rho_0, r_1), \tag{3.5.6}$$

где r_1 есть расстояние от ∂D до $\partial D^1 \setminus \partial D$, которое целиком определяется выбором D^1. Из определения K видно, что число ρ_0, а вместе с ним и ρ фактически зависят только от расстояния $2r_0 = d(D_0, \Gamma')$.

Если $x \in D_0$ и $d(x,\Gamma) \geqslant \rho$, то $d(x, D^1) = \min[d(x,\Gamma), d(x,\Gamma')] \geqslant \rho$ и, следовательно, $|Q_i(y; y-x)| \leqslant |Q_i|_{C^{\nu(1)}}\rho^{-k-1}$. Поэтому неравенство (3.5.5) в этом случае не требует доказательства и достаточно рассмотреть случай $d(x,\Gamma) \leqslant \rho$. Рассмотрим точку $a \in \Gamma$, для которой реализуется расстояние $d(x,\Gamma) = |x-a|$. Таким образом,

$$|x-a| = d(x,\Gamma) \leqslant \rho. \tag{3.5.7}$$

Неравенства $d(a,\Gamma') \geqslant d(x,\Gamma') - |x-a| \geqslant 2r_0 - \rho \geqslant r_0$ показывают, что $a \in K$. Поэтому можно воспользоваться теоремой 2.4.1, согласно которой пересечение $\Gamma(a) = \Gamma \cap C_\rho(a)$ с окрестностью

$$C_\rho(a) = \{|\widetilde{u}| \leqslant \rho,\ |u_k| \leqslant 2\rho\} \tag{3.5.8}$$

в локальной системе координат описывается уравнением $u_k = f(\widetilde{u})$ в шаре $B_\rho = \{|\widetilde{u}| \leqslant \rho\}$ с некоторой непрерывно дифференцируемой функцией f, удовлетворяющей условиям

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0, \quad |f'|_0 \leqslant 1,\ [f']_\nu \leqslant M_0, \tag{3.5.9}$$

где постоянная M_0 зависит только от Γ. В частности, отсюда $|f(s)| \leqslant |s|$, так что

$$\{|y-a| \leqslant \rho\} \subseteq C_\rho(a) \subseteq \{|y-a| \leqslant 3\rho\} \tag{3.5.10}$$

и в соответствии с (3.5.7) точка x принадлежит $C_\rho(a)$.

Пусть для определенности $n(a)$ является единичным вектором внутренней (по отношению к D) нормали. Тогда с учетом (3.5.6), (3.5.7) имеем соотношения

$$\begin{gathered} D \cap C_\rho(a) = C_\rho^+(a) = \{|\tilde{u}| \leqslant \rho,\ f(\tilde{u}) < u_k < 2\rho\}, \\ D^1 \cap C_\rho(a) = C_\rho^-(a) = \{|\tilde{u}| \leqslant \rho,\ -2\rho < u_k < f(\tilde{u})\}. \end{gathered} \tag{3.5.11}$$

Утверждается, что

$$2|x-y| \geqslant \begin{cases} |x-a|+|y-a|, & y \in C_\rho^-(a), \\ \rho, & y \notin C_\rho(a). \end{cases} \qquad (3.5.12)$$

В самом деле, пусть конус K_1 с вершиной в нуле состоит из всех векторов z, образующих с $n(a)$ угол, не меньший $\pi/4$, и K_2 есть луч $\{z = tn(a),\ t \geqslant 0\}$. Поскольку $|f'|_0 \leqslant 1$, функция $f(s)$ допускает оценку $|f(s)| \leqslant |s|$ и следовательно, для $y \in C^-(a)$ вектор $y - a \in K_1$. В силу леммы 2.1.2 для $z_j \in K_j,\ j = 1, 2$, имеет место неравенство

$$|z_1 - z_2| \geqslant r_0(|z_1| + |z_2|), \quad r_0 = \min[d(K_1 \cap \Omega, K_2), d(K_2 \cap \Omega, K_1)].$$

В рассматриваемом случае, как легко видеть, постоянная $r_0 = 1/\sqrt{2}$, что доказывает первую часть оценки (3.5.12). Вторая ее часть очевидна.

Представим теперь $\partial\psi^1/\partial x_i$ в виде суммы двух функций

$$\frac{\partial \psi^1}{\partial x_i} = \psi_0 + \psi_1, \qquad (3.5.13)$$

полагая

$$\psi_0(x) = \int\limits_{D^1 \setminus D} [Q_i(y, y-x)\varphi^1(y) - Q_i(a, y-x)\varphi^1(a)]dy,$$

$$\psi_1(x) = \varphi^1(a) \int\limits_{D^1 \setminus D} Q_i(a, y-x)dy.$$

Для первого из этих слагаемых имеем очевидную оценку

$$|\psi_0(x)| \leqslant |Q_i|_{C^{\mu(0)}}[\varphi^1]_\mu I_0, \quad I_0 = \int\limits_{D^1 \setminus D} |y-a|^\mu |y-x|^{-k-1}dy.$$

В силу (3.5.10), (3.5.12)

$$I_0 \leqslant 2^{k+1} \int\limits_{|y-a| \leqslant 3\rho} \frac{|y-a|^\mu dy}{(|x-a|+|y-a|)^{k+1}} + 2^{k+1}\rho^{-k-1} \int\limits_{D^1 \setminus D} |y-a|^\mu dy.$$

Поскольку

$$\int\limits_{|y-a| \leqslant 3\rho} \frac{|y-a|^\mu dy}{(|x-a|+|y-a|)^{k+1}} \leqslant |x-a|^{\mu-1} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \frac{|z|^\mu dz}{(1+|z|)^{k+1}},$$

отсюда следует оценка (3.5.5) для ψ_i^0.

Обратимся ко второй функции ψ_1 в (3.5.13). Пусть $P^-(a)$ означает полупространство $\{x, (x-a)n(a) < 0\}$. Неравенство (3.5.12) сохраняет свою силу и при замене D^1 на $P^-(a)$, что доказывается теми же рассуждениями.

В силу (3.5.1) к ядру $Q^1(a, \xi)$ можно применить лемму 3.3.2, согласно которой

$$\int\limits_{P^-(a)} Q_i(a, y-x)dy = 0, \quad x \in P^-(a).$$

Следовательно, можно записать

$$\psi_1(x) = \varphi^1(a) I_1, \quad I_1 = \left(\int\limits_{D^1 \setminus D} - \int\limits_{P^-(a)} \right) Q_i(a, y-x)dy = I_1' + I_1'', \qquad (3.5.14)$$

где в соответствии с (3.5.11)

$$I_1' = \left(\int\limits_{C^-(a)} - \int\limits_{P^-(a) \cap C(a)} \right) Q_i dy, \quad I_1'' = \left(\int\limits_{D^1 \setminus D \setminus C(a)} - \int\limits_{P^-(a) \setminus C(a)} \right) Q_i dy.$$

Очевидно,

$$|I_1''| \leqslant |Q_i|_{C^{0(0)}} \left(\int\limits_{D^1 \setminus D \setminus C(a)} + \int\limits_{P_-(a)\setminus C(a)} \right) \frac{dy}{|y-x|^{k+1}}.$$

Заметим, что $|x-y| \geqslant |a-y|$ для $y \in P_-(a)$ и $|y-a| \geqslant \rho/2$ для $y \in D^1 \setminus D \setminus C(a)$. Таким образом, с учетом (3.5.16)

$$|I_1''| \leqslant C|Q_i|_{C^{0(0)}}, \quad C = 2^{k+1}\rho^{-k-1}\operatorname{mes}(D^1 \setminus D) + \int\limits_{|y-a|\geqslant\rho} \frac{dy}{|y-a|^{k+1}}. \tag{3.5.15}$$

Что касается I_1', то, как было отмечено выше, неравенство (3.5.12) сохраняется и при замене D^1 на $P^-(a)$. Поэтому

$$|I_1'| \leqslant 2^{k+1}|Q_i|_{C^{0(0)}} \int\limits_{E(a)} \frac{dy}{(|x-a|+|y-a|)^{k+1}}, \tag{3.5.16}$$

где $E(a)$ означает симметрическую разность множеств $C_-(a)$ и $P_-(a)\cap C(a)$. В силу (3.5.9) функция f допускает оценку $|f(s)| \leqslant M_0|s|^{\nu+1}$. Поэтому в терминах локальных координат u, фигурирующих в (3.5.8), множество $E(a)$ содержится в $\{(\tilde u, u_k),\ |\tilde u| \leqslant \rho,\ |u_k| \leqslant M|\tilde u|^{\nu+1}\}$. Следовательно, интеграл в последней оценке не превосходит

$$\int\limits_{|s|\leqslant\rho} \frac{2M|s|^{\nu+1}d_{k-1}s}{(|x-a|+|s|)^{k+1}} \leqslant 2M|x-a|^{\nu-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} \frac{|z|^{\nu+1}dz}{(1+|z|)^{k+1}}.$$

Совместно с (3.5.14)–(3.5.16) отсюда приходим к справедливости оценки (3.5.5) и для функции ψ_1 в (3.5.13), что завершает доказательство теоремы. $\square$

Отметим, что вопрос о гельдеровых оценках сингулярных интегралов вплоть до границы рассматривался в работе [1], где и встречалось условие (3.5.10). Относительно принятого здесь подхода см. работы автора [53, 55].

В соответствии с замечанием к теореме 3.4.1 нетрудно описать условия, при выполнении которых оценка (3.5.2) будет устойчива относительно варьирования Γ и D_0.

Лемма 3.5.1. *Пусть заданы последовательности областей $D_n \subseteq D^1$, $n = 1, 2, \ldots$, причем*

$$\inf_n d(\partial D_n, \partial D^1 \setminus \partial D_n) > 0, \tag{3.5.17}$$

и гладкие поверхности с краем $\Gamma_n \subseteq \partial D_n$, по отношению к которым D_n лежит с одной стороны. Предполагается, что Γ_n допускает параметризацию $\gamma_n \in C^{1,\nu}(G)$, где $G \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$ — некоторая липшицева область, причем $\gamma_n \to \gamma$ по норме пространства $C^{1,\nu}(G)$. Пусть ядра $Q_n(y,\xi) \in C^{\nu(2)}(D^1)$ и удовлетворяют условиям (3.4.2) *и* (3.5.1) *по отношению, соответственно, к D_n и Γ_n, и заданы функции $\varphi_n \in C^\mu(D^1)$, $0 < \mu < \nu$. Пусть, наконец, подобласти $D_n^0 \subseteq D_n$ таковы, что $\overline{D_n^0} \cap \partial D_n \subseteq \Gamma_n \setminus \partial\Gamma_n$ и*

$$\inf_n d(D_n^0, \Gamma_n') > 0, \quad \Gamma_n' = \partial D_n \setminus \Gamma_n. \tag{3.5.18}$$

Тогда функции ψ_n, определяемые сингулярными интегралами

$$\psi_n(x) = \int\limits_{D_n} Q_n(y, y-x)\varphi_n(y)dy, \quad x \in D_n^0,$$

допускают равномерные по n оценки

$$|\psi_n|_{C^\mu(D_n^0)} \leqslant C|Q_n|_{C^{\nu(2)}}|\varphi_n|_{C^\mu}, \tag{3.5.19}$$

Доказательство. В силу (3.5.17) аналогичная (3.5.19) оценка для функций

$$\psi_n^0(x) = \int\limits_{D^1} Q_n(y, y-x)\varphi_n(y)dy, \quad x \in D_n^0,$$

вытекает из теоремы 3.4.1. Что касается функций

$$\psi_n^1(x) = \int\limits_{D^1 \setminus D_n} Q_n(y, y-x)\varphi_n(y)dy, \quad x \in D_n^0,$$

то достаточно для их частных производных установить равномерную по n оценку

$$\left|\frac{\partial \psi_n^1}{\partial x_i}(x)\right| \leqslant M|Q_n^1|_{C^{\nu(1)}}|\varphi|_{C^\mu} d^{\mu-1}(x, \Gamma), \quad x \in D_n^0, \tag{3.5.20}$$

и воспользоваться леммой 2.4.1, условия которой в силу (3.5.18) выполнены.

Пусть $2r_0$ есть нижняя грань (3.5.18) и $K_n = \{a \in \Gamma_n,\ d(a, \Gamma_n') \geqslant r_0\}$. Как отмечено при доказательстве леммы 2.4.1, существует ρ_0, единое для всех пар K_n, Γ_n. Дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 3.5.1 по отношению к функции $\psi_n^1(x)$ в области D_n^0 с фиксированным n проходят без изменений и приводят к требуемой оценке (3.5.20). □

Из теоремы 3.5.1 непосредственно следует и соответствующий результат по отношению ко всей области $D_0 = D$.

Теорема 3.5.2. *Пусть граница конечной области D принадлежит классу $\Gamma \in C^{1,\nu}$, ядро $Q(y,\xi) \in C^{\nu(2)}(D, \mathcal{H}_{-k})$ и удовлетворяет условиям* (3.4.2), (3.5.1).

Тогда сингулярный оператор $R\varphi = \psi$, действующий по формуле (3.4.1)*, ограничен в $C^\mu(D)$, $0 < \mu < \nu$.*

Сингулярные интегралы естественным образом возникают при дифференцировании функций вида

$$\psi^0(x) = \int\limits_D Q^0(y, y-x)\varphi(y)dy,\ x \in D, \tag{3.5.21}$$

с ядром $Q^0(x, y, \xi)$, принадлежащим $\mathcal{H}_{1-k}$ по переменной ξ. Займемся сначала формулой дифференцирования этого интеграла, где произведение $Q^0(y,\xi)\varphi(y)$ удобно обозначить $Q(y,\xi)$.

Лемма 3.5.2. *В предположении $Q \in C^{\nu(1)}(D, \mathcal{H}_{1-k})$ функция*

$$\psi(x) = \int\limits_D Q(y, y-x)dy,\ x \in D, \tag{3.5.22}$$

непрерывно дифференцируема и ее частные производные определяются равенством

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) = -\sigma_i(x) - \int\limits_D \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y, y-x)dy, \quad \sigma_i(x) = \int\limits_\Omega \xi_i Q(x,\xi)d\xi. \tag{3.5.23}$$

Заметим, что в силу леммы 3.3.1 ядро Q_i удовлетворяет необходимому условию (3.4.2), так что сингулярный интеграл в формуле (3.5.23) имеет смысл.

Доказательство. Пусть x меняется в окрестности фиксированной точки $a \in D$. Умножая $Q(t,\xi)$ на подходящую срезающую функцию $\chi(t)$, достаточно рассмотреть отдельно два случая, когда $Q(t) \equiv 0$ в окрестности этой точки и $Q(t) \equiv 0$ в окрестности границы ∂D. В первом случае формула (3.5.23) получается прямым дифференцированием (3.5.22) под знаком интеграла. Нужно только учесть, что в рассматриваемом случае $\sigma_i(x) = 0$ в окрестности a.

Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что ядро $Q(y,\xi)$ определено по переменной y во всем пространстве $\mathbb{R}^k$ и вне некоторого компакта K обращается в нуль:

$$Q(y;\xi) = 0, \quad y \in \mathbb{R}^k \setminus K. \tag{3.5.24}$$

Кроме того, достаточно рассмотреть случай, когда $Q(t,\xi) \in C^{1,\mu(1)}$. В самом деле, пусть для таких функций формула (3.5.23) уже установлена. Воспользуемся оператором приближения T_ε, введенным в пункте 1.8. Рассмотрим последовательность функций $Q_n(t,\xi) = (T_{1/n}Q)(t,\xi)$, где операция T применяется по переменной t. Очевидно, эта функция принадлежит C_0^∞ по переменной y и удовлетворяет условию (3.5.24) по отношению к компакту $K_n = \{y,\ d(y,K) \leqslant 1/n\}$. На основании леммы 2.2.1 эта последовательность сходится к Q по норме пространства $C^{\mu(1)}(D)$ при $\mu < \nu$.

Если функция $\phi(x)$ определяется сингулярным интегралом в правой части (3.5.23) и ϕ_n имеет аналогичный смысл по отношению к Q_n, то на основании теоремы 3.4.1 последовательность $\phi_n(x)$ сходится к $\phi(x)$ в пространстве $C^\mu(G)$ для любого компакта G. Поэтому остается записать формулу (3.5.23) для Q_n, перейти к пределу при $n \to \infty$ и воспользоваться теоремой из пункта 1.8 о дифференцировании под знаком интеграла.

Итак, пусть ядро $Q(y,\xi)$ принадлежит $C^{1,\mu(1)}$ и удовлетворяет условию (3.5.24), так что

$$\psi(x) = \int Q(y, y-x)dy = \int Q(x+y, y)dy,$$

где здесь и ниже интегрирование ведется по $\mathbb{R}^k$. Функция

$$\psi_\varepsilon(x) = \int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon} Q(x+y,y)dy,$$

при $\varepsilon \to 0$ равномерно сходится к ψ и для фиксированного ε ее можно дифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial\psi_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x+y,y)dy. \tag{3.5.25}$$

Поскольку

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i}(x+y,y) = \frac{\partial}{\partial y_i}[Q(x+y,y)] - \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(x+y,y),$$

формула Грина из пункта 1.8 дает соотношение

$$\int\limits_{|z|\geqslant\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x+y,y)dy = -\int\limits_{|y|=\varepsilon} Q(x+y,y)\frac{y_i}{|y|}d_{k-1}y - \int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(x+y,y)dy. \tag{3.5.26}$$

В силу однородности $Q(y,\xi)$ по ξ поверхностный интеграл здесь равен

$$\int\limits_{\Omega} Q(x+\varepsilon\xi,\xi)\xi_i d\xi$$

и стремится к $\sigma_i(x)$ при $\varepsilon \to 0$.

С другой стороны, второе слагаемое в правой части равенства (3.5.26) стремится к соответствующему сингулярному интегралу. Таким образом, подставляя (3.5.26) в (3.5.25) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, приходим к заключению, что функция ψ непрерывно дифференцируема и ее частные производные даются формулой (3.5.23). □

Применительно к функции ψ^0, определяемой интегралом (3.5.21), лемма 3.5.2 дает равенство

$$\frac{\partial\psi^0}{\partial x_i}(x) = -\sigma_i(x)\varphi(x) - \int\limits_D \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y, y-x)\varphi(y)dy, \quad \sigma_i(x) = \int\limits_\Omega \xi_i Q^0(x,\xi)d\xi. \tag{3.5.27}$$

Совместно с теоремой 3.5.2 оно приводит к следующему результату.

Теорема 3.5.3. *Пусть граница области D принадлежит классу $C^{1,\nu}$, а ядро Q^0 принадлежит $C^{1,\nu(3)}(D,\mathcal{H}_{1-k})$ и его частные производные $\partial Q/\partial\xi_i$ удовлетворяют условиям* (3.5.1) *в граничных точках $y \in \partial D$.*

Тогда оператор $R^0\varphi = \psi^0$ ограничен $C^\mu(D) \to C^{1,\mu}(D)$, $0 < \mu < \nu$.

Заметим, что если ядро $Q^0(y,\xi)$ нечетно по переменной ξ, то его производные $\partial Q/\partial\xi_i$ четны по этой переменной и с учетом (3.4.2) условие (3.5.1) выполнено автоматически.

3.6. Обобщенные интегралы типа Коши

Пусть на гладкой $(k-1)$-мерной поверхности с краем $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^k$ задано ядро $Q(y;\xi) \in C^{\nu(1)}(\Gamma, \mathcal{H}_{1-k})$, нечетное по переменной ξ. Рассмотрим интеграл

$$\phi(x) = \int\limits_{\Gamma} Q(y; y-x)\varphi(y) d_{k-1}y, \quad x \notin \Gamma, \tag{3.6.1}$$

который в некотором роде является обобщением классического интеграла типа Коши для аналитических функций. Он оказывается особенно полезным при исследовании многомерных эллиптических систем первого порядка [6, 41].

Пусть x меняется в области D, отстоящей от Γ на положительное расстояние, так что при $x \in D$, $y \in \Gamma$ разность $x-y$ ограничена снизу положительной постоянной. Тогда согласно лемме 3.1.2 функция $q(x,y) = Q(y; y-x)$ принадлежит классу $C^{\nu}(D \times \Gamma)$, так что и $\phi \in C^{\nu}(D)$. Более того, функцию (3.6.1) можно неограниченное число раз дифференцировать под знаком интеграла, так что она в действительности принадлежит классу $C^{\infty}(\overline{D})$. При $x \to \infty$ она стремится к нулю вместе со всеми своими производными.

Основной интерес ниже представляют граничные свойства функции $\phi(x)$, т. е. ее поведение при приближении точки x к внутренней точке y_0 поверхности Γ. Как и в пункте 3.3, сначала рассмотрим интеграл (3.6.1) на $(k-1)$-мерной плоскости.

Лемма 3.6.1. *Пусть заданы нечетная функция $Q(\xi) \in \mathcal{H}_{1-k}$ и $(k-1)$-мерная плоскость $L \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, которая проходит через начало координат ортогонально некоторому единичному вектору n и разбивает пространство $\mathbb{R}^k$ на полупространства $P_{\pm} = \{\eta \in \mathbb{R}^k,\ \pm\eta n > 0\}$. Тогда для $\eta \notin L$ сингулярный интеграл*

$$h(\eta) = \int\limits_{L} Q(\xi - \eta) d_{k-1}\xi \tag{3.6.2}$$

(*с особой точкой на бесконечности*) *существует и определяет функцию, которая нечетна и в каждом полупространстве $P_{\pm}$ постоянна, так что $h(\eta) = \pm c$, $\eta \in P_{\pm}$. При этом*

$$\int\limits_{L} \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(\xi - \eta) d_{k-1}\xi = 0, \quad \eta \in P_{\pm}, \tag{3.6.3}$$

и

$$|c| = |h(\eta)| \leqslant M|Q|_{(1)}, \tag{3.6.4}$$

где постоянная $M > 0$ не зависит от Q.

Если дополнительно функция Q обращается в нуль на L, то интеграл

$$h_0(\eta) = \int\limits_{L} |Q(\xi - \eta)| d_{k-1}\xi, \quad \eta n \neq 0,$$

существует в обычном смысле, не зависит от η и удовлетворяет аналогичной (3.6.4) *оценке.*

Доказательство. В силу нечетности ядра Q условие (3.3.8) по отношению к $(k-2)$-мерной единичной сфере в $\mathbb{R}^{k-1}$ выполнено, и существование интеграла (3.6.2) обосновывается аналогично пункту 3.3. В самом деле, этот интеграл представляется в виде

$$h(\eta) = \int\limits_{|\xi| \leqslant 1} Q(\xi - \eta) d\xi + \int\limits_{|\xi| \geqslant 1} [Q(\xi - \eta) - Q(\xi)] d\xi,$$

где в силу леммы 3.1.1 последний интеграл в правой части равенства понимается в обычном смысле.

Если вектор $a \in L$ и $r \neq 0$, то аналогично пункту 3.3 обосновываются замены переменных $\xi = \xi' - a$, $a \in L$, и $\xi = r\xi'$, $\pm r > 0$, в сингулярном интеграле (3.6.2), что приводит к соотношениям

$$h(x) = h(x-a), \quad h(x) = (\operatorname{sgn} r) h(rx).$$

Очевидно, они возможны, только когда функция h постоянна в полупространствах $P_\pm$ и нечетна. Согласно лемме 3.1.1 интеграл

$$\int_L [Q(\xi-\eta)-Q(\xi-n)]d_{k-1}y$$

существует в обычном смысле, поэтому функцию $h(\eta)-h(n)$ можно дифференцировать под знаком интеграла, что дает формулу (3.6.3).

Как и в пункте 3.3, можно записать

$$h(\eta)=\int\limits_{L\cap\{|\xi|\leqslant 1\}} Q(\xi-\eta)d_{k-1}\xi+\int\limits_{L\cap\{|\xi|\geqslant 1\}}[Q(\xi-\eta)-Q(\xi)]d_{k-1}\xi,$$

откуда с учетом леммы 3.1.1 следует оценка (3.6.4).

Предположим далее, что функция Q обращается в нуль на плоскости L. Тогда условие (3.3.8) по отношению к $(k-2)$-мерной единичной сфере в $\mathbb{R}^{k-1}$ для функции $Q_0(\xi)=|Q(\xi)|$ по-прежнему выполнено, поскольку на этой сфере она тождественно равна нулю. Поэтому предыдущее равенство можно написать и для Q_0. Согласно замечанию к лемме 3.1.1 в оценке (3.1.4) норму $|Q|_{(1)}$ можно заменить нормой в пространстве $C^{0,1}(\Omega)$. Поэтому предыдущее равенство показывает, что соответствующий интеграл от функции $|Q|$ существует в обычном смысле и справедлива оценка

$$|h_0(\eta)|\leqslant M|Q_0|_{C^{0,1}(\Omega)}.$$

Поскольку норма функции $|Q_0|$ в пространстве $C^{0,1}(\Omega)$ оценивается через норму $|Q|_{(1)}$, отсюда следует справедливость оценки (3.6.4) для h_0. То, что функция $h_0(\eta)$ не зависит от η, доказывается аналогично предыдущему. □

Обратимся к поверхностному интегралу (3.6.1), который рассмотрим в некоторой области, лежащей с одной стороны от Γ (по терминологии пункта 2.4).

Теорема 3.6.1. *Пусть область D лежит с одной стороны от гладкой поверхности с краем $\Gamma\in C^{1,\nu}$ и подобласть $D_0\subseteq D$ такова, что $\Gamma_0=\overline{D}_0\cap\partial D\subseteq\Gamma\setminus\partial\Gamma$. Пусть ядро $Q(y;\xi)\in C^{\nu(2)}(\Gamma,\mathcal{H}_{1-k})$ нечетно по переменной ξ и функция $\varphi\in C^\mu(\Gamma)$, $0<\mu<\nu$.*

Тогда интеграл (3.6.1) *определяет функцию $\phi\in C^\mu(D)$ с оценкой норм*

$$|\phi|_{C^\mu(D_0)}\leqslant C|Q|_{C^{\nu(2)}}|\varphi|_{C^\mu(\Gamma)}, \tag{3.6.5}$$

где постоянная $C>0$ зависит только от расстояния от D_0 до $\partial\Gamma$.

Если дополнительно ядро $Q(u,y,\xi)$ зависит от параметра $u\in G$ и принадлежит $C^{\nu(2)}(G\times\Gamma,\mathcal{H}_{1-k})$, то соответствующая функция $\phi(u,x)$ принадлежит $C^\mu(G\times D_0)$ с оценкой норм, аналогичной (3.6.5).

Доказательство. Оно осуществляется по той же схеме, что и в теореме 3.5.1. Дифференцирование равенства (3.6.1) под знаком интеграла возможно, так что

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)=-\int_\Gamma Q_i(y,y-x)\varphi(y)dy,\ 1\leqslant i\leqslant k,$$

с ядром $Q_i(y,\xi)=\partial Q/\partial\xi_i\in C^{\nu(1)}(\Gamma,\mathcal{H}_{-k})$. Как и при доказательстве теоремы 3.5.1, достаточно для частных производных функции ϕ обосновать оценку

$$\left|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)\right|\leqslant C|Q_i|_{C^{\nu(1)}}|\varphi|_{C^\mu}d^{\mu-1}(x,\Gamma),\quad x\in D, \tag{3.6.6}$$

где постоянная зависит только от расстояния $2r_0=d(D_0,\partial D\setminus\partial\Gamma)$, и воспользоваться теоремой 2.4.2.

Рассмотрим множество $K=\{y\in\Gamma,\ d(y,\partial\Gamma)\geqslant r_0\}$, которое, очевидно, содержит $\Gamma\cap\overline{D}_0$. Пусть ρ_0 определяется, как в теореме 2.4.1 по отношению к K и Γ, и $\rho=\min(r_0,\rho_0)$. Очевидно, оценку (3.6.6) достаточно установить для $x\in D_0$, $d(x,\Gamma)\leqslant\rho$. Тогда $d(x,\Gamma)=|x-a|$ для некоторой точки $a\in K$. Согласно теореме 2.4.1 пересечение $\Gamma(a)=\Gamma\cap C_\rho(a)$ с окрестностью (3.5.8) в локальной системе координат описывается уравнением $u_k = f(\widetilde{u})$ в шаре $B_\rho = \{|\widetilde{u}| \leqslant \rho\}$ с некоторой функцией $f \in C^{1,\nu}(B_\rho)$, удовлетворяющей условиям (3.5.9), где постоянная M_0 зависит только от Γ.

Запишем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_0 + \phi_1 \tag{3.6.7}$$

со слагаемыми

$$\phi_0(x) = \int_\Gamma [Q_i(y, y-x)\varphi(y) - Q_i(a, y-x)\varphi(a)]dy, \quad \phi_1(x) = \varphi(a)\int_\Gamma Q_i(a, y-x)dy.$$

Для первой из этих функций имеем оценку

$$|\phi_0(x)| \leqslant |Q_i|_{C^{\mu(0)}}[\varphi]_\mu I_0, \quad I_0 = \int_\Gamma |y-a|^\mu |y-x|^{-k} dy.$$

Неравенство (3.5.12), очевидно, сохраняет свою силу и для $y \in \Gamma \cap C_\rho(a)$. Поэтому

$$I_0 \leqslant 2^k \int_{\Gamma \cap C_\rho(a)} \frac{|y-a|^\mu dy}{(|x-a| + |y-a|)^k} + 2^k \rho^{-k} \int_{\Gamma \setminus C_\rho(a)} |y-a|^\mu dy. \tag{3.6.8}$$

Как и при доказательстве леммы 3.3.3, поверхность $\Gamma \cap C_\rho(a)$ можно задать параметрическим уравнением

$$y - a = U[s, f(s)], \quad |s| \leqslant \rho,$$

с соответствующей ортогональной матрицей $U \in \mathbb{R}^{k \times k}$. С учетом (3.5.9) для этой замены переменных

$$|s| \leqslant |y-a| \leqslant 2|s|, \quad d_{k-1}y = |m(s)|ds, \ |m(s)| = \sqrt{1 + |f'(s)|^2} \leqslant 2. \tag{3.6.9}$$

Поэтому первый интеграл в правой части (3.6.8) не превосходит

$$2^{1+\mu} \int_{|s| \leqslant \rho} \frac{|s|^\mu ds}{(|x-a| + |s|)^k} \leqslant |x-a|^{\mu-1} 2^{1+\mu} \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \frac{|s|^\mu ds}{(1+|s|)^k},$$

что с учетом равенства $|x-a| = d(x, \Gamma)$ приводит к справедливости оценки (3.6.6) для ϕ_0.

Обратимся ко второй функции ϕ_1 в (3.6.7). В силу леммы 3.6.1

$$\int_{L(a)} Q_i(a, y-x)dy = 0,$$

где $L(a)$ означает касательную плоскость $L(a)$ к поверхности Γ в точке a. Поэтому функцию ϕ_1 можно записать в форме

$$\phi_1(x) = \varphi(a)\left(\int_\Gamma - \int_{L(a)}\right) Q_i(a, y-x)dy = \varphi(a)(I_1' + I_2''),$$

где I_1' отвечает интегралам по $\Gamma \cap C_\rho(a)$ и $L(a) \cap C_\rho(a)$. Поскольку отрезок с концами a и x ортогонален плоскости $L(a)$, для $y \in L(a) \setminus C_\rho(a)$ имеем очевидное неравенство $|y-x| \geqslant |y-a|$. Отсюда с учетом (3.5.12)

$$|I_2''| \leqslant |Q_i|_{C^{0(0)}} \left[2^k \rho^{-k} \int_{\Gamma \setminus C_\rho(a)} dy + \int_{L(a) \setminus C_\rho(a)} |y-a|^{-k} dy\right] \leqslant C'|Q_i|_{C^{0(0)}}, \tag{3.6.10}$$

где постоянная C' зависит только от ρ.

Пусть для определенности единичная нормаль $n(a)$, определяющая направление оси u_k локальной системы координат, выбрана так, что точка x имеет локальные координаты $\tilde{u}=0, u_k=|x-a|$, или, что равносильно, $x-a=U(0,|x-a|)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &y-a=U[s,f(s)],\ y-x=U[s,f(s)-r]; \qquad y\in\Gamma\cap C_\rho(a),\\ &y-a=U[s,0)],\ y-x=U[s,-r]; \qquad y\in L(a)\cap C_\rho(a). \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

где для краткости $r=|x-a|$. В частности, неравенство (3.5.12) совместно с оценкой $|s|\leqslant|y-a|$ в (3.6.9) означает, что

$$2\sqrt{|s|^2+[f(s)-r]^2}\geqslant|s|+r,\quad |s|\leqslant\rho. \tag{3.6.12}$$

В обозначениях (3.6.9) и (3.6.11) для слагаемого I_1' имеем выражение

$$I_1'=\int\limits_{|s|\leqslant\rho}[\widetilde{Q}(s,f(s)-r)|m(s)|-\widetilde{Q}(s,-r)]ds,$$

где положено $\widetilde{Q}(\xi)=Q(a,U\xi)$. На основании леммы 3.1.1 совместно с (3.6.12) и очевидным неравенством $2\sqrt{|s|^2+r^2}\geqslant|s|+r$ для подынтегрального выражения приходим к оценке

$$\begin{aligned} &|\widetilde{Q}(s,f(s)-r)|m(s)|-\widetilde{Q}(s,-r)|\leqslant\\ &\leqslant 2M|\widetilde{Q}|_{(1)}\frac{2^{k+1}|f(s)||m(s)|}{(|s|+r)^{k+1}}+2|\widetilde{Q}|_{(0)}|\frac{2^k||m(s)|-1|}{(|s|+r)^k}. \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Таким образом,

$$|I_1'|\leqslant 2^{k+3}M|\widetilde{Q}|_{(1)}I_2+2^k|\widetilde{Q}|_{(0)}I_3$$

с интегралами

$$I_2=\int\limits_{|s|\leqslant\rho}\frac{|f(s)|}{(|s|+r)^{k+1}}ds,\quad I_3=\int\limits_{|s|\leqslant\rho}\frac{\sqrt{1+|f'(s)|^2}-1}{(|s|+r)^k}ds.$$

В силу (3.5.9) для функции f имеем очевидные неравенства $|f'(s)|\leqslant M_0|s|^\nu$ и $|f(s)|\leqslant M_0|s|^{\nu+1}$, поэтому

$$I_2+I_3\leqslant M_0r^{\nu-1}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}}\frac{|s|^{\nu+1}ds}{(|s|+1)^{k+1}}+\int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}}\frac{|s|^\nu ds}{(|s|+1)^k}\right].$$

Вспоминая, что $r=|x-a|=d(x,\Gamma)$, отсюда совместно с (3.6.10) приходим к справедливости оценки (3.6.6) и для функции ϕ_1 в (3.6.7). Тем самым оценка (3.6.6), а вместе с ней и первое утверждение теоремы установлены.

Что касается второго ее утверждения, то оно устанавливается аналогично теореме 3.4.1. □

Отметим, что гельдеровы оценки классических интегралов типа Коши путем оценки их производных вблизи границы хорошо известны (см., например, Дынькин [20]). Этот прием использовался в работах автора [52, 53]) для исследования граничных свойств обобщенных интегралов типа Коши, связанных с эллиптическими системами.

Аналог леммы 3.5.1 относительно вариации поверхности Γ справедлив и для интегралов (3.6.1).

Лемма 3.6.2. *Пусть последовательности D_n,Γ_n, Q_n и φ_n удовлетворяют условиям теоремы* 3.6.1*, причем*

$$\inf_n d(D_n,\partial\Gamma_n)>0.$$

Кроме, того поверхности Γ_n допускают параметризации $\gamma_n\in C^{1,\nu}$, сходящиеся к γ в $C^{1,\nu}(G)$.

Тогда для функций

$$\phi_n(x)=\int\limits_{\Gamma_n}Q(x,y,y-x)\varphi_n(y)dy,\ x\in D_n,$$

справедлива равномерная по n оценка

$$|\phi_n|_{C^\mu(D_n)}\leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}|\varphi_n|_{C^\mu(\Gamma_n)}.$$

Доказательство. Оно осуществляется совершенно аналогично лемме 3.5.1, основываясь на лемме 2.4.1 и схеме доказательства теоремы 3.6.1. □

При некоторых дополнительных предположениях на ядро Q граничные свойства интеграла (3.6.1) можно рассматривать и для функций $\varphi \in C(\Gamma)$. Классическим примером служит потенциал двойного слоя для оператора Лапласа в области D, который в принятых обозначениях определяется ядром

$$Q(y,\xi) = \frac{1}{\pi}\frac{\xi n(y)}{|\xi|^k}, \quad y \in \Gamma,$$

где $n(y)$ означает внутреннюю нормаль. Хорошо известно, что функция, определяемая интегралом с этим ядром и плотностью $\varphi \in C(\Gamma)$, непрерывна вплоть до Γ с каждой стороны поверхности. Рассматриваемое ядро обладает тем свойством, что $Q(y,\xi) = 0$ при $\xi n(y) = 0$. Оказывается, это свойство является ключевым и в общей ситуации.

Теорема 3.6.2. *Пусть в условиях теоремы* 3.6.1 *ядро* Q *обладает дополнительным свойством*

$$Q(y,\ \xi) = 0 \quad \text{при} \quad \xi n(y) = 0,\ y \in \Gamma. \tag{3.6.14}$$

Тогда для $\varphi \in C(\Gamma)$ *интеграл* (3.6.1) *определяет функцию* $\phi \in C(\overline{D})$ *с соответствующей оценкой* sup-*норм*

$$|\phi|_0 \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}|\varphi|_0, \tag{3.6.15}$$

где постоянная $C > 0$ *зависит только от расстояния от* D *до* $\partial\Gamma$.

Доказательство. Оно основывается на оценке

$$\int\limits_{\Gamma} |Q(y, y-x)dy| \leqslant C|Q|_{C^{\nu(2)}}, \quad x \in D, \tag{3.6.16}$$

которая устанавливается по той же схеме, что и теорема 3.6.1.

Пусть $K \subseteq \Gamma$ и ρ определяются также, как и при доказательстве теоремы 3.6.1, и $x \in D$, $d(x,\Gamma) \leqslant \rho$. Пусть $d(x,\Gamma) = |x-a|$, $a \in K$, так что точка x лежит внутри окрестности $C_\rho(a)$.

Поскольку $||Q(y,\xi)| - |Q(a,\xi)|| \leqslant |Q(y,\xi) - Q(a,\xi)|$, для разности $\Delta(x,y) = |Q(y,y-x)| - |Q(a,y-x)|$ имеем оценку

$$|\Delta(x,y)| \leqslant |Q|_{C^{\nu(0)}}|y-a|^\nu |y-x|^{1-k},$$

С учетом (3.5.12) отсюда

$$|\Delta(x,y)| \leqslant 2^{1-k}|Q|_{C^{\nu(0)}}|y-a|^{\nu+1-k}, \quad y \in \Gamma \cap C_\rho(a), \tag{3.6.17}$$

так что совместно с первым неравенством (3.6.9)

$$\int\limits_{\Gamma\cap C_\rho(a)} |\Delta(x,y)|dy \leqslant 2^{1-k}|Q|_{C^{\nu(0)}} \int\limits_{|s|\leqslant\rho} |s|^{\mu+1-k}ds.$$

Таким образом, доказательство (3.6.16) достаточно провести по отношению к $Q(a,\xi)$.

Очевидно,

$$\int\limits_{\Gamma\setminus C\rho(a)} |Q(a, y-x)dy| \leqslant C_1|Q|_{C^{0(0)}}, \tag{3.6.18}$$

где постоянная C_1 зависит только от ρ.

С другой стороны, в силу второго утверждения леммы 3.6.1

$$\int\limits_{L(a)\cap C(a)} |Q(a,y-x)|dy \leqslant \int\limits_{L(a)} |Q(a,y-x)|dy \leqslant C_1|Q|_{C^{0(1)}}. \tag{3.6.19}$$

Наконец, как и при доказательстве теоремы 3.6.1, можно записать

$$\left(\int\limits_{\Gamma\cap C(a)} - \int\limits_{L(a)\cap C(a)}\right)|Q(a,y-x)|dy = \int\limits_{|s|\leqslant\rho} [|\widetilde{Q}[s,f(s)-r]||m(s)| - |\widetilde{Q}(s,-r)|]ds,$$

где, напомним, $\widetilde{Q}(\xi) = |Q(a, B\xi)|$, $|m(s)| = \sqrt{1 + |f'(s)|^2}$ и $r = |x - a|$.

С учетом замечания к лемме 3.1.1 последний интеграл можно оценить совершенно аналогично доказательству теоремы 3.6.1, что совместно с (3.6.18) и (3.6.19) завершает доказательство оценки (3.6.16).

Остается убедиться, что в действительности функция ϕ непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$. С этой целью выберем последовательность функций $\varphi_n \in C^\mu(\Gamma)$, сходящуюся к φ по sup-норме. Согласно теореме 3.6.1 функции ϕ_n, определяемые интегралом (3.6.1) по φ_n, непрерывны в $\overline{D}$. С другой стороны, в силу (3.6.15) последовательность ϕ_n равномерно сходится к ϕ, так что последняя функция также принадлежит $C(\overline{D})$. □

Отметим, что в двумерном случае $k = 2$ теорема 3.6.2 установлена в работах [61, 62].

3.7. Формула граничных значений

Согласно теореме 3.6.1 функция $\phi(x)$, определенная в области D обобщенным интегралом типа Коши (3.6.1), фактически непрерывна в ее замыкании, так что на $\overline{D} \cap \Gamma$ определены ее граничные значения. Поскольку область может прилегать с двух сторон к Γ, определены два односторонних предельных значения $\phi^\pm(a)$, $a \in \Gamma$. Более точно, по теореме 2.4.1 для каждой внутренней точки a гладкой поверхности с краем Γ при достаточно малом ρ окрестность (3.5.8) разбивается на две полуокрестности — связные компоненты $C^\pm_\rho(a)$, выделяемые условием $\pm[f(\widetilde{u}) - u_k] > 0$. Конечно, знаки здесь зависят от выбора нормали $n(a)$, вдоль которой направлена ось u_k локальной системы координат. В соответствии с этим односторонние граничные значения функции ϕ определяются как пределы

$$\phi^\pm(a) = \lim_{x \to a,\, x \in C^\pm(a)} \phi(x). \tag{3.7.1}$$

Вопрос об описании этих граничных значений функции (3.6.1) тесно связан с сингулярным интегралом

$$\phi^*(a) = \int_\Gamma Q(y, y - a)\varphi(y) d_{k-1} y, \tag{3.7.2}$$

о котором шла речь в лемме 3.3.3.

Пусть $L(a)$ есть касательная плоскость к Γ в точке a. Согласно лемме 3.6.1 с этой плоскостью можно связать коэффициент $\sigma(a) = h(\eta)$, где функция h определяется по ядру $Q(\xi) = Q(a, \xi)$ и скалярное произведение $\eta n(a) > 0$, или, в явном виде,

$$\sigma(a) = \int_{L(a)} Q(y - x_0) d_{k-1} y, \quad (x_0 - a)n(a) > 0. \tag{3.7.3}$$

Так определенная функция σ на Γ обладает следующим характером непрерывности.

Лемма 3.7.1. *Пусть на поверхности $\Gamma \in C^{1,\nu}$ с краем задано ядро $Q(y, \xi) \in C^{\nu(1)}(\Gamma, \mathcal{H}_{1-k})$, нечетное по ξ. Тогда для любого компакта $K \subseteq \Gamma \setminus \partial\Gamma$ функция σ, определенная по формуле* (3.7.3)*, принадлежит $C^\mu(K)$, $0 < \mu < \nu$, с оценкой*

$$|\sigma|_{C^\mu(K)} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}, \tag{3.7.4}$$

своей нормы, где постоянная $C > 0$ зависит только от расстояния K до $\partial\Gamma$.

Доказательство. Достаточно провести доказательство по отношению к некоторой окрестности Γ_a фиксированной точки $a \in \Gamma$. Одна из компонент вектора $n(a)$, пусть $n_s(a)$, отлична от нуля. Не ограничивая общности, можно считать, что $n_s(y) \neq 0$ для всех $y \in \Gamma_a$. Выберем обратимую $k \times k$-матрицу $B(y) \in C^\nu(\Gamma_a)$ так, чтобы для любого $y_0 \in \Gamma_a$ линейное преобразование $u \to x = y_0 + B(y_0)u$ переводило плоскость $u_k = 0$ на $L(y_0)$ и, соответственно, полупространство $u_k > 0$ на $\{x,\ (x - y_0)n(y) > 0\}$.

Такой выбор всегда возможен. В самом деле, для $1 \leqslant i \leqslant k$, $i \neq s$, обозначим $b_i(y)$ вектор, у которого s-ая и i-ая компоненты совпадают соответственно с $-n_i(y)$ и $n_s(y)$, а остальные компоненты равны нулю. Очевидно, полученные $k - 1$ векторов линейно независимы и ортогональны $n(y)$. В качестве B выберем теперь матрицу, у которой первые $k - 1$ столбцов образованы векторами

b_i, $i \neq s$, а последний столбец совпадает с вектором n. Полученная матрица удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Полагая $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^k$, сделаем замену переменных $y - y_0 = B(y_0)(s, 0)$, $s \in \mathbb{R}^{k-1}$ и $x - y_0 = B(y_0)e$. При этой замене элемент площади $d_{k-1}y$ на плоскости $L(y_0)$ связан с ds соотношением $dy = |m(y_0)|ds$, где согласно пункту 2.4 вектор $m(y_0)$ имеет своими компонентами алгебраические дополнения последнего столбца матрицы $B(y_0)$. В частности, $m(y) \in C^\nu(\Gamma_0)$. При указанной замене равенство (3.7.3) для $a = y_0$ переходит в

$$\sigma(y_0) = |m(y_0)| \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} \widetilde{Q}(y_0; s, -1) ds, \tag{3.7.5}$$

где положено $\widetilde{Q}(y; \xi) = Q[y; B(y)\xi]$. Как и при доказательстве леммы 3.6.1, данный сингулярный интеграл (с особой точкой на бесконечности) можно записать в форме суммы $\sigma_1(y_0) + \sigma_2(y_0)$ обычных интегралов

$$\sigma_1(y_0) = \int\limits_{|s| \leqslant 1} \widetilde{Q}(y_0; s, -1) ds, \quad \sigma_2(y_0) = \int\limits_{|s| \geqslant 1} [\widetilde{Q}(y_0; s, -1) - \widetilde{Q}(y_0; s, 0)] ds.$$

Очевидно, функция σ_1 принадлежит $C^\nu(\Gamma_a)$ и оценка (3.7.4) по отношению к $K = \Gamma_a$ для нее очевидна.

Что касается функции σ_2, то в ее подынтегральном выражении сделаем замену переменных $s = r\xi$, где $r > 0$, $\xi \in \Omega$ и Ω означает единичную сферу в $\mathbb{R}^{k-1}$. Согласно пункту 1.8, при этой замене $d_{k-1}s = r^{k-2} dr d_{k-2}\xi$ и, следовательно, с учетом нечетности и однородности функции $\widetilde{Q}$ для σ_2 получаем выражение

$$\sigma_2(y_0) = \int\limits_{|r| \geqslant 1} \frac{q(y_0, r) dr}{r}, \quad q(y_0, r) = \int\limits_{\Omega} [\widetilde{Q}(y_0; \xi, -1/r) - \widetilde{Q}(y_0; \xi, 0)] d\xi.$$

В силу леммы 3.1.2 функция $\widetilde{Q}(y_0; \xi, t)$ принадлежит классу $C^\nu(\Gamma_a \times \Omega \times [-1, 1])$, так что на основании леммы 2.1.1 разность $\widetilde{Q}(y_0; \xi, t) - \widetilde{Q}(y_0; \xi, 0)$ можно записать в форме $|t|^{\nu - \mu} a(y_0, \xi, t)$, где функция $a(y_0, \xi, t)$ принадлежит $C^\mu(\Gamma_a \times \Omega \times [0, 1])$ с оценкой $|a|_{C^\mu} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}$ своей нормы.

Но тогда и функция

$$\sigma_2(y_0) = \int\limits_{|r| \geqslant 1} r^{\mu - \nu - 1} \int\limits_{\Omega} a(y_0, \xi, -1/r) d\xi$$

принадлежит $C^\mu(\Gamma_a)$ с аналогичной (3.7.4) оценкой по отношению к $K = \Gamma_a$. □

Теорема 3.7.1. *В условиях теоремы* 3.6.1 *граничные значения функции* (3.6.1) *во внутренних точках* $y_0 \in \Gamma$ *даются формулой*

$$\phi^\pm(y_0) = \pm\sigma(y_0)\varphi(y_0) + \phi^*(y_0), \tag{3.7.6}$$

где сингулярный интеграл $\phi^*(y_0)$ *и коэффициент* $\sigma(y_0)$ *определяются, соответственно,* (3.7.2) *и* (3.7.3).

Доказательство. Если нормаль $n(y_0)$ к поверхности Γ в точке y_0 заменить на противоположную, то по определению (3.7.1) граничные значения $\phi^\pm(y_0)$ поменяются местами. При этом в соответствии с леммой 3.6.1 поменяет знак и коэффициент $\sigma(y_0)$ в (3.7.3). Таким образом, формулу (3.7.6) достаточно установить для верхнего знака.

Пусть $x \in C^+(a)$ стремится к граничной точке $a \in \Gamma$ вдоль нормали $n(a)$, т. е. $x - a = rn(a)$, $r > 0$. Как и при доказательстве теоремы 3.6.1, можно считать, что $r \leqslant \rho$. Поскольку

$$\lim_{x \to a} \int\limits_{\Gamma \setminus C(a)} Q(y, y - x)\varphi(y) dy = \int\limits_{\Gamma \setminus C(a)} Q(y, y - a)\varphi(y) dy,$$

равенство (3.7.6) достаточно установить по отношению к $\Gamma \cap C(a)$. Для разности $\Delta(x, y) = Q(y, y - x)\varphi(y) - Q(a, y - x)\varphi(a)$ имеем аналогичную (3.6.17) оценку

$$|\Delta(x, y)| \leqslant 2^{1-k} |Q|_{C^{\mu(0)}} |\varphi|_{C^\mu} |y - a|^{\mu + 1 - k}, \quad y \in \Gamma \cap C_\rho(a).$$

Поскольку функция $g(y) = |y-a|^{\mu-k+1}$ суммируема на $\Gamma \cap C(a)$, на основании теоремы Лебега из пункта 1.8 о мажорированной сходимости

$$\lim_{x\to a} \int\limits_{\Gamma\cap C(a)} [Q(y, y-x)\varphi(y) - Q(a, y-x)\varphi(a)]dy = 0.$$

Таким образом, дело сводится к доказательству равенства

$$\lim_{x\to a} \int\limits_{\Gamma\cap C(a)} Q(a, y-x)dy = \sigma(a) + \int\limits_{\Gamma\cap C(a)} Q(a, y-a)dy. \tag{3.7.7}$$

Как и при доказательстве теоремы 3.6.1, воспользуемся параметрическим уравнением

$$y - a = U[s, f(s)], \quad |s| \leqslant \rho, \tag{3.7.8}$$

поверхности $\Gamma \cap C(a)$ и запишем

$$\int\limits_{\Gamma\cap C(a)} Q(a, y-x)dy = \int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}[s, f(s)-r]|m(s)|ds,$$

где положено $\widetilde{Q}(\xi) = Q(a, U\xi)$, $|m(s)| = \sqrt{1+|f'(s)|^2}$ и $r = |x-a|$. При фиксированном $y_0 = a$ в качестве матрицы $B(y_0)$ в формуле (3.7.5) можно выбрать ортогональную матрицу U, фигурирующую в (3.7.8). В этом случае коэффициент $|m(y_0)|$ равен 1 и равенство (3.7.5) принимает вид

$$\sigma(a) = \int\limits_{\mathbb{R}^{k-1}} \widetilde{Q}(y_0, s, -1)ds. \tag{3.7.9}$$

Как установлено при доказательстве леммы 3.3.3, замену переменных $y - a = B[s, f(s)]$ можно осуществить и для сингулярного интеграла в правой части формулы (3.7.7):

$$\int\limits_{\Gamma\cap C(a)} Q(a, y-a)dy = \int\limits_{|s|\leqslant r} \widetilde{Q}[s, f(s)]|m(s)|ds. \tag{3.7.10}$$

Таким образом, равенство (3.7.7) можно переписать в форме

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}[s, f(s)-r]|m(s)|ds = \sigma(a) + \int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}[s, f(s)]|m(s)|ds$$

с ядром $\widetilde{Q}(\xi) \in \mathcal{H}_{1-k}$. Для этого ядра можно воспользоваться оценками (3.6.12), где k нужно заменить на $k-1$. В частности,

$$|\widetilde{Q}[s, f(s)-r]|m(s)| - \widetilde{Q}[s, f(s)-r]| \leqslant 4^{k-1}M|\widetilde{Q}|_{(0)}(r+s)^{\nu-k+1}.$$

Поэтому, как и выше, на основании теоремы Лебега о мажорированной сходимости достаточно установить равенство

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}[s, f(s)-r]ds = \sigma(a) + \int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}[s, f(s)]ds. \tag{3.7.11}$$

По определению сингулярного интеграла (3.7.9) имеем:

$$\sigma(a) = \lim_{r\to 0} \int\limits_{|s|\leqslant\rho/r} \widetilde{Q}(s, -1)ds.$$

В силу однородности $\widetilde{Q}(s, -1) = r^{k-1}\widetilde{Q}(rs, -r)$, так что замена $t = rs$ дает выражение

$$\sigma(a) = \lim_{r\to 0} \int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}(s, -r)ds.$$

Поскольку сингулярный интеграл
$$\int\limits_{|s|\leqslant\rho} \widetilde{Q}(s,0)ds = 0,$$
доказательство равенства (3.7.11) сводится к обоснованию предельного перехода
$$\lim_{r\to 0}\int\limits_{|s|\leqslant\rho} [\widetilde{Q}[s,f(s)-r] - \widetilde{Q}(s,-r)]ds = \int\limits_{|s|\leqslant\rho} [\widetilde{Q}[s,f(s)] - \widetilde{Q}(s,0)]ds. \tag{3.7.12}$$

Для разности $\widetilde{Q}[s,f(s)-r]-\widetilde{Q}(s,-r)$ можно получить аналогичную (3.6.13) оценку, нужно только принять во внимание, что в рассматриваемом случае ядро $\widetilde{Q}(\xi)$ однородно степени $1-k$. Таким образом,
$$|\widetilde{Q}[s,f(s)-r] - \widetilde{Q}(s,-r)| \leqslant 2M|\widetilde{Q}|_{(1)}\frac{2^k|f(s)|}{(|s|+r)^k} \leqslant C|s|^{\nu-k+1}.$$
Поэтому справедливость предельного соотношения (3.7.12) вытекает из теоремы Лебега о мажорированной сходимости, что завершает доказательство формулы (3.7.6). □

Теорема 3.7.1 совместно с леммой 3.6.1 непосредственно приводят к соответствующему результату для сингулярного оператора, определяемого равенством (3.7.2) на замкнутой гладкой поверхности.

Теорема 3.7.2. *Пусть на гладкой замкнутой поверхности* $\Gamma \in C^{1,\nu}$ *задано ядро* $Q(y;\xi) \in C^{\nu(2)}(\Gamma,\mathcal{H}_{1-k})$, *нечетное по переменной* ξ. *Тогда сингулярный оператор* $R\varphi = \phi^*$, *определяемый сингулярным интегралом* (3.7.2), *ограничен в пространстве* $C^\mu(\Gamma)$, $0<\mu<\nu$, *и его норма допускает оценку* $|R|_{\mathcal{L}(C^\mu)} \leqslant C|Q|_{C^{\mu(2)}}$.

Доказательство. Покроем Γ открытыми множествами V_j, $1\leqslant j\leqslant m$, так чтобы $\Gamma\cap V_j$ являлось поверхностью с краем, а множество $V_j\setminus\Gamma$ состояло из двух связных компонент $V_j^{\pm}$, лежащих по разные стороны от Γ. Тогда на основании теоремы 3.7.1 сингулярные операторы
$$\varphi \to \phi^*\big|_{V_j\cap\Gamma}$$
ограничены $C^\mu(\Gamma)\to C^\mu(V_j\cap\Gamma)$ с соответствующими оценками своих норм. Совместно с теоремой 2.1.1 отсюда следует и ограниченность оператора R в $C^\mu(\Gamma)$. □

3.8. Криволинейные интегралы типа Коши

Все рассмотрения выше велись в рамках евклидового пространства $\mathbb{R}^k$. В дальнейшем основной интерес представляет случай $k=2$, в котором удобно рассматривать $\mathbb{R}^2$ как комплексную плоскость $\mathbb{C}$. В соответствии с этим используем комплексные обозначения $z=x+iy, t=t_1+it_2$ и т. д. точек плоскости. В плоском случае роль поверхностей играют кривые (подробно рассмотренные в пункте 2.5), так что обобщенные интегралы типа Коши (3.6.1) на гладкой поверхности с краем переходят в криволинейные интегралы
$$\phi(z) = \int\limits_{\Gamma} Q(t;t-z)\varphi(t)d_1t, \quad z\notin\Gamma, \tag{3.8.1}$$
на гладкой дуге Γ с ядром $Q\in\mathcal{H}_{-1}$, нечетным относительно ξ. Роль границы $\partial\Gamma$ здесь играет пара концов дуги.

Рассмотрим касательную прямую $L(a)$ к Γ в точке a с направляющим единичным вектором $e(a)=e_1+ie_2$ и нормалью $n(a)=ie(a)$. Выбор вектор-функции $e(t)\in C(\Gamma)$ определяет ориентацию кривой Γ. По отношению к этой ориентации полуокрестности $C^+(a)$ и $C^-(a)$, фигурирующие в (3.7.1), лежат, соответственно, слева и справа от кривой Γ. В определении (3.7.3) коэффициента $\sigma(a)$ в качестве нормали $n(a)$ выберем вектор $ie(a)$ так, что
$$\sigma(t_0) = \int\limits_{L(t_0)} Q(t_0;t-z_0)d_1t, \tag{3.8.2}$$

где точка z_0 лежит слева от $L(t_0)$, т. е. $\operatorname{Im}[(z_0 - t_0)/e(t_0)] > 0$. Отметим, что в рассматриваемом случае (3.6.14) равносильно условию

$$Q[t_0,\ e(t_0)] = 0. \tag{3.8.3}$$

Как отмечено в пункте 3.7, в рамках обобщенного интеграла типа Коши (3.8.1) охватывается не только классический интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{3.8.4}$$

где здесь и ниже $dt = e(t)d_1 t = dt_1 + i dt_2$ означает комплексный дифференциал на кривой, но и классический потенциал двойного слоя

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}[(t-z)\overline{e(t)}]}{|t-z|^2}\varphi(t)d_1 t, \quad z \in D, \tag{3.8.5}$$

для уравнения Лапласа. Очевидно, интегралы (3.8.4) и (3.8.5) можно записать в форме (3.8.1) по отношению к ядру $Q(t,\xi) = e(t)/(\pi i \xi)$ и $Q(t,\xi) = \operatorname{Im}[\xi\overline{e(t)}]/(\pi|\xi|^2)$ соответственно.

Теоремы 3.6.1, 3.6.2 и 3.7.1 для интегралов (3.8.4) и (3.8.5) хорошо известны. Подробное изложение граничных свойств интеграла типа Коши (3.8.4) приведено в классической монографии Н. И. Мусхелишвили [36], при этом в его формуле граничных значений коэффициент σ равен $1/2$. Эта формула впервые была открыта Ю. В. Сохоцким [63] и незаслуженно забыта. Через 35 лет она была вновь переоткрыта И. Племелем [78] и в настоящее время носит название формулы Сохоцкого—Племеля. При более общих предположениях она была рассмотрена И. И. Приваловым [43]. Кроме того, теорема 3.8.1 для этого интеграла справедлива для произвольного гладкого контура без требования его ляпуновости. В этой связи выделим класс ядер Q, обладающих аналогичным свойством.

Предположим, что по аналогии с (3.8.4) ядро интеграла (3.8.1) явно зависит от единичного касательного вектора $e(t) = e_1(t) + ie_2(t)$ на контуре Γ, точнее, этот интеграл имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma} Q(t; t-z, dt)\varphi(t) = \int\limits_{\Gamma} Q[z,t; t-z, e(t)]\varphi(t)d_1 t, \quad z \in D, \tag{3.8.6}$$

где $Q(t;\xi,\eta) = Q_1(z,t;\xi)\eta_1 + Q_2(z,t;\xi)\eta_2$, $\xi,\eta \in \mathbb{C}$, с функциями Q_j, которые, как и выше, по переменной ξ нечетны и принадлежат $\mathcal{H}_{-1}$. Функцию Q данного типа назовем ядром Коши, если выражение $Q(t;\xi,\xi)$ не зависит от ξ, т. е.

$$Q(t;\xi,\xi) = c(t), \quad \xi \in \mathbb{C}. \tag{3.8.7}$$

В этом случае и интеграл (3.8.6) называем интегралом типа Коши.

Поскольку интеграл (3.8.4) может быть записан в форме (3.8.6) с функцией $\pi i Q(\xi,\eta) = \eta/\xi$, условие (3.8.7) для него очевидным образом выполнено. Конечно, интеграл (3.8.6) зависит от ориентации кривой Γ, при переходе к противоположной ориентации, т. е. замене e на $-e$, интеграл меняет знак. Как и ранее запись $Q(t;\xi,\eta) \in C^{n(m)}(G)$ понимается по отношению к функциям Q_j, составляющим Q.

Значение ядра Коши иллюстрирует следующая лемма. Пусть ядро Коши $Q(\xi,\eta)$ не зависит от t, а также

$$2\sigma_0 = \int\limits_{\mathbb{T}} Q(\xi, d\xi), \tag{3.8.8}$$

где $\mathbb{T}$ означает единичную окружность, ориентированную против часовой стрелки. Заметим, что аналогичный интеграл по полуокружности $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{T}$ равен σ_0, поскольку преобразование $\xi \to -\xi$, переводящее Γ_1 на противоположную полуокружность Γ_2, меняет ориентацию кривой и, следовательно, не меняет выражения $Q(\xi, d\xi)$ (в силу нечетности $Q(\xi,\eta)$ по ξ).

Лемма 3.8.1. *Пусть $Q(\xi,\eta)$ является ядром Коши и конечная область D ограничена кусочно-гладким контуром Γ, ориентированным положительно по отношению к D (т. е. при* *движении по контуру в положительном направлении область D остается слева*). *Тогда в обозначениях* (3.8.8)

$$\int_\Gamma Q(t-z,dt) = 2\sigma_0, \quad z\in D, \tag{3.8.9}$$

и во внутренних точках $t_0\in\Gamma$ сингулярный интеграл

$$\int_\Gamma Q(t-t_0,dt) = \sigma_0. \tag{3.8.10}$$

Аналогично, если прямая L делит плоскость $\mathbb{C}$ на полуплоскости $P_\pm$ и ориентирована положительно по отношению к P_+, то сингулярный интеграл (*с особой точкой на бесконечности*)

$$\int_L Q(t-z,dt) = \pm\sigma_0, \quad z\in P_\pm. \tag{3.8.11}$$

Доказательство. По условию функция $Q(\xi,\xi)=Q_1(\xi)\xi_1+Q_2(\xi)\xi_2$ тождественно равна постоянной и, следовательно,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_i}+\frac{\partial Q_2}{\partial\xi_i}+Q_i=0, \quad i=1,2.$$

С другой стороны, функция $Q_i(\xi)$ однородна степени -1, т. е. $rQ_i(r\xi)=Q_i(\xi)$. Дифференцируя это тождество по r, приходим к соотношению Эйлера

$$\frac{\partial Q_i}{\partial\xi_1}+\frac{\partial Q_i}{\partial\xi_2}+Q_i=0, \quad i=1,2,$$

для однородных функций. Совместно с предыдущим соотношением отсюда

$$\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_2}=\frac{\partial Q_2}{\partial\xi_1}. \tag{3.8.12}$$

Обращаясь к первому предложению леммы, зафиксируем точку $z_0\in D$, и пусть $\varepsilon>0$ меньше расстояния $d(z_0,\Gamma)$. Тогда можно рассмотреть область $D_\varepsilon=D\cap\{|z-z_0|>\varepsilon\}$, ограниченную составным контуром $\partial D_\varepsilon=\Gamma\cap\Gamma_\varepsilon$, где Γ_ε — соответствующая окружность. Этот контур ориентируем положительно по отношению к D_ε, так что Γ_ε ориентирована по часовой стрелке. В силу (3.8.11) и формулы Грина из пункта 2.5

$$\int_{\partial D_\varepsilon} Q_1(z-z_0)dx+Q_2(z-z_0)dy=\int_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q_2}{\partial x}-\frac{\partial Q_1}{\partial y}\right)(z-z_0)d_2z=0.$$

Таким образом,

$$\int_\Gamma Q(t-z_0,dt)=\int_{\Gamma_\varepsilon} Q(t-z_0,dt),$$

где окружность в интеграле справа ориентирована против часовой стрелки. Поскольку замена $z-z_0=\varepsilon\xi$ переводит этот интеграл в интеграл (3.8.8), отсюда приходим к формуле (3.8.9).

Что касается формулы (3.8.10), то пусть t_0 — внутренняя точка контура, тогда согласно пункту 2.5 существует такое $\rho>0$, что при $\varepsilon\leqslant\rho$ пересечение $\Gamma\cap\{|z-t_0|\leqslant\varepsilon\}$ представляет собой гладкую дугу, содержащую t_0 внутри себя. Пусть Γ_ε означает часть окружности $|z-t_0|=\varepsilon$, лежащая вне области D, вместе с кривой $\Gamma\cap\{|z-t_0|\geqslant\varepsilon$ она образует контур, охватывающий точку t_0. На основании (3.8.9) отсюда

$$\int_\Gamma Q(t-t_0,dt)=\int_{\Gamma_\varepsilon} Q(t-z_0,dt). \tag{3.8.13}$$

При замене $t-t_0=\varepsilon\xi$ интеграл в правой части равенства переходит в интеграл вида (3.8.8) по дуге окружности $\mathbb{T}_\varepsilon$, радианная мера которой при $\varepsilon\to 0$ стремится к π. Более точно, дуга $\mathbb{T}_\varepsilon$ стремится к одной из полуокружностей, на которые разбивается $\mathbb{T}$ касательной к Γ в точке t_0. Поскольку при $\varepsilon\to 0$ левая часть равенства (3.8.13) стремится к соответствующему сингулярному интегралу, отсюда приходим к формуле (3.8.10).

Доказательство последнего утверждения леммы совершенно аналогично. Без ограничения общности можно считать, что прямая L проходит через начало координат. Пусть $z_0 \in P_+$ и полукруг $P_+ \cap \{|z - z_0| \geqslant R\}$ содержит внутри себя точку z_0. Применяя к этому полукругу формулу (3.8.9) и переходя к пределу при $R \to \infty$, получим равенство (3.8.11). $\square$

В случае ядра Коши $Q(t;\xi,\eta)$ теоремы 3.6.1 и 3.7.1 сохраняют свою силу для любой гладкой дуги. Сформулируем этот результат полностью.

Теорема 3.8.1. *Пусть область D не пересекается с гладкой дугой Γ и лежит с одной стороны от этой дуги, причем ее концы не принадлежат $\overline{D}$.*

Тогда функция

$$\phi(z) = \int\limits_{\Gamma} Q(t; t - z, dt)\varphi(t), \quad z \in D, \tag{3.8.14}$$

определяемая ядром Коши $Q(t;\xi,\eta) \in C^{\nu(1)}(\Gamma, \mathcal{H}_{-1})$ и плотностью $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, принадлежит $C^{\mu}(D)$ с оценкой нормы

$$|\phi|_{C^{\mu}(D)} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(2)}}|\varphi|_{C^{\mu}(\Gamma)},$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от расстояния от D до концов дуги Γ. При этом ее граничные значения связаны с соответствующим сингулярным интегралом формулой (3.7.6), *где*

$$\sigma(t_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} Q(t_0; \xi, d\xi). \tag{3.8.15}$$

Если ядро Коши $Q(u,t;\xi,\eta)$ зависит от параметра $u \in G$ и принадлежит $C^{\nu(1)}(G \times \Gamma, \mathcal{H}_{-1})$, то соответствующая функция $\phi(u,z)$ принадлежит $C^{\mu}(G \times D)$ с соответствующей оценкой норм.

Наконец, утверждение леммы 3.6.2 *для интегралов типа Коши сохраняет свою силу и для последовательности гладких дуг, сходящихся в классе C^1.*

Доказательство. Функцию ϕ можно продифференцировать под знаком интеграла:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(z) = -\int\limits_{\Gamma} Q_j(t; t - z, dt)\varphi(t), \; j = 1, 2,$$

по переменным x_j, $x_1 + ix_2 = z$, где $Q_j(t;\xi,\eta) = \partial Q/\partial \xi_j \in C^{\nu(0)}(\Gamma, \mathcal{H}_{-2})$. Как и в случае теоремы 3.6.1, первое утверждение сводится к доказательству оценки

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(z)\right| \leqslant C|Q_j|_{C^{\nu(0)}}|\varphi|_{C^{\mu}} d^{\mu-1}(z, \Gamma), \quad z \in D. \tag{3.8.16}$$

Аналогично (3.6.7) запишем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \phi_0 + \phi_1$$

со слагаемыми

$$\phi_0(z) = \int\limits_{\Gamma} [Q_j(t; t - z, dt)\varphi(t) - Q_j(a; t - z, dt)\varphi(a)], \quad \phi_1(z) = \varphi(a)\int\limits_{\Gamma} Q_j(a; t - z, dt).$$

Справедливость оценки (3.8.16) для ϕ_0 доказывается совершенно аналогично теореме 3.6.1. Что касается ϕ_1, то дополним Γ до полного контура дугой $\widetilde{\Gamma}$ так, чтобы кусочно-гладкий контур $\Gamma \cup \widetilde{\Gamma}$ охватывал область D. Тогда, если этот контур снабдить ориентацией, совпадающей с ориентацией дуги Γ, то на основании леммы 3.8.1

$$\int\limits_{\Gamma \cup \widetilde{\Gamma}} Q(a; t - z, dt) = \int\limits_{\mathbb{T}} Q(a; \xi, d\xi, \quad z \in D.$$

Следовательно, дифференцирование этой формулы приводит к равенству $\phi_1(z) + \widetilde{\phi}_1(z)$, $z \in D$, где $\widetilde{\phi}_1$ определяется аналогично ϕ_1 по отношению к $\widetilde{\Gamma}$. Поскольку дугу $\widetilde{\Gamma}$ можно выбрать так, чтобы расстояние от нее до области D было положительно, оценка (3.8.18) для функции $\widetilde{\phi}_1$, а вместе с ней и для ϕ_1 становится очевидной.

То, что коэффициент σ в формуле (3.7.6) дается равенством (3.8.15), вытекает из последнего утверждения леммы 3.8.1. Наконец, последнее утверждение теоремы с учетом того, что лемма 2.4.1 справедлива для последовательности гладких дуг, сходящихся в классе C^1, доказывается совершенно аналогично лемме 3.6.2. □

Обсудим еще вопрос дифференцируемости интегралов типа Коши. Введем на гладкой ориентируемой дуге Γ с концами a, b операцию дифференцирования $\varphi' = \varphi'_s$ по параметру длины дуги, которая, очевидно, действует $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$. По отношению к произвольной параметризации $\gamma: \ [0,1] \to \Gamma$ ее можно определить равенством $\varphi' \circ \gamma = (\varphi \circ \gamma)'|\gamma'|^{-1}$. Например, для производной функции $\varphi(t) = t$ имеем выражение $t' = e(t)$. Из этих же соображений формула Ньютона—Лейбница в рассматриваемом случае принимает вид

$$\int_\Gamma \varphi'(t) d_1 t = \varphi(b) - \varphi(a), \tag{3.8.17}$$

где дуга предполагается ориентированной от b к a.

Если область D примыкает к некоторой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus \partial\Gamma$ и лежит слева от нее, то граничное значение φ^+ функции $\varphi \in C^1(\overline{D}$ непрерывно дифференцируемо на Γ_0 и

$$(\varphi^+)' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^+ e_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^+ e_2, \quad z = x_1 + i x_2, \tag{3.8.18}$$

где $e \in C(\Gamma)$ — единичный касательный вектор, направление которого согласовано с выбранной ориентацией.

Рассмотрим еще случай, когда $\psi(t_0, t) \in C^1(\Gamma \times \Gamma)$ с частными производными $\partial\psi/\partial t_0$ и $\partial\psi/\partial t$ по соответствующим переменным. Тогда

$$[\psi(t,t)]' = \frac{\partial\psi}{\partial t_0}(t,t) + \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,t). \tag{3.8.19}$$

Обратимся к функции ϕ, определяемой интегралом типа Коши (3.8.14).

Лемма 3.8.2. *Пусть гладкая дуга Γ с концами a, b ориентирована от a к b и не пересекается с областью D, ядро Коши $Q(t;\xi,\eta) \in C^{1(0)}(\Gamma)$ и функция $\varphi \in C^1(\Gamma)$.*

Тогда для функции $\phi(z)$, определяемой равенством (3.8.14)*, справедлива формула дифференцирования*

$$\begin{gathered}\left(\eta_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \eta_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)(z) = Q(a; a - z, \eta)\varphi(a) - Q(b; b - z, \eta)\varphi(b) + \\ + \int_\Gamma Q_0(t, t - z, \eta)\varphi(t) d_1 t + \int_\Gamma Q(t, t - z, \eta)\varphi'(t) d_1 t,\end{gathered} \tag{3.8.20}$$

где $Q_0(t;\xi,\eta) = (\partial Q/\partial t)(t;\xi,\eta)$.

Доказательство. Дифференцирование функции (3.8.14) под знаком интеграла дает равенство

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(z) = -\int_\Gamma \frac{\partial Q}{\partial \xi_j}(t; t - z, dt)\varphi(t), \quad j = 1, 2. \tag{3.8.21}$$

Применяя к слагаемым $Q(t;\xi,dt) = Q_1(t,\xi)e_1(t) + Q_2(t,\xi)e_2(t)$ соотношения (3.8.12), получим:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(z) = -\int_\Gamma \left[\frac{\partial Q_j}{\partial \xi_1}(t; t - z)e_1(t) + \frac{\partial Q_j}{\partial \xi_2}(t; t - z)e_2(t)\right]\varphi(t) d_1 t.$$

На основании (3.8.18) выражение в квадратных скобках представляет производную по t функции $Q_j(t_0, t - z)$ с последующей подстановкой $t_0 = t$. Следовательно,

$$\int_\Gamma \frac{\partial Q}{\partial \xi_j}(t; t - z, dt)\varphi(t) = \int_\Gamma \left[\frac{d}{dt} Q_j(t_0, t - z)\right]\bigg|_{t_0 = t} \varphi(t) d_1 t.$$

Применяя (3.8.19) к функции $\psi(t_0,t) = Q_j(t_0; t-z)\varphi(t)$, выражение в квадратных скобках можно представить в форме

$$\frac{d}{dt}[Q_j(t, t-z)] - \frac{\partial Q_j}{\partial t}(t; t-z).$$

В результате с учетом (3.8.17) получим:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial Q}{\partial \xi_j}(t; t-z, dt)\varphi(t) = Q_j(b; b-z)\varphi(b) - Q_j(a; a-z)\varphi(a) - \\ - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial Q_j}{\partial t}(t; t-z)\varphi(t) d_1 t - \int\limits_{\Gamma} Q_j(t; t-z)\varphi'(t) d_1 t, \quad j = 1, 2.\end{gathered} \tag{3.8.22}$$

Подставляя это выражение в (3.8.21), получим равенства, которые в форме линейной комбинации частных производных переходят в (3.8.20). □

Заметим, что лемма сохраняет свою силу и для гладкого контура, в этом случае внеинтегральные члены в правой части (3.8.20) отсутствуют.

Применяя к первому и второму интегралам в правой части (3.8.20) теоремы, соответственно, 3.6.1 и 3.8.1, приходим к соответствующему аналогу теоремы 3.6.1 для пространства $C^{1,\mu}$.

Теорема 3.8.2. *Пусть в условиях теоремы* 3.8.1 *дуга* $\Gamma \in C^{1,\nu}$, *ядро Коши* $Q(t;\xi,\eta) \in C^{1,\nu(2)}(\Gamma, \mathcal{H}_{-1})$ *и плотность* $\varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < 1$.

Тогда функция ϕ, *определяемая интегралом* (3.8.14), *принадлежит* $C^{1,\mu}(D)$ *с оценкой нормы*

$$|\phi|_{C^{1,\mu}(D)} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(2)}}|\varphi|_{C^{1,\mu}(\Gamma)},$$

где постоянная $C > 0$ *зависит только от расстояния от* D *до концов дуги* Γ.

3.9. Криволинейные сингулярные интегралы

Рассмотрим сингулярный интеграл Коши

$$\psi(t_0) = \int\limits_{\Gamma} Q(t; t-t_0, dt)\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.9.1}$$

отвечающий интегралу типа Коши (3.8.14), на гладком контуре. Случай общей кусочно-гладкой кривой будет изучен в следующем пункте 3.10 в рамках весовых гельдеровых пространств.

Аналогично теореме 3.7.2 в рассматриваемом случае теорема 3.8.1 приводит к соответствующему результату.

Теорема 3.9.1. *Пусть на ориентируемом гладком контуре* Γ *задано ядро Коши* $Q(t;\xi,\eta) \in C^{\nu(1)}(\Gamma, \mathcal{H}_{-1})$. *Тогда сингулярный оператор* K, *определяемый равенством* (3.9.1), *ограничен в пространстве* $C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, *с оценкой* $|K|_{\mathcal{L}} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}$ *своей нормы.*

Если ядро $Q(u, t; \xi, \eta)$ *зависит от параметра* $u \in G$ *и принадлежит* $C^{\nu(2)}(G \times \Gamma, \mathcal{H}_{-1})$, *то функция* $\psi(u, z)$ *принадлежит* $C^{\mu}(G \times D)$ *с соответствующей оценкой норм.*

С помощью леммы 3.8.2 эту теорему можно дополнить аналогичным результатом для пространства $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Теорема 3.9.2. *При дополнительном предположении*

$$\Gamma \in C^{1,\nu}, \quad Q(t;\xi,\eta) \in C^{1,\nu(2)}(\Gamma, \mathcal{H}_{-1}), \tag{3.9.2}$$

сингулярный оператор K *ограничен в пространстве* $C^{1,\mu}(\Gamma)$ *с оценкой* $|K|_{\mathcal{L}} \leqslant C|Q|_{C^{1,\nu(2)}}$ *своей нормы. При этом для* $\psi = K\varphi$ *имеет место формула дифференцирования*

$$\psi'(t_0) = \int\limits_{\Gamma} Q_0[t, t-t_0, e(t_0)]\varphi(t) d_1 t + \int\limits_{\Gamma} Q[t, t-t_0, e(t_0)]\varphi'(t) d_1 t, \tag{3.9.3}$$

где $Q_0(t;\xi,\eta) = (\partial Q/\partial t)(t;\xi,\eta)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, Γ можно считать простым контуром, ограничивающим область D. Пусть ϕ определяется интегралом типа Коши (3.8.14) в этой области. Тогда согласно теореме 3.8.2 функция ϕ^+ принадлежит $C^{1,\mu}(\Gamma)$ и с учетом (3.8.18) ее производная

$$(\phi^+)' = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\right)^+ e_1 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_2}\right)^+ e_2, \quad z = x_1 + ix_2.$$

К частным производным в правой части этого равенства можно применить формулу (3.8.20), где нужно положить $\eta = e(t_0)$. Напомним, что в рассматриваемом случае гладкого контура внеинтегральные члены в этой формуле отсутствуют. Таким образом,

$$\left[e_1(t_0)\frac{\partial\phi}{\partial x_i} + e_2(t_0)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right](z) = \int_\Gamma Q_0(z,t,t-z)\varphi(t)d_1t + \int_\Gamma Q[z,t,t-z,e(t_0)]\varphi'(t)d_1t.$$

Применяя к интегралам этого равенства формулу (3.8.2), получим:

$$\begin{gathered}(\phi^+)'(t_0) = \sigma^0(t_0)\varphi(t_0) + \sigma(t_0)\varphi'(t_0) + \\ + \int_\Gamma Q_0[t;t-t_0,e(t_0)]\varphi(t)d_1t + \int_\Gamma Q[t,t-t_0,e(t_0)]\varphi'(t)d_1t,\end{gathered} \tag{3.9.4}$$

где положено

$$\sigma_0(t_0) = \int_{L(t_0)} Q_0[t_0,t-z_0,e(t_0)]d_1t, \quad \sigma(t_0) = \int_{L(t_0)} Q[t_0,t-z_0,e(t_0)]d_1t.$$

Напомним, что здесь $L(t_0)$ есть касательная прямая к Γ в точке t_0 с направляющим единичным вектором $e(t_0) = e_1 + ie_2$, оставляющим окрестность $C^+(t_0)$ слева, и точка z_0 лежит слева от $L(t_0)$, т. е. $\operatorname{Im}[(z_0 - t_0)/e(t_0)] > 0$.

Ядро Q_0 вместе с Q также является ядром Коши. В самом деле, дифференцирование по t равенства $c(t) = Q(t;\xi,\xi)$ дает соотношение $c'(t) = Q_0(t;\xi,\xi)$. Поэтому на основании последнего утверждения леммы 3.8.1 приходим к равенству

$$\sigma_0(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Q_0(t;\xi,d\xi), \quad \sigma(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Q(t;\xi,d\xi),$$

откуда аналогично предыдущему получаем соотношение $\sigma' = \sigma_0$. Следовательно, первые два слагаемых в правой части (3.9.4) можно записать в виде $(\sigma\varphi)'(t_0)$, и дифференцирование равенства (3.8.3) с верхним знаком совместно с (3.9.4) приводит к (3.9.3).

В свою очередь, применяя к равенству (3.9.3) теорему 3.8.1, приходим к ограниченности сингулярного оператора K в $C^{1,\mu}(\Gamma)$ с соответствующей оценкой его нормы. $\square$

Часто возникает ситуация, когда ядро Коши $Q(t_0,t;\xi,\eta)$ зависит от двух переменных $t_0, t \in \Gamma$. Переменную $t_0 = u$ можно рассматривать независимо как параметр. Тогда в случае $Q \in C^{1,\nu(2)}(\Gamma\times\Gamma)$ сингулярный интеграл

$$\psi(u,t_0) = \int_\Gamma Q(u,t;t-t_0,dt)\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.9.5}$$

можно дифференцировать по параметру u. Возможность этой операции обосновывается совершенно аналогично лемме 3.4.2. Таким образом,

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,t_0) = \int_\Gamma \frac{\partial Q}{\partial u}(u,t;t-t_0,dt)\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma.$$

В случае $u = t_0$ интеграл (3.9.5) переходит в

$$\psi(t_0) = \int_\Gamma Q(t_0,t;t-t_0,dt)\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.9.6}$$

и с учетом (3.8.19) отсюда приходим к несколько видоизмененной формуле дифференцирования (3.9.4), в первом интеграле которой выражение $Q_0[t_0; t-t_0, e(t_0)]$ следует заменить на $Q_0(t_0, t; t-t_0)$ с ядром

$$Q_0(t_0, t; \xi) = \frac{\partial Q}{\partial t_0}[t_0, t; \xi, e(t)] + \frac{\partial Q}{\partial t}[t_0, t; \xi, e(t_0)]. \tag{3.9.7}$$

Простейшим представителем ядер Коши служит функция

$$Q(t_0, t; \xi, \eta) = \frac{k(t_0, t)\eta}{\pi i \xi}, \tag{3.9.8}$$

для которой необходимое требование (3.8.7) очевидным образом выполнено. Ясно также, что условия $k \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$ и $Q \in C^{\nu(m)}$ равносильны для любого m. Для этого ядра с учетом соотношения $dt = e(t)d_1 t$ сингулярный оператор (3.9.1) принимает вид классического оператора Коши

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{k(t_0, t)\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{3.9.9}$$

Заметим, что формула дифференцирования (3.9.3), (3.9.6) в рассматриваемом случае принимает вид

$$(K\varphi)'(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \left[\frac{\partial k}{\partial t_0}(t_0, t)e(t) + \frac{1}{\pi i}\frac{\partial k}{\partial t}(t_0, t)e(t_0)\right]$$
$$+ \frac{\varphi(t)d_1 t}{t - t_0} + \int\limits_\Gamma \frac{k(t_0, t)\varphi'(t)e(t_0)d_1 t}{t - t_0}.$$

С помощью видоизмененной операции дифференцирования

$$D\varphi = e^{-1}\varphi' \tag{3.9.10}$$

с учетом соотношения $dt = e(t)d_1 t$ эту формулу можно переписать в операторном виде

$$DK = K_0 + KD, \tag{3.9.11}$$

где K_0 определяется аналогично (3.9.5) по отношению к функции $k_0 = (D_{t_0} + D_t)k$.

Следующая лемма показывает, что в виде (3.9.8) можно представить любое ядро Коши.

Лемма 3.9.1. *Пусть гладкий контур Γ принадлежит $C^{1,\nu}$ и ядро $Q_0(t_0, t; \xi) \in C^{\nu(1)}(\Gamma \times \Gamma, \mathcal{H}_0)$ четно по переменной ξ. Тогда функция $k(t_0, t) = Q_0(t_0, t; t - t_0)$ принадлежит $C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$ с оценкой $|k|_{C^\nu} \leqslant C|Q_0|_{C^{\nu(0)}}$ соответствующих норм.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство по отношению к каждой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$. Выберем параметризацию $\gamma : [0, 1] \to \Gamma_0$ этой дуги класса $C^{1,\mu}[0, 1]$. Поскольку эта параметризация является липшицевым отображением, лемму достаточно установить по отношению к функции $k_0(s_0, s) = k[\gamma(s_0), \gamma(s)]$ в квадрате $0 \leqslant s, s_0 \leqslant 1$. В силу однородности и четности ядра Q_0 эту функцию можно представить в виде

$$k_0(s_0, s) = Q_0[\gamma(s_0), \gamma(s); q(s_0, s)], \quad q(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0}.$$

Как и при доказательстве леммы 2.4.1, убеждаемся, что функция q принадлежит $C^\nu([0, 1] \times [0, 1])$ и по модулю отграничена от нуля. Поэтому остается к функции $Q_0[\gamma(s_0), \gamma(s); q(s_0, s)]$ применить лемму 3.1.2. $\square$

Таким образом, если ядро Коши $Q(t_0, t; \xi, \eta)$ принадлежит $C^{\nu(1)}(\Gamma \times \Gamma, \mathcal{H}_0)$, то к функции $Q_0(t_0, t; \xi, \eta) = \xi Q(t_0, t; \xi, \eta)$ можно применить лемму 3.9.1. Следовательно, оператор K, определяемый равенством (3.9.1), можно представить в виде (3.9.9) с ядром $k(t_0, t) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$.

В случае постоянной функции $\pi i k(t_0, t) = 1$ для оператора (3.9.9) используем специальное обозначение

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{3.9.12}$$

Этому оператору отвечает классический интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma, \tag{3.9.13}$$

с аналогичным (3.9.8) ядром Коши $2\pi i Q(\xi,\eta) = \eta/\xi$, который определяет аналитическую вне Γ функцию, т. е. функцию, аналитическую в каждой связной компоненте открытого множества $\mathbb{C}\setminus\Gamma$. Для данного ядра формула (3.8.8) переходит в

$$2\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{d\xi}{\xi},$$

так что по формуле Коши для аналитической функции имеем значение $\sigma = 1/2$ и (3.8.3) переходит в классическую формулу Сохоцкого—Племеля

$$2\phi^{\pm} = \pm\varphi + S\varphi. \tag{3.9.14}$$

В случае постоянной плотности $\varphi = 1$ функция

$$\chi(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.9.15}$$

постоянна на каждой связной компоненте Γ. Более точно ее описывает следующее предложение.

Лемма 3.9.2. *Пусть гладкий ориентируемый контур* Γ *составлен из компонент* Γ_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *и* $\sigma_k = 1$ $(\sigma_k = -1)$, *если контур* Γ_k *ориентирован против часовой стрелки* (*по часовой стрелке*). *Тогда*

$$\chi(t_0) = \sigma_k + 2{\sum_j}' \sigma_j, \quad t_0 \in \Gamma_k,$$

где штрих означает, что суммирование ведется по всем j, *для которых контур* Γ_j *охватывает* Γ_k.

Доказательство. Пусть сначала $n = 1$, в этом случае без ограничения общности можно считать $\sigma = 1$. Если $\phi(z)$ определяется (3.9.13) с $\varphi = 1$, то по формуле Коши $\phi(z) = 1$ для точек z внутри Γ и $\phi(z) = 0$ для точек z, расположенных вне контура. На основании (3.9.14) отсюда $\chi(t_0) = 1$.

В общем случае можно записать

$$\chi(t_0) = \sigma_k + \sum_{j\neq k} \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_j} \frac{dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma_k,$$

и остается применить к слагаемым в правой части формулу Коши. □

Из леммы, в частности, следует, что функция χ постоянна, если контур Γ служит границей некоторой области и ориентирован положительно по отношению к ней.

Обсудим вопрос о композиции двух сингулярных интегралов. Начнем со следующего вспомогательного предложения о перестановке интегралов специального вида на гладких контурах.

Лемма 3.9.3.

(a) *Для любой функции* $f \in C^{\mu}(\Gamma\times\Gamma)$ *правомерна перестановка порядка интегрирования*:

$$\int\limits_{\Gamma} dt_0 \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_0,t)dt}{t-t_0} = \int\limits_{\Gamma} dt \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_0,t)dt_0}{t-t_0}. \tag{3.9.16}$$

(b) *Если* $f \in C^{\mu}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, *то*

$$\int\limits_{\Gamma_1} dt_0 \int\limits_{\Gamma_2} \frac{f(t_0,t)dt}{t-t_1} = \int\limits_{\Gamma_2} dt \int\limits_{\Gamma_1} \frac{f(t_0,t)dt_0}{t-t_1} \tag{3.9.17}$$

для любой точки $t_1 \in \mathbb{C}$.

Доказательство. (a) Не ограничивая общности, можно считать, что Γ является простым контуром, ориентированным против часовой стрелки. Если $f(t,t) \equiv 0$, то функция $(t-t_0)^{-1} f(t_0,t)$ имеет слабую особенность, и равенство (3.9.16) составляет содержание теоремы Фубини из пункта 1.8. Поэтому его достаточно доказать для функции $f(t,t) = \varphi(t)$. В этом случае с учетом леммы 3.9.2 это равенство можно переписать в форме

$$\int\limits_{\Gamma} (S\varphi)(t_0)dt_0 = -\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)dt. \tag{3.9.18}$$

Рассмотрим аналитическую вне Γ функцию $\phi(z)$, определяемую интегралом типа Коши (3.9.13). В силу (3.9.14) и формулы Коши, примененной к ϕ в области, заключенной внутри Γ,

$$\int\limits_{\Gamma} (S\varphi)(t_0)dt_0 = \int\limits_{\Gamma} [\phi^+(t_0) + \phi^-(t_0)]dt_0 = \int\limits_{\Gamma} \phi^-(t_0)dt_0.$$

Пусть Γ содержится внутри окружности Γ_0, также ориентированной против часовой стрелки, и область D заключена между этими контурами. Тогда по теореме Коши, примененной к функции ϕ в области D, получим

$$\int\limits_{\Gamma} \phi^-(t_0)dt_0 = \int\limits_{\Gamma_0} \phi(t_0)dt_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} dt_0 \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}.$$

Поскольку контуры Γ и Γ_0 не пересекаются, в правой части этого равенства можно изменить порядок интегрирования. Поскольку по формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)dt \int\limits_{\Gamma_0} \frac{dt_0}{t-t_0} = -\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)dt,$$

равенство (3.9.18) установлено.

(b) Не ограничивая общности, можно считать, что $t_1 \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Если $t_1 \in \Gamma_1$, то, как и в случае (a), можно f заменить функцией $\varphi(t) = f(t_1,t)$, зависящей только от t. В этом случае левая и правая части (3.9.17) обращаются в нуль. Аналогично, если $t_1 \in \Gamma_2$, то f можно заменить функцией $\varphi(t_0) = f(t_0,t_1)$, зависящей только от t_0. В этом случае также левая и правая части (3.9.17) обращаются в нуль. □

Лемма 3.9.3 позволяет получить известную формулу Пуанкаре—Бертрана [36] перестановки двух сингулярных интегралов на гладком контуре. Эту формулу приведем в следующем виде.

Теорема 3.9.3. *Если $f(t_1,t_0,t) \in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma\times\Gamma)$, то для любой точки $t_1 \in \Gamma$ имеет место равенство*

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{dt_0}{t_0-t_1}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_1,t_0,t)dt}{t-t_0} = -\pi^2 f(t_1,t_1,t_1) + \int\limits_{\Gamma} dt \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_1,t_0,t)dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)}. \tag{3.9.19}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_1,t_0,t)dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)} = \frac{g(t_1,t,t_1) - g(t_1,t,t)}{t-t_1} \tag{3.9.20}$$

с функцией

$$g(t_1,t,t_2) = \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_1,t_0,t)dt_0}{t_0-t_2},$$

которая согласно теореме 3.9.1 принадлежит $C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma\times\Gamma)$.

Доказательство. Положим $f^0(t_1,t_0,t) = f(t_1,t_0,t) - f(t_1,t,t)$ и $f^1(t_1,t_0,t) = f(t_1,t,t) - f(t,t,t)$, так что

$$f(t_1,t_0,t) = f^0(t_1,t_0,t) + f^1(t_1,t_0,t) + f(t,t,t), \tag{3.9.21}$$

и покажем сначала справедливость формулы (3.9.14) для f^j, т. е. равенство

$$\int_\Gamma \frac{dt_0}{t_0-t_1}\int_\Gamma \frac{f^j(t_1,t_0,t)dt}{t-t_0} = \int_\Gamma dt\int_\Gamma \frac{f^j(t_1,t_0,t)dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)}, \quad j=1,2. \tag{3.9.22}$$

Пусть для краткости $G=\Gamma\times\Gamma\times\Gamma$ и $G^0=\{(t_1,t_0,t)\in G,\ t=t_0\}$, $G^1=\{(t_1,t_0,t)\in G,\ t=t_1\}$. По условию f^j принадлежит $C^\nu(G)$ для некоторого $\nu>\mu$ и, очевидно, обращается в нуль на G^j. Если функция f^0 обращается в нуль в некоторой окрестности множества G^0, то функция $f(t_0,t)=f^0(t_1,t_0,t)(t-t_0)^{-1}$ принадлежит $C^\mu(\Gamma\times\Gamma)$ и (3.9.21) является следствием соотношения (3.9.17) леммы 3.9.3. Аналогично, если f^1 обращается в нуль в некоторой окрестности множества G^1, то функция $f(t_0,t)=f^1(t_1,t_0,t)(t-t_1)^{-1}$ принадлежит $C^\mu(\Gamma\times\Gamma)$ и (3.9.22) является следствием соотношения (3.9.16) этой леммы.

В общем случае на основании теоремы 2.2.1 для фиксированного $\mu<\nu_1<\nu$ существует сходящаяся к f^j в пространстве $C^{\nu_1}(G)$ последовательность функций $f^j_n\in C^{\nu_1}(G)$, $n=1,2,\ldots$, каждая из которых обращается в нуль в окрестности G^j. Тогда на основании теоремы 3.9.1 в равенстве (3.9.22), записанном для f^j_n, можно перейти к пределу при $n\to\infty$. Нужно только левую часть этого равенства для f^j_n преобразовать аналогично (3.9.20) в форме

$$\int_\Gamma \frac{f^j_n(t_1,t_0,t)dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)} = \frac{g^j_n(t_1,t,t_1)-g^j_n(t_1,t,t)}{t-t_1}$$

и применить теорему 3.9.1 к последовательности g^j_n.

Итак, для функций f^0,f^1 теорема установлена, и в соответствии с (3.9.21) без ограничения общности можно считать, что функция f зависит только от переменной t. Обозначая ее $\varphi(t)$, дело сводится к доказательству равенства

$$\int_\Gamma \frac{dt_0}{t_0-t_1}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = -\pi^2\varphi(t_1)+\int_\Gamma \varphi(t)dt\int_\Gamma \frac{dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)}. \tag{3.9.23}$$

Не ограничивая общности, Γ можно считать простым контуром. В самом деле, в общем случае пусть точка t_1 принадлежит связной компоненте Γ_1 контура Γ и $\Gamma_2=\Gamma\setminus\Gamma_1$. Тогда при $i\neq j$ функция $f(t_0,t)=\varphi(t)(t-t_0)^{-1}$ принадлежит $C^\mu(\Gamma_i\times\Gamma_j)$ и на основании леммы 3.9.3(b)

$$\int_{\Gamma_i} \frac{dt_0}{t_0-t_1}\int_{\Gamma_j} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0} = \int_{\Gamma_j} \varphi(t)dt\int_{\Gamma_i} \frac{dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)}. \tag{3.9.24}$$

Поскольку и $f(t_0,t)=\varphi(t)(t_0-t_1)^{-1}\in C^\mu(\Gamma_1\times\Gamma_1)$, на основании леммы 3.9.3(a) равенство (3.9.24) справедливо для $i=j=2$.

Итак, пусть контур Γ является простым, причем без ограничения общности его можно считать ориентированным против часовой стрелки. В этом случае согласно лемме 3.9.2 функция g в (3.9.20) равна постоянной πi, и равенство (3.9.23) принимает вид

$$S(S\varphi)=\varphi. \tag{3.9.25}$$

Пусть аналитическая функция $\phi(z)$ определяется интегралом типа Коши (3.9.13) и рассматривается в конечной области D внутри Γ. Тогда по формуле Коши

$$\phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi^+(t)dt}{t-z}, \quad z\in D.$$

Применяя к интегралу типа Коши с плотностью ϕ^+ снова формулу (3.9.14), получим $\phi^+=(\phi^++S\phi^+)/2$. Подставляя сюда выражение (3.9.14) для верхнего знака, приходим к равенству $(\varphi+S\varphi)=(1+S)(\varphi+S\varphi)/2$, которое равносильно (3.9.25), что завершает доказательство теоремы. □

Обозначим $\mathcal{K}(C^{\mu+0})$ класс всех сингулярных операторов вида (3.9.9) с ядром $k(t_0,t)\in C^{\mu+0}(\Gamma\times\Gamma)$, и пусть его подкласс $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ выделяется условием $k(t,t)\equiv 0$. Операторы последнего класса определяются интегралами со слабой особенностью и согласно теореме 3.2.3

ограничены $C(\Gamma) \to C^\mu(\Gamma)$. В частности, они компактны в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. Если дополнительно $k \in C^{1,\mu+0}(\Gamma \times \Gamma)$, то на основании формулы дифференцирования (3.9.10), (3.9.11) эти операторы компактны и в $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Очевидно, если функцию $a \in C^{\mu+0}(\Gamma)$ рассматривать как оператор умножения $\varphi \to a\varphi$, то $aS - Sa \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$. Из этих же соображений $K - aS \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ по отношению к функции $a(t) = k(t,t)$. Из теоремы 3.9.2 непосредственно следует, что произведение двух операторов $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(C^{\mu+0})$ представимо в виде

$$K_1K_2 = a + K_0, \ K_0 \in \mathcal{K}_0(C^{\mu+0}) \tag{3.9.26}$$

с функцией $a(t) = k_1(t,t)k_2(t,t)$. Что касается функции $k_0(t_0,t)$, определяющей оператор K_0, то согласно (3.9.20) после соответствующих переобозначений она определяется равенством

$$k_0(t_1,t) = g(t_1,t,t_1) - g(t_1,t,t), \quad g(t_1,t,t_2) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{k_1(t_1,t_0)k_2(t_0,t)dt_0}{t_0 - t_2},$$

Таким образом, класс $\mathcal{K}(C^{\mu+0})$ является алгеброй и содержит $\mathcal{K}_0(C^{\mu+0})$ в качестве двустороннего идеала.

Применительно к случаю $K_1 = K_2 = S$ в обозначениях (3.9.15) формула (3.9.26) переходит в

$$S^2 = 1 + K_0, \quad K_0 = \chi S - S\chi. \tag{3.9.27}$$

В частности, в соответствии с замечанием к лемме 3.9.2 имеем равенство $S^2 = 1$ в случае, когда контур Γ служит границей области D и ориентирован положительно по отношению к этой области.

В качестве следствия леммы 3.9.3(а) отметим еще, что относительно билинейной формы

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int\limits_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt$$

оператор K допускает союзный оператор K' того же типа в смысле определения из пункта 1.3, т.е в смысле тождества $\langle S\varphi,\psi\rangle = -\langle\varphi,S\psi\rangle$, и этот оператор определяется функцией $k'(t_0,t) = -k(t,t_0)$.

3.10. Весовые C^μ-оценки интегралов типа Коши

Рассмотрим обобщенный интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \int\limits_\Gamma Q(t;t-z)\varphi(t)d_1t, \quad z \notin \Gamma, \tag{3.10.1}$$

и его частный случай — интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \int\limits_\Gamma Q(t;t-z,dt)\varphi(t), \quad z \notin \Gamma, \tag{3.10.2}$$

на кусочно-гладкой кривой Γ, относительно которой сохраняется терминология, введенная в пункте 2.5. Пусть конечное множество точек F содержит все граничные точки кривой и бесконечно удаленную точку ∞, за исключением которой содержится в Γ. Таким образом, каждая связная компонента множества $\Gamma \setminus F$ является либо простым гладким контуром, либо открытой гладкой дугой (сомкнутой или разомкнутой). Кривая Γ может быть и неограниченной, в этом случае она рассматривается как кусочно-гладкая кривая на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ и содержит точку ∞. При дробно-линейном преобразовании, переводящем Γ в ограниченную кривую, последняя будет кусочно-гладкой в обычном смысле. В случае $\infty \in \overline{D} \setminus \Gamma$ кривая Γ ограничена и множество D является окрестностью ∞.

Как и в пункте 2.5, кривую Γ можно представить в виде

$$\Gamma \setminus F = \Gamma_0 \cup \dot\Gamma_1 \cup \ldots \cup \dot\Gamma_m, \tag{3.10.3}$$

где Γ_0 является гладким контуром (вообще говоря, составным), $\dot\Gamma_j$ — открытыми гладкими дугами и все эти кривые попарно не пересекаются.

Напомним (см. пункт 2.5), что открытая гладкая дуга $\dot\Gamma_j$ задается параметризацией $\gamma_j \in C^1[0,1]$, которая взаимно однозначна на полуоткрытых интервалах $(0,1]$ и $[0,1)$ и ее производная $\gamma_j'(s) \neq 0$,

$0 \leqslant s \leqslant 1$. Запись $\dot{\Gamma}_j \in C^{1,\nu}$ по определению означает, что $\gamma_j \in C^{1,\nu}[0,1]$. Это условие можно несколько ослабить. Как отмечено в пункте 2.10, из теоремы 2.10.2 следует, что классы $C^{1,\nu}[0,1]$ и $C^{1,\nu}_{(1+\nu)}([0,1];0,1)$ совпадают (с эквивалентностью норм). При этом имеют место вложения банаховых пространств

$$C^{1,\nu}_{(1+\nu)}([0,1];0,1) \subseteq C^{1,\nu}_{(1+\varepsilon)}([0,1];0,1) \subseteq C^{1,\varepsilon}_{(1+\varepsilon)}([0,1];0,1), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \nu.$$

В этой связи условимся класс $C^{1,\nu}_{(1+0)}$ гладких открытых дуг $\dot{\Gamma}_j$ описывать по отношению к их параметризации условием $\gamma_j \in C^{1,\nu}_{(1+\varepsilon)}([0,1];0,1)$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Ясно, что этот класс содержит $C^{1,\nu}$ и содержится в общем классе $C^{1,+0}$ ляпуновских открытых дуг.

Для $\tau \in F$ обозначим $B_\tau(\rho)$ круг $\{|z-\tau| \leqslant \rho\}$ при $\tau \neq \infty$ и внешность круга $\{|z| \geqslant 1/\rho\}$ при $\tau = \infty$. При достаточно малом ρ пересечение Γ с $B_\tau(\rho)$, $\tau \in \Gamma$, разбивается на некоторое число n_τ гладких дуг с общим концом τ, т. е.

$$\Gamma \cap B_\tau(\rho) = \bigcup_{j=1}^{n_\tau} \Gamma_{\tau,j}, \tag{3.10.4}$$

где гладкие дуги $\Gamma_{\tau,j}$ попарно пересекаются по точке τ. Заметим, что сумма всех чисел n_τ совпадает с $2m$.

Удобно число ρ в (3.10.4) выбирать столь малым, чтобы все дуги $\Gamma_{\tau,j}$, $1 \leqslant j \leqslant n_\tau$, были радиальными по отношению к концу τ. Соответственно этому они определяются радиальными параметризациями

$$\gamma_{\tau,j}(r) = \begin{cases} re^{if_{\tau,j}(r)}, & \tau \neq \infty, \\ r^{-1}e^{if_{\tau,j}(r)}, & \tau = \infty, \end{cases} \quad 0 < r \leqslant \rho. \tag{3.10.5}$$

Как отмечено в конце пункта 2.10, условие $\dot{\Gamma}_j \in C^{1,\nu}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, в терминах функций $f_{\tau,j}$ можно выразить в форме $f_{\tau,j} \in C^{1,\nu}_{(\nu)}([0,\rho],0)$, что равносильно $f_{\tau,j}(r) - \theta_{\tau,j} \in C^{1,\nu}_{\nu}([0,\rho],0)$, где $\theta_{\tau,j} = \lim f_{\tau,j}(r)$ при $r \to 0$. В силу теоремы 2.10.2 это условие также эквивалентно тому, что производная $f'_{\tau,j} \in C^{1,\nu}_{\nu-1}([0,\rho],0)$. Аналогичным образом условие $\dot{\Gamma}_j \in C^{1,\nu}_{(1+0)}$ означает, что $f_{\tau,j} \in C^{1,\nu}_{(+0)}([0,\rho],0)$, т. е. $f_{\tau,j} \in C^{1,\nu}_{(\varepsilon)}([0,\rho],0)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Интегралы (3.10.1) и (3.10.2) рассматриваем в предположении, что обобщенное ядро Коши $Q(t;\xi)$ и, соответственно, ядро Коши $Q(t;\xi,\eta)$ принадлежат классу $C^{\nu(m)}_0(\Gamma,F)$, введенному в пункте 3.1, а плотность $\varphi \in C^{\mu}_{\lambda}(\Gamma,F)$, где весовой порядок подчинен условию $-1 < \lambda < 0$, т. е. $-1 < \lambda_\tau < 0$, $\tau \in F$. Это условие гарантирует суммируемость функции $Q(t;t-z)\varphi(t)$ на кривой Γ независимо от того, ограничена она или нет.

Ясно, что функция ϕ бесконечно дифференцируема вне Γ. Если кривая Γ ограничена, то в окрестности ∞ вместе со своей производной ϕ' она допускает оценки

$$|\phi(z)| \leqslant C|z|^{-1}, \quad |\phi'(z)| \leqslant C|z|^{-2}, \tag{3.10.6}$$

так что на множестве $G = B_\rho(\infty)$ она принадлежит классу $C^{0,1}_{-1}(G,\infty)$.

В окрестности компакта $K \subseteq \Gamma \setminus F$ ее поведение описывается теоремами 3.6.1, 3.7.1 и 3.8.1 для случаев (3.10.1) и (3.10.2) соответственно. В частности, функция ϕ допускает односторонние граничные значения $\phi^{\pm} \in C^{\mu}(K)$, для которых справедлива формула (3.8.3) с коэффициентом σ, определяемым соответствующими равенствами (3.8.2) либо (3.8.15). Убедимся, что этот коэффициент принадлежит тому же классу, что и ядро Q. Для определенности ограничимся случаем ядра Коши.

Лемма 3.10.1. *Для ядра Коши $Q \in C^{\nu(0)}_0(\Gamma,F)$ функция σ, определяемая формулой* (3.8.15)*, принадлежит классу $C^{\nu}_0(\Gamma,F)$.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство для случая ограниченной кривой Γ. В противном случае в соответствии с пунктом 2.5 достаточно воспользоваться дробно-линейной подстановкой, переводящей Γ в ограниченную кривую. Итак, пусть кривая Γ ограничена, тогда по лемме 2.8.1 оператор умножения $\varphi \to \rho_\nu\varphi$ отображает пространство $C^{\nu}_0(\Gamma,F)$ на класс функций, которые принадлежат $C^{\nu}(\Gamma)$ и обращаются в нуль в точках $\tau \in F$.

Применительно к ядру $Q(t;\xi,\eta) = Q_1(t,\xi)\eta_1 + Q_2(t,\xi)\eta_2$ этот факт означает, что функции $\widetilde{Q}_j(t,\xi) = \rho_\nu(t)Q_j(t,\xi)$ по переменной t обладают указанным свойством равномерно по $|\xi| = 1$. Следовательно, аналогичное свойство справедливо и по отношению к функции

$$\widetilde{\sigma}(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} \widetilde{Q}(t;\xi,d\xi),$$

так что $\sigma = \rho_{-\nu}\widetilde{\sigma}$ принадлежит $C_0^\nu(\Gamma,F)$. $\square$

Основная задача данного раздела состоит в исследовании поведения ϕ вблизи точек $\tau \in F$. Это поведение описывается в терминах пространства $C_\lambda^\mu(\widehat{D},F)$, которое по отношению к весовым пространствам введено в пункте 2.8. Здесь под D понимается открытое множество $\mathbb{C}\backslash\Gamma$ дополнения к кривой Γ.

Теорема 3.10.1.

(a) *Пусть ядро Коши $Q(t;\xi,\eta)$ задано на кусочно-гладкой кривой Γ и принадлежит $C_0^{\nu(1)}(\Gamma,F)$. Тогда для $\varphi \in C_\lambda^\mu(\Gamma,F)$, $-1<\lambda<0$, функция ϕ, определяемая интегралом типа Коши* (3.10.2)*, принадлежит классу $C_\lambda^\mu(\widehat{D},F)$, $D=\mathbb{C}\setminus\Gamma$, с оценкой*

$$|\phi|_{C_\lambda^\mu} \leqslant C|Q|_{C_0^{\nu(1)}}|\varphi|_{C_\lambda^\mu}$$

своей нормы. Граничные значения $\phi^\pm$ этой функции связаны с соответствующим сингулярным интегралом ϕ^* на Γ соотношением (3.7.6).

(b) *Пусть в разложении* (3.10.3) *гладкий контур Γ_0 и открытые гладкие дуги $\dot{\Gamma}_j$ принадлежат классам $C^{1,\nu}$ и $C^{1,\nu}_{(1+0)}$ соответственно, и пусть задано обобщенное ядро Коши $Q \in C_0^{\nu(2)}(\Gamma,F)$. Тогда предложение* (a) *справедливо и для интеграла* (3.10.1).

Доказательство. (a) Предположим сначала, что функция φ тождественно равна нулю в окрестности F. Тогда, очевидно, функция ϕ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности F. С другой стороны, если область $D_0 \subseteq D$ ограничена кусочно-гладким контуром и лежит вне некоторой окрестности множества F, то на основании теоремы 3.8.1 функция $\phi \in C^\mu(D_0)$ с соответствующей оценкой своей нормы. Кроме того, в случае $\infty \in \overline{D}\setminus\Gamma$ эта функция подчинена оценке (3.10.6), так что на множестве $G = B_\rho(\infty)$ она принадлежит классу $C_{-1}^{0,1}(G,\infty)$. Поскольку по условию $\lambda_\infty > -1$ этот класс содержится в $C_{\lambda_\infty}^\mu(G,\infty)$. Таким образом, функция $\phi \in C_\lambda^\mu(\widehat{D},F)$.

Приведенные соображения показывают, что утверждение теоремы достаточно установить для функции φ, носитель которой содержится в одной из радиальных дуг $\Gamma_{\tau,j}$, фигурирующих в (3.10.3), причем она тождественно равна нулю в окрестности второго конца этой дуги, отличного от τ. Очевидно достаточно ограничиться двумя случаями $\tau=0$ и $\tau=\infty$. Оба эти случая удобно объединить, выбирая в качестве Γ радиальную гладкую дугу с концами $\tau=0$ и $\tau=\infty$, при этом весовой порядок λ функции $\varphi \in C_\lambda^\mu(\Gamma;0,\infty)$ можно считать не зависящим от τ, т. е. вещественным числом. Рассмотрим вторую дугу Γ' того же типа, которая разбивает область $D=\mathbb{C}\setminus\Gamma$ на две подобласти D_1 и D_2, ограниченные кусочно-гладким контуром $\Gamma\cup\Gamma'$ (на сфере Римана). Поэтому в соответствии с определением класса $C_\lambda^\mu(\widehat{D},F)$ с помощью разбиений на подобласти утверждение теоремы достаточно установить по отношению к области D_1, которую обозначим снова D.

Согласно пункту 2.5, радиальная параметризация дуги Γ задается функцией

$$\gamma(r) = re^{if(r)}, \quad 0 \leqslant r < \infty, \tag{3.10.7}$$

где вещественная функция $f(r)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0,\infty)$, допускает конечные пределы на его концах, причем

$$\lim_{r\to 0} rf'(r) = \lim_{r\to\infty} rf'(r) = 0. \tag{3.10.8}$$

По определению из пункта 2.8 оператор весового умножения $\varphi_0(t) \to |t|^\lambda \varphi_0(t)$ осуществляет изоморфизм $C_0^\mu \to C_\lambda^\mu$. Поэтому, переходя к переобозначениям, достаточно установить утверждение теоремы по отношению к функции

$$\phi(z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_\Gamma |t|^\lambda Q(t; t-z, dt)\varphi(t), \quad z \in D, \tag{3.10.9}$$

в пространстве $C_0^\mu(D; 0, \infty)$.

Преобразование гомотетии $t \to 2^{-j}t$, $j = 0, \pm 1, \ldots$, отображает Γ на дугу $2^{-j}\Gamma$ того же типа. Эта дуга радиальна и описывается аналогично (3.10.7) уравнением

$$\gamma_j(r) = re^{if_j(r)}, \quad 0 \leqslant r < \infty, \tag{3.10.10}$$

с функцией $f_j(r) = f(2^j r)$, которая, очевидно, удовлетворяет условию (3.10.8) вместе с f. При этой гомотетии выражение (3.10.9) переходит в

$$\phi(2^j z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_{2^{-j}\Gamma} |t|^\lambda Q(2^j t; t-z, dt)\varphi(2^j t), \quad z \in 2^{-j}D, \tag{3.10.11}$$

Положим

$$\begin{aligned} \varphi_j(t) &= \varphi(2^j t), \quad t \in \Gamma_j = (2^{-j}\Gamma) \cap \{1/4 \leqslant |t| \leqslant 4\}, \\ \widetilde{\varphi}_j(t) &= \varphi(2^j t), \quad t \in (2^{-j}\Gamma) \setminus \Gamma_j, \end{aligned} \tag{3.10.12}$$

и в соответствии с этим запишем

$$\phi(2^j z) = \phi_j(z) + \widetilde{\phi}_j(z), \quad z \in D_j = (2^{-j}D) \cap \{1/2 < |z| < 2\}, \tag{3.10.13}$$

где ϕ_j определяется интегрированием по Γ_k.

Из определения (3.10.12) видно, что дуга Γ_j определяется параметризацией $t = re^{if_j r}$, $1/4 \leqslant r \leqslant 4$. По определению радиальной дуги функция $f(r) \to \theta_0$ при $r \to 0$ и $f(r) \to \theta_1$ при $r \to \infty$. Поскольку $f_j'(r) = 2^j r f(2^j r)$, совместно с (3.10.8) отсюда заключаем, что последовательность функций $f_j(r)$ сходится к постоянной функции θ_0, $1/4 \leqslant r \leqslant 4$, при $r \to -\infty$ и к постоянной функции θ_1, $1/4 \leqslant r \leqslant 4$, при $r \to +\infty$ по норме пространства $C^1[1/4, 4]$. Другими словами, последовательность дуг Γ_j при $j \to \pm\infty$ сходится к соответствующим постоянным отрезкам в классе C^1.

Утверждается, что для функций

$$\widetilde{\phi}_j(z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_{(2^{-j}\Gamma)\setminus\Gamma_j} |t|^\lambda Q(2^j t; t-z, dt)\varphi(2^j t), \quad z \in D_j,$$

имеет место равномерная по $j = 0, \pm 1, \ldots$ оценка

$$|\widetilde{\phi}_j|_{C^\mu(D_j)} \leqslant C|Q|_{C_0^{0(1)}}|\varphi|_0, \tag{3.10.14}$$

где, как обычно, $|\varphi|_0$ означает sup-норму функции φ.

Пользуясь параметризацией (3.10.10) дуги $2^{-j}\Gamma$, запишем для этой функции очевидное неравенство

$$|\widetilde{\phi}_j(z)| \leqslant 2^\lambda |Q|_{C_0^{0(0)}}|\varphi|_0 \left(\int\limits_0^{1/4} + \int\limits_4^\infty \right) r^\lambda |\gamma_j(r) - z|^{-1} |\gamma_j'(r)| dr, \quad z \in D_j.$$

Поскольку $|\gamma_j'| = 1 + r|f_j'(r) \leqslant M$, где M есть sup-норма функции $1 + r|f'(r)$ и

$$|\gamma_j(r) - z| \geqslant \begin{cases} 1/4, & 0 < r \leqslant 1/4, \\ r-2, & r \geqslant 4, \end{cases}$$

с учетом неравенства $-1 < \lambda < 0$ отсюда следует оценка

$$|\widetilde{\phi}_j|_0 \leqslant C_0 |Q|_{C_0^{0(0)}}|\varphi|_0.$$

Совершенно аналогично, дифференцируя функцию $\widetilde{\phi}_j(z)$ под знаком интеграла, получим неравенство

$$|\widetilde{\phi}_j'|_0 \leqslant C_1 |Q|_{C_0^{0(1)}}|\varphi|_0,$$

которое вместе с предыдущей оценкой можно записать в форме

$$|\widetilde{\phi}_j|_{C^1(\overline{D}_j)} \leqslant C|Q|_{C_0^{0(1)}}|\varphi|_0, \quad k = 0, \pm 1, \ldots. \tag{3.10.15}$$

Очевидно, последовательность областей D_j в (3.10.13) при $j \to \pm\infty$ сходится к области, ограниченной дугами окружностей $|z| = 1/2$, $|z| = 2$ и отрезками соответствующих лучей с вершиной в начале координат, заключенных между этими дугами. Ясно, что для некоторой постоянной $M \geqslant 1$ все эти области являются M-равномерно связными, так что на основании теоремы 2.2.2 справедлива оценка

$$|\phi|_{C^{\mu}(D_j)} \leqslant C|\phi|_{C^1(\overline{D}_j)}, \quad j = 0, \pm 1, \ldots,$$

равномерная по j. Совместно с (3.10.15) отсюда следует (3.10.14).

Что касается последовательности функций

$$\phi_j(z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_{\Gamma_j} |t|^{\lambda} Q_j(t; t - z, dt)\varphi_j(t), \quad z \in D_j,$$

с ядром Коши $Q_j(t; \xi, \eta) = Q(2^j t; \xi, \eta)$, то к ним можно применить теорему 3.8.1. Условия соответствующей леммы 3.6.2 здесь очевидным образом выполнены, так что функция $\phi_j \in C^{\mu}(D_j)$ с соответствующей оценкой

$$|\phi_j|_{C^{\mu}(D_j)} \leqslant C|Q_j|_{C^{\nu(1)}}|\varphi_j|_{C^{\mu}(\Gamma_j)},$$

равномерной по j.

В силу теоремы 2.7.1, примененной к пространствам $C_0^{\mu}(\Gamma; 0, \infty)$ и $C_0^{\nu(1)}(\Gamma; 0, \infty)$, отсюда

$$|\phi_j|_{C^{\mu}(D_j)} \leqslant C|Q|_{C_0^{\nu(1)}}|\varphi|_{C_0^{\mu}}, \tag{3.10.16}$$

С учетом (3.10.14) эта оценка имеет место и для последовательности $\phi(2^j z) = \phi_j(z) + \widetilde{\phi}_j(z)$, $z \in D_k$, фигурирующей в (3.10.13), так что остается воспользоваться теоремой 2.7.1 по отношению к пространству $C_0^{\mu}(D; 0, \infty)$.

(b) Это предложение устанавливается совершенно аналогично (a). Как и выше, можно ограничиться случаем радиальной дуги Γ с параметризацией (3.10.7). При этом по условию теоремы в рассматриваемом случае функции $f(r)$ и $f(1/r)$ при $0 \leqslant r \leqslant 2$ принадлежат классу $C_{(\varepsilon)}^{1,\nu}([0, 2], 0)$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Другими словами,

$$f(r) = \begin{cases} \theta_0 + r^{\varepsilon} g_0(r), \\ \theta_1 + r^{-\varepsilon} g_1(r), \end{cases} \qquad r f'(r) = \begin{cases} r^{\varepsilon} h_0(r), & 0 < r \leqslant 2, \\ r^{-\varepsilon} h_1(r), & r \geqslant 2, \end{cases} \tag{3.10.17}$$

с некоторыми $g_0, h_0 \in C_0^{\nu}([0, 2], 0)$ и $g_1, h_1 \in C_0^{\nu}([2, \infty], \infty)$. Полагая

$$f_n^+(r) = f(2^n r), \ f^+(r) = \theta_1; \quad 2 \leqslant r \leqslant 4,$$
$$f_n^-(r) = f(2^{-n} r), \ f^-(r) = \theta_0; \quad 1/2 \leqslant r \leqslant 2,$$

где $n = 1, 2, \ldots$, совместно с теоремой 2.7.1 отсюда заключаем, что последовательность функций f_n^+ (f_n^-) при $n \to \infty$ сходится к постоянной функции f^+ (f^-) по норме пространства $C^{1,\nu}[2, 4]$ ($C^{1,\nu}[1/2, 2]$). Поэтому условия леммы 3.6.2 для обобщенного интеграла типа Коши будут выполнены, и дальнейшие рассуждения проходят без изменений. □

Теорему 3.10.1 можно дополнить аналогичным результатом по отношению к пространству $C_{\lambda}^{1,\mu}(\widehat{D}, F)$.

Теорема 3.10.2. *Пусть в разложении* (3.10.3) *гладкий контур* Γ_0 *и открытые гладкие дуги* $\dot{\Gamma}_j$ *принадлежат классам* $C^{1,\nu}$ *и* $C_{(1+0)}^{1,\nu}$ *соответственно, и пусть задано обобщенное ядро Коши* $Q(t; \xi, \eta) \in C_0^{1,\nu(3)}(\Gamma, F)$.

Тогда для $\varphi \in C_{\lambda}^{1,\mu}(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, *функция* ϕ, *определяемая интегралом типа Коши* (3.10.2), *принадлежит классу* $C_{\lambda}^{1,\mu}(\widehat{D}, F)$ *с оценкой*

$$|\phi|_{C_{\lambda}^{1,\mu}} \leqslant C|Q|_{C_0^{1,\nu(3)}}|\varphi|_{C_{\lambda}^{1,\mu}} \tag{3.10.18}$$

своей нормы.

Доказательство. С учетом теоремы 3.8.2, как и при доказательстве теоремы 3.10.1(a), можно ограничиться случаем радиальной дуги Γ с параметризацией (3.10.7). При этом по условию теоремы в рассматриваемом случае функция $f(r)$ описывается (3.10.17) с некоторыми $g_0, h_0 \in C_0^\nu([0,2],0)$ и $g_1, h_1 \in C_0^\nu([2,\infty],\infty)$. Пусть, как и выше, область D ограничена двумя радиальными дугами Γ, Γ' с общими концами $\tau = 0, \infty$ и функция $\varphi \in C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $-1 < \lambda < 0$.

Дальнейшие рассуждения основываются на выводе весовой формулы дифференцирования, поскольку лемма 3.8.2 в рассматриваемом случае неприменима. С этой целью равенство (3.8.21) запишем в форме

$$z\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(z) = -\int\limits_\Gamma (z-t)\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}(t; t-z, dt)\varphi(t) - \int\limits_\Gamma \frac{\partial Q}{\partial \xi_j}(t; t-z, dt)t\varphi(t),\ z \in D. \tag{3.10.19}$$

Для последнего интеграла в правой части этого равенства по дуге $\Gamma_\varepsilon \subseteq \Gamma$ с концами $a = \gamma(\varepsilon)$ и $b = \gamma(\varepsilon^{-1})$ можно записать формулу (3.8.22):

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial\xi_j}(t; t-z, dt)t\varphi(t) = Q_j(b; b-z)b\varphi(b) - Q_j(a; a-z)a\varphi(a) -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial Q_j}{\partial t}(t; t-z)t\varphi(t)d_1t - \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} Q_j(t; t-z)[t\varphi(t)]'d_1t, \quad j = 1, 2.$$

При фиксированном z функция $Q_j(t, t-z)t\varphi(t)$ на Γ ведет себя как $O(1)|t|^{1+\lambda}$ при $t \to 0$ и как $O(1)|t|^\lambda$ при $t \to \infty$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$ внеинтегральные члены в этом равенстве стремятся к нулю. Переходя в нем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и подставляя полученное выражение в (3.10.19), получим

$$z\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(z) = \int\limits_\Gamma (t-z)\frac{\partial Q}{\partial\xi_j}(t; t-z, dt)\varphi(t) +$$

$$+\int\limits_\Gamma \frac{\partial Q_j}{\partial t}(t; t-z)t\varphi(t)d_1t + \int\limits_\Gamma Q_j(t; t-z)[t\varphi(t)]'d_1t.$$

Вспоминая, что $t' = e(t)$, это равенство можно записать в форме

$$z\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(z) = \int\limits_\Gamma Q_{(j)}(t; t-z)\varphi(t)d_1t + \int\limits_\Gamma Q_j(t; t-z)t\varphi'(t)d_1t, \tag{3.10.20}$$

где положено

$$Q_{(j)}(t,\xi) = \xi\left[\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_j}(t,\xi)e_1(t) + \frac{\partial Q_2}{\partial\xi_j}(t,\xi)e_2(t)\right] + t\frac{\partial Q_j}{\partial t}(t,\xi) + Q_j(t,\xi)e(t).$$

Очевидно, функция $Q_{(j)}(t,\xi)$ нечетна по переменной ξ и однородна степени -1, т.е является обобщенным ядром Коши. Поскольку $e(t) \in C^\nu_{(+0)}(\Gamma; 0, \infty)$, по переменной t эта функция принадлежит классу $C_0^{\nu(2)}(\Gamma; 0, \infty)$ с соответствующей оценкой

$$|Q_{(j)}|_{C^{\nu(2)}} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(3)}}.$$

Поэтому на основании теоремы 3.10.1(b), примененной к интегралу в правой части (3.10.20), совместно с теоремой 3.10.1(b) приходим к справедливости оценки (3.10.18). □

3.11. Весовые C^μ-оценки сингулярных интегралов

Рассмотрим в области $D \subseteq \mathbb{C}$, ограниченной кусочно-гладким контуром Γ, сингулярный интеграл

$$\psi(z) = \int\limits_D Q(t; t-z)\varphi(t)d_2t, \quad z \in D, \tag{3.11.1}$$

с ядром $Q(t,\xi)$, однородным степени -2 по переменной ξ и удовлетворяющим внутри области D условию (3.4.2). Пусть конечное множество точек $F \subseteq \overline{D}$ содержит все граничные точки кривой. Как обычно, бесконечно удаленная точка ∞ включается в состав F, если область D неограничена (в случае ограниченной кривой Γ область D является окрестностью этой точки). Поскольку Γ является контуром, число $n_\tau = 2$ в (3.10.4) равно 2 для всех $\tau \in F \cap \Gamma$, так что $B_\rho(\tau)$ разбивается радиальными дугами $\Gamma_{\tau,1}$ и $\Gamma_{\tau,2}$ на две области $S_{\tau,1}$ и $S_{\tau,2}$, которые назовем криволинейными секторами с вершиной τ (включая и случай $\tau = \infty$). Растворы этих секторов называем внутренними углами области D. Заметим, что внутренний угол этой области в точке возврата кривой равен 0 или 2π.

Круги $B_\rho(\tau)$ рассматриваем и для конечных точек $\tau \in D$, при этом ρ выбираем столь малым, чтобы они не пересекались с Γ. Это же относится и к бесконечно удаленной точке $\tau = \infty$, когда D является ее окрестностью. Для каждой из этих областей также можно провести два прямолинейных разреза $\Gamma_{\tau,1}$ и $\Gamma_{\tau,2}$, разбивающих $B_\rho(\tau)$ на два сектора.

Предполагается, что ядро $Q(t;\xi)$ принадлежит классу $C_0^{\nu(2)}(D,F)$, введенному в пункте 3.1, а плотность $\varphi \in C_\lambda^\mu(D,F)$, где весовой порядок подчинен условию $-2 < \lambda < 0$, т. е. $-2 < \lambda_\tau < 0$, $\tau \in F$. Это условие гарантирует суммируемость функции $Q(t;t-z)\varphi(t)$ в области D вне любой окрестности F независимо от того, ограничена эта область или нет.

Теорема 3.11.1. *Пусть область D ограничена кусочно-гладким контуром Γ и не имеет точек возврата. Пусть в разложении* (3.10.3) *гладкий контур Γ_0 и открытые гладкие дуги $\dot\Gamma_j$ принадлежат классам $C^{1,\nu}$ и $C^{1,\nu}_{(1+0)}$ соответственно. Наконец, пусть ядро $Q(t;\xi) \in C_0^{\nu(2)}(D,F)$ однородно степени -2 относительно переменной ξ и удовлетворяет условиям* (3.4.2) *внутри области и* (3.5.1) *на ее границе.*

Тогда для $\varphi \in C_\lambda^\mu(D,F)$, $-2 < \lambda < 0$, функция ϕ, определяемая сингулярным интегралом (3.11.1)*, принадлежит классу $C_\lambda^\mu(D,F)$ с соответствующей оценкой*

$$|\psi|_{C_\lambda^\mu} \leqslant C|Q|_{C_0^{\nu(2)}}|\varphi|_{C_\lambda^\mu} \tag{3.11.2}$$

своей нормы.

Доказательство. Оно осуществляется по той же схеме, что и доказательство теоремы 3.10.1, с той разницей, что в основе лежит применение теоремы 3.5.1 и леммы 3.5.1 для двумерных сингулярных интегралов.

Предположим сначала, что функция φ тождественно равна нулю в окрестности F. Тогда, очевидно, функция ψ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности F. Кроме того, если D является окрестностью ∞, то в этой окрестности она допускает аналогичные (3.10.6) оценки

$$|\psi(z)| \leqslant C|z|^{-2}, \quad |\psi'(z)| \leqslant C|z|^{-3}.$$

Они вытекают из того, что в рассматриваемом случае ядро $Q(t,\xi)$ принадлежит $\mathcal{H}_{-2}$ по переменной ξ. Эти оценки показывают, что ψ принадлежит классу $C_{-2}^{0,1}(G,\infty)$ в области $G = B_\rho(\infty)$, который в силу неравенства $\lambda_\infty > -2$ содержится в $C_{\lambda_\infty}^\mu(G,\infty)$.

С другой стороны, если область $D_0 \subseteq D$ ограничена кусочно-гладким контуром и лежит вне некоторой окрестности множества F, то на основании теоремы 3.4.1 функция $\psi \in C^\mu(D_0)$ с соответствующей оценкой своей нормы. Следовательно, ψ принадлежит классу $C^\mu(\widehat{D},F)$ с соответствующей оценкой своей нормы.

Таким образом, утверждение теоремы достаточно установить в предположении, что носитель функции φ содержится в одном из криволинейных секторов $S_{\tau,j}$, причем функция φ тождественно равна нулю в окрестности граничной дуги окружности этого сектора. Как и в пункте 3.10, достаточно ограничиться двумя случаями секторов с вершинами $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. Оба эти случая удобно объединить, выбирая в качестве D область, ограниченную двумя радиальными гладкими дугами Γ^0 и Γ^1 с концами $\tau = 0$ и $\tau = \infty$, при этом весовой порядок λ функции $\varphi \in C_\lambda^\mu(\Gamma;0,\infty)$ можно считать не зависящим от τ, т. е. вещественным числом. Для дуг Γ^k имеем параметризации (3.10.7) с функциями $f = f^k$, $k = 0,1$, удовлетворяющими условиям (3.10.8). Как и при доказательстве теоремы 3.10.1(b), для этих функций можно написать аналогичное (3.10.17) разложение с некоторыми $g_0 = g_0^k, h_0 = h_0^k \in C_0^\nu([0,2],0)$ и $g_1 = g_1^k, h_1 = h_1^k \in C_0^\nu([1/2,\infty],\infty)$.

Переходя к переобозначениям, оценку (3.11.2) можно доказывать для функции

$$\psi(z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_D |t|^\lambda Q(t, t-z)\varphi(t) d_2 t, \quad z \in D,$$

по отношению к пространству C_0^μ. Перепишем это равенство в форме

$$\psi(2^j z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_{2^{-j}D} |t|^\lambda Q(2^j t, t-z)\varphi(2^j t) d_2 t, \quad z \in 2^{-j} D, \tag{3.11.3}$$

где $j = 0, \pm 1, \ldots$. Полагая

$$\begin{aligned} &\varphi_j(t) = \varphi(2^j t), \quad t \in D_j = (2^{-j}D) \cap \{1/4 \leqslant |t| \leqslant 4\}, \\ &\widetilde{\varphi}_j(t) = \varphi(2^j t), \quad t \in (2^{-j}D) \setminus D_j, \end{aligned}$$

рассмотрим последовательность функций

$$\psi(2^j z) = \psi_j(z) + \widetilde{\psi}_j(z), \quad z \in D_j^0 = (2^{-j}D) \cap \{1/2 < |z| < 2\}, \tag{3.11.4}$$

где ψ_j определяется интегралом (3.11.3) по D_j.

Заметим, что область D_j ограничена двумя дугами $(2^{-j}\Gamma^k) \cap \{1/4 \leqslant |t| \leqslant 4\}$, $k = 0, 1$, и двумя соответствующими дугами окружностей $\{|t| = 1/4\}$ и $\{|t| = 4\}$. Как и при доказательстве теоремы 3.10.1(b), убеждаемся, что последовательность дуг Γ_j^k при $j \to \pm\infty$ сходится к соответствующим отрезкам $I_\pm^k$ прямой в классе $C^{1,\nu}$. Поскольку по условию внутренние углы области D отличны от 0 и 2π, отрезки $I_\pm^0$ и $I_\pm^1$ различны и вместе с дугами указанных окружностей образуют граничный кусочно-гладкий контур предельной области $D_\pm$.

Для функций

$$\widetilde{\psi}_j(z) = |z|^{-\lambda} \left(\int\limits_{(2^{-j}D)\cap\{|t|<1/4\}} + \int\limits_{(2^{-j}D)\cap\{|t|>4\}} \right) |t|^\lambda Q(2^j t, t-z)\varphi(2^j t) d_2 t, \quad z \in D_j^0,$$

можно написать очевидное неравенство

$$|\widetilde{\psi}_j(z)| \leqslant |Q|_{C_0^{0(1)}} |\varphi|_0 |z|^{-\lambda} \left(\int\limits_{|t|<1/4} + \int\limits_{|t|>4} \right) |t|^\lambda |t-z|^{-2} d_2 t, \quad z \in D_j^0,$$

Аналогичное неравенство можно написать и для частных производных функции $\widetilde{\psi}_j$. Повторяя соответствующие рассуждения доказательства теоремы 3.10.1, приходим к аналогичной (3.10.14) оценке

$$|\widetilde{\psi}_j|_{C^\mu(D_j)} \leqslant C|Q|_{C_0^{0(1)}} |\varphi|_0, \quad j = 0, \pm 1, \ldots, \tag{3.11.5}$$

равномерной по j.

Что касается последовательности функций

$$\psi_j(z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_{D_j} |t|^\lambda Q_j(t; t-z)\varphi(2^j t) dt, \quad z \in D_j^0,$$

с ядром $Q_j(t;\xi) = Q(2^j t; \xi)$, то к ней можно применить теорему 3.5.1 и лемму 3.5.1, что приводит к равномерной по j оценке

$$|\phi_j|_{C^\mu(D_j^0)} \leqslant C|Q_j|_{C^{\nu(2)}} |\varphi_j|_{C^\mu(D_j)}, \tag{3.11.6}$$

Совместно с (3.11.5) она приводит к аналогичной оценке для функции $\psi(2^j z) = \psi_j(z) + \widetilde{\psi}_j(z)$, $z \in D_j^0$, фигурирующей в (3.11.4). Как и в пункте 3.10, на основании теоремы 2.7.1 отсюда следует оценка (3.11.2) теоремы. □

Как и в пункте 3.5, теорему 3.11.1 применим к интегралу со слабой особенностью

$$\psi^0(z) = \int\limits_D Q^0(t; t-z)\varphi(t) d_2 t, \quad z \in D, \tag{3.11.7}$$

ядро $Q^0(t,\xi)$ которого однородно степени -1. Предполагается, что плотность $\varphi \in C^\mu_\lambda(D,F)$, где весовой порядок в дополнение к прежнему условию $-2 < \lambda < 0$, при $\tau = \infty$ удовлетворяет неравенству $\lambda_\tau < -1$. Оно гарантирует суммируемость функции $Q^0(t,t-z)\varphi(t)$ в области D.

Формула дифференцирования (3.5.27) сохраняет свою силу и в рассматриваемом случае. В самом деле, для фиксированной точки $a \in D \setminus F$ функцию φ можно представить в виде двух слагаемых, одно из которых тождественно равно нулю в достаточно малой окрестности этой точки. Для интеграла, определяемого этим слагаемым, возможно дифференцирование под знаком интеграла, а ко второму слагаемому применима формула (3.5.27).

Заметим, что в предположении $Q^0 \in C_0^{\nu(1)}(D,F)$ коэффициент

$$\sigma_i(x) = \int\limits_\Omega \xi_i Q^0(x,\xi)d\xi$$

этой формулы принадлежит классу $C_0^\nu(D,F)$, что доказывается аналогично лемме 3.10.1. Поэтому, как и в пункте 3.5, формула (3.5.27) совместно с теоремами 3.11.1 и 2.10.2 приводит к следующему результату.

Теорема 3.11.2. *Пусть область D и ее граничный контур $\Gamma = \partial D$ удовлетворяют условиям теоремы* 3.11.1, *ядро $Q^0(t;\xi) \in C_0^{\nu(3)}(D,F)$ однородно степени -1 относительно переменной ξ и удовлетворяет условию* (3.5.1) *в граничных точках $t \in \Gamma \setminus F$. Пусть $\varphi \in C^\mu_\lambda(D,F)$, где весовой порядок удовлетворяет условиям $-2 < \lambda_\tau < 0$, $\lambda_\tau \neq -1$ для $\tau \neq \infty$ и неравенству $-2 < \lambda_\tau < -1$ для $\tau = \infty$.*

Тогда функция ψ_0, определяемая интегралом (3.11.7), *принадлежит классу $C^{1,\mu}_{(\lambda+1)}(D,F)$ с соответствующей оценкой*

$$|\psi|_{C^{1,\mu}_{(\lambda+1)}} \leqslant C|Q_0|_{C_0^{\nu(2)}}|\varphi|_{C^\mu_\lambda}$$

своей нормы.

Замечание к теореме 3.5.3 сохраняет свою силу и в рассматриваемом случае, т. е. если ядро $Q^0(y,\xi)$ нечетно по переменной ξ, то для его частных производных $\partial Q/\partial\xi_i$ условие (3.5.1) выполнено автоматически.

Аналогичные рассмотрения можно провести для сингулярного интеграла Коши

$$\psi(t_0) = \int\limits_\Gamma Q(t, t-t_0, dt)\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.11.8}$$

на кусочно-гладкой кривой Γ. Однако проще воспользоваться теоремами 3.10.1, 3.10.2 и формулой граничных значений

$$\phi^\pm(t_0) = \pm\sigma(t_0)\varphi(t_0) + \psi(t_0), \quad \sigma(t_0) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{T}} Q(t_0;\xi,d\xi), \tag{3.11.9}$$

для соответствующего интеграла типа Коши (3.10.2). Напомним, что здесь $\mathbb{T}$ означает единичную окружность, ориентированную против часовой стрелки. Очевидно, если ядро Коши принадлежит $C_0^{\nu(1)}(\Gamma,F)$, то и коэффициент σ в этой формуле принадлежит классу $C_0^\nu(\Gamma,F)$. Аналогично в условиях теоремы 3.10.2 функция $\sigma \in C_0^{1,\nu}(\Gamma,F)$.

Поэтому теоремы 3.10.1, 3.10.2 приводят к следующему результату.

Теорема 3.11.3. *Пусть ядро Коши $Q(t;\xi,\eta)$ задано на кусочно-гладкой кривой Γ и принадлежит $C_0^{\nu(1)}(\Gamma,F)$.*

Тогда для $\varphi \in C^\mu_\lambda(\Gamma,F)$, $-1 < \lambda < 0$, функция ψ, определяемая сингулярным интегралом Коши (3.11.8), *принадлежит классу $C^\mu_\lambda(\Gamma,F)$ с оценкой*

$$|\psi|_{C^\mu_\lambda} \leqslant C|Q|_{C_0^{\nu(1)}}|\varphi|_{C^\mu_\lambda}$$

своей нормы.

Если дополнительно в разложении (3.10.3) *гладкий контур Γ_0 и открытые гладкие дуги $\dot\Gamma_j$ принадлежат классам $C^{1,\nu}$ и $C^{1,\nu}_{(1+0)}$ соответственно, и обобщенное ядро Коши*

$Q(t;\xi,\eta) \in C_0^{1,\nu(3)}(\Gamma, F)$, *то аналогичное предложение справедливо по отношению к пространству* $C_\lambda^{1,\mu}(\Gamma, F)$.

Для обычного ядра Коши $Q(\xi,\eta) = \eta/\xi$ этот результат является классическим и изложен в монографии Н. И. Мусхелишивили [36] (без уточнения показателя Гельдера). В уточненном варианте он принадлежит Р. В. Дудучава [17, 18].

Глава 4

ЛЕБЕГОВЫ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Пространства L^p и L^p_λ

Пусть множество $G \subseteq \mathbb{R}^k$ измеримо (относительно обычной меры Лебега). Обозначим $L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, класс всех функций $\varphi(y)$, $y \in G$, суммируемых с p-ой степенью. При $p = 1$ он, очевидно, совпадает с классом $L = L^1$ всех суммируемых на G функций. С каждой функцией $\varphi \in L^p$ свяжем неотрицательное число

$$|\varphi|_{L^p} = \left(\int_G |\varphi(x)|^p dx \right)^{1/p}. \tag{4.1.1}$$

Очевидно, равенство $|\varphi| = 0$ равносильно тому, что $\varphi(x) = 0$ почти всюду на G, поэтому в дальнейшем функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, отождествляются.

Можно также ввести класс $L^\infty(G)$ измеримых функций, ограниченных вне некоторого множества меры нуль. Однако в дальнейшем будет использоваться только его подпространство $C^0(G)$ непрерывных и ограниченных функций, снабженное sup-нормой, рассматриваемое в пункте 2.2.

С каждым показателем $p > 1$ свяжем показатель $q > 1$ по формуле $1/q = 1 - 1/p$, который называется сопряженным с p. Произведение $\varphi\psi$ двух функций $\varphi \in L^p$, $\psi \in L_q$ суммируемо на G и имеет место следующее важное неравенство Гельдера:

$$|\varphi\psi|_{L^1} \leqslant |\varphi|_{L^p} |\psi|_{L^q}. \tag{4.1.2}$$

С помощью этого неравенства легко проверяется, что равенство (4.1.1) определяет в пространстве L^p норму (напомним, что функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, отождествляются). По существу доказательство того, что $|\varphi|$ является нормой, требует только неравенства треугольника $|\varphi_1 + \varphi_2| \leqslant |\varphi_1| + |\psi_1|$, которое в данной ситуации носит название неравенства Минковского.

Теорема (Рисс—Фишер). *Пространство L^p полно относительно нормы* (4.1.1).

Перечислим некоторые хорошо известные свойства пространства $L^p(G)$, которые изложены в стандартных курсах анализа. Если лебегова мера $\operatorname{mes} G$ множества G конечна, то функция $\varphi(x) = 1$ принадлежит $L^p(G)$ при любом p. С учетом (4.1.2) отсюда следует, что при $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2$ банахово пространство $L^{p_2}(G)$ вложено в $L^{p_1}(G)$. Другими словами, если $\operatorname{mes} G < \infty$, то семейство банаховых пространств $L^p(G)$ монотонно убывает (в смысле вложения) по параметру $p \geqslant 1$.

Из неравенства Гельдера непосредственно следует также, что при $p > 1$ билинейная форма

$$(\varphi, \psi) = \int_G \varphi(x)\psi(x)dx \tag{4.1.3}$$

ограничена на произведении $L^p \times L^q$. При этом справедливо соотношение

$$|\varphi|_{L^p} = \sup(\varphi, \psi), \tag{4.1.4}$$

где sup берется по функциям $\psi \in L^q$ с нормой $|\psi|_{L^q} \leqslant 1$. Верно и обратное: любой линейный функционал $f^* \in (L^p)^*$ реализуется в виде $f^*(\varphi) = (\varphi, \psi)$ с некоторой $\psi \in L^q$. Другими словами, банахово пространство L^p, $p > 1$, рефлексивно (см. пункт 1.2) и сопряженное к нему можно отождествить с L^q.

По определению последовательность $\varphi_n \in L^p$ слабо сходится, если существует такая функция $\varphi \in L^p$, что $\langle \varphi_n, \psi\rangle \to \langle \varphi, \psi\rangle$ при $n \to \infty$ для любой $\psi \in L^q$.

Теорема (Банаха о слабой сходимости). *Слабо сходящиеся последовательности в L^p, $p > 1$, ограничены. Обратно, из любой ограниченной в L^p последовательности можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.*

Строго говоря, эта теорема является комбинацией двух следующих известных теорем функционального анализа. В силу рефлексивности L^p можно рассматривать как сопряженное пространство X^* к $X = L^q$. Соответственно, слабо сходящаяся последовательность φ_n представляет собой последовательность функционалов $\varphi_n \in X^*$, для которых $\varphi_n(x)$ сходится для любого $x \in X$. В частности, числовая последовательность $\varphi_n(x)$ ограничена при любом x и на основании известной теоремы Банаха—Штейнгауза последовательность φ_n ограничена в X^*. Второе утверждение теоремы является следствием общей теоремы Банаха—Алаоглу о слабой $*$-компактности единичного шара в X^*.

Пространство $L^p(D)$ однородно относительно группы переносов $x \to x + a$. С другой стороны, мера $dt/|t|^k$ инвариантна относительно растяжений $x \to rx$, $r > 0$, в $\mathbb{R}^k$. Поэтому по аналогии с пунктом 2.7 однородное пространство $L^p_0(G)$ естественно ввести как L^p-пространство относительно этой меры с нормой

$$|\varphi| = \left(\int_G |\varphi(x)|^p \frac{dx}{|x|^k}\right)^{1/p}. \tag{4.1.5}$$

Как и в пункте 2.7, это определение имеет смысл только в случае, когда по крайней мере одна из точек $\tau = 0, \infty$ является предельной для G. Если множество G ограничено и лежит вне окрестности нуля, то пространство $L^p_0(G)$ совпадает с $L^p(G)$.

Отметим, что неравенство Гельдера (4.1.2) справедливо для L^p-пространств относительно любой меры, в частности,

$$|\varphi\psi|_{L^1} \leqslant |\varphi|_{L^p_0} |\psi|_{L^q_0}. \tag{4.1.6}$$

Аналогом теорем 2.7.1 и 2.7.2 для пространства $L^p_0(G)$ служит следующее предложение.

Теорема 4.1.1.

(a) *Пусть $0 < \delta < 1$ и $G_j = \{\delta < |y| < \delta^{-1}, \delta^j y \in G\}$, $j = 0, \pm 1, \ldots$. Тогда пространство $L^p_0(G, F)$ можно задать эквивалентной нормой*

$$|\varphi| = \left(\sum_j [\varphi_j]^p_{L^p(G_j)}\right)^{1/p}, \quad \varphi_j(y) = \varphi(\delta^j y). \tag{4.1.7}$$

(b) *Пусть множество $\widetilde{G} \subseteq \mathbb{R} \times \Omega$ есть образ G при отображении $x \to (\ln|x|, x/|x|)$, обратном к $\omega(s, u) = e^s u$, $u \in \mathbb{R}^k$. Тогда оператор $\psi \to \psi \circ \omega$ осуществляет изоморфизм банаховых пространств $L^p(\widetilde{G}) \to L^0_0(G)$. В частности, оператор $\varphi(x) \to \varphi(x^*)$, определяемый инверсией $x^* = x/|x|^2$, обратим $L^p_0(D) \to L^p_0(D^*)$.*

Доказательство. Оно почти очевидно. В силу счетной аддитивности интеграла равенство (4.1.5) можно переписать в форме

$$|\varphi|^p_{L^p_0} = \sum_j \int_{\delta \leqslant |y| \leqslant 1} |\varphi(\delta^j y)|^p \frac{dy}{|y|^k}.$$

Полагая для краткости $x_j = |\varphi_j|_{L^p(G_j)}$, отсюда

$$2^{-1} \sum_j (x^p_{j-1} + x^p_j) \leqslant |\varphi|^p_{L^p_0} \leqslant 2\delta^{-1} \sum_j (x^p_{j-1} + x^p_j),$$

откуда следует эквивалентность норм (4.1.5) и (4.1.7).

Второе утверждение, как и в случае теоремы 2.7.2, доказывается с помощью первого. Впрочем, его можно установить и непосредственно, так как при подстановке ω мера $dx/|x|^k$ переходит в прямое произведение мер $dsdu$. $\square$

Исходя из пространств L^p и L^p_0, совершенно аналогично пункту 2.8 введем весовые пространства $L^p_\lambda(G,F)$, отвечающие весовому порядку $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$. Таким образом, полагая $B_\rho(\tau) = \{|y-\tau| \leqslant \rho\}$, $\tau \neq \infty$, и $B_\rho(\tau) = \{|y| \geqslant \rho\}$, $\tau = \infty$, где $\rho > 0$ достаточно мало, это пространство можно определить условием конечности интегралов

$$\int\limits_{G\cap B_\rho(\tau)} [|y-\tau|^{-\lambda_\tau}|\varphi(y)|]^p \frac{dy}{|y-\tau|},\ \tau \in F; \quad \int\limits_{\widetilde{G}} |\varphi(y)|^p dy, \tag{4.1.8}$$

где $\widetilde{G} = G \setminus \bigcup\limits_\tau B_{\rho/2}(\tau)$ и при $\tau = \infty$ следует $|x-\tau|$ заменить на $|x|$.

Эти пространства можно определить непосредственно по весовой функции $\rho_\lambda(x)$, которая, напомним, дается равенством

$$\rho_\lambda(x,F) = \prod_{\tau\in F} \rho_{\lambda_\tau}(x,\tau), \quad \rho_\delta(x,\tau) = \begin{cases} |x-\tau|^\delta(1+|x|)^{-\delta} & \tau \neq \infty, \\ (1+|x|)^\delta, & \tau = \infty. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

В этих обозначениях пространство $L^p_0(G,F)$ можно определить как L^p-пространство относительно меры $\rho_{-k}(x)dx$. Соответственно пространство $L^p_\lambda(F,F)$ можно задавать эквивалентной нормой

$$|\varphi| = \left(\int\limits_G |\rho_{-\lambda}(x)\varphi(x)|^p \rho_{-k}(x)dx\right)^{1/p} = |\rho_{-\lambda-1/k}\varphi|_{L^p}. \tag{4.1.10}$$

В частности, имеет место равенство

$$L^p_{-k/p}(D,F) = L^p(D), \tag{4.1.11}$$

с эквивалентностью соответствующих норм, что является аналогом леммы 2.7.1 для L^p-пространств.

Отметим, что в литературе наиболее употребительно обозначение весовых пространств в форме

$$L^p(\Gamma,\rho_\delta) = \{\varphi,\ \rho_\delta\varphi \in L^p(\Gamma)\}. \tag{4.1.12}$$

В силу (4.1.11) это пространство совпадает с $L^p_{-1/p-\delta}(\Gamma,F)$. По ряду причин обозначение в нашей форме L^p_λ более предпочтительно (см. замечание в конце пункта 4.6).

Как и в пункте 2.8, выбор (4.1.9) весовой функции удобен тем, что он подходит и в случае, когда некоторые из точек $\tau \in F$ лежат вне $\overline{G}$. В этом случае, конечно, $L^p_\lambda(G,F)$ совпадает с $L^p_\lambda(G,F_0)$, где $F_0 = F \cap \overline{G}$. В случае ограниченного множества G в качестве весовой функции можно, например, взять $\rho_\lambda(x) = \prod\limits_\tau |x-\tau|^{\lambda_\tau}$.

Рассмотрим взаимосвязь весовых пространств относительно параметров p и λ_τ.

Лемма 4.1.1. *Семейство $L^p_\lambda(G,F)$ монотонно убывает (в смысле вложений банаховых пространств) по каждому из параметров λ_τ при $\tau \neq \infty$ и возрастает по λ_∞. Кроме того, если $p > q$ и $\lambda_\tau > \lambda'_\tau, \tau \neq \infty$; $\lambda_\infty < \lambda'_\infty$, то $L^p_\lambda \subseteq L^q_{\lambda'}$. Во всех случаях при $-k < \lambda < 0$ пространство $L^p_\lambda(G,F)$ вложено в $L^1(G)$.*

Доказательство. В соответствии с определением весовых пространств $L^p_\lambda(G,F)$ достаточно рассмотреть их для двух случаев $L^p_\lambda(B_j,\tau_j)$, $j=1,2$, где $B_1 = \{|x| \leqslant 1\}$, $\tau_1 = 0$, и $B_2 = \{|x| \geqslant 1\}$, $\tau_2 = \infty$. Для определенности ограничимся первым из них. В этом случае первое утверждение теоремы сводится к очевидному вложению $L^p_\lambda(B,0) \subseteq L^p_0(B,0)$, $\lambda \geqslant 0$, а остальные два — к вложениям

$$L^p_\lambda(B,0) \subseteq L^q_0(B,0),\ \lambda > 0; \quad L^p_\lambda(B,0) \subseteq L^1(B),\ -k < \lambda < 0,$$

которые легко доказываются с помощью неравенства Гельдера (4.1.6). □

В заключение остановимся на одномерном случае $k = 1$ функций, заданных на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Рассмотрим классический сингулярный интеграл Коши

$$\psi(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0},$$

который, как и выше, понимается как предел при $\varepsilon \to 0$ интегралов по $|t - t_0| \geqslant \varepsilon$. Для функций $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ при $p > 1$ последние интегралы имеют смысл в силу неравенства Гельдера и имеет место следующий результат.

Оператор, определяемый указанным сингулярным интегралом Коши, носит название преобразования Гильберта.

Теорема (Рисс). *Если $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, то сингулярный интеграл Коши существует для почти всех t_0 и справедлива оценка*

$$|\psi|_{L^p} \leqslant C|\varphi|_{L^p}.$$

Классический результат Рисса можно дополнить оценками в L^p так называемых максимальных функций Харди—Литтлвуда (см., например, [64]).

Теорема (Харди—Литтлвуд). *Пусть функция $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, и имеет компактный носитель. Тогда верхние грани*

$$(M_0\varphi)(t_0) = \sup_{\varepsilon>0} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{|t-t_0|\leqslant\varepsilon} |\varphi(t)|dt, \quad (M_1\varphi)(t_0) = \sup_{\varepsilon>0} \left| \int\limits_{|t_0-t|\geqslant\varepsilon} \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0} \right| \tag{4.1.13}$$

конечны почти для всех t_0 и определяют функции из L^p с оценкой норм

$$|M_0\varphi|_{L^p} + |M_1\varphi|_{L^p} \leqslant C|\varphi|_{L^p},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от φ.

Отметим еще следующее вспомогательное предложение.

Лемма 4.1.2. *Пусть неотрицательная функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ и допускает оценку*

$$\int\limits_{|s|\leqslant r} f(s)ds \leqslant Cr, \tag{4.1.14}$$

для всех $r > 0$, где постоянная $C > 0$ не зависит от r. Тогда

$$r \int\limits_{|s|\geqslant r} \frac{f(s)}{s^2} ds \leqslant 3C.$$

Если дополнительно

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int\limits_{|s|\leqslant r} f(s)ds = 0, \tag{4.1.15}$$

то и

$$\lim_{r\to 0} r \int\limits_{|s|\geqslant r} \frac{f(s)}{s^2} ds = 0.$$

Доказательство. Положим

$$g(r) = \int\limits_{|s|\leqslant r} f(s)ds = \int\limits_0^r [f(s) + f(-s)]ds,$$

тогда в результате интегрирования по частям

$$\int\limits_{|s|\geqslant r} \frac{f(s)}{s^2} ds = \int\limits_r^\infty \frac{dg(s)}{s^2} = -\frac{g(r)}{r^2} + 2\int\limits_r^\infty \frac{g(s)}{s^3} ds. \tag{4.1.16}$$

Поэтому в силу (4.1.14)

$$r \int\limits_{|s|\geqslant r} \frac{f(s)}{s^2} ds \leqslant C + 2Cr \int\limits_r^\infty \frac{ds}{s^2} = 3C.$$

Пусть далее выполнено условие (4.1.15) леммы. Полагая $g_0(s) = g(s)/s$, перепишем (4.1.16) в виде

$$r \int\limits_{|s|\geqslant r} \frac{f(s)}{s^2} ds = -g_0(r) + 2 \int\limits_1^\infty \frac{g_0(rs)}{s^2} ds.$$

По условию $g_0(s) \leqslant C$ и $g_0(s) \to 0$ при $s \to 0$. Поэтому на основании теоремы Лебега о мажорированной сходимости правая часть (4.1.16) также стремится к нулю при $r \to 0$. □

4.2. Свертка функций

Для функций f и g, заданных на всем $\mathbb{R}^k$, можно ввести понятие свертки

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(x-y)g(y)dy. \tag{4.2.1}$$

Если обе функции f, g принадлежат $L = L^1(\mathbb{R}^k)$, то подынтегральное выражение как функция двух переменных суммируемо на $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$. В этом легко убедиться с помощью линейной замены переменных $x' = x - y$, $y' = y$. Из этих же соображений с учетом теоремы Фубини из пункта 1.8 приходим к заключению, что интеграл (4.2.1) существует для почти всех x и определяет суммируемую функцию, для которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^k} (f * g)(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y)dy \int\limits_{\mathbb{R}^k} g(y)dy. \tag{4.2.2}$$

Переходя в (4.2.1) к неравенству

$$|(f * g)(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^k} |f(x-y)||g(y)|dy$$

и заменяя в (4.2.2) функции f и g их модулями, приходим к оценке для норм

$$|f * g|_L \leqslant |f|_L |g|_L \tag{4.2.3}$$

Легко видеть, что билинейная операция свертки коммутативна и ассоциативна. Поэтому в силу (4.2.3) пространство L является коммутативной банаховой алгеброй со сверткой в качестве умножения.

Операция свертки определена и для случая, когда одна из функций, скажем f, суммируема, а вторая принадлежит различным классам.

Теорема 4.2.1.

(a) *Если* $\varphi \in L^p$, $p \geqslant 1$, *то интеграл* (4.2.1) *существует для почти всех* x *и определяет функцию из* L^p *с оценкой*

$$|f * \varphi|_{L^p} < |f|_L |\varphi|_{L^p} \tag{4.2.4}$$

для ее нормы.

(b) *Если* $\varphi \in C^\mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, *то интеграл* (4.2.1) *существует для всех* x *и определяет функцию из* C^μ *с оценкой*

$$|f * \varphi|_{C^\mu} < |f|_L |\varphi|_{C^\mu} \tag{4.2.5}$$

для ее нормы.

Доказательство. (a) В силу (4.2.3) достаточно рассмотреть случай $p > 1$. Запишем модуль подынтегрального выражения (4.2.1) с $g = \varphi$ в виде произведения

$$|f(x-y)|\,|\varphi(y)| = (|f(x-y)|^{1/p}|\varphi(y)|)|f(x-y)|^{1/q}.$$

На основании неравенства Гельдера (4.1.2) отсюда

$$|(f * \varphi)(x)| \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^k} |f(x-y)|\,|\varphi(y)|^p dt \right)^{1/p} |f|_L^{1/q}$$

или, возводя в p-ую степень,

$$|(f*\varphi)(x)|^p \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^k} |f(x-y)|\,|\varphi(y)|^p dt\right) |f|_L^{p/q}$$

Интегрируя и применяя к интегралу в правой части оценку (4.2.3) с $g = |\varphi|^p \in L$, получим неравенство

$$|f*\varphi|_p^p \leqslant |f|_L |\varphi|_p^p |f|_L^{p/q}.$$

После возведения в степень $1/p$ оно переходит в (4.2.4).

(b) Перепишем интеграл (4.2.1) в форме

$$(f*\varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y)\varphi(x-y)dy.$$

Если функция $\varphi \in C^0$, т. е. непрерывна и ограничена, то $|f(y)\varphi(x-y)| \leqslant |\varphi|_0|f(y)|$, так что согласно теореме 1.8.1 об интегралах, зависящих от параметра, функция $f*\varphi$ непрерывна и справедлива оценка (4.2.5) с $\mu = 0$. Из этих же соображений в случае $\varphi \in C^\mu$, $0 < \mu \leqslant 1$ в обозначениях (4.2.3) имеем неравенство

$$|(f*\varphi)(x') - (f*\varphi)(x'')| \leqslant |f|_L[\varphi]_\mu |x'-x''|^\mu,$$

что с учетом определения из пункта 2.1 нормы в C^μ приводит к (4.2.5). □

Оценки теоремы 4.2.1 означают, что оператор свертки $R(f)\varphi = f*\varphi$ ограничен в каждом из банаховых пространств $X = L^p, C^\mu$ и его норма не превосходит $|f|_L$.

Примером оператора свертки служит введенный в пункте 1.8 оператор $T_\varepsilon = R(\chi_\varepsilon)$ с усредняющим ядром

$$\chi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon^k}\chi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{4.2.6}$$

где, напомним, неотрицательная функция $\chi(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ удовлетворяет условиям

$$\chi(y) = 0 \quad \text{при} \quad |y| \geqslant 1, \quad \int\limits_{|y|\leqslant 1} \chi(y)dy = 1. \tag{4.2.7}$$

Леммы 1.8.1 и 2.2.1 об этом операторе можно дополнить аналогичным результатом по отношению к пространству $L^p(\mathbb{R}^k)$.

Лемма 4.2.1. *Если $\varphi \in L^p(\mathbb{R}^k)$, $1 \leqslant p < \infty$, то $\chi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ в L^p при $\varepsilon \to 0$. В частности, для любого открытого множества $D \subseteq \mathbb{R}^k$ класс $C_0^\infty(D)$ плотен в $L^p(D)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in L^p$. Поскольку нормы в L всех функций χ_ε равны единице, на основании (4.2.4) операторы свертки $R(\chi_\varepsilon)\varphi = \chi_\varepsilon * \varphi$ ограничены в $\mathcal{L}(L^p)$ равномерно по ε. Поэтому согласно лемме 1.2.1 утверждение достаточно установить для некоторого плотного в L^p подпространства. В качестве такового выберем класс непрерывных функций φ с компактным носителем. Для функции φ из этого класса носители $\chi_\varepsilon * \varphi$ содержатся в некотором шаре, не зависящем от ε. Поэтому с учетом леммы 2.2.1 последовательность $\chi_\varepsilon * \varphi \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ и по L^p-норме.

Что касается второго утверждения леммы, то выберем в D последовательность компактов $K_1 \subseteq K_2 \ldots$, в объединении дающих D. Очевидно, последовательность функций φ_n, совпадающих с φ на K_n и равных нулю вне K_n, сходится к φ по L^p-норме. Для каждого n найдется такое $\varepsilon_n > 0$, что ε_n-окрестность компакта K_n содержится в D и, следовательно, свертка $\chi_\varepsilon * \varphi_n \in C_0^\infty(D)$ при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_n$. Вспоминая, что все нормы $|\chi_\varepsilon|_L$ равны 1, на основании (4.2.4) для разности $\chi_\varepsilon * \varphi_n - \varphi = \chi_\varepsilon * (\varphi_n - \varphi) + \chi_\varepsilon * \varphi - \varphi$ имеем оценку

$$|\chi_\varepsilon * \varphi_n - \varphi|_{L^p} \leqslant |\varphi_n - \varphi|_{L^p} + |\chi_\varepsilon * \varphi - \varphi|_{L^p}$$

Остается заметить, что правая часть этой оценки может быть сделана сколь угодно малой за счет подходящего выбора n и ε. □

Понятие свертки можно ввести и в пространстве $(C_0^\infty)' = (C_0^\infty)'(\mathbb{R}^k)$ обобщенных функций, рассматриваемых на всем $\mathbb{R}^k$. Напомним, что его подпространство обобщенных функций с компактным носителем обозначается $(C^\infty)'$. По аналогии с (4.2.1) свертку $u \in (C_0^\infty)'$ с функцией $\varphi \in C_0^\infty$ определим равенством

$$(\varphi * u)(x) = (u * \varphi)(x) = u[\varphi(x-t)]. \tag{4.2.8}$$

В силу леммы 1.8.3 функция $u * \varphi$ бесконечно дифференцируема, причем

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}(u * \varphi) = u * \left(\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}\right). \tag{4.2.9}$$

Нетрудно видеть, что

$$(u * \varphi)^\vee = u^\vee * \varphi^\vee, \quad u(\varphi^\vee) = (u * \varphi)(0), \tag{4.2.10}$$

где $\varphi^\vee(t) = \varphi(-t)$ и операция $\varphi \to \varphi^\vee$ распространена с C_0^∞ на $(C_0^\infty)'$ по формуле $u^\vee(\varphi) = u(\varphi^\vee)$.

Лемма 4.2.2. *Если φ совпадает с усредняющим ядром* (4.2.6)*, то $u * \chi_\varepsilon \to u$ при $\varepsilon \to 0$ в смысле сходимости в пространстве $(C_0^\infty)'$.*

Доказательство. По определению (4.2.8)

$$(u * \chi_\varepsilon)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^k} u[\chi_\varepsilon(x-t)]\varphi(x)dx.$$

Пусть K — носитель функции $\varphi \in C_0^\infty$. Выберем срезку $f \in C_0^\infty$ так, чтобы $f(t)u[\chi_\varepsilon(x-t)] = u[\chi_\varepsilon(x-t)]$ для всех t и $x \in K$. Тогда на основании второго утверждения леммы 1.8.3 предыдущее равенство можно переписать в форме

$$(u * \chi_\varepsilon)(\varphi) = u\left[\int_{\mathbb{R}^k} \chi_\varepsilon(x-t)\varphi(x)dx\right].$$

Очевидно, выражение в квадратных скобках здесь представляет собой свертку $(\chi_\varepsilon)^\vee * \varphi = (\chi_\varepsilon * \varphi^\vee)^\vee$. Остается заметить, что для $\varphi \in C_0^\infty$ последовательность $\varphi * \chi_\varepsilon \to \varphi$ при $\varepsilon \to 0$ в смысле сходимости в классе C_0^∞. $\square$

Аналогично (4.2.9) определяется и свертка $u * \varphi = \varphi * u$ обобщенной функции $u \in (C^\infty)'$ с компактным носителем и произвольной функции $\varphi \in C^\infty$. Это позволяет ввести и операцию $u_1 * (u_2 * \varphi)$, где хотя бы два из трех сомножителей имеют компактный носитель. С помощью леммы 4.2.2 нетрудно показать, что u_1 и u_2 здесь можно поменять местами, что позволяет ввести свертку $u_1 * u_2 = u_2 * u_1$ двух обобщенных функций, одна из которых имеет компактный носитель, по формуле $(u_1 * u_2) * \varphi = u_1 * (u_2 * \varphi)$. Здесь учтено, что в силу (4.2.10) обобщенная функция u восстанавливается по свертке $u * \varphi$ однозначно.

Простейшим представителем обобщенных функций с компактным носителем является δ-функция δ_a, сосредоточенная в точке $a \in \mathbb{R}^k$, действующая по формуле $\delta_a(\varphi) = \varphi(a)$. Согласно (4.2.8) для нее свертка

$$(\delta_a * \varphi)(x) = \varphi(x-a). \tag{4.2.11}$$

Соответственно, оператор свертки $\varphi \to \delta_a * \varphi$ является оператором сдвига. Поскольку операция свертки коммутативна и, в частности, $u * \delta_a = \delta_a * u$, отсюда следует что оператор свертки $\varphi \to u * \varphi$ коммутирует с операторами сдвига.

Рассмотрим свертку $Q * \varphi$ с функцией $Q(\xi) \in \mathcal{H}_{-k}$, удовлетворяющей необходимому условию

$$\int_\Omega Q(xi)d_{k-1}\xi = 0 \tag{4.2.12}$$

на единичной сфере Ω. Согласно пункту 3.3 ее можно рассматривать как обобщенную функцию, а ее свертку $Q * \varphi$ можно понимать, как выше, в смысле обобщенных функций либо определять, как в пункте 3.3, сингулярным интегралом. Для $\varphi \in C^\mu = C^\mu(\mathbb{R}^k)$ сингулярный интеграл $(Q * \varphi)(x)$, вообще говоря, не существует, поскольку в области $\{y,\ |y-x| \geqslant \varepsilon\}$ функция $Q(x-y)\varphi(y)$, вообще говоря, не интегрируема. Однако для произведения χQ с $\chi \in C_0^\infty$ эта неприятность исчезает, и согласно теореме 3.4.2 Корна—Жиро оператор свертки $\varphi \to (\chi Q) * \varphi$ ограничен в C^μ.

Положение меняется в L^p-случае, поскольку при $p>1$ функция $Q(x-y)$ по переменной y в области $|y-x|\geqslant\varepsilon$ принадлежит классу L^q с сопряженным показателем $q=p/(p-1)$, так что согласно неравенству Гельдера функция $Q(x-y)\varphi(y)$ интегрируема в этой области. Известная теорема Кальдерона—Зигмунда гласит, что сингулярный оператор свертки $\varphi\to Q*\varphi$ ограничен в L^p, $p>1$. Этот глубокий результат требует привлечения значительно более тонких средств по сравнению с теоремой Корна—Жиро. Как видно из доказательства этой теоремы, приведенного в монографии [77], в действительности можно утверждать больше.

Теорема (Кальдерон—Зигмунд)**.** *Пусть в обозначениях пункта* 3.1 *функция* $Q(x,\xi)$ *принадлежит* $C^{0(0)}(\mathbb{R}^k,\mathcal{H}_{-k})$ *и удовлетворяет по* ξ *условию* (4.3.7)*. Тогда для любой функции* $\varphi\in L^p$, $1<p<\infty$, *справедливы следующие утверждения.*

(a) *Сингулярный интеграл*

$$\psi(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^k}Q(x,x-y)\varphi(y)dy$$

существует почти всюду и определяет функцию $\psi\in L^p$ *с оценкой*

$$|\psi|_{L^p}\leqslant C|\varphi|_{L^p}. \tag{4.2.13}$$

(b) *Функция*

$$\widetilde{\psi}(x)=\sup_{\varepsilon>0}|\psi_\varepsilon(x)|,\quad \psi_\varepsilon(x)=\int\limits_{|y|\geqslant\varepsilon}Q(x,x-y)\varphi(y)dy, \tag{4.2.14}$$

принадлежит L^p *и допускает аналогичную* (4.2.13) *оценку. При этом*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\psi-\psi_\varepsilon|_{L^p}=0.$$

В действительности теорема Кальдерона—Зигмунда справедлива при значительно более общих предположениях относительно ядра $Q(x,\xi)$. Например, достаточно потребовать, чтобы по переменной ξ на единичной сфере Ω функция Q принадлежала $L^q(\Omega)$ с сопряженным показателем $q=p/(p-1)$. Заметим еще, что равенство (4.2.14) является аналогом (4.1.13) и определяемая им функция $\widetilde{\psi}$ также называется максимальной функцией Харди—Литтлвуда.

Как было отмечено в пункте 4.1, в одномерном случае $k=1$ функция Q с точностью до постоянного множителя совпадает с ядром Коши $K(t)=-1/(\pi i t)$, оператор свертки с которым носит название преобразования Гильберта. Соответствующий результат, аналогичный теореме Кальдерона—Зигмунда, был получен М. Риссом значительно ранее методами комплексного анализа. Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [65]. Теорема Рисса распространяется и на свертку с усеченным ядром Коши

$$s(t)=-\frac{\chi(t)}{\pi i t};\quad \chi\in C_0^\infty(\mathbb{R},\ \chi(0)=1. \tag{4.2.15}$$

По аналогии с теоремой 4.2.1 сформулируем ее и для C^μ-случая.

Теорема 4.2.2. *Сингулярный оператор свертки* $\varphi\to s*\varphi$ *с функцией* (4.2.15) *ограничен в каждом из пространств* $C^\mu(\mathbb{R})$, $0<\nu<1$, *и* $L^p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$.

Доказательство. Как уже отмечалось, C^μ-случай охватывается теоремой 3.4.2. Поскольку разность двух функций вида (4.2.15) принадлежит C_0^∞, не ограничивая общности, можно считать, что $\chi(t)=0$ при $|t|\geqslant 1$. В этом случае для $|t_0|\leqslant 1$ функция $\chi(t_0-t)=0$ при $|t|\geqslant 2$. Поэтому, полагая $\psi=s*\varphi$, для любого целого i можно записать

$$\psi(t_0+i)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-2}^{2}\frac{\chi(t_0-t)}{t-t_0}\varphi(t+i)dt,\quad |t_0|\leqslant 1.$$

Очевидно, функция $[\chi(t_0-t)-1](t-t_0)^{-1}$ непрерывна в квадрате $-2\leqslant t_0,t\leqslant 2$, так что на основании теоремы Рисса имеем оценку

$$|\psi(t+i)|_{L^p(-1,1)}\leqslant C|\varphi(t+i)|_{L^p(-2,2)}$$

с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от i. Возводя это неравенство в p-ую степень и суммируя по i, в результате приходим к справедливости оценки (4.2.13). □

Для $p = 1$ теорема 4.2.2 не имеет места. Точнее, если $f \in L^1$, то сингулярный интеграл $(s * f)(t_0)$ существует для почти всех t_0, однако полученная функция в общем случае локально не суммируема [64]. Очевидно, операция свертки $\varphi \to s * \varphi$ инвариантна в классе C_0^∞, который плотен в L^1. Обозначим $L^{(1)}$ пополнение этого класса по норме

$$|\varphi| = |\varphi|_L + |s * \varphi|_L \tag{4.2.16}$$

В результате получим банахово пространство, вложенное в L^1, в котором по определению оператор свертки $f \to s * f$ ограничен. Очевидно, для $f \in L^{(1)}$ свертка $f * s$ принадлежит L^1 и понимается в смысле обобщенных функций. Вопрос о том, совпадает ли она почти всюду с сингулярным интегралом, о котором шла речь выше, оставляем открытым. Однако имеет место равенство $(f * s) * \varphi = f * (s * \varphi)$, $\varphi \in X$, где X означает любое из пространств L^p, $p > 1$, или C^μ. Для $f \in C_0^\infty$ этот факт очевиден, в общем случае с учетом теоремы 4.2.2 он устанавливается предельным переходом по норме (4.2.16).

Из определения видно, что пространство $L^{(1)}$ является банаховой алгеброй относительно свертки как умножения и идеалом в аналогичной алгебре L, т. е. $f * g \in L^{(1)}$ для $f \in L^{(1)}$ и $g \in L^1$.

В самом деле, если $f \in L^{(1)}$ и $g \in L^1$, то в дополнение к (4.2.3) имеем аналогичное неравенство $|(s * f) * g|_L \leqslant |s * f|_L |g|_L$, так что $f * g \in L^{(1)}$ и в соответствии с (4.2.16) отсюда

$$|f * g|_{L^{(1)}} \leqslant |f|_{L^{(1)}} |g|_{L^1}.$$

Легко описать [54] простые достаточные условия принадлежности функций классу $L^{(1)}$. Обозначим $L^{1,p}(\mathbb{R})$, $p > 1$, класс всех функций $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$, для которых конечна норма

$$|g| = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |g|_{L^q[i,i+1]} \tag{4.2.17}$$

(как обычно, функции, отличающиеся друг от друга на множестве меры нуль, отождествляются). Очевидно, относительно этой нормы пространство $L^{1,p}$ банахово и вложено в L^1. Ясно, что класс C_0^∞ плотен в этом пространстве.

Лемма 4.2.3. *Пространство $L^{1,p}$, $p > 1$, вложено в $L^{(1)}$ и содержит все функции $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию*

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^\alpha |g(t)|^p dt < \infty, \quad \alpha > p. \tag{4.2.18}$$

Доказательство. Совершенно аналогично теореме 4.2.2 устанавливается, что оператор свертки с функцией s ограничен в $L^{1,p}$. Таким образом, для $\varphi \in C_0^\infty$ можно написать аналогичную (4.2.13) оценку по отношению к норме в $L^{1,p}$. Следовательно,

$$|\varphi|_{L^1} \leqslant |\varphi|_{L^{1,p}}, \quad |s * \varphi|_{L^1} \leqslant |s * \varphi|_{L^{1,p}} \leqslant C|\varphi|_{L^{1,p}},$$

что приводит к оценке

$$|\varphi|_{L^{(1)}} \leqslant (1 + C)|\varphi|_{L^{1,p}}.$$

С учетом плотности C_0^∞ в $L^{1,p}$ она означает вложение $L^{1,p} \subseteq L^{(1)}$.

Что касается второго утверждения леммы, то для любого целого i имеем очевидное неравенство

$$\int_i^{i+1} |g(t)|^p dt \leqslant \delta_i \int_i^{i+1} (1 + |t|)^\alpha |g(t)|^p dt, \quad \delta_i = \begin{cases} (1+i)^{-\alpha}, & i \geqslant 0, \\ (-i)^{-\alpha}, & i < 0. \end{cases}$$

Поэтому норма (4.2.17) не превосходит

$$|g| \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^\alpha |g(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad C = \sum_i \delta_i^{1/p} < \infty.$$

□

4.3. Преобразование Фурье

Преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R}^k)$ определяется интегралом

$$\hat{f}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-ixy} f(y)dy, \tag{4.3.1}$$

где $xy = x_1y_1 + \dots + x_ky_k$. Термин преобразования Фурье также используется и для операции $f \to \hat{f}$. В силу теоремы 1.8.1 функция $\hat{f}$ непрерывна. Ясно также, что эта функция ограничена и ее sup-норма допускает оценку

$$|\hat{f}|_0 \leqslant |f|_L. \tag{4.3.2}$$

Из теоремы 1.8.1 так же легко выводятся соотношения

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_j} = [(-iy_jf(y)]^\wedge, \quad x_j\hat{f}(x) = \left[i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right]^\wedge (x), \tag{4.3.3}$$

где предполагается, что вместе с f классу L принадлежат и функции в квадратных скобках. Во втором соотношении предполагается, кроме того, что функция $f \in C^1(\mathbb{R}^k)$ и $f(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Здесь и ниже запись $f \in C$ или $f \in C^1$ для суммируемых функций означает их принадлежность указанным классам после надлежащего изменения этих функций на множестве меры нуль.

В частности, если функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, то функция $\varphi = \hat{f}$ бесконечно дифференцируема и убывает на ∞ быстрее любое степени $|x|$. Другими словами, для этой функции конечны нормы

$$|\varphi|_{m,n} = \max_{|\alpha| \leqslant n} \left|(1+|x|)^m \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}\right|_0, \quad m,n = 0,1,\dots, \tag{4.3.4}$$

где $|\cdot|_0$ означает sup-норму.

В силу (4.3.2) и плотности класса C_0^∞ в L отсюда приходим к заключению, что для $f \in L(\mathbb{R}^k)$ функция $\hat{f}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Это утверждение известно в анализе как лемма Римана—Лебега.

При определенных условиях преобразование Фурье допускает обращение в явном виде.

Теорема (формула обращения). *Если функция $\hat{f}$ суммируема, то исходная функция $f \in L$ восстанавливается обратным преобразованием Фурье*:

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \hat{f}(x)e^{ixy}dx, \tag{4.3.5}$$

где равенство понимается почти всюду.

Из этой теоремы, в частности, следует, что преобразование Фурье взаимно однозначно на L. Отметим еще следующее его свойство (см., например, [8, 22]).

Теорема (Винер). *Если $f \in L$ и $1 + \hat{f}(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^k$, то существует такая функция $g \in L$, что $(1+\hat{f})^{-1} = 1 + \hat{g}$.*

Связь преобразования Фурье со сверткой (4.2.1) осуществляется равенством

$$(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}, \quad f, g \in L. \tag{4.3.6}$$

Действительно, по определению свертки

$$(f * g)^\wedge(x) = \int \left[\int f(y-t)g(t)dt\right] e^{-ixy}dy.$$

Полагая $f_1(t) = e^{-ixt}f(t)$, $g_1(t) = e^{-ixt}g(t)$, правую часть здесь можно переписать в форме свертки $(f_1 * g_1)(x)$, и нужный результат следует из равенства (4.2.2).

Напомним, что пространство L является банаховой алгеброй со сверткой в качестве умножения. В силу (4.3.2), (4.3.5) преобразование Фурье осуществляет вложение этой алгебры в банахову алгебру непрерывных и исчезающих на ∞ функций, определяемую поточечными операциями и sup-нормой.

Наряду с $C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$ часто рассматривают более широкий класс Шварца $\mathcal{S}$ всех функций $\varphi(x) \in C^\infty$, которые вместе со всеми производными убывают на ∞ быстрее любой степени $|x|$, или, что равносильно, для которых конечны нормы (4.3.4). Очевидно, соотношения (4.3.3) справедливы, очевидно, и для функций $f \in \mathcal{S}$. Поэтому преобразование Фурье инвариантно в $\mathcal{S}$. Это же верно и для обратного преобразования (4.3.5). С учетом формулы обращения отсюда заключаем, что преобразование Фурье осуществляет изоморфизм класса $\mathcal{S}$ на себя.

Иногда удобно снабдить преобразование Фурье (4.3.1) нормирующим множителем $(2\pi)^{-k/2}$, в этом случае его обозначаем символом F. Очевидно, тогда обратное преобразование F^{-1} в классе $\mathcal{S}$ будет определяться с аналогичным множителем:

$$(F\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-ixy}\varphi(y)dy, \quad (F^{-1}\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{ixy}\varphi(y)dy.$$

В частности, $F^{-1}\varphi = (JFJ)\varphi$, $\varphi \in \mathcal{S}$, где $J\varphi = \overline{\varphi}$ означает оператор комплексного сопряжения функций. Таким образом, в терминах операторной инволюции (см. пункт 1.3) имеем равенство $F^{-1} = \overline{F}$.

Убедимся, что оператор F сохраняет норму пространства L^2, т. е. $|F\varphi|_{L^2} = |\varphi|_{L^2}$, $\varphi \in \mathcal{S}$.

В самом деле, в обозначениях формы (4.1.3) (по отношению к $G = \mathbb{R}^k$) квадрат нормы функции φ в L^2 равен $(\varphi, J\varphi)$. Кроме того, из определения (4.3.1) видно, что

$$\langle \varphi, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{\varphi}, \psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}. \tag{4.3.7}$$

Поэтому $|F\varphi|_{L^2}^2 = \langle F\varphi, JF\varphi \rangle = \langle \varphi, FJF\varphi \rangle = \langle \varphi, J\varphi \rangle$, что дает равенство L^2-норм функций φ и $F\varphi$.

Класс C_0^∞, а тем более $\mathcal{S}$ плотен в пространстве $L^2(\mathbb{R}^k)$. Следовательно, оператор F продолжается до изометрического изоморфизма пространства L^2 на себя, который обозначим тем же символом. С учетом первого соотношения (4.3.3) отсюда следует возможность простого описания соболевского пространства $W^{n,2}(\mathbb{R}^k)$ с помощью эквивалентной нормы

$$|\varphi| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^k} (1 + |x|^2)^n (F\varphi)^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Преобразование Фурье также естественным образом распространяется на обобщенные функции специального типа — имеющие так называемый медленный рост. С этой целью в классе Шварца $\mathcal{S}$ сходимость определим следующим образом: последовательность $\varphi_j \to \varphi$ в $\mathcal{S}$ при $j \to \infty$, если в обозначениях (4.3.4) норма $|\varphi_j - \varphi|_{m,n} \to 0$ для всех m, n. Класс линейных функционалов над $\mathcal{S}$, непрерывных относительно данной сходимости, обозначим $\mathcal{S}'$. Очевидно, сходимость $\varphi_j \to \varphi$ в C_0^∞ влечет соответствующую сходимость в $\mathcal{S}$. Легко показать также, что для любой $\varphi \in \mathcal{S}$ существует последовательность $\varphi_j \in C_0^\infty$, сходящаяся к φ в $\mathcal{S}$. Следовательно сужение u на C_0^∞ любого функционала $u \in S'$ принадлежит $(C_0^\infty)'$, причем данное сужение определяется однозначно по u. По этой причине элементы $u \in \mathcal{S}'$ можно отождествить с обобщенными функциями из $(C_0^\infty)'$. Их называют обобщенными функциями медленного роста. Термин связан с измеримыми функциями $f(x)$ медленного роста, которые по определению допускают оценку

$$|f(x)| \leqslant C(1 + |x|)^m \tag{4.3.8}$$

с некоторым натуральным m, и как регулярные обобщенные функции они принадлежат $\mathcal{S}'$. Классу $\mathcal{S}'$, очевидно, принадлежат и все обобщенные функции u с компактным носителем. Таким образом, $(C^\infty)' \subseteq \mathcal{S}' \subseteq (C_0^\infty)'$.

Из (4.3.3), (4.3.4) также видно, что $\varphi_n \to \varphi$ в S влечет $\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ в $\mathcal{S}$. Поэтому с учетом (4.3.7) преобразование Фурье можно «продолжить» с $\mathcal{S}$ на $\mathcal{S}'$ по формуле

$$\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

В результате получаем обратимое преобразование $\mathcal{S}'$ на себя, которое также называется преобразованием Фурье. Очевидно, соотношения (4.3.3) сохраняются и для $f \in \mathcal{S}'$. Если $f \in L \subseteq \mathcal{S}'$, то приведенное определение преобразования Фурье совпадает с (4.3.1).

Как и в случае $(C_0^\infty)'$, класс $\mathcal{S}'$ наделяется поточечной сходимостью его элементов. Относительно этой сходимости пространство $\mathcal{S}'$ полно, а преобразование Фурье непрерывно $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Определенный выше изометрический изоморфизм F пространства L^2 с с точностью до множителя

$(2\pi)^{-k/2}$ совпадает с сужением преобразования Фурье, действующего в пространстве $\mathcal{S}'$, на его подпространство L^2.

Теорема 4.3.1. *Преобразование Фурье обобщенной функции $u \in (C^\infty)'$ с компактным носителем является регулярной обобщенной функцией, принадлежит классу C^∞ и определяется равенством*

$$\hat{u}(x) = u_t(e^{-ixt}). \tag{4.3.9}$$

При этом справедливо соотношение

$$(u * v)^\wedge = \hat{u}\hat{v}, \quad u, v \in (C^\infty)', \tag{4.3.10}$$

расширяющее (4.3.6) *на обобщенные функции с компактным носителем.*

Отметим попутно, что в случае комплексных переменных $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{C}^k$ правая часть равенства (4.3.9) определяет целую функцию, которая носит название преобразования Фурье—Лапласа.

Доказательство. В силу леммы 1.8.3 функция в правой части (4.3.3), которую обозначим $f(x)$, принадлежит классу C^∞. Для нее существуют такие натуральное m и компакт $K \subseteq \mathbb{R}^k$, что

$$|f(x)| \leqslant C|e^{-ixt}|_{C^m(K)}, \tag{4.3.11}$$

где точка x фиксирована и норма справа берется по переменной t.

В самом деле, пусть функция $\chi \in C_0^\infty$ тождественно равна нулю в окрестности $\operatorname{supp} u$. Достаточно показать, что $|u(\varphi)| \leqslant C|\varphi|_{C^m(K)}$, $\varphi \in C^\infty$.

Если эта оценка не имеет места, то для любого натурального m найдется такая функция $\varphi_m \in C^\infty(D)$, что

$$|u(\varphi_m)| \geqslant 1, \quad |\varphi_m|_{C^m(K)} \leqslant 1/m.$$

Но тогда $\chi\varphi_m \to 0$ при $m \to \infty$ в $C_0^\infty(D)$, что противоречит непрерывности функционала u относительно этой сходимости. □

Из (4.3.11) следует, что для функции $f(x) = u_t(e^{-ixt})$ справедлива оценка (4.3.8), означающая ее медленный рост на ∞. В частности, как регулярная обобщенная функция $f \in \mathcal{S}'$.

С другой стороны, для $\varphi \in C_0^\infty$ с учетом леммы 1.8.3 и определения (4.3.14) имеем соотношение

$$\hat{u}(\varphi) = u\left(\int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-ixt}\varphi(t)dt\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(t)\varphi(t)dt,$$

согласно которому $\hat{u} = f$. Из тех же соображений

$$(u * \varphi)^\wedge(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-ixt}u_t[\varphi(x-t)]dt = u_t\left[\int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{-ixt}\varphi(x-t)dt\right].$$

Поскольку выражение в правой части в квадратных скобках совпадает с $e^{-iyt}\hat{\varphi}(y)$, в результате приходим к соотношению

$$(u * \varphi)^\wedge = \hat{u}\hat{\varphi}, \quad u \in (C^\infty)', \ \ \varphi \in C_0^\infty, \tag{4.3.12}$$

расширяющем (4.3.6) на случай одной обобщенной функции. В общем случае $u, v \in (C^\infty)'$ на основании этого соотношения имеем:

$$(u * v * \varphi)^\wedge = (u * v)^\wedge\hat{\varphi}, \quad (u * v * \varphi)^\wedge = \hat{u}(v * \varphi)^\wedge = \hat{u}\hat{v}\hat{\varphi},$$

откуда следует справедливость (4.3.10) для двух обобщенных функций с компактным носителем.

Отметим, что преобразование Фурье функции $Q \in \mathcal{H}_{-k}$ со свойством (4.2.12) определяется аналогично (4.3.1) сингулярным интегралом. Его можно рассматривать и в смысле обобщенных функций. Известно, что функция $\widehat{Q}$ однородна степени 0. В одномерном случае преобразование Фурье этого ядра дается формулой

$$\hat{K}(t_0) = \operatorname{sgn} t_0, \quad K(t) = -\frac{1}{\pi i t}. \tag{4.3.13}$$

В самом деле, по определению

$$K(\hat{\varphi}) = -\frac{1}{\pi i}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n}\frac{dt}{t}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itt_0}\varphi(t_0)dt_0.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-n}^{n}\frac{e^{-itt_0}}{t}dt = \frac{2\operatorname{sgn} t_0}{\pi}\int\limits_{0}^{n|t_0|}\frac{\sin t}{t}dt. \tag{4.3.14}$$

Как хорошо известно из курса математического анализа, несобственный интеграл

$$\lim_{s\to\infty}\int\limits_{0}^{s}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}. \tag{4.3.15}$$

Поэтому в пределе при $n\to\infty$ равенство (4.3.14) переходит в (4.3.13).

Формула (4.3.13), в частности, показывает, что $\hat{K}^2 = 1$ и, следовательно, свертка $K*(K*\varphi) = \varphi$, $\varphi\in C_0^\infty$. В терминах обобщенных функций этот факт можно выразить равенством $K*K = \delta_0$. Аналогичная ситуация справедлива и для «усеченного» ядра Коши (4.2.15), которое является, очевидно, обобщенной функцией с компактным носителем.

Лемма 4.3.1. *Преобразование Фурье $\hat{s}(t)\to\pm1$ при $t\to\pm\infty$ и его производная принадлежит классу C_0^∞. При этом $s*s-\delta_0\in C_0^\infty$, так что*

$$(s*s)*\varphi = \varphi + \chi_0*\varphi,\quad \chi_0\in C_0^\infty,$$

для любой локально интегрируемой функции $\varphi\in\mathcal{S}'$.

Доказательство. Пусть функция $K_0(t) = K(t)$ при $|t|\leqslant 1$ и $K_0(t) = 0$ при $|t|\geqslant 1$. Тогда аналогично (4.3.13) убеждаемся, что $\widehat{K}_0(t_0)$ определяется выражением в правой части (4.3.14), где нужно положить $n=1$. Таким образом, $\widehat{K}_0(t_0)\to\pm1$ при $t_0\to\pm\infty$. Из сравнения функций $K_0(t)$ и $s(t)$ в (4.2.15) видно, что разность K_0-s принадлежит L и, следовательно, на основании (4.3.15)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\hat{s}(x) = \pm1. \tag{4.3.16}$$

Согласно лемме 1.8.3 производная $\hat{s}'$ вычисляется под знаком сингулярного интеграла и, следовательно, с точностью до постоянного множителя совпадает с преобразованием Фурье функции χ, фигурирующей в (4.2.15). В частности, $\hat{s}'\in\mathcal{S}$, так что с учетом (4.3.16) и функция $\hat{s}^2(t)-1\in\mathcal{S}$. Из соотношения (4.3.10) теоремы 4.3.1, примененного к $u=v=s$, отсюда заключаем, что $\chi_0 = u*u-\delta_0\in\mathcal{S}$. Поскольку функция χ_0 имеет компактный носитель, то в действительности она принадлежит классу C_0^∞. □

Как отмечено в пункте 4.2, пространство $L^{(1)}$ является банаховой алгеброй относительно свертки как умножения, вложенной в L^1, причем $f*g\in L^{(1)}$ для $f\in L^{(1)}$ и $g\in L^1$. Теорема Винера сохраняет свою силу и для этой алгебры.

В самом деле, пусть $f\in L^{(1)}$ и $1+\hat{f}(t)\neq 0$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Тогда по теореме Винера найдется такая функция $g\in L^1$, что $1+\hat{g} = (1+\hat{f})^{-1}$, т. е. $\hat{f}+\hat{g}+\hat{f}\hat{g} = 0$. С учетом (4.3.6) и взаимной однозначности преобразования Фурье отсюда $f+g+f*g = 0$. Поскольку свертка $f*g\in L^{(1)}$, то и $g = -f-f*g\in L^{(1)}$.

Напомним, что в пункте 1.7 символом C обозначалось пространство всех непрерывных и ограниченных функций $x(t)$, $t\in\mathbb{R}$. Относительно поточечных операций и sup-нормы $|x|_0$ это пространство является банаховой алгеброй. Символ C^0 закрепляется за подалгеброй функций $x\in C$, исчезающих на бесконечности. Обозначим M^0 образ $L^{(1)}$ при преобразовании Фурье. В силу (4.3.6) относительно нормы

$$|y| = |g|_{L^{(1)}},\quad y = \hat{g}, \tag{4.3.17}$$

пространство M^0 является банаховой алгеброй по умножению, вложенной в C^0.

Следующая лемма показывает, что M^0 плотно вложено в C^0.

Лемма 4.3.2. *Класс $\mathcal{R}$ рациональных функций, сужения которых на вещественную прямую принадлежат C^0, плотен в банаховой алгебре M^0.*

Доказательство. Рассмотрим равенства

$$i\int\limits_0^\infty e^{i(\zeta-s)t}dt=(s-\zeta)^{-1},\ \operatorname{Im}\zeta>0,\quad i\int\limits_{-\infty}^0 e^{i(\zeta-s)t}dt=-(s-\zeta)^{-1},\ \operatorname{Im}\zeta<0,$$

которые в соответствии с (4.3.1) можно записать в форме

$$\widehat{f}_\pm(s)=(s-\zeta)^{-1}, \tag{4.3.18}$$

где положено

$$f_+(t)=\begin{cases} ie^{i\zeta t}, & t>0,\\ 0, & t<0,\end{cases}\ \operatorname{Im}\zeta>0;\quad f_-(t)=\begin{cases} 0, & t>0,\\ ie^{i\zeta t}, & t<0,\end{cases}\ \operatorname{Im}\zeta<0.$$

Дифференцируя равенство (4.3.18), приходим к следующему описанию класса функций $f\in L^{(1)}$, преобразование Фурье которых принадлежит $\mathcal{R}$: на каждой полуоси $\pm t>0$ функция $f(t)$ представляет собой конечную сумму слагаемых вида $p(t)e^{i\zeta t}$, где $\pm\zeta>0$. Остается заметить, что в силу леммы 4.2.3 класс функций этого вида плотен в $L^{(1)}$. □

Обозначим M пространство всех функций $x\in C$, для которых оператор умножения $y\to xy$ ограничен в M^0, оно снабжается нормой

$$|x|=|x|_{\mathcal{L}(M^0)} \tag{4.3.19}$$

Нетрудно видеть, что по этой норме пространство M вложено в C, т. е. справедлива оценка

$$|x|_0\leqslant C_0|x|_M \tag{4.3.20}$$

с некоторой постоянной $C_0>0$, не зависящей от x.

В самом деле, в обозначениях (4.3.17) имеем: $x\hat g=\hat f$ и по определению

$$|f|_{L^{(1)}}\leqslant |x|_M|g|_{L^{(1)}}.$$

Поэтому для любой точки $a\in\mathbb{R}$ можно написать

$$|x(a)\hat g(a)|\leqslant |f|_{L^1}\leqslant |f|_{L^{(1)}}\leqslant |x|_M|g|_{L^{(1)}}.$$

В качестве $g(t)=g_a(t)$ выберем здесь функцию, совпадающую с e^{iat} на отрезке $[0,1]$ и равную нулю вне этого отрезка. Тогда

$$\hat g(a)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-iat}g(t)dt=1$$

и достаточно убедиться, что

$$C_0=\sup_a |g_a|_{L^{(1)}}<\infty. \tag{4.3.21}$$

Очевидно, не ограничивая общности, можно считать, что $s(t)=0$ при $|t|\geqslant 1$, так что функция $s*g_a$ обращается в нуль вне отрезка $[-1,2]$. Очевидно, норма $|g_a|_{L^1}=|g_a|_{L^2}=1$, так что на основании теоремы 4.2.2 функция $s*g_a$ принадлежит L^2 с оценкой

$$|s*g_a|_{L^2}\leqslant C_1,$$

где C_1 — норма оператора свертки с s в L^2. В силу неравенства Гельдера отсюда $|s*g_a|_{L^1}\leqslant\sqrt{3}A_1$. В результате в соответствии с определением (4.2.16) нормы в $L^{(1)}$ приходим к оценке (4.3.21) с постоянной $C_0=1+\sqrt{3}C_1$.

Из определения M и (4.3.20) следует, что пространство M является банаховой алгеброй по умножению, его элементы называем $L^{(1)}$-мультипликаторами. Их можно рассматривать как преобразования Фурье обобщенных функций $u\in\mathcal{S}'$, оператор свертки с которыми ограничен в $L^{(1)}$. Очевидно, функции $\hat s$ и $\hat f$, где $f\in L^1$, принадлежат к этому типу. Другой пример доставляют преобразования Фурье δ-функций $\widehat{\delta}_a(t)=e^{-at}$, оператором свертки с которыми согласно (4.2.11) служит оператор сдвига. Поскольку эти операторы $f(t)\to f(t-a)$ ограничены в $L^{(1)}$ равномерно по $a \in \mathbb{R}$, функция e^{iat} принадлежат M и их нормы $|e^{iat}|_M$ равномерно ограничены. Относительно общей теории мультипликаторов и связанных с ними операторов, инвариантных относительно сдвига, см. например, [66, 68].

Обозначим M^1 замыкание в M конечных сумм $\sum c_k e^{ia_k t}$. В силу (4.3.20) элементами пространства M^1 являются почти периодические функции. Иначе говоря, в обозначениях пункта 1.7 пространство M^1 является банаховой алгеброй, вложенной в C^1. В соответствии с леммой 4.3.1 по терминологии пункта 1.8 функции вида

$$x(t) = x_1(t) + \hat{s}(t)x_2(t) + y(t), \quad x_j \in M^1,\ y \in M^0,$$

являются полу-почти-периодическими.

4.4. Операторы типа свертки на прямой

Интегральный оператор типа свертки с функцией $f \in L(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$[K(f)\varphi](t_0) = \int_{\mathbb{R}} k(t_0,t)f(t_0-t)\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \mathbb{R}. \tag{4.4.1}$$

Функция $k(t_0,t)$ предполагается непрерывной и ограниченной, т. е. принадлежащей пространству $C^0(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, и зависимость от нее в обозначении оператора явно не указывается. В случае $k(t_0,t)=1$ он переходит в оператор свертки $R(f)\varphi = f * \varphi$, т. е. в этом случае символ K заменяется на R. Нетрудно описать условия на k, обеспечивающие ограниченность или компактность оператора $K(f)$ в каждом из пространств $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$, $C^\mu(\mathbb{R})$, $0<\mu<1$, и $C^{1,\mu}(\mathbb{R})$.

Теорема 4.4.1.

(a) *Пусть функция $k(t_0,t) \in C^{\mu+0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Тогда оператор $K(f)$ ограничен в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $C^\mu(\mathbb{R})$ и его норма допускает оценки*

$$|K(f)|_{\mathcal{L}(L^p)} \leqslant |k|_{C^0}|f|_L, \quad |K(f)|_{\mathcal{L}(C^\mu)} \leqslant |k|_{C^\mu}|f|_L, \tag{4.4.2}$$

где, напомним, под нормой в C^0 понимается sup*-норма.*

Если дополнительно

$$\lim_{t\to\infty,\ |t_0-t|\leqslant n} k(t_0,t) = 0, \quad n=1,2,\ldots, \tag{4.4.3}$$

то оператор $K(f)$ компактен в этих пространствах.

(b) *Пусть $k \in C^{1,\mu+0}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Тогда оператор $K(f)$ ограничен в пространстве $C^{1,\mu}(\mathbb{R})$. Если дополнительно вместе с* (4.4.3) *аналогичное условие выполнено и для функции*

$$k^1 = \frac{\partial k}{\partial t_0} + \frac{\partial k}{\partial t}, \tag{4.4.4}$$

то оператор $K(f)$ компактен в этом пространстве.

Доказательство. Ограниченность оператора $K(f)$ в L^p и соответствующая оценка (4.4.2) устанавливается совершенно аналогично теореме 4.3.1(a).

Пусть выполнено условие (4.4.3). Согласно теореме 1.2.3 множество компактных операторов замкнуто по операторной норме. Поэтому на основании плотности класса $C_0^\infty(\mathbb{R})$ в $L(\mathbb{R})$ и (4.4.2) без ограничения общности можно считать, что $f \in C_0^\infty$. Выберем срезку $\chi \in C_0^\infty$ на носителе $\operatorname{supp} f$ и заметим, что выражение $k(t_0,t)f(t_0-t)$ не изменится от умножения его на $\chi(t_0-t)$. Поэтому, заменяя $k(t_0,t)$ на $k(t_0,t)\chi(t_0-t)$, с учетом (4.4.3) без ограничения общности можно считать, что $k(t_0,t)\to 0$ при $|t|+|t_0|\to\infty$. Но тогда функцию k можно приблизить по sup-норме непрерывными функциями с компактным носителем. С учетом леммы 2.2.1 в действительности без ограничения общности можно считать, что $k \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. В этом случае компактность оператора $K(f)$ в пространстве L^p очевидна.

Запишем далее равенство (4.4.1) в форме

$$[(K(f)\varphi](t_0) = \int_{\mathbb{R}} k(t_0,t_0-t)f(t)\varphi(t_0-t)dt. \tag{4.4.5}$$

Тогда вторая оценка в (4.4.2) получается отсюда непосредственно.

Пусть $k \in C^{\nu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ с некоторым $\nu > \mu$ и выполнено условие (4.4.3). На основании теоремы 2.1.2 и леммы 2.2.1 последовательность $k_n(t_0,t) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, сходящаяся к $k(t_0,t)$ по норме пространства C^{μ}. Поэтому, как и выше, на основании соответствующей оценки (4.4.2) можно считать $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ и $k(t_0,t) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, что гарантирует компактность оператора K в пространстве C^{μ}.

Если $k \in C^{1,\mu}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, то равенство (4.4.5) можно дифференцировать под знаком интеграла, что приводит к формуле

$$[K(f)\varphi]' = K^1(f)\varphi + K(f)\varphi', \tag{4.4.6}$$

где оператор K^1 определяется аналогично (4.4.1) по отношению к функции (4.4.4). Отсюда ограниченность оператора K в $C^{1,\mu}$ получается непосредственно.

Пусть далее условие (4.4.3) выполнено для обеих функций k, k^1. Тогда на основании (a) оба оператора $K(f)$ и $K^1(f)$ компактны в пространстве C^{μ}, и с учетом (4.4.6) отсюда следует компактность оператора $K(f)$ в $C^{1,\mu}$. $\square$

Конечно, условие $k \in C^{\mu+0}$ для доказательства оценок (4.4.2) несколько завышено и принято только для единообразия формулировок. Как показывают эти оценки, в L^p-случае достаточно потребовать только ограниченности функции $k(t_0,t)$, а в C^{μ}-случае его можно заменить на $k \in C^{\mu}$.

Применим теорему 4.4.1 к оператору свертки $R(f)\varphi = f * \varphi$ в следующей ситуации. Пусть функция $a(t) \in C(\mathbb{R})$ допускает пределы

$$a(\pm\infty) = \lim_{t \to \pm\infty} a(t) \tag{4.4.7}$$

и аналогичным свойством обладает функция $b(t)$. Тогда для любых функций $f, g \in L(\mathbb{R})$ справедливы соотношения

$$aR(f) \sim R(f)a, \quad aR(f)bR(g) \sim abR(f * g), \tag{4.4.8}$$

где $\sim$ означает равенство по модулю $\mathcal{T}(L^p)$ компактных операторов и a, b рассматриваются как операторы умножения.

При дополнительном предположении $a, b \in C^{\mu+0}(\mathbb{R})$ эти соотношения справедливы и по отношению к $\mathcal{T}(C^{\mu})$. Аналогично, если $a, b \in C^{1,\mu+0}(\mathbb{R})$ и производные a', b' также обладают свойством (4.4.7), то соотношения (4.4.8) справедливы и по отношению к $\mathcal{T}(C^{\mu})$.

В самом деле, первое соотношение в (4.4.8) вытекает из теоремы 4.4.1, поскольку функция $k(t_0,t) = a(t_0) - a(t)$ удовлетворяет условию (4.4.6). Что касается второго соотношения, то оно является следствием первого: $aR(f)bR(g) \sim aR(f*g)b \sim abR(f*g)$.

Аналог теоремы 4.4.1 имеет место и в случае, когда роль f играет функция s в (4.2.15) и интеграл (4.4.1) понимается как сингулярный.

Теорема 4.4.2.

(a) *Пусть функция* $k(t_0,t) \in C^{\mu+0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, *тогда сингулярный оператор* $K(s)$ *ограничен в пространствах* $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$ *и* $C^{\mu}(\mathbb{R})$, $0 < \mu < 1$. *Если дополнительно* $k(t,t) \equiv 0$ *и выполнено условие* (4.4.3)*, то оператор* $K(s)$ *компактен в этих пространствах.*

(b) *Пусть* $k \in C^{1,\mu+0}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. *Тогда оператор* $K(s)$ *ограничен в пространстве* $C^{1,\mu}(\mathbb{R})$. *Если дополнительно* $k(t,t) \equiv 0$ *и условие* (4.4.3) *выполнено для обеих функций* k *и* k^1 *в* (4.4.5)*, то оператор* $K(s)$ *компактен.*

Доказательство. В силу леммы 2.1.1 для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $k_0(t_0,t) = |t - t_0|^{-\varepsilon}[k(t_0,t) - k(t_0,t_0)]$ также принадлежит классу $C^{\mu+0}$. Поэтому на основании теоремы 4.4.1 оператор $K_0(f_0)$, определяемый аналогично (4.4.1) по $k_0(t_0,t)$ и $f_0(t) = |t|^{\varepsilon}s(t)$, ограничен в пространствах L^p и C^{μ}. Если $k(t_0,t)$ удовлетворяет условию (4.4.3), то ему удовлетворяет и функция k_0, так что тогда оператор $K_0(f_0)$ компактен в этих пространствах. Поскольку $K(s)\varphi = a(s * \varphi) + K_0(f_0)\varphi$, где $a(t) = k(t,t)$, остается воспользоваться теоремой 4.2.2. $\square$

Записывая оператор $K(s)$ в форме (4.4.5) и пользуясь леммой 3.4.2, получим аналогичную (4.4.6) формулу дифференцирования $[K(s)\varphi]' = K^1(s)\varphi + K(s)\varphi'$. На основании этой формулы совместно с (a) приходим к справедливости (b).

Из теоремы 4.4.2 аналогично (4.4.8) легко вывести также соотношения

$$aR(s) \sim R(s)a, \quad aR(s)bR(g) \sim bR(g)aR(s) \sim abR(s * g), \tag{4.4.9}$$

где $\sim$ означает равенство по модулю $\mathcal{T}(L^p)$ компактных операторов, $g \in L^{(1)}$ и функции $a, b \in C^{+0}(\mathbb{R})$ имеют пределы (4.4.7) на бесконечности. Если дополнительно $a, b \in C^{\mu+0}(\mathbb{R})$, то эти соотношения справедливы и по модулю $\mathcal{T}(C^\mu)$.

Для оператора $aR(f)$ условие компактности (4.4.3) сводится к $a(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Следующая лемма показывает, что последнее требование и необходимо для компактности этого оператора.

Лемма 4.4.1. *Пусть функция $\chi(t) \in C^{\mu+0}(\mathbb{R})$ допускает пределы* (4.4.7)*, причем по крайней мере один из них отличен от нуля. Тогда компактность оператора $aR(f)$, $f \in L^1$, в одном из пространств $X = L^p$, C^μ влечет $f = 0$.*

Доказательство. Пусть для определенности $a(+\infty) \neq 0$ и функция $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ тождественно равна 1 в окрестности $+\infty$ и нулю в окрестности $-\infty$. Тогда $aR(f) \sim a(+\infty)\chi R(f)$, поэтому без ограничения общности можно считать $a = \chi$.

Покажем сначала, что

$$f * \varphi = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty. \tag{4.4.10}$$

Зафиксируем $\varphi \in C_0^\infty$ и положим $\varphi_n(t) = \varphi(t - a_n)$, где $a_n \to +\infty$. Последовательность φ_n равномерно ограничена в X, так что по определению компактного оператора существует последовательность $\chi R(f)\varphi_{n_k}$, сходящаяся в X к некоторой функции ψ. Обозначая φ_{n_k} снова φ_n, имеем таким образом:

$$|\chi R(f)\varphi_n) - \psi|_X \leqslant \alpha_n, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{4.4.11}$$

Пусть последовательность $f_k \in C_0^\infty$ сходится к f в L^1. Тогда для этой последовательности

$$|\chi R(f - f_k)\varphi_n|_X \leqslant \beta_k, \quad \lim_{k\to\infty} \beta_k = 0. \tag{4.4.12}$$

Оператор $R(f)$ коммутирует с операторами сдвига $(T_n\varphi)(t) = \varphi(t - a_n)$, так что $\chi R(f_k)\varphi_n = \chi R(f_k)T_n\varphi = \chi T_n(f_k * \varphi)$. Поскольку $f_k * \varphi \in C_0^\infty$, носитель функции $T_n(f_k * \varphi)$ при больших $n \geqslant n_k$ лежит в фиксированной окрестности $+\infty$. Можно считать, что в этой окрестности $\chi = 1$, так что $\chi R(f_k)\varphi_n = T_n(f_k * \varphi)$, $n \geqslant n_k$. В соединении с (4.4.11), (4.4.12) отсюда

$$|T_n(f_k * \varphi) - \psi|_X \leqslant \alpha_n + \beta_k, \quad n \geqslant n_k. \tag{4.4.13}$$

Для любого отрезка I существует такой номер $n'_k \geqslant n_k$, что носитель функции $T_n(f_k * \varphi)$ не пересекается с I. С учетом (4.4.13) и определения нормы в пространствах $X = L^p$, C^μ отсюда

$$|\psi|_{X(I)} \leqslant C(\alpha_n + \beta_k), \quad n \geqslant n'_k,$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от I. Устремляя здесь сначала n, а затем k к ∞, приходим к равенству $\psi = 0$.

Полагая $\psi = 0$ в (4.4.13) и учитывая, что операторы T_n^{-1} равномерно ограничены в $\mathcal{L}(X)$, получим оценку $|f_k * \varphi|_X \leqslant C(\alpha_n + \beta_k)$, $n \geqslant k$. Устремляя здесь n, а затем k к ∞, приходим к справедливости (4.4.10).

Из (4.4.10) следует, что $f * \chi_\varepsilon = 0$, где χ_ε фигурирует в (4.2.6). На основании леммы 4.2.1 в пределе при $\varepsilon \to 0$ отсюда получим $f = 0$. □

В заключение приведем критерий фредгольмовости операторов типа Винера—Хопфа

$$N = 1 + \chi(Rf)\chi, \tag{4.4.14}$$

где $f \in L^1(\mathbb{R})$, а $\chi(t)$ — гладкая функция, тождественно равная 1 (0) в окрестности $t = -\infty$ ($t = +\infty$). Заметим, что в силу (4.4.8) один из множителей χ в правой части (4.4.14) можно опустить, поскольку на фредгольмовости и индексе N это никак не скажется.

Критерий фредгольмовости сформулируем в терминах преобразования Фурье функции f. Удобно одновременно охватить и векторный случай, когда оператор N действует в пространстве l-вектор-функций на прямой, а $f(t)$ является $l \times l$-матрицей-функцией.

Теорема 4.4.3. *Оператор N фредгольмов в каждом из пространств $L^p(\mathbb{R})$, $C^\mu(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда*

$$\det[1 + \hat{f}(s)] \neq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{4.4.15}$$

и при выполнении этого условия его индекс дается формулой

$$\operatorname{ind} N = -\frac{1}{2\pi}\arg\det[1+\hat f(s)]\big|_{-\infty}^{\infty}. \tag{4.4.16}$$

Доказательство. Пусть X означает любое из банаховых пространств $L^p(\mathbb{R})$, $C^\mu(\mathbb{R})$. Обозначим A класс всех непрерывных $l\times l$-матриц-функций вида

$$x(s) = c + \hat f(s), \quad s\in\mathbb{R}, \tag{4.4.17}$$

где $f\in L^1(\mathbb{R})$ и $c\in\mathbb{C}^{l\times l}$. Согласно пункту 1.5, относительно поточечных операций и «перенесенной» нормы $|x| = |c| + |f|_{L^1}$ эта алгебра банахова. Очевидно, она плотно вложена в банахову алгебру C всех непрерывных матриц-функций $x(s)$, имеющих предел $x(\infty) = \lim x(s)$ при $s\to\infty$, снабженную sup-нормой.

В терминах алгебры A теорема Винера из пункта 4.3 может быть переформулирована следующим образом: если $x(s)\in A$ и $\det x(s)\neq 0$, $s\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, то обратная матрица-функция $x^{-1}(s)\in A$. С учетом леммы 4.3.2 вложение $A\to C$ удовлетворяет условию теоремы 1.4.2. Согласно этой теореме для $x\in G(A)$ условия $x\in G_0(A)$ и $x\in G_0(C)$ равносильны. С другой стороны, как отмечено в пункте 1.4, единичную компоненту $G_0(C)$ можно описать с помощью индекса Коши

$$\operatorname{Ind} x = \frac{1}{2\pi}\arg\det x(s)\big|_{-\infty}^{\infty} \tag{4.4.18}$$

условием $\operatorname{Ind} x = 0$. Следовательно, это верно и по отношению к A.

Каждой функции $x\in A$ в обозначениях (4.4.17) поставим в соответствие оператор $\Psi x = \lambda + \chi(Rf)\chi$. В частности, оператор (4.4.14) в этих обозначениях есть $\Psi(1+\hat f)$. В силу (4.4.8) справедливы соотношения $\chi R(f)\sim R(f)\chi\sim\chi R(f)\chi$ по модулю $\mathcal{T}(X)$ компактных операторов. Отсюда легко следует, что $\Psi x\Psi y\sim\Psi(xy)$ для любых $x,y\in A$. Другими словами, линейное ограниченное отображение $\Psi: A\to\mathcal{L}(X)$ удовлетворяет условию теоремы 1.4.3. На основании этой теоремы условие (4.4.15) достаточно для фредгольмовости оператора $N=\Psi x$, $x = 1+\hat f$, причем $\operatorname{Ind} x = 0$ влечет $\operatorname{ind} N = 0$.

Для обоснования формулы (4.4.16) выберем диагональную матрицу-функцию $a\in G(A)$ вида

$$a(s) = \operatorname{diag}\left(\frac{s-i}{s+i}, 1,\dots,1\right), \tag{4.4.19}$$

для которой $\operatorname{Ind} a = 1$. Из (4.3.18) следует, что

$$\begin{gathered}(s-i)(s+i)^{-1} = 1-2\hat f_+(s), \qquad (s+i)(s-i)^{-1} = 1-2\hat f_-(s)\\ f_+(t) = \begin{cases}0, & t>0,\\ e^t, & t\geqslant 0,\end{cases} \qquad\qquad f_-(t) = \begin{cases}e^{-t}, & t\leqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}\end{gathered} \tag{4.4.20}$$

Целочисленная функция Ind в (4.4.18) обладает групповым свойством $\operatorname{Ind} xy = \operatorname{Ind} x + \operatorname{Ind} y$. Поэтому, если $x\in G(A)$ и $m = \operatorname{Ind} x$, то $\operatorname{ind}(xa^{-m}) = 0$ и, значит, $xa^{-m}\in G_0(A)$. Таким образом, с учетом теоремы 1.4.3 имеем: $0 = \operatorname{ind}\Psi(xa^{-m}) = \operatorname{ind}\Psi x - m\operatorname{ind}\Psi a$. Подставляя сюда значение $m = \operatorname{Ind} x$, получим формулу $\operatorname{ind}\Psi x = (\operatorname{ind}\Psi a)\operatorname{Ind} x$. Следовательно, доказательство (4.4.16) сводится к равенству

$$\operatorname{ind}\Psi a = -1, \tag{4.4.21}$$

Поскольку индекс диагональной операторной матрицы равен сумме индексов ее диагональных элементов, в соответствии с (4.4.19) без ограничения общности можно ограничиться скалярным случаем $l=1$. В этом случае $a(s) = (s-i)/(s+i)$ и в обозначениях (4.4.20) операторы $N_\pm = \Psi(a^{\pm1})$ определяются равенством

$$N_\pm = 1 - 2\chi(Rf_\pm)\chi. \tag{4.4.22}$$

Пусть $\tilde N_\pm$ определяются аналогично по отношению к кусочно постоянной функции $\tilde\chi(t)$, равной 1 (0) при $t\leqslant 0$ ($t>0$). Поскольку $f_\pm(t)\equiv 0$ при $\pm t\geqslant 0$, функции

$$\tilde\chi(t_0)f_-(t_0-t)[(1-\tilde\chi(t)]\equiv[(1-\tilde\chi(t_0)]f_+(t_0-t)\tilde\chi(t)\equiv 0$$

на всей плоскости. Следовательно,

$$\tilde\chi(R_-f)(1-\tilde\chi) = (1-\tilde\chi)(R_+f)\tilde\chi = 0. \tag{4.4.23}$$

Согласно (4.4.20) произведение $(1-2\hat{f}_+)(1-2\hat{f}_-)=1$, откуда $f_++f_-=2f_+*f_-$ и, следовательно,

$$\tilde{N}_-\tilde{N}_+=1-4\tilde{\chi}(Rf_-)(Rf_+)\tilde{\chi}+4\tilde{\chi}(Rf_-)\tilde{\chi}(Rf_+)\tilde{\chi}.$$

На основании (4.4.23) отсюда

$$\tilde{N}_-\tilde{N}_+=1. \tag{4.4.24}$$

В пространстве $X=L^p$ операторы $N_\pm$ и $\tilde{N}_\pm$ отличаются друг от друга компактным слагаемым. Равенство (4.4.24) означает, в частности, что образ $\operatorname{Im}\tilde{N}_-=X$. С другой стороны, ядро $\ker\tilde{N}_-$ описывается явно. Если $\varphi-2\tilde{\chi}(Rf_-)\tilde{\chi}\varphi=0$, то $\varphi(t_0)=0$ при $t_0>0$, а при $t_0\leqslant 0$ согласно (4.4.20) имеем:

$$\varphi(t_0)=2\int\limits_{-\infty}^{0}f_-(t_0-t)\varphi(t)dt=2\int\limits_{-\infty}^{t_0}e^{t-t_0}\varphi(t)dt.$$

Следовательно, для $y(t)=e^t\varphi(t)$ имеем дифференциальное уравнение $y'=2y$ на полуоси $(-\infty,0)$, откуда $\varphi(t)=ce^t$ при $t\leqslant 0$ с некоторой постоянной c. Таким образом, ядро $\ker\tilde{N}_-$ одномерно и $\operatorname{ind}\tilde{N}_-=1$. Тем самым равенство (4.4.21) для $X=L^p$ установлено.

В случае $X=C^\mu(\mathbb{R})$ приведенные рассуждения необходимо несколько видоизменить, поскольку операция умножения на функцию $\tilde{\chi}$ здесь выводит из X. Обозначим $\tilde{X}$ расширение X на одно измерение, полученное добавлением функций, постоянных на полуосях $\pm t\geqslant 0$. Из (4.4.20) видно, что свертка $(Rf_\pm)\tilde{\chi}=f_\pm*\tilde{\chi}\in C^{0,1}(\mathbb{R})$. Поэтому операторы $Rf_\pm$ ограничены $\tilde{X}\to X$ и, следовательно, оператор $N_\pm$ рассматриваемый в $\tilde{X}$, имеет тот же индекс, что и в X. С другой стороны, оператор $\tilde{N}_\pm\in\mathcal{L}(\tilde{X})$ и отличается от $N_\pm\in\mathcal{L}(\tilde{X})$ компактным слагаемым. Поскольку, как и выше $\operatorname{ind}\tilde{N}_\pm=\mp 1$, отсюда следует справедливость равенства (4.4.21) и для пространства $X=C^\mu$.

Для завершения доказательства теоремы остается убедиться, что условие (4.4.15) необходимо для фредгольмовости оператора (4.4.14). Предположим противное: существует такой $x\in A$, что оператор $N=\Psi x$ фредгольмов, но $\det x(s_0)=0$ в некоторой точке $s_0\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим в C подалгебру $\mathcal{R}$ рациональных функций, которая согласно лемме 4.3.2 плотна в A. Таким образом, существует последовательность $x_n\in\mathcal{R}$, сходящаяся к x в A. Поскольку оператор $\Psi: A\to\mathcal{L}(X)$ непрерывен, то $\Psi x_n\to\Psi x$ в $\mathcal{L}(X)$ и по теореме 1.3.1 операторы Ψx_n фредгольмовы при больших n. Поскольку $x_n(s_0)\to 0$ при $n\to\infty$, существует последовательность собственных значений λ_n матрицы $x_n(s_0)\in\mathbb{C}^{l\times l}$, сходящаяся к нулю. Поэтому, заменяя $x_n(s)$ на $x_n(s)-\lambda_n$, не ограничивая общности, можно с самого начала считать, что в принятом предположении функция $x(s)\in\mathcal{R}$.

Пусть для простоты s_0 — единственный нуль функции $\det x(s)$ кратности k. По условию существует ненулевой вектор $\xi\in\mathbb{C}^l$, для которого $x(s_0)\xi=0$. Пусть матрица $p\in\mathbb{C}^{l\times l}$ есть проектор $\mathbb{C}^l$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор ξ. Тогда $x(s_0)p=0$ и, следовательно, функция $x_1(s)=x(s)[r^{-1}(s)p+1-p]$, где $r(s)=(s-s_0)/(s+i)$, аналитична в окрестности точки s_0. Но $\det x_1(s)=r^{-1}(s)\det x(s)$, так что кратность нуля функции x_1 равна $k-1$. Повторяя эту процедуру, приходим к представлению матрицы-функции $x(s)$ в виде произведения

$$x(s)=x_0(s)[r(s)p_1+1-p_1]\cdots[r(s)p_k+1-p_k],\quad r(s)=\frac{s-s_0}{s+i},$$

где множитель x_0 обратим в A, а $p_j\in\mathbb{C}^{l\times l}$ — некоторые одномерные проекторы.

Пусть $x_n^\pm$ получаются заменой в этом разложении s_0 на $s_0\pm i/n$, $n=1,2\ldots$. Тогда $x_n^\pm$ обратимы в A и $x_n^\pm\to x$ в A при $n\to\infty$. Кроме того, из определения (4.4.18) и принципа аргумента аналитических функций следует,что

$$\operatorname{Ind}x_n^+\neq\operatorname{Ind}x_n^-. \tag{4.4.25}$$

В силу непрерывности Ψ последовательность операторов $\Psi x_n^\pm\to\Psi x$ в $\mathcal{L}(X)$, так что по теореме 1.3.1 при достаточно больших n эти операторы фредгольмовы и их индексы совпадают с $\operatorname{ind}\Psi x$. С другой стороны, согласно доказанной выше формуле индекса имеем равенство $\operatorname{ind}\Psi x_n^\pm=-\operatorname{Ind}x_n^\pm$. В результате приходим к противоречию с (4.4.25), что завершает доказательство теоремы. □

Подробное изложение теории операторов Винера—Хопфа можно найти, например, в [15].

4.5. Мультипликативная свертка на полуоси

Рассмотрим однородные пространства $C_0^{\mu}(\mathbb{R}_+)$, $C_0^{1,\mu}(\mathbb{R}_+)$ и $L_0^p(\mathbb{R}_+)$ на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$ действительной прямой и отвечающие им весовые пространства $X_\lambda(\mathbb{R}_+;0,\infty)$, где X означает любой из символов C^μ, $C^{1,\mu}$, L^p, с весовым порядком $\lambda = (\lambda_\tau, \tau = 0,\infty)$. Таким образом,

$$X_\lambda(\mathbb{R}_+;0,\infty) = \rho_\lambda X_0(\mathbb{R}_+), \quad \rho_\lambda(t) = t^{\lambda_0}(1+t)^{\lambda_\infty - \lambda_0}. \tag{4.5.1}$$

При $\lambda_0 = \lambda_\infty$, т. е. при $\lambda \in \mathbb{R}$, это пространство обозначаем $X_\lambda = X_\lambda(\mathbb{R}_+)$, в этом случае (4.5.1) переходит в $X_\lambda = t^\lambda X_0$. Согласно лемме 2.8.1 пространство $C_\mu^\mu(\mathbb{R}_+)$ может быть определено эквивалентной нормой

$$|\varphi|_{C_\mu^\mu} = \sup_{t>0} t^{-\mu}|\varphi(t)| + [\varphi]_\mu. \tag{4.5.2}$$

Что касается пространства L_λ^p, то в соответствии с (4.1.10) его норма может быть определена равенством

$$|\varphi|_{L_\lambda^p} = \left(\int\limits_0^\infty t^{-p\lambda-1}|\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}. \tag{4.5.3}$$

Следующая лемма позволяет описать в терминах пространств X_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, и общее пространство (4.5.1).

Лемма 4.5.1. *По отношению к каждому из символов $X = C^\mu$, L^p и $C^{1,\mu}$ имеют место равенства*

$$X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2} = X_{\lambda^+}(\mathbb{R}_+;0,\infty), \quad X_{\lambda_1} + X_{\lambda_2} = X_{\lambda^-}(\mathbb{R}_+;0,\infty), \tag{4.5.4}$$

где положено

$$\lambda_\tau^+ = \begin{cases} \max(\lambda_1,\lambda_2), & \tau = 0, \\ \min(\lambda_1,\lambda_2), & \tau = \infty, \end{cases} \qquad \lambda_\tau^- = \begin{cases} \min(\lambda_1,\lambda_2), & \tau = 0, \\ \max(\lambda_1,\lambda_2), & \tau = \infty. \end{cases}$$

При этом справедливы вложения банаховых пространств

$$X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2} \subseteq X_\lambda \subseteq X_{\lambda_1} + X_{\lambda_2}, \quad \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2. \tag{4.5.5}$$

Доказательство. Для определенности докажем утверждение леммы по отношению к $X = L^p$. Для заданного весового порядка $\lambda = (\lambda_0, \lambda_\infty)$ пространство $L_\lambda^p(\mathbb{R}_+;0,\infty)$ можно описать с помощью сужения его элементов φ на интервалы $J^0 = (0,1)$ и $J^1 = (1,\infty)$ условиями

$$\varphi|_{J^0} \in L_{\lambda_0}^p(J^0,0), \quad \varphi|_{J^1} \in L_{\lambda_\infty}^p(J^1,\infty).$$

При этом норма, равная сумме норм функций $\varphi|_{J^k}$ в указанных пространствах, будет эквивалентна норме φ в $L_\lambda^p(\mathbb{R}_+;0,\infty)$. По отношению к вложению банаховых пространств семейство $\{L_{\nu_0}^p(J^0,0)\}$ монотонно убывает по λ_0, а семейство $\{L_{\lambda_\infty}^p(J^1,\infty)\}$ — монотонно возрастает по λ_∞. С учетом леммы 1.1.2 об определении нормы в пространстве $X_{\lambda_1} + X_{\lambda_2}$ оба утверждения леммы получаются отсюда непосредственно. □

В силу теорем 2.7.2, 2.9.2 и теоремы 4.1.1 весовое экспоненциальное преобразование E_λ, действующее по формуле

$$(E_\lambda\varphi)(-\ln t) = t^\lambda\varphi(t), \quad t > 0, \tag{4.5.6}$$

осуществляет изоморфизм банаховых пространств $X_\lambda(\mathbb{R}_+) \to X(\mathbb{R})$.

Мультипликативная свертка для функций, заданных на полуоси, определяется интегралом

$$(f \diamond \varphi)(t_0) = \int\limits_0^\infty f\left(\frac{t_0}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}, \quad t_0 > 0. \tag{4.5.7}$$

При подстановке (4.5.6) эта свертка переходит в аддитивную, т. е.

$$E_\lambda(f \diamond g) = (E_\lambda f) * (E_\lambda g). \tag{4.5.8}$$

В частности, оценка (4.2.4) по отношению к мультипликативной свертке принимает вид

$$|f \diamond \varphi|_{X_\lambda} \leqslant |f|_{L_\lambda^1}|\varphi|_{X_\lambda}, \quad X = L^p, C^\mu. \tag{4.5.9}$$

Аналогом сингулярной функции (4.2.15) на полуоси служит

$$s(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{\chi(t)}{1-t}, \quad \chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+),\ \chi(1) = 1. \tag{4.5.10}$$

В самом деле, если функции s и χ в (4.2.15) временно снабдить символом $\mathbb{R}$, то при подстановке $t^{-\lambda}s(t) = s_{\mathbb{R}}(\ln t)$ функции χ и $\chi_{\mathbb{R}}$ будут связаны соотношением

$$\chi(t) = \frac{t^\lambda(t-1)}{\ln t}\chi_{\mathbb{R}}(t),$$

так что χ удовлетворяет условиям (4.5.10).

Таким образом, с учетом (4.5.8) теорема 4.2.2 по отношению к мультипликативной свертке с функцией (4.5.10) сохраняет свою силу для пространств C^μ_λ и L^p_λ, $p > 1$.

Подстановка (4.5.6) отображает $L^{(1)}(\mathbb{R})$ на соответствующее пространство $L^{(1)}_\lambda(\mathbb{R}_+)$, и аналогичный смысл имеет пространство $L^{1,p}_\lambda(\mathbb{R}_+)$. Очевидно, $L^{1,p}_\lambda = t^\lambda L^{1,p}_0$, а пространство $L^{1,p}_0$ можно описать аналогично (4.2.17) условием

$$|\varphi|_{L^{1,p}_\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} 2^{i\lambda}|\varphi(2^{-i}t|_{L^p(I)}, \quad I = [1/2, 1].$$

Соответственно лемма 4.2.3 может быть переформулирована по отношению к рассматриваемому случаю, т.е пространство $L^{1,p}_\lambda$, $p > 1$, вложено в $L^{(1)}_\lambda$ и содержит все функции $g \in L^p_{loc}(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию

$$\int\limits_0^\infty (1 + |\ln t|)^\alpha t^{-p\lambda-1}|f(t)|^p dt < \infty, \quad \alpha > p. \tag{4.5.11}$$

Рассмотрим далее мультипликативный вариант интегральных операторов типа свертки

$$[K(f)\varphi](t_0) = \int\limits_0^\infty k(t_0,t) f\left(\frac{t_0}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}, \quad t_0 > 0, \tag{4.5.12}$$

определяемый функцией $f \in L^1_\lambda$, и соответствующий сингулярный оператор $K(s)$. Как и выше, теоремы 4.4.1, 4.4.2 и лемму 4.4.1 для этих операторов можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4.5.1.

(a) *Пусть функция $\widetilde{k}(s_0, s) = k(e^{s_0}, e^s)$ принадлежит $C^\nu(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ с некоторым $0 < \nu < 1$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда операторы $K(f)$, $f \in L^1_\lambda$, и $K(s)$ ограничены в пространствах L^p_λ, $1 < p < \infty$, и C^μ_λ, $0 < \mu < \nu$, и их нормы допускают оценки*

$$|K(f)|_{\mathcal{L}(X_\lambda)} \leqslant |k|_{C^\mu}|f|_{L_\lambda}, \quad |K(s)|_{\mathcal{L}(X_\lambda)} \leqslant |k|_{C^\nu}, \quad X = L^p, C^\mu. \tag{4.5.13}$$

При выполнении условия

$$\lim_{t\to 0,\ 1/n\leqslant t_0/t\leqslant n} k(t_0,t) = \lim_{t\to\infty,\ 1/n\leqslant t_0/t\leqslant n} k(t_0,t) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.5.14}$$

оператор $K(f)$ компактен в этих пространствах. Если дополнительно $k(t,t) \equiv 0$, то аналогичным свойством обладает и $K(s)$.

(b) *Если $\widetilde{k}(s_0, s) = k(e^{s_0}, e^s) \in C^{1,\nu}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, то операторы $K(f)$ и $K(s)$ ограничены в пространстве $C^{1,\mu}$. При выполнении соответствующих условий (a) для функций $k(t_0,t)$ и*

$$k^1(t_0,t) = t_0\frac{\partial k}{\partial t_0} + t\frac{\partial k}{\partial t}$$

эти операторы компактны.

(c) *Пусть функция $k(t_0,t) = a(t_0)a(t)$, где $a \in C^\nu_0(\mathbb{R}_+)$ с некоторым $\nu > \mu$ и существуют пределы*

$$a(0) = \lim_{t\to 0} a(t), \quad a(\infty) = \lim_{t\to\infty} a(t),$$

причем по крайней мере один из них ненулевой. Тогда компактность оператора $K(f)$, $f \in L^1_\lambda$, в одном из пространств L^p_λ, C^μ_λ влечет $f = 0$.

Отметим, что аналогично (4.5.11) условие $\widetilde{k}(s_0, s) = k(e^{s_0}, e^s) \in C^\nu(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ в этой теореме можно выразить в форме

$$\sup_{i,j=0,\pm1,\dots} |k(2^{-i}t_0, 2^{-j}t)|_{C^\nu(I\times I)} < \infty, \quad I = [1/2, 2],$$

не прибегая к экспоненциальной подстановке. Согласно теореме 2.7.1 оно заведомо выполнено для функций $k(t_0, t) \in C^\nu_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$. В частности, как и в случае леммы 2.7.1, убеждаемся, что последнему классу принадлежит любая ограниченная функция $k(t_0, t) \in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+)$, для которой

$$\left|(t_0 + t)\frac{\partial k}{\partial t_0}\right| + \left|(t_0 + t)\frac{\partial k}{\partial t}\right| \leqslant C, \quad t_0, t > 0.$$

Преобразование Меллина функции $f \in L_\nu(\mathbb{R}_+)$ определяется по формуле

$$(\mathcal{M}f)(\zeta) = \int\limits_0^\infty t^{-\zeta-1} f(t)dt, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda. \tag{4.5.15}$$

Из сравнения этой формулы с (4.3.1) и (4.5.6) видно, что

$$(P_\lambda f)^\wedge(it_0) = (\mathcal{M}f)(\lambda + it_0). \tag{4.5.16}$$

Аналогичным образом формула обращения из пункта 4.3 в рассматриваемом случае принимает вид

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} t^\zeta (\mathcal{M}f)(\zeta)d\zeta, \quad t > 0, \tag{4.5.17}$$

где функция $\mathcal{M}f$ предполагается суммируемой и равенство понимается почти всюду.

Соотношение (4.5.16) показывает, что преобразование $\mathcal{M}$ осуществляет вложение сверточной алгебры $L^{(1)}_\lambda(\mathbb{R}_+)$ в алгебру непрерывных функций на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$, исчезающих на бесконечности. Напомним, что в пункте 1.7 эта алгебра обозначалась $C^0[\lambda]$. Аналогичный смысл имеет алгебра $C[\lambda]$ непрерывных ограниченных функций. С помощью преобразования $x(\zeta) \to \tilde{x}(t) = x(\lambda + it)$ можно также «перенести» с сохранением нормы банаховы алгебры M^0 и M с вещественной прямой на прямую $\operatorname{Re}\zeta = \lambda$. Эти алгебры обозначаем, соответственно, $M^0[\lambda]$ и $M[\lambda]$. Формула (4.5.16) показывает также, что $M^0[\lambda]$ является образом $L^{(1)}_\lambda(\mathbb{R}_+)$ при преобразовании $\mathcal{M}$ с перенесенной нормой, а норма в $M[\lambda]$ определяется равенством

$$|x| = \sup |xy|_{M^0[\lambda]}, \tag{4.5.18}$$

где sup берется по всем $y \in M^0[\lambda]$ из единичного шара. Для этой нормы, очевидно, сохраняется аналогичная (4.3.20) оценка. Как и в случае вещественной прямой, элементы банаховой алгебры $M[\lambda]$ называем $L^{(1)}_\lambda$-мультипликаторами.

Аналогом равенства $e^{-as}\hat{f}(s) = [f(t-a)]^\wedge(s)$ для преобразования Меллина является соотношение

$$\delta^\zeta(\mathcal{M}f)(\zeta) = \mathcal{M}[f(\delta t)](\zeta), \tag{4.5.19}$$

которое означает, что функция δ^ζ является мультипликатором. Замыкание конечных линейных комбинаций таких функций по норме (4.5.18) дает подалгебру $M^1[\lambda] \subseteq M[\lambda]$ почти периодических функций.

Для $f \in C^\infty_0(\mathbb{R}_+)$ формула (4.5.15) определяет целую функцию на комплексной плоскости ζ. С помощью леммы 4.5.1 нетрудно убедиться, что класс $C^\infty_0(\mathbb{R}_+)$ плотен в пространстве $L^{(1)}_{\lambda_1} \cap L^{(1)}_{\lambda_2} = L^{(1)}_{\lambda^+}(\mathbb{R}_+; 0, \infty)$. Поэтому при $\lambda_1 < \lambda_2$ преобразование Меллина осуществляет вложение сверточной алгебры $L^{(1)}_{\lambda^+}$ в банахову алгебру $C^0[\lambda_1, \lambda_2]$ функций, непрерывных в полосе $[\lambda_1, \lambda_2] = \{\lambda_1 \leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant \lambda_2\}$, аналитических внутри нее и исчезающих на бесконечности. Вместе с аналогичной алгеброй $C[\lambda_1, \lambda_2]$ она была введена в пункте 1.7. Как и в случае прямой, обозначим $M^0[\lambda_1, \lambda_2]$ образ $L^{(1)}_{\lambda^+}$ при преобразовании Меллина и введем банахову алгебру

$M[\lambda_1,\lambda_2] \subseteq C[\lambda_1,\lambda_2]$ мультипликаторов с аналогичной (4.5.18) нормой. Аналогичный смысл имеет и подалгебра $M^1[\lambda_1,\lambda_2] \subseteq M[\lambda_1,\lambda_2]$ почти периодических функций.

Примером элемента $M[\lambda_1,\lambda_2]$ служит преобразование Меллина $(\mathcal{M}s)(\zeta)$ функции (4.5.10), для которой интеграл (4.5.15) сингулярный. Аналогично лемме 1.8.3 обосновывается, что функция $(\mathcal{M}s)(\zeta)$ аналитична на всей плоскости и ее производная совпадает с преобразованием Меллина от функции $f(t) = (-\ln t)s(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$. В частности, в соответствии с леммой 4.3.1 она принадлежит $C[\lambda_1,\lambda_2]$ и равномерно стремится к ± 1 при $\operatorname{Im}\zeta \to \pm\infty$ в полосе $[\lambda_1,\lambda_2]$. Теорема 4.2.2 для мультипликативной свертки вместе с леммой 4.5.1 означает, что функция $\mathcal{M}s \in M[\lambda_1,\lambda_2]$.

Отметим несколько табличных формул преобразования Меллина функций $f \in L^1_\lambda(\mathbb{R}_+)$. Положим

$$f_0(t) = s(t) - \frac{1}{\pi i}\frac{1}{1-t}, \quad f_1(t) = \frac{1}{\pi i}\frac{1}{1+wt}, \quad t > 0,$$

где комплексное число $w \notin \mathbb{R}\setminus\mathbb{R}_+$. С учетом (4.5.10) функции f_k бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$, причем для любых $\alpha, q > 0$ и $-1 < \lambda < 0$ интеграл

$$\int_0^\infty (1+|\ln t|)^\alpha t^{-\lambda-1}|f_k(t)|^q dt < \infty,\ k = 0,1.$$

Поэтому в силу критерия (4.5.11) эти функции принадлежат $L^{q,1}_\lambda$ и соответственно их преобразования Меллина $\mathcal{M}f_1 \in M^0[\lambda_1,\lambda_2]$ и $\mathcal{M}f_2 \in M[\lambda_1,\lambda_2]$ при $-1 < \lambda_1 < \lambda_2$. В явном виде [2]

$$\mathcal{M}\left(\frac{1}{\pi i}\frac{1}{1-t}\right)(\zeta) = \frac{1}{i}\operatorname{ctg}\pi\zeta,\ -1 < \operatorname{Re}\zeta < 0; \quad \mathcal{M}\left(\frac{1}{\pi i}\frac{1}{1+wt}\right)(\zeta) = \frac{1}{i}\frac{w^\zeta}{\sin\pi\zeta},\ -1 < \operatorname{Re}\zeta < 0, \tag{4.5.20}$$

где ветвь степенной функции w^ζ фиксируется условием $|\arg w| < \pi$.

Точно так же с учетом формул

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n!}\int_0^1 (\ln t)^n t^{\zeta_0-\zeta-1}dt = -\frac{1}{(\zeta-\zeta_0)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}\zeta > \operatorname{Re}\zeta_0, \\ &\frac{1}{n!}\int_1^\infty (\ln t)^n t^{\zeta_0-\zeta-1}dt = \frac{1}{(\zeta-\zeta_0)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}\zeta < \operatorname{Re}\zeta_0, \end{aligned} \tag{4.5.21}$$

где $n = 0,1,\ldots$, проверяется, что функция $x(\zeta) = (\zeta-\zeta_0)^{-n-1}$ принадлежит $M^0[\lambda_1,\lambda_2]$ в любой полосе $[\lambda_1,\lambda_2]$, не содержащей точки ζ_0. Таким образом, любая рациональная функция с полюсами вне этой полосы и исчезающая на бесконечности принадлежит $M^0[\lambda_1,\lambda_2]$. Формулы (4.5.21) показывают, что для любых двух точек ζ_1,ζ_2, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}\zeta_1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \operatorname{Re}\zeta_2$, класс функций $x(\zeta)$ вида $x(\zeta) = p(\zeta)(\zeta-\zeta_1)^{-n_1}(\zeta-\zeta_2)^{-n_2}$ с произвольными неотрицательными целыми n_j и многочленом $p(\zeta)$ степени меньше n_1+n_2, плотен в банаховой алгебре $M^0[\lambda_1,\lambda_2]$.

В заключение отметим следующее свойство банаховой алгебры $M^0[\lambda_1,\lambda_2]$.

Лемма 4.5.2. *Пусть сужение функции $x(\zeta) \in C[\lambda_1,\lambda_2]$ на граничные прямые полосы принадлежит $M^0[\lambda_j]$, $j = 0,1$. Тогда $x \in M^0[\lambda_1,\lambda_2]$.*

Доказательство. По условию

$$x(\zeta) = (\mathcal{M}f_j)(\zeta), \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_j, \tag{4.5.22}$$

для некоторых $f_j \in L^{q,1}_{\lambda_j}$, $j = 1,2$. В соответствии с леммой 4.5.1 достаточно доказать, что $f_1 = f_2$. Этот факт установим для несколько более общего случая, когда $f_j \in L_{\lambda_j}$.

Предположим сначала, что $x \in C^0[\lambda_1,\lambda_2]$ и функции $x(\zeta)$ интегрируемы на прямых $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_j$. Тогда для $f = f_j$ и $\lambda = \lambda_j$ можно записать формулу обращения (4.5.17), согласно которой

$$f_j(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_j - i\infty}^{\lambda_j + i\infty} t^\zeta x(\zeta)d\zeta, \quad t > 0. \tag{4.5.23}$$

По теореме Коши, примененной к прямоугольнику $P_n = \{\lambda_\leqslant \operatorname{Re}\zeta \leqslant \lambda_2, |\operatorname{Im}\zeta| \leqslant n\}$, имеем равенство

$$\int\limits_{\partial P_n} t^\zeta x(\zeta) d\zeta = 0.$$

Поскольку интегралы по горизонтальным отрезкам при $n \to \infty$ стремятся к нулю, в пределе приходим к равенству обоих интегралов в правой части (4.5.23).

В общем случае воспользуемся конструкцией свертки с усредняющим ядром в мультипликативном варианте. Именно, выберем неотрицательную функцию $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, для которой

$$\int\limits_0^\infty \chi(t)\frac{dt}{t} = 1.$$

Очевидно, функция $\chi_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}\chi(t^{1/\varepsilon})$ обладает аналогичным свойством и ее преобразование Меллина $(\mathcal{M}\chi_\varepsilon)(\zeta) = (\mathcal{M}\chi)(\varepsilon\zeta)$. С учетом (4.5.22) отсюда приходим к равенству

$$(\mathcal{M}\chi)(\varepsilon\zeta)x(\zeta) = [\mathcal{M}(\chi_\varepsilon * f_j)](\zeta), \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_j.$$

Поскольку функция в левой части этого равенства принадлежит $C^0[\lambda_1, \lambda_2]$ и интегрируема на прямых $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_j$, на основании доказанного выше

$$\chi_\varepsilon * f_1 = \chi_\varepsilon * f_2. \tag{4.5.24}$$

С другой стороны, для функции $f \in L_\lambda(\mathbb{R}_+)$ свертка $\chi_\varepsilon * f \to f$ при $\varepsilon \to 0$ по норме пространства L_λ. В самом деле, для $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ можно записать

$$f(t_0) - (\chi_\varepsilon * f)(t_0) = \int\limits_0^\infty \left[f\left(\frac{t_0}{t}\right) - f(t_0)\right]\chi_\varepsilon(t)\frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty \left[f\left(\frac{t_0}{t^\varepsilon}\right) - f(t_0)\right]\chi(t)\frac{dt}{t}.$$

Поскольку функция χ обращается в нуль вне некоторого отрезка $[\delta, 1/\delta]$, левая часть этого равенства равномерно стремится к нулю. Поэтому остается убедиться, что операторы свертки $R(\chi_\varepsilon)$ равномерно ограничены в L_λ. Но в силу (4.5.9) имеем оценку

$$|R(\chi_\varepsilon)|_{\mathcal{L}(L_\lambda)} \leqslant |\chi_\varepsilon|_{L_\lambda} = \int\limits_0^\infty t^{-\lambda-1}\chi_\varepsilon(t)dt = \int\limits_0^\infty t^{-\varepsilon\lambda-1}\chi(t)dt,$$

так что этот факт действительно имеет место.

Таким образом, для обоих значений $j = 1, 2$ последовательность функций $\chi_\varepsilon * f_j$ в (4.5.24) при $\varepsilon \to 0$ сходится к f_j по норме пространства L_{λ_j}. Согласно пункту 4.1, некоторые их подпоследовательности сходятся к f_j почти всюду, что дает равенство $f_1 = f_2$, завершающее доказательство леммы. □

4.6. L^p-ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Рассмотрим на измеримом множестве $G \subseteq \mathbb{R}^k$ интеграл со слабой особенностью

$$\psi(x) = \int\limits_G \frac{a(x,y)}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)dy, \tag{4.6.1}$$

где $0 < \alpha < k$ и ограниченная функция $a(x,y)$ кусочно-непрерывна. В случае $\varphi \in C(G)$ и $\varphi \in C^\mu(G)$ этот интеграл уже встречался в пунктах 1.9 и 3.2 соответственно.

Теорема 4.6.1. *Пусть множество G ограничено и $\varphi \in L^p(G)$. Тогда интеграл* (4.6.1) *определяет функцию $\psi \in L^p(G)$ с оценкой*

$$|\psi|_{L^p} \leqslant |a|_0|\varphi|_{L^p}, \quad |a|_0 = \sup_{x,y}|a(x,y)|, \tag{4.6.2}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от α и диаметра R множества G.

Если дополнительно функция a непрерывна, то оператор $K\varphi = \psi$ компактен в L^p.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{-\alpha}, & |x| \leqslant R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

которая, очевидно, принадлежит $L^1(\mathbb{R}^k)$. По отношению к этой функции для интеграла (4.6.1) имеем очевидное неравенство

$$|\psi(x)| \leqslant |a|_0 |(f * \varphi)(x)|,$$

так что оценка (4.6.2) является следствием (4.2.4).

Покажем далее, что в предположении $a \in C^0(G \times G)$ оператор K, определяемый (4.6.1), компактен. Рассмотрим последовательность $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^k)$, сходящуюся к f по норме L^1. Очевидно, оператор K_n, действующий по формуле

$$(K_n\varphi)(x) = \int_G a(x,y) f_n(x-y)\varphi(y)dy,$$

компактен в $L^p(G)$ и для разности $(K - K_n)\varphi$ справедлива аналогичная (4.6.2) оценка

$$|(K - K_n)\varphi|_{L^p} \leqslant C|a|_0 |f - f_n|_{L^1} |\varphi|_{L^p}.$$

Поэтому последовательность $K_n \to K$ по операторной норме, так что оператор K также компактен. □

Подробное исследование ограниченности операторов (4.6.1) в пространствах L^p с различными показателями проведено С. Л. Соболевым [47] (см. также [24]).

Рассмотрим интеграл (4.6.1) со слабой особенностью в весовом пространстве $L^p_\lambda(G, F)$, где измеримое множество G уже не обязательно ограничено, а функция $a(x,y)$ по-прежнему непрерывна и ограничена на $G \times G$. Напомним, что в случае неограниченного множества G бесконечно удаленная точка ∞ должна входить в состав F. Согласно лемме 4.1.1. для суммируемости функции $|y - x|^{-\alpha}\varphi(y)$ по y в малой окрестности точек $\tau \in F$ достаточно потребовать, чтобы $\lambda_\tau > -k$ при $\tau \neq \infty$ и $\lambda_\infty - \alpha < -k$ при $\tau = \infty$.

Теорема 4.6.2. *Пусть*

$$\varphi \in L^p_\lambda(G, F), \quad -k < \lambda_\tau < \begin{cases} 0, & \tau \neq \infty, \\ \alpha - k, & \tau = \infty, \end{cases} \tag{4.6.3}$$

и весовой порядок ν выбран из условий

$$\nu_\tau = \lambda_\tau,\ \tau \neq \infty; \quad \nu_\infty > k - \alpha + \lambda_\infty. \tag{4.6.4}$$

Тогда функция ψ в (4.6.1) *принадлежит классу $L^p_\nu(G, F)$ и справедлива оценка*

$$|\psi|_{L^p_\nu} \leqslant C|a|_0 |\varphi|_{L^p_\lambda}. \tag{4.6.5}$$

Доказательство. Оно опирается на теорему 4.6.1, которая сохраняет свою силу и для ограниченных кусочно непрерывных функций $a(x,y)$. Поскольку функции $\varphi(y)$ и $a(x,y)$ всегда можно продолжить нулем на все $\mathbb{R}^k$, не ограничивая общности, можно считать, что $G = \mathbb{R}^k$ и $a = 1$, так что

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \frac{\varphi(y)dy}{|x-y|^\alpha} \tag{4.6.6}$$

В этом случае, конечно, $\infty \in F$.

Пусть непрерывная функция χ_τ тождественно равна 1 в окрестности τ и в обозначениях (4.1.8) ее носитель содержится в $B_\rho(\tau)$. Тогда функция $\widetilde{\varphi} = \varphi - \sum\limits_\tau \chi_\tau\varphi$ тождественно равна нулю в окрестности F. Поэтому, если $\widetilde{\psi}$ определяется по $\widetilde{\varphi}$ аналогично (4.6.6), то на основании теоремы 4.6.1 функция $\widetilde{\psi} \in L^p$ вне любой окрестности множества F с соответствующей оценкой нормы. В окрестности точек $\tau \neq \infty$ эта функция непрерывна, так что с учетом (4.6.3) она заведомо принадлежит $L^p_{\lambda_\tau}(B_\tau, \tau)$. В окрестности ∞ она ведет себя как $\widetilde{\psi}(x) = O(1)|x|^{-\alpha}$, так что в силу неравенства $-\alpha - \nu_\infty = -(\lambda_\infty + k) < 0$, вытекающего из (4.6.3), (4.6.4), интеграл

$$\int\limits_{|x|\geqslant 1} |x|^{(-\alpha-\nu_\infty)p} \frac{dx}{|x|^k}$$

конечен. Таким образом, $\widetilde{\psi} \in L^p_{\nu_\tau}(B_\tau, \tau)$ и для $\tau = \infty$.

Итак, в соответствии с (4.1.8) функция $\widetilde{\psi}$ принадлежит пространству $L^p_\lambda(\mathbb{R}^k, F)$ с соответствующей оценкой (4.6.5) своей нормы. Поэтому дело сводится к рассмотрению функции $\chi_\tau\varphi$. Обозначая ее снова φ, можно, таким образом, считать, что $\varphi = 0$ вне B_τ и функцию ψ рассматривать внутри B_τ.

Очевидно, достаточно рассмотреть отдельно два случая точек τ, когда $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. Обратимся к первому из них. Согласно (4.6.3) в этом случае $\lambda = \lambda_0$ удовлетворяет условию $-k < \lambda < 0$. Обозначая $|x|^{-\lambda}\varphi(x)$ снова $\varphi(x)$ и поступая аналогичным образом по отношению к ψ, сводим дело к доказательству следующего предложения.

Для функции $\varphi \in L^p_0(B, 0)$ в области $B = \{|y| \leqslant 1\}$ интеграл

$$\psi(x) = \int\limits_B |x|^{-\lambda}|y|^\lambda \frac{\varphi(y)dy}{|y-x|^\alpha}, \quad x \in B, \tag{4.6.7}$$

принадлежит $L^p_0(B, 0)$ с соответствующей оценкой

$$|\psi|_{L^p_0} \leqslant C|\varphi|_{L^p_0}. \tag{4.6.8}$$

Доказательство этого предложения осуществляется с помощью рассуждений, аналогичных использованным в пунктах 3.10 и 3.11. Полагая $\varphi = 0$ вне B, рассмотрим в шаровом слое $S = \{1/2 \leqslant |x| \leqslant 2\}$ последовательность функций

$$\psi(2^i x) = 2^{(k-\alpha)i}|x|^{-\lambda} \int\limits_{|y|\leqslant 2^{-i}} \frac{|y|^\lambda \varphi(2^i y)dy}{|y-x|^\alpha}, \quad i = 0, -1, \ldots.$$

Запишем эти функции в виде суммы трех слагаемых

$$\psi(2^i x) = 2^{(k-\alpha)i}|x|^{-\lambda}[\psi^0_i(x) + \psi_i(x) + \psi^1_i(x)], \tag{4.6.9}$$

где ψ^0_i, ψ_i и ψ^1_i определяются интегрированием по соответственно $|y| \leqslant 1/4$, $1/4 \leqslant |y| \leqslant 4$ и $|y| \geqslant 4$.

На основании теоремы 4.6.1 имеем оценку

$$\int\limits_{1/2\leqslant|x|\leqslant 2} |\psi_i(x)|^p dx \leqslant C \int\limits_{1/2\leqslant|x|\leqslant 2} |\varphi(2^i x)|^p dx$$

с некоторой постоянной $C > 0$, не зависящей от i. В соответствии с теоремой 4.1.1 отсюда

$$|\psi_i|_{L^p(S)} \leqslant C|\varphi|_{L^p_0}. \tag{4.6.10}$$

Поскольку $|y-x| \geqslant 1/4$ при $|y| \leqslant 1/4$ и $|x| \geqslant 1/2$, для функции $\psi^0_i(x)$ имеем очевидное неравенство

$$|\psi^0_i(x)| \leqslant 4^\alpha \int\limits_{|y|\leqslant 1/4} |y|^{\lambda+k}|\varphi(2^i y)|\frac{dy}{|y|^k},$$

которое совместно с неравенством Гельдера (4.1.6) приводит к оценке

$$\max_S |\psi^0_i(x)| \leqslant C|\varphi|_{L^p_0}. \tag{4.6.11}$$

Поскольку $|y-x| \geqslant |y| - 2 \geqslant |y|/2$ при $x \in S$ и $y| \geqslant 4$, аналогичным образом для функции $\psi^1_i(x)$ имеем неравенство

$$|\psi^1_i(x)| \leqslant 2^\alpha \int\limits_{4\leqslant|y|\leqslant 2^{-i}} |y|^{\lambda+k-\alpha}|\varphi(2^i y)|\frac{dy}{|y|^k},$$

откуда

$$|\psi_i^1(x)| \leqslant C \left(\int\limits_{4\leqslant|y|\leqslant 2^{-i}} |y|^{(\lambda+k-\alpha)q} \frac{dy}{|y|^k} \right)^{1/q} |\varphi|_{L_0^p},$$

где $q = p/(p-1)$ — сопряженный показатель. Поскольку

$$\int\limits_{4\leqslant|y|\leqslant 2^{-i}} |y|^{(\lambda+k-\alpha)q} \frac{dy}{|y|^k} = (\operatorname{mes}\Omega) \int\limits_4^{2^{-i}} r^{(\lambda+k-\alpha)q-1} dr$$

и интеграл в правой части этого равенства не превосходит $(2^{-i(\lambda+k-\alpha)q} + 4^{(\lambda+k-\alpha)q})$, для ψ_i^1 имеем оценку

$$\max_S |\psi_i^1(x)| \leqslant C 2^{-i(\lambda+k-\alpha)} |\varphi|_{L_0^p}. \tag{4.6.12}$$

Объединяя все три неравенства (4.6.10)–(4.6.12), для суммы (4.6.9) получим оценку

$$|\psi(2^i x)|_{L^p(S)} \leqslant C(2^{i(k-\alpha)} + 2^{-i\lambda}) |\varphi|_{L_0^p}, \quad i \leqslant 0.$$

Поскольку оба слагаемых в круглых скобках не превосходят 1, на основании теоремы 4.1.1 в результате приходим к оценке (4.6.8).

Рассмотрим второй случай $\tau = \infty$. В этом случае обозначим $|x|^{-\lambda}\varphi(x)$ и $|x|^{-\nu}\psi(x)$ снова, соответственно, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда в области $B = \{|y| \geqslant 1\}$ получим аналогичный (4.6.7) интеграл

$$\psi(x) = \int\limits_B |x|^{-\nu} |y|^{\lambda} \frac{\varphi(y)dy}{|y-x|^{\alpha}}, \quad x \in B.$$

Согласно (4.6.4) в рассматриваемом случае $\delta = \nu - (k - \alpha + \lambda) > 0$, так что в шаровом слое S здесь имеем последовательность

$$\psi(2^i x) = 2^{-\delta i} |x|^{-\nu} \int\limits_{|y|\geqslant 2^{-i}} \frac{|y|^{\lambda}\varphi(2^i y)dy}{|y-x|^{\alpha}}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Как и выше, разобьем это выражение на три слагаемых

$$\psi(2^i x) = 2^{-\delta i} |x|^{-\nu} [\psi_i^0(x) + \psi_i(x) + \psi_i^1(x)], \tag{4.6.13}$$

где ψ_i^0, ψ_i и ψ_i^1 определяются интегрированием соответственно по $|y| \leqslant 1/4$, $1/4 \leqslant |y| \leqslant 4$ и $|y| \geqslant 4$.

Для слагаемых ψ_i и ψ_i^0 по-прежнему имеем оценки (4.6.10) и (4.6.11). Что касается третьего слагаемого, то аналогично предыдущему

$$|\psi_i^1(x)| \leqslant C \left(\int\limits_{|y|\geqslant 4} |y|^{(\lambda+k-\alpha)q} \frac{dy}{|y|^k} \right)^{1/q} |\varphi|_{L_0^p},$$

где $q = p/(p-1)$ — сопряженный показатель. По условию (4.6.3) в рассматриваемом случае $\tau = \infty$ показатель $\lambda + k - \alpha < 0$, так что интеграл здесь имеет смысл. В результате приходим к оценке

$$|\psi(2^i x)|_{L^p(S)} \leqslant C(2^{-i\delta}) |\varphi|_{L_0^p}, \quad i \geqslant 0,$$

что совместно с теоремой 4.1.1 доказывает (4.6.8) и во втором случае. □

Из теоремы 4.6.2, в частности, следует, что если множество G ограничено, то интегральный оператор (4.6.1) ограничен в пространстве $L_\lambda^p(G, F)$ при

$$-k < \lambda < 0. \tag{4.6.14}$$

Этот факт установлен в [16]. Несколько иное доказательство этого результата приведено также в монографии [77], где он сформулирован в терминах весового пространства (4.1.12). Именно, оператор (4.6.1) ограничен в пространстве $L^p(G, \rho_\delta)$, если

$$-\frac{k}{p} < \delta < \frac{k}{q}, \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}.$$

С учетом (4.1.11) в наших обозначениях это условие принимает более простую форму (4.6.14), где порядок суммируемости p уже не фигурирует. Данное обстоятельство и обуславливает удобство использования весовых пространств в форме L^p_λ.

4.7. L^p-ОЦЕНКИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

С помощью теоремы 4.6.1 и теоремы Кальдерона—Зигмунда из пункта 4.2 нетрудно распространить результаты пунктов 3.4, 3.5 и 3.11 на L^p-случай.

Теорема 4.7.1. *Пусть на измеримом ограниченном множестве $G \subseteq \mathbb{R}^k$ задано ядро $Q(y,\xi) \in C^{\nu(0)}(G, \mathcal{H}_{-k})$, удовлетворяющее условию* (4.2.12) *по переменной ξ.*

Тогда для $\varphi \in L^p(G)$, $p > 1$, сингулярный интеграл

$$\psi(x) = \int\limits_G Q(y, y-x)\varphi(y)dy, \quad x \in G, \tag{4.7.1}$$

существует для почти всех x и определяет функцию $\psi \in L^p(G)$ с оценкой нормы

$$|\psi|_{L^p} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(0)}}|\varphi|_{L^p}$$

Доказательство. Запишем

$$\psi(x) = \int\limits_G Q(x, y-x)\varphi(y)dy + \int\limits_G \frac{a(x,y)\varphi(y)dy}{|y-x|^{k-\nu}},$$

где положено $a(x,y) = |x-y|^{k-\nu}[Q(y,y-x) - Q(x,y-x)]$. По определению класса $C^{\nu(0)}$ в пункте 3.1 имеем оценку

$$|Q(y,\xi) - Q(x,\xi)| \leqslant |Q|_{C^{\nu(0)}}|\xi|^{-k}|x-y|^\nu.$$

Поэтому утверждение теоремы является непосредственным следствием теоремы 4.6.1 и теоремы Кальдерона—Зигмунда из пункта 4.2. □

Пусть теперь измеримое множество G произвольно и F — конечное подмножество его предельных точек (содержащее бесконечно удаленную точку ∞ в случае, когда G неограничено).

Теорема 4.7.2. *Пусть ядро $Q(y,\xi)$ принадлежит $C_0^{\nu(0)}(G, F; \mathcal{H}_{-k})$ и удовлетворяет условию* (4.2.12) *по переменной ξ.*

Тогда для $\varphi \in L^p_\lambda(G, F)$, где $p > 1$ и $-k < \lambda < 0$, сингулярный интеграл (4.5.1) *существует для почти всех x и определяет функцию $\psi \in L^p_\lambda(G,F)$ с оценкой нормы*

$$|\psi|_{L^p_\lambda} \leqslant C|Q|_{C_0^{\nu(0)}}|\varphi|_{L^p_\lambda} \tag{4.7.2}$$

Доказательство. Продолжая функцию φ нулем на все $\mathbb{R}^k$, без ограничения общности можно считать $G = \mathbb{R}^k$ (и, следовательно, $\infty \in F$). Дальнейшие рассуждения следуют схеме доказательства теорем 3.11.1 и 4.6.2.

Предположим сначала, что функция φ тождественно равна нулю в окрестности F. Тогда, очевидно, функция ψ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности F и, в частности,

$$\psi \in L^p_{\lambda_\tau}(B_\rho(\tau), \tau) \tag{4.7.3}$$

для конечных точек $\tau \in F$, где $B_\rho(\tau) = \{|x-\tau| \leqslant \rho\}$ и ρ достаточно мало. Кроме того, в окрестности ∞ она допускает оценку $|\psi(z)| \leqslant C|z|^{-k}$, которая показывает, что (4.7.3) справедливо и для $\tau = \infty$ в области $B_\rho(\infty) = \{|y| \geqslant 1/\rho\}$. Это следует из того, что по условию $\lambda_\infty + k > 0$ и поэтому интеграл

$$\int\limits_{|y| \geqslant 1/\rho} |y|^{-p(\lambda_\infty + k)} \frac{dy}{|y|^k}$$

конечен. С другой стороны, если множество G_0 ограничено и лежит вне некоторой окрестности множества F, то на основании теоремы 4.6.1 функция $\psi \in L^p(G_0)$ с соответствующей оценкой своей нормы.

Таким образом, если функция φ тождественно равна нулю в окрестности F, то ψ принадлежит классу $L^p_\lambda(\mathbb{R}^k, F)$ с соответствующей оценкой своей нормы. Поэтому теорему достаточно установить в предположении, что носитель функции φ содержится в одном из областей $B_\rho(\tau)$. Как и в пункте 3.10, достаточно ограничиться двумя случаями $\tau = 0$ и $\tau = \infty$, которые удобно объединить, рассматривая φ в $L^p_\lambda(\mathbb{R}^k, F)$ по отношению к $F = \{0, \infty\}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Переходя к переобозначениям, оценку (4.7.2) достаточно установить для функции

$$\psi(x) = |x|^{-\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^k} |y|^\lambda Q(y, y - x)\varphi(y)dy, \tag{4.7.4}$$

по норме пространства L^p_0. Перепишем это равенство в форме

$$\psi(2^i x) = |x|^{-\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}^k} |y|^\lambda Q(2^i y, y - x)\varphi(2^i y)dy \tag{4.7.5}$$

и положим

$$\begin{array}{ll} \varphi_i(y) = \varphi(2^i y), & y \in S = \{1/4 \leqslant |y| \leqslant 4\}, \\ \psi_i(y) = \psi(2^i y), & y \in S^0 = \{1/2 \leqslant |y| \leqslant 2\}. \end{array}$$

Поскольку для любой суммируемой функции

$$4 \int\limits_{\mathbb{R}^k} f(y)dy = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{(2^{-j})/4<|y|<4(2^{-j})} f(y)dy = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-(k+\lambda)j} \int\limits_{1/4<|y|<4} f(2^{-j}y)dy,$$

равенство (4.7.4) в шаровом слое S^0 можно переписать в форме

$$4\psi_i(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_{ij}(x), \quad \psi_{ij}(x) = 2^{-(k+\lambda)j} \int\limits_S |y|^\lambda Q(2^{i-j}y, 2^{-j}y - x)\varphi_{i-j}(y)dy.$$

В частности,

$$4|\psi_i|_{L^p(S^0)} \leqslant \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_{ij}|_{L^p(S)}, \quad i = 0, \pm 1, \dots. \tag{4.7.6}$$

В силу теоремы 4.7.1 имеем оценку

$$|\psi_{i0}|_{L^p(S^0)} \leqslant C|\varphi_i|_{L^p(S)}, \tag{4.7.7}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от $i = 0, \pm 1, \dots$.

С другой стороны, при $|j| \geqslant 1$ функции ψ_{ij} легко оценить по модулю:

$$|\psi_{ij}(x)| \leqslant 8^{-\lambda}|Q|_{C^{0(0)}} 2^{-(k+\lambda)j} \int\limits_S \frac{|\varphi_{i-j}(y)|dy}{|2^{-j}y - x|^k}.$$

Поскольку для $x \in S^0$, $y \in S$ имеем неравенства $|2^{-j}y - x| \geqslant 1/4$ при $j \geqslant 1$ и $|2^{-j}y - x| \geqslant |2^{-j}y|/2 \geqslant 2^{-j}/8$, отсюда

$$|\psi_{ij}(x)| \leqslant C\sigma_j \int\limits_S |\varphi_{i-j}(y)|dy, \quad \sigma_j = \left\{ \begin{array}{ll} 2^{-(k+\lambda)j}, & j \geqslant 1, \\ 2^{-\lambda j}, & j \leqslant 1. \end{array} \right. \tag{4.7.8}$$

Полагая $\sigma_j = 1$ для $j = 0$, совместно с (4.7.7) отсюда приходим к неравенству

$$|\psi_{ij}|_{L^p(S^0)} \leqslant C\sigma_j|\varphi_{i-j}|_{L^p(S)},$$

равномерному по i. Подставляя его в (4.7.6), получим оценку

$$|\psi_i|_{L^p(S^0)} \leqslant C|Q|_{C^{0(0)}} \sum_j \sigma_j|\varphi_{i-j}|_{L^p(S)} \tag{4.7.9}$$

с некоторой новой постоянной C.

Рассмотрим банахово пространство l^p двусторонних последовательностей $\xi = (\xi_i,\ i = 0, \pm 1, \ldots)$, суммируемых с p-ой степенью и снабженных соответствующей нормой

$$|\xi| = \left(\sum_i |\xi_i|^p\right)^{1/p}.$$

Для таких последовательностей можно ввести свертку $\eta = \sigma * \xi$ по формуле

$$\eta_i = \sum_j \sigma_{i-j}\xi_j = \sum_j \sigma_j \xi_{i-j},$$

для которой справедливо аналогичное (4.2.3) неравенство $|\eta|_{l^p} \leqslant |\sigma|_{l^1}|\xi|_{l^p}$. Поскольку последовательность σ, фигурирующая в (4.7.8), суммируема, на основании (4.7.9) в соответствии с теоремой 4.1.1 отсюда приходим к оценке (4.7.2) в L_0^p для интеграла (4.7.4). $\square$

Как и в пунктах 3.5 и 3.11, приведенные результаты дополним формулой дифференцирования интеграла

$$\psi^0(x) = \int_G Q^0(y, y - x)\varphi(y)dy, \quad x \in G, \tag{4.7.10}$$

с ядром $Q^0(y, \xi) \in C^{\nu(0)}(G, \mathcal{H}_{1-k})$. Предварительно необходимо ввести понятия обобщенных производных и соболевских пространств.

Пусть функция f локально суммируема в области D, тогда согласно пункту 1.8 ее можно рассматривать как регулярную обобщенную функцию $\widetilde{f}$, действующую в классе $C_0^\infty(D)$ по правилу $\widetilde{f}(\varphi) = (f, \varphi)$. Для любого мультииндекса α можно определить ее производную $\widetilde{f}^{(\alpha)}$ — обобщенную функцию, действующую по формуле

$$\widetilde{f}^{(\alpha)}(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\left(f, \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}\right), \quad \varphi \in C_0^\infty(D).$$

Может случиться, что обобщенная функция $\widetilde{f}^{(\alpha)}$ регулярна, т. е. совпадает с некоторой локально суммируемой в области D функцией g. В этом случае g называется обобщенной производной $\partial^\alpha f/\partial x^\alpha$ функции f.

По определению соболевское пространство $W^{n,p}(D)$ состоит из функций $\varphi \in L^p(D)$, все обобщенные частные производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат $L^p(D)$. В этом случае аналогично пункту 2.9 можно ввести упорядоченный (каким-либо образом) набор

$$\varphi^{(m)} = \left(\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha}, \quad |\alpha| = m\right).$$

и пространство $W^{n,p}(D)$ наделить нормой

$$|\varphi| = \sum_{m \leqslant n} |\varphi^{(m)}|_{L^p},$$

относительно которой оно банахово. Для единообразия часто полагаем $L^p = W^{0,p}$. Нетрудно видеть, что это пространство можно ввести аналогично пункту 2.3 индуктивно условием $\varphi, \varphi' \in W^{n-1,p}$, где вектор-градиент φ' составлен из обобщенных производных. При этом равенство

$$|\varphi|_{W^{n,\mu}} = |\varphi|_{W^{n-1,\mu}} + |\varphi'|_{W^{n-1,\mu}}$$

определяет эквивалентную норму. Ясно также, что для любой функции $g \in C^\infty(D)$, которая ограничена вместе со всеми производными до порядка n включительно (т. е. в обозначениях пункта 2.9 принадлежит $C^{n,0}(D)$) оператор умножения $\varphi \to g\varphi$ ограничен в пространстве $W^{n,p}(D)$.

Опишем взаимосвязь пространств $W^{n,p}(D)$ для различных n и p в липшицевых областях D.

Теорема (вложения Соболева). *Пусть конечная область D липшицева. Тогда класс $C^\infty(\overline{D})$ плотен в $W^{n,p}(D)$, $1 \leqslant p < \infty$, и для любой $\varphi \in C^\infty(\overline{D})$ справедливы оценки*

$$|\varphi|_{C^\mu(D)} \leqslant C|\varphi|_{W^{n,p}}, \quad n \geqslant \mu + k/p, \tag{4.7.11}$$

$$|\varphi|_{L^p(\partial D)} \leqslant C|\varphi|_{W^{1,p}}, \quad n \geqslant 1, \tag{4.7.12}$$

где $0 < \mu < 1$ и постоянная $C > 0$ не зависит от φ.

Обсудим оценки этой теоремы. Пусть $\varphi \in W^{n,p}(D)$ и $n \geqslant \mu + k/p$. Выберем последовательность функций $\varphi_i \in C^1(\overline{D})$, сходящуюся к φ в $W^{n,p}(D)$. Тогда в силу оценки (4.7.11), примененной к разности $\varphi_i - \varphi_j$, последовательность φ_i фундаментальна в $C^\mu(D)$ и, значит, сходится к некоторой функции $\tilde{\varphi} \in C^\mu(D)$ по C^μ-норме. Поскольку $\varphi_i \to \varphi$ по L^p-норме, отсюда заключаем, что $\tilde{\varphi} = \varphi$ почти всюду в области D. Таким образом, после надлежащего изменения значений функции φ на множестве меры нуль эта функция удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ и справедлива оценка (4.7.11). В этом смысле понимается и вложение $W^{n,p} \subseteq C^\mu$.

Из этих же соображений, примененных к (4.7.12), следует, что последовательность сужений φ_i на $\Gamma = \partial D$ сходится в $L^p(\Gamma)$ к некоторой функции $\psi \in L^p(\Gamma)$, которая зависит только от φ и которую называют следом (или граничным значением) функции φ на Γ. В этом смысле понимается и вложение $W^{n,p}(D) \subseteq L^p(\Gamma)$.

Обозначим $W^{n,p}_{loc}(D)$ класс функций, принадлежащих $W^{n,p}(D_0)$ для любой конечной области D_0, содержащейся в D вместе со своим замыканием. Полагая для единообразия $L^p = W^{0,p}$ аналогично пункту 2.9, введем однородное соболевское пространство $W^{n,\mu}_0(D)$ индукцией по n с условиями

$$\varphi(x),\ |x|\varphi'(x) \in W_0^{n-1,\mu}(D), \tag{4.7.13}$$

относительно соответствующей нормы это пространство банахово. В явном виде пространство $W^{n,p}_0(D)$ состоит из всех функций $\varphi \in W^{n,p}_{loc}(D \setminus 0)$, для которых

$$|x|^{|\alpha|}\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x^\alpha} \in L^p_0, \quad |\alpha| \leqslant n.$$

Конечно, содержательный смысл это определение имеет в случаях, когда по крайней мере одна из точек $\tau = 0, \infty$ является предельной для множества D. В противном случае это пространство совпадает с $W^{n,p}(D)$.

Для пространства $W^{n,p}_0$ справедлив соответствующий аналог теоремы 4.1.1, где символ L^p надо заменить на $W^{n,p}$. Доказательство, на котором не останавливаемся, осуществляется аналогично теореме 2.9.2.

Как и в пункте 2.9, для функций $\varphi \in W^{n,p}_{loc}(D \setminus F)$ пространство $W^{n,p}_\lambda(D,F)$ может быть определено двумя эквивалентными способами. Можно действовать аналогично пункту 2.8, исходя из пространств $W^{n,p}(D)$ и $W^{n,p}_0(D)$. Другой способ заключается в индуктивном определении условиями

$$\varphi \in W^{n-1,p}_\lambda, \quad \varphi' \in W^{n-1,p}_{\lambda-1}. \tag{4.7.14}$$

Норму в этом пространстве можно ввести индуктивно, исходя из этого определения, либо воспользоваться непосредственно равенством

$$|\varphi| = \sum_{m \leqslant n} |\varphi^{(m)}|_{C^{0,\mu}_{\lambda-m}}.$$

Ясно, что относительно этой нормы введенное пространство банахово. Оба подхода эквивалентны и приводят к одному и тому же результату.

С помощью аналога теоремы 4.1.1, сформулированного для пространства $W^{n,p}_0$, теорему вложения Соболева легко распространить на пространство $W^{n,p}_\lambda$. Для простоты ограничимся двумерным случаем. Пусть конечная область D на сфере Римана ограничена кусочно-гладким контуром и конечное множество F содержит все его угловые точки. Эта область предполагается липшицевой, что равносильно отсутствию у кривой Γ точек возврата.

Теорема 4.7.3. *Пусть область $D \subseteq \mathbb{C}$ с кусочно-гладкой границей липшицева. Тогда имеют место вложения банаховых пространств*

$$C^\mu_\lambda(D,F) \subseteq W^{n,p}_\lambda(D,F),\ n \geqslant \mu + k/p; \quad L^p_\lambda(\partial D, F) \subseteq W^{1,p}_\lambda(D,F), \tag{4.7.15}$$

которые понимаются в том же смысле, что и выше в теореме Соболева.

Доказательство. Оно осуществляется по той же схеме, что и доказательства теорем 3.10.1 и 3.11.1. Для функции $\varphi \in W^{n,p}$ с компактным носителем в D утверждение является следствием теоремы вложения Соболева. Поэтому утверждение теоремы достаточно установить в предположении, что носитель функции φ содержится в области $B_\rho(\tau)$ и тождественно равен нулю в окрестности граничной дуги окружности этой области. Как и в пунктах 3.10 и 3.11, достаточно ограничиться двумя случаями секторов с вершинами $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. Оба эти случая удобно объединить, выбирая в качестве D область, ограниченную двумя радиальными гладкими дугами Γ^0 и Γ^1 с концами $\tau = 0$ и $\tau = \infty$, при этом весовой порядок λ функции $\varphi \in W^{n,p}_\lambda(\Gamma; 0, \infty)$ можно считать не зависящим от τ, т. е. вещественным числом.

В обозначениях теоремы 4.1.1(а) рассмотрим последовательность областей D_j в шаровом слое $S = \{\delta < |x| < \delta^{-1}\}$. При достаточно больших $|j|$ они ограничены дугами окружностей $L^\pm \subseteq \{|x| = \delta^{\pm 1}\}$ и двумя дугами Γ^0_j, Γ^0_j. Очевидно, дуга Γ^k_j при $j \to \pm\infty$ стремится к некоторым отрезкам $L^k_\pm$ прямой в метрике C^1. Следовательно, согласно теореме Соболева имеют место вложения банаховых пространств

$$C^\mu(\overline{D}_j) \subseteq W^{n,p}(D_j),\ n \geqslant \mu + k/p; \quad L^p(\partial D_j) \subseteq W^{1,p}(D_j),$$

равномерные по j. На основании теоремы 4.1.1, сформулированной для $W^{n,p}_0$, отсюда следуют и вложения (4.7.15). □

Подробное изложение теории соболевских пространств, включая весовые пространства, можно найти в [32, 38, 76].

Обратимся к интегралу (4.7.10) и предположим сначала, что множество G ограничено. Пусть ограниченная область D с гладкой границей класса $C^{1,\nu}$ содержит $\overline{G}$ и ядро Q^0 принадлежит $C^{\nu(1)}(D, \mathcal{H}_{1-k})$. Продолжая плотность $\varphi \in L^p(G)$, $p > 1$, нулем, без ограничения общности можно считать, что $\varphi \in L^p(D)$. Утверждается, что тогда ψ^0 принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и для нее справедлива формула дифференцирования

$$\frac{\partial \psi^0}{\partial x_i}(x) = -\sigma_i(x)\varphi_n(x) - \int\limits_D \frac{\partial Q}{\partial \xi_i}(y, y-x)\varphi(y)dy, \quad \sigma_i(x) = \int\limits_\Omega \xi_i Q^0(x,\xi)d\xi. \tag{4.7.16}$$

В самом деле, пусть $0 < \mu < \nu$ и последовательность $\varphi_n \in C^\mu(D)$ сходится к φ по норме пространства L^p. Если ψ^0_n определяется аналогично (4.7.10) по φ_n, то на основании теоремы 3.5.3 функция ψ^0_n принадлежит $C^{1,\mu}(D)$ и ее частные производные вычисляются по формуле, аналогичной (4.7.16). На основании теоремы 4.7.1 отсюда заключаем, что последовательность $\partial\psi^0_n/\partial x_i$ сходится по L^p-норме к функции ψ^0_i, определяемой правой частью (4.7.16), и сформулированное утверждение непосредственно следует из определения обобщенных производных.

Таким образом, в принятых предположениях интегральный оператор, определяемый (4.7.10), ограничен $L^p(G) \to W^{1,p}(D)$.

Пусть теперь измеримое множество G произвольно и

$$\varphi \in L^p_\lambda(G, F), \quad -k < \lambda_\tau < \begin{cases} \ \ 0, & \tau \ne \infty, \\ -1, & \tau = \infty, \end{cases} \tag{4.7.17}$$

Продолжая φ нулем, не ограничивая общности, можно считать $G = \mathbb{R}^k$. Пусть $Q^0 \in C^{\nu(0)}_0(\mathbb{R}^k, F)$, тогда ψ^0 можно записать в виде (4.1.4) с $\alpha = k - 1$, так что в силу (4.7.17) условие (4.6.3) теоремы 4.6.2 выполнено. Поэтому на основании этой теоремы функция ψ^0 принадлежит пространству

$$L^p_\nu(\mathbb{R}^k, F), \quad \nu_\tau = \begin{cases} \lambda_\tau, & \tau \ne \infty, \\ \lambda_\tau + 1, & \tau = \infty. \end{cases} \tag{4.7.18}$$

Разбивая плотность φ на сумму двух функций, одна из которых тождественно равна нулю в окрестности фиксированной точки a, не принадлежащей F, аналогично лемме 3.5.2 убеждаемся, что функция ψ^0 принадлежит классу $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^k \setminus F)$ (т. е. пространству $W^{1,p}(D_0)$ в каждой ограниченной подобласти D_0, лежащей вместе со своим замыканием в $\mathbb{R}^k \setminus F$), и справедлива формула дифференцирования (4.7.16).

Таким образом, функция ψ^0 принадлежит пространству (4.7.18), а ее обобщенные производные $\partial\psi^0/\partial x_i$ — пространству $L^p_\lambda(\mathbb{R}^k, F)$. Здесь как и в C^μ-случае, рассмотренном в пункте 2.10, возникает вопрос более точного описания класса функций ψ^0 с этим свойством, который оставляем открытым.

4.8. Сингулярные интегралы Коши с L^p-плотностью

Рассмотрим на ориентируемой кривой $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$ обобщенный сингулярный интеграл Коши

$$\psi(t_0) = \int_\Gamma Q(t; t - t_0, dt)\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma. \tag{4.8.1}$$

В предположении, что плотность φ принадлежит классу C^μ на гладкой кривой или C^μ с весом на кусочно-гладкой кривой Γ, эти интегралы изучались в пункте 3.11.

Данный раздел посвящен ситуации, когда Γ является кусочно-ляпуновской кривой и плотность φ принадлежит пространству $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, которое по отношению к линейной мере $d_1 t$ определяется совершенно аналогично пункту 4.1. Ясно, что теорема 4.1.1 в равной мере сохраняет свою силу и для пространства $L^p_0(\Gamma, \tau)$, где Γ — радиальная дуга с концом $\tau = 0$ или $\tau = \infty$.

Предположим сначала, что Γ представляет собой ограниченную ляпуновскую дугу и $\varphi \in L^p(\Gamma)$. В этом случае теоремы Рисса и Харди—Литтлвуда из пункта 4.1 легко переносятся с помощью параметризации дуги. Пусть гладкая дуга Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ с некоторым $0 < \nu < 1$ и l — ее длина. Рассмотрим естественную параметризацию $\gamma: \ [0, l] \to \Gamma$, которая по условию принадлежит классу $C^{1,\nu}[0, l]$, и связанную с ней функцию

$$q(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} = \int_0^1 \gamma'[rs + (1 - r)s_0]dr \in C^\nu([0, l] \times [0, l]), \tag{4.8.2}$$

которая при $s = s_0$ принимает значение $\gamma'(s)$. Эта функция всюду отлична от нуля, так что для некоторого $0 < m \leqslant 1$ выполнена двусторонняя оценка

$$m|s - s_0| \leqslant |\gamma(s) - \gamma(s_0)| \leqslant |s - s_0|. \tag{4.8.3}$$

Теорема 4.8.1. *Пусть гладкая дуга Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ с некоторым $0 < \nu < 1$ и ядро Коши $Q(t; \xi, \eta) \in C^{\nu(1)}(\Gamma)$. Тогда для $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$, сингулярный интеграл* (4.8.1) *существует почти всюду на Γ и определяет функцию $\psi \in L^p(\Gamma)$, причем*

$$|\psi|_{L^p} \leqslant C|Q|_{C^{\nu(1)}}|\varphi|_{L^p}, \tag{4.8.4}$$

где постоянная $C > 0$ зависит только от C^ν-нормы функции q и констант l, m, фигурирующих в (4.8.2)*,* (4.8.3).

Аналогичная оценка справедлива и для максимальных функций

$$(M_0\varphi)(t_0) = \sup_{r>0} \frac{1}{r} \int_{|t-t_0|\leqslant r} |\varphi(t)|d_1 t, \quad (M'_0\varphi)(t_0) = \sup_{r>0} r \int_{|t-t_0|\geqslant r} \frac{|\varphi(t)|d_1 t}{|t - t_0|^2},$$
$$(M_1\varphi)(t_0) = \sup_{r>0} \left| \int_{|t-t_0|\geqslant r} Q(t; t - t_0, dt)\varphi(t) \right|, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{4.8.5}$$

Доказательство. Рассмотрим подстановку $t = \gamma(s)$, переводящую $\varphi \in L^p(\Gamma)$ на функцию $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi[\gamma(s)]$, $0 \leqslant s \leqslant l$, с равенством норм

$$|\varphi|_{L^p(\Gamma)} = |\widetilde{\varphi}|_{L^p[0,l]}. \tag{4.8.6}$$

Удобно функцию $\widetilde{\varphi}$ продолжить нулем на всю прямую (с сохранением обозначения).

В одномерном случае условие теоремы 3.3.1 для сингулярного интеграла (4.8.1) относительно этой подстановки очевидным образом выполнено, поэтому так же, как и в случае леммы 2.3.3, имеем равенство

$$\psi[\gamma(s_0)] = \int_0^l Q[\gamma(s); \gamma(s) - \gamma(s_0), \gamma'(s)]\varphi[\gamma(s)]ds, \quad 0 < s_0 < l.$$

Поскольку функция $Q(t;\xi,\eta)$ однородна степени -1 и нечетна по ξ, можно записать

$$Q[\gamma(s);\gamma(s)-\gamma(s_0),\gamma'(s)] = \frac{k(s_0,s)}{s-s_0}, \quad k(s_0,s) = Q[\gamma(s);q(s_0,s),\gamma'(s)]. \tag{4.8.7}$$

На основании леммы 3.1.2 функция $k(s_0,s) \in C^\nu([0,l]\times[0,l])$, причем

$$|k|_{C^\nu} \leqslant C_0|Q|_{C^{\nu(1)}}|q|_{C^\nu} \tag{4.8.8}$$

с некоторой абсолютной постоянной C_0.

Таким образом,

$$\psi[\gamma(s_0)] = k(s_0,s_0)\int_0^l \frac{\widetilde{\varphi}(s)ds}{s-s_0} + \widetilde{\psi}(s), \quad \widetilde{\psi}(s) = \int_0^l \frac{k(s_0,s)-k(s_0,s_0)}{s-s_0}\widetilde{\varphi}(s)ds. \tag{4.8.9}$$

Очевидно, $\widetilde{\psi}(s)$ представляет собой интеграл со слабой особенностью, рассмотренный в пункте 4.6. Поэтому с учетом (4.8.6), (4.8.8) первое утверждение является следствием теоремы Рисса из пункта 4.1 и теоремы 4.6.1.

Аналогично (4.8.9) запишем далее

$$\left|\int\limits_{|t-t_0|\geqslant r} Q(t;t-t_0,dt)\varphi(t)\right| \leqslant |k|_{C^\nu}\left(\left|\int\limits_{|\gamma(s)-\gamma(s_0)|\geqslant r}\frac{\widetilde{\varphi}(s)ds}{s-s_0}\right| + \int_0^l \frac{|\widetilde{\varphi}(s)|ds}{|s-s_0|^{1-\nu}}\right).$$

В силу (4.8.3) неравенство $|\gamma_0(s)-\gamma_0(s_0) \geqslant r$ влечет $|s-s_0|\geqslant r$. Поэтому из тех же соображений на основании теоремы Рисса приходим к справедливости оценки (4.8.4) и для функции $\psi = M_1\varphi$.

Обратимся к оценке функции $M_0\varphi$. В силу (4.8.3) неравенство $|\gamma(s)-\gamma(s_0)| \leqslant r$ влечет $m|s-s_0|\leqslant r$, так что

$$(M_0\varphi)[\gamma(s_0)] = \frac{1}{r}\int\limits_{|\gamma(s)|\leqslant r}|\widetilde{\varphi}(s)|ds \leqslant \frac{1}{r}\int\limits_{m|s-s_0|\leqslant r}|\widetilde{\varphi}(s)|ds,$$

где напомним, функция $\widetilde{\varphi}$ продолжена нулем на всю прямую. Поэтому (4.8.4) для $\psi = M_0\varphi$ вытекает из соответствующего утверждения теоремы Харди—Литтлвуда.

Точно так же запишем

$$(M_0'\varphi)[\gamma(s_0)] \leqslant \frac{r}{m^2}\int\limits_{|\gamma(s)|\geqslant r}\frac{|\widetilde{\varphi}(s)|ds}{|s-s_0|^2} \leqslant \frac{r}{m^2}\int\limits_{m|s-s_0|\geqslant r}\frac{|\widetilde{\varphi}(s)|ds}{|s-s_0|^2}. \tag{4.8.10}$$

Согласно лемме 4.1.2

$$\frac{r}{m}\int\limits_{m|s-s_0|\geqslant r}\frac{|\widetilde{\varphi}(s)|ds}{|s-s_0|^2} \leqslant 3\sup_{r>0}\frac{1}{r}\int\limits_{|s-s_0|\leqslant r}|\widetilde{\varphi}(s)|ds,$$

так что

$$(M_0'\varphi)[\gamma(s_0)] \leqslant \frac{3}{m}\sup_{r>0}\frac{1}{r}\int\limits_{|s-s_0|\leqslant r}|\widetilde{\varphi}(s)|ds.$$

Поэтому оценка (4.8.3) для $\psi = M_0'\varphi$ опять является следствием теоремы Харди—Литтлвуда. □

Теорему 4.8.1 дополним следующим предложением, вытекающим из теоремы о точках Лебега из пункта 1.8 и леммы 4.1.2.

Лемма 4.8.1. *Пусть функция φ суммируема на гладкой дуге Γ. Тогда*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int\limits_{|t-t_0|\leqslant r}|\varphi(t)-\varphi(t_0)|d_1t = \lim_{r\to 0} r\int\limits_{|t-t_0|\geqslant r}\frac{|\varphi(t)-\varphi(t_0)|}{|t-t_0|^2}d_1t = 0. \tag{4.8.11}$$

для почти всех точек $t_0 \in \Gamma$.

Доказательство. Равенство нулю первого предела составляет содержание теоремы из пункта 1.8 о точках Лебега. Что касается второго равенства, то аналогично (4.8.10) запишем

$$r \int\limits_{|t-t_0|\geqslant r} \frac{|\varphi(t)-\varphi(t_0)|}{|t-t_0|^2} d_1 t \leqslant \frac{r}{m^2} \int\limits_{|\gamma(s)-\gamma(s_0)|\geqslant r} \frac{|\widetilde{\varphi}(s)-\widetilde{\varphi}(s_0)|ds}{|s-s_0|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r}{m^2} \int\limits_{m|s-s_0|\geqslant r} \frac{|\widetilde{\varphi}(s)-\widetilde{\varphi}(s_0)|ds}{|s-s_0|^2},$$

где неравенство $m|s-s_0|\geqslant r$ в последнем интеграле рассматривается на отрезке $[0,l]$. Продолжая функцию $f(s)=|\widetilde{\varphi}(s)-\widetilde{\varphi}(s_0)|$ нулем и пользуясь второй частью леммы 4.1.2, приходим к равенству нулю и второго предела в (4.8.11). $\square$

Рассмотрим теперь кусочно-гладкую кривую Γ на расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Как и в пункте 3.10, пусть конечное множество F содержит все ее граничные точки (включая ∞, если кривая неограничена). Соответственно Γ можно представить в виде

$$\Gamma\setminus F=\Gamma_0\cup\dot{\Gamma}_1\cup\ldots\cup\dot{\Gamma}_m, \tag{4.8.12}$$

где Γ_0 является гладким контуром (вообще говоря, составным), $\dot{\Gamma}_j$ — открытыми гладкими дугами и все эти кривые попарно не пересекаются. Как и ранее, для $\tau\in F$ обозначим $B_\tau(\rho)$ круг $\{|z-\tau|\leqslant\rho\}$ при $\tau\neq\infty$ и внешность круга $\{|z|\geqslant 1/\rho\}$ при $\tau=\infty$. При достаточно малом ρ пересечение $\Gamma_\tau=\Gamma\cap B_\tau(\rho)$ разбивается на некоторое число n_τ гладких дуг $\Gamma_{\tau,j}$ с общим концом τ. Число ρ здесь выбирается столь малым, что все дуги $\Gamma_{\tau,j}$, $1\leqslant j\leqslant n_\tau$, являются радиальными по отношению к концу τ.

Отметим прежде всего оценку

$$\sum_{\tau\neq\infty}\int\limits_{\Gamma_\tau}|\varphi(t)|d_1t+\int\limits_{\Gamma_\infty}|\varphi(t)||t|^{-1}d_1t\leqslant C|\varphi|_{L^p_\lambda},\quad -1<\lambda<0. \tag{4.8.13}$$

В самом деле, если точка $\tau\in F$ конечна, то в силу неравенства Гельдера

$$\int\limits_{\Gamma_\tau}|\varphi(t)|d_1t\leqslant\left(\int\limits_{\Gamma_\tau}|\varphi(t)|^p|t-\tau|^{-p\lambda_\tau-1}d_1t\right)^{1/p}\left(\int\limits_{\Gamma_\tau}|t-\tau|^{q\lambda_\tau-1}d_1t\right)^{1/q},$$

где $1/q=1-1/p$. Остается заметить, что $\lambda_\tau>-1$ влечет $q\lambda_\tau+q/p>-1$ и, следовательно, интегралы в правой части этого неравенства конечны. Если $\tau=\infty$, то $|t|^{-1}=|t|^{-\lambda_\tau-1/p}|t|^{\lambda_\tau-1/q}$ и аналогичным образом

$$\int\limits_{\Gamma_\tau}|\varphi(t)||t|^{-1}d_1t\leqslant\left(\int\limits_{\Gamma_\tau}|\varphi(t)|^p|t|^{-p\lambda_\tau-1}d_1t\right)^{1/p}\left(\int\limits_{\Gamma_\tau}|t|^{q\lambda_\tau+q/p}d_1t\right)^{1/q},$$

и в этом случае $\lambda_\tau<0$ влечет $q\lambda_\tau-1<-1$.

Оценка (4.8.13) показывает, что вне окрестности точки t_0 подынтегральное выражение в (4.8.1) суммируемо на Γ, так что сингулярный интеграл имеет смысл.

Теорема 4.8.2. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая Γ не содержит точек возврата и обобщенное ядро Коши $Q(t;\xi,\eta)\in C_0^{\nu(1)}(\Gamma,F)$.*

Тогда для $\varphi\in L^p_\lambda(\Gamma,F)$, где $p>1$ и $-1<\lambda<0$, функция ψ, определяемая сингулярным интегралом Коши (4.8.1)*, принадлежит классу $L^p_\lambda(\Gamma,F)$ с оценкой*

$$|\psi|_{L^p_\lambda}\leqslant C|Q|_{C_0^{\nu(1)}}|\varphi|_{L^p_\lambda} \tag{4.8.14}$$

своей нормы.

Доказательство. Оно осуществляется по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.7.2. Число ν можно выбрать столь малым, чтобы в разложении (4.8.12) гладкий контур Γ_0 и открытые гладкие дуги $\dot{\Gamma}_j$ принадлежали классам $C^{1,\nu}$ и $C^{1,\nu}_{(1+0)}$ соответственно.

Если φ обращается в нуль в окрестности F, то по теореме 4.8.1 функция ψ принадлежит $L^p(\Gamma_0)$ на любой дуге $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$. Очевидно, функция $\psi(t_0)$ ограничена в окрестности конечных точек τ и ведет себя как $O(1)|t_0|^{-1}$ при $t_0 \to \infty$. Поскольку $-1 < \lambda < 0$, как и при выводе (4.8.13), убеждаемся, что эта функция принадлежит $L^p_{\lambda_\tau}(\Gamma_\tau, \tau)$ для любого $\tau \in F$.

Приведенные рассуждения показывают, что достаточно ограничиться случаем, когда для некоторого $\tau \in F$ функция φ равна нулю вне Γ_τ, сингулярный интеграл ψ рассматривается на Γ_τ. При этом можно ограничится двумя случаями, когда $\tau = 0$ либо $\tau = \infty$. Оба этих случая можно объединить для кривой Γ, составленной из некоторого числа радиальных дуг $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^n$ с общими концами в точках $\tau = 0$ и $\tau = \infty$, которые не являются для нее точками возврата.

Переходя к переобозначениям и полагая $\lambda_\tau = \lambda$, оценку (4.8.14) можно доказывать для функции

$$\psi(t_0) = |t_0|^{-\lambda} \int_\Gamma |t|^\lambda Q(t; t - t_0, dt)\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{4.8.15}$$

по отношению к пространству $L^p_0(\Gamma)$. Перепишем это равенство в форме

$$\psi(2^i t_0) = |t_0|^{-\lambda} \int_{2^{-i}\Gamma} |t|^\lambda Q(2^i t; t - t_0, dt)\varphi(2^i t), \quad t_0 \in 2^{-i}\Gamma, \quad i = 0, \pm 1, \ldots, \tag{4.8.16}$$

и положим для краткости

$$\begin{aligned} \varphi_i(t) &= \varphi(2^i t), \quad t \in \Gamma_i = (2^{-i}\Gamma) \cap \{1/4 \leqslant |t| \leqslant 4\}, \\ \psi_i(t) &= \psi(2^i t), \quad t \in \Gamma^0_i = (2^{-i}\Gamma) \cap \{1/2 \leqslant |t| \leqslant 2\}. \end{aligned} \tag{4.8.17}$$

Напомним, что Γ состоит из радиальных дуг Γ^k, $1 \leqslant k \leqslant n$, с общими концами $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. Соответственно и кривая Γ_i состоит из n радиальных дуг Γ^k_i. Как установлено при доказательстве теоремы 3.10.1(b), при $i \to \pm\infty$ дуга Γ^k_i стремится в метрике $C^{1,\nu}$ к соответствующему отрезку $I^k_\pm$, который представляет собой пересечение с кольцом $\{1/4 \leqslant |t| \leqslant 4\}$ луча с вершиной в нуле, параллельного касательной к Γ^k в точке $\tau = 0$ для знака $+$ и в точке $\tau = \infty$ для знака $-$. В частности, те три параметра, от которых зависит постоянная C в оценке теоремы 4.8.1 для кривых Γ^k_i, равномерно ограничены по $i = 0, \pm 1, \ldots$. Отметим еще, что поскольку по условию τ не является точкой возврата, для каждого из двух знаков отрезки $I^k_\pm$, $1 \leqslant k \leqslant n$, попарно различны.

Если функция f суммируема на Γ, то

$$4\int_\Gamma f(t)d_1 t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma \cap \{2^{-j-2} < |t| < 2^{-j+2}\}} f(t)d_1 t = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-j} \int_{2^j\Gamma \cap \{1/4 < |t| < 4\}} f(t)d_1 t.$$

Применяя этот факт к кривой $2^{-i}\Gamma$ и интегралу (4.8.16), в обозначениях (4.8.17) получим равенство

$$4\psi(2^i t_0) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \psi_{ij}(t_0), \quad \psi_{ij}(t_0) = 2^{-(1+\lambda)j} \int_{\Gamma_{i-j}} |t|^\lambda Q(2^{i-j}t; 2^{-j}t - t_0, dt)\varphi_{i-j}(t),$$

откуда

$$4|\psi_i|_{L^p(\Gamma^0_i)} \leqslant \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\psi_{ij}|_{L^p(\Gamma_{i-j})}. \tag{4.8.18}$$

Как уже отмечалось, на основании теоремы 4.8.1

$$|\psi_{i0}|_{L^p(\Gamma^0_i)} \leqslant C|Q|_{C^{0(1)}}|\varphi_i|_{L^p(\Gamma_i)}, \tag{4.8.19}$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от i. Что касается функций ψ_{ij} для $j \neq 0$, то для них получается аналогичная (4.7.8) оценка

$$\sup_{t_0 \in \Gamma^0_i} |\psi_{ij}(t_0)| \leqslant C\sigma_j |Q|_{C^{0(0)}} \int_{\Gamma_{i-j}} |\varphi_{i-j}(t)|dt, \quad \sigma_j = \begin{cases} 2^{-(1+\lambda)j}, & j \geqslant 1, \\ 2^{-\lambda j}, & j \leqslant -1, \end{cases} \tag{4.8.20}$$

Нужно только при оценке интегралов по радиальным дугам, содержащимся в $2^{-j}\Gamma$, принять во внимание, что производные радиальной параметризации этих дуг ограничены по модулю постоянной равномерно по j.

В самом деле, пусть радиальная дуга Γ^k, входящая в состав Γ, задается радиальной параметризацией $\gamma(s) = se^{if(s)}$, $0 \leqslant s < \infty$, где функция f непрерывно дифференцируема при $0 < s < \infty$ и имеет пределы

$$\lim_{s\to 0} f(s) = c_0, \quad \lim_{s\to\infty} f(s) = c_1, \\ \lim_{s\to 0} sf'(s) = \lim_{s\to\infty} sf'(s) = 0. \tag{4.8.21}$$

Тогда кривая $2^{-j}\Gamma^k$ имеет радиальную параметризацию $\gamma_j(s) = se^{if_j(s)}$, где функция $f_j(s) = f(2^j s)$ обладает теми же свойствами (4.8.21), причем

$$|\gamma_j'(s)| \leqslant \max_{0<s<\infty} |\gamma'(s)|,$$

что и доказывает высказанное утверждение.

Полагая $\sigma_j = 1$ для $j = 0$, из (4.8.19), (4.8.20) получаем оценку

$$|\psi_{ij}|_{L^p(\Gamma_i^0)} \leqslant C|Q|_{C^{0(1)}}|\varphi_{i-j}|_{L^p(\Gamma_{i-j})}, \quad |j| \geqslant 1,$$

на основании которой совместно с (4.8.18), как и при доказательстве теоремы 4.7.2, приходим к справедливости оценки (4.8.14) с $\lambda = 0$ для интеграла (4.8.15). □

Отметим, что для классического случая $Q(\xi,\eta) = \eta/\xi$ интегралов типа Коши теорема 4.8.2 принадлежит Б. В. Хведелидзе [67].

4.9. Обобщенные интегралы типа Коши с L^p-плотностью

Рассмотрим на комплексной плоскости вне ориентируемой кусочно-ляпуновской кривой Γ обобщенный интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \int_\Gamma Q(t; t-z, dt)\varphi(t), \quad t \notin \Gamma, \tag{4.9.1}$$

с плотностью $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$ и отвечающий ему сингулярный интеграл (4.8.1). В предположении, что плотность φ принадлежит классу C^μ с весом, этот интеграл изучался в главе 3. Напомним, что при соответствующих предположениях относительно ядра Q функция $\phi(z)$ имеет односторонние пределы $\phi^\pm(t_0)$ во внутренних точках t_0 кривой Γ, которые связаны со значением $\phi^*(t_0)$ сингулярного интеграла (4.8.1) в этих точках соотношением

$$\phi^\pm(t_0) = \pm\sigma(t_0)\varphi(t_0) + \psi(t_0), \quad \sigma(t_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{T}} Q(t_0; \xi, d\xi), \tag{4.9.2}$$

где единичная окружность $\mathbb{T}$ ориентирована против часовой стрелки. Возникает вопрос о поведении функции ϕ вблизи кривой Γ в предположении, что плотность φ только суммируема. Для классических интегралов типа Коши с ядром $Q(\xi,\eta) = \eta/\xi$ этот вопрос был подробно исследован И. И. Приваловым [44]. Ситуация общих ядер Коши изучалась в работах автора [59, 60].

Рассмотрим сначала случай, когда Γ является ограниченной ляпуновской дугой. Удобно с каждой точкой $t_0 \in \Gamma$ и $0 < \theta < \pi$ связать на плоскости центрально-симметричный конус $K_\theta(t_0)$ с вершиной t_0 и углом раствора θ, определяемый неравенством

$$|\arg[(z - z_0)\overline{n(t_0)}]| \leqslant \theta, \tag{4.9.3}$$

где $n(t_0) = ie(t_0)$ означает единичную нормаль к Γ в точке t_0. Очевидно, прямая, проходящая через t_0 параллельно вектору $n(t_0)$, служит биссектрисой этого конуса. Он распадается на два конуса $K_\theta^+(t_0)$ и $K_\theta^-(t_0)$, расположенные, соответственно, слева и справа от ориентируемой дуги Γ.

Лемма 4.9.1. *Для любого $0 < \theta < \pi$ существуют такие положительные ρ, m, что*

$$|z - t| \geqslant m(|z - t_0| + |t - t_0|) \tag{4.9.4}$$

для любых $t, t_0 \in \Gamma$ и $z \in K_\theta[t_0; n(t_0)]$, $|z - t_0| \leqslant \rho$.

Доказательство. Зафиксируем $0<\varepsilon<\pi-\theta$ и рассмотрим конус $K_\varepsilon[t_0,e(t_0)]$ раствора ε, определяемый аналогичным образом по отношению к единичному касательному вектору $e(t_0)$. Очевидно, он имеет касательную в точке $t_0\in\Gamma$ своей биссектрисой. Как и в случае леммы 2.5.1, легко убедиться в существовании такого $\rho>0$, что для любой точки $t_0\in\Gamma$ пересечение

$$\Gamma\cap\{|z-t_0|\leqslant 2\rho\}\subseteq K_\varepsilon[t_0,e(t_0)]. \tag{4.9.5}$$

Согласно лемме 2.1.2 найдется такое $r_0>0$, зависящее только от θ и ε, что выполнено неравенство (4.9.4) с $r=r_0$ для всех $z\in K_\theta[t_0;n(t_0)]$ и $t\in K_\varepsilon[t_0,e(t_0)]$. С учетом (4.9.5) отсюда следует, что это неравенство справедливо для всех $t,t_0\in\Gamma$, $|t-t_0|\leqslant 2\rho$ и $z\in K_\theta[t_0;n(t_0)]$, $|z-t_0|\leqslant\rho$. С другой стороны, при $t,t_0\in\Gamma$, $|t-t_0|\geqslant 2\rho$ и $|z-t_0|\leqslant\rho$ имеем очевидное неравенство

$$|z-t|\geqslant\rho\geqslant\frac{\rho}{r_0+R}(|z-t_0|+|t-t_0|),$$

где R означает диаметр дуги Γ. В результате приходим к справедливости оценки (4.9.4), где m есть минимальное из чисел r_0 и $\rho/(r_0+R)$. □

Заметим, что если последовательность гладких дуг Γ_n сходится к Γ в классе C^1, то числа ρ и δ в этой лемме можно выбрать для каждой дуги Γ_n не зависящими от n.

В самом деле, пусть $\Gamma_n\to\Gamma$ в классе C^1. Тогда число ρ, удовлетворяющее условию (4.9.5) по отношению к Γ_n, можно выбрать не зависящим от n, что доказывается аналогично лемме 4.9.1.

Рассмотрим поведение интеграла типа Коши $\phi(z)$ вблизи ориентируемой гладкой дуги Γ. Пусть для заданного $0<\theta<\pi$ число $\rho=\rho(\theta,\Gamma)$ определяется, как в лемме 4.9.1, так что можно ввести сектора

$$S^{\pm}_\theta(t_0,\Gamma)=K^{\pm}_\theta(t_0)\cap\{z-t_0|\leqslant\rho(\theta,\Gamma)\},\quad t_0\in\Gamma. \tag{4.9.6}$$

Здесь знаки определяются так, чтобы сектор S^+ лежал слева от Γ.

Теорема 4.9.1. *Пусть в выражении* (4.9.1) *интеграла типа Коши кривая* Γ *является гладкой дугой класса* $C^{1,\nu}$, *ядро Коши* $Q\in C^{\nu(1)}(\Gamma)$ *и* $\varphi\in L^p(\Gamma)$, $p>1$. *Тогда для любого* $0<\theta<\pi$ *функции*

$$(M^{\pm}_\theta\varphi)(t_0)=\sup_{z\in S_\theta(t_0,\Gamma)}|\phi(z)|$$

принадлежат $L^p(\Gamma)$ *и справедлива оценка* $|M^{\pm}_\theta\varphi|_{L^p}\leqslant C|\varphi|_{L^p}$.

При этом для почти всех $t_0\in\Gamma$ *существуют односторонние пределы* $\phi^{\pm}(t_0)=\lim\phi(z)$ *при* $z\to t_0$, $z\in S^{\pm}_\theta(t_0,\Gamma)$, *связанные с сингулярным интегралом* $\phi^{\pm}(t_0)$ *соотношением* (4.9.2).

Односторонние пределы, о которых идет речь в теореме, по понятным причинам называются угловыми предельными значениями.

Доказательство. Пусть $z\in S^{\pm}_\theta(t_0,\Gamma)$ и $r=|z-t_0|$ фиксировано. Запишем интеграл (4.9.1) в виде суммы $\phi(z)=\phi_r(z,t_0)+\psi_r(t_0)$ двух слагаемых

$$\psi_r(t_0)=\int\limits_{|t-t_0|\geqslant r}Q(t;t-t_0,dt)\varphi(t),\quad \phi_r(z,t_0)=$$
$$\int\limits_{|t-t_0|\leqslant r}Q(t;t-t_0,dt)\varphi(t)+\int\limits_{|t-t_0|\geqslant r}[Q(t;t-z,dt)-Q(t;t-t_0,dt)]\varphi(t). \tag{4.9.7}$$

Согласно лемме 3.1.1 для первого слагаемого здесь имеем неравенство

$$|\phi_r|\leqslant|Q|_{C^{0(1)}}\left(\int\limits_{|t-t_0|\leqslant r}\frac{1}{|t-z|}|\varphi(t)|d_1t+r\int\limits_{|t-t_0|\geqslant r}\left[\frac{1}{|t-z|^2}+\frac{1}{|t-t_0|^2}\right]|\varphi(t)|d_1t\right),$$

что с учетом (4.9.4) приводит к оценке

$$|\phi_r(z,t_0)|\leqslant|Q|_{C^{0(1)}}\left(\frac{1}{mr}\int\limits_{|t-t_0|\leqslant r}|\varphi(t)|d_1t+\frac{2r}{m^2}\int\limits_{|t-t_0|\geqslant r}\frac{|\varphi(t)|d_1t}{|t-t_0|^2}\right). \tag{4.9.8}$$

Следовательно, в обозначениях (4.8.5)

$$(M_\theta^{\pm}\varphi)(t_0) \leqslant C[(M_0\varphi)(t_0) + (M_0'\varphi)(t_0) + (M_1\varphi)(t_0)],$$

и первое утверждение теоремы является следствием теоремы 4.8.1.

Второе утверждение, очевидно, справедливо для постоянной плотности. Поэтому достаточно установить, что

$$\lim_{z\to t_0} \int\limits_\Gamma Q(t; t-z, dt)[\varphi(t) - \varphi(t_0)] = \int\limits_\Gamma Q(t; t-t_0, dt)[\varphi(t) - \varphi(t_0)], \tag{4.9.9}$$

когда z находится внутри сектора $S_\theta(t_0, \Gamma)$.

С этой целью функцию под знаком предела представим в виде суммы двух слагаемых $\widetilde{\psi}_r(t_0)$ и $\widetilde{\phi}_r(z, t_0)$, которые определяются аналогично (4.9.7) по отношению к плотности $\varphi(t) - \varphi(t_0)$. Тогда в соответствии с определением сингулярного интеграла равенство (4.9.9) будет установлено, если убедимся, что

$$\lim_{r\to 0} \widetilde{\phi}_r(z, t_0) = 0, \tag{4.9.10}$$

когда z находится внутри сектора $K_\theta(t_0)$. В рассматриваемом случае аналогично (4.9.8) имеем оценку

$$|\widetilde{\phi}_r(z, t_0)| \leqslant |Q|_{C^{0(1)}} \left(\frac{1}{mr} \int\limits_{|t-t_0|\leqslant r} |\varphi(t) - \varphi(t_0)| d_1 t + \frac{2r}{m^2} \int\limits_{|t-t_0|\geqslant r} \frac{|\varphi(t) - \varphi(t_0)| d_1 t}{|t-t_0|^2} \right),$$

которая совместно с леммой 4.8.1 и доказывает (4.9.10). □

Обратимся теперь к общему случаю, когда Γ является кусочно-ляпуновской кривой и функция $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$. Тогда вблизи каждой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$ поведение интеграла типа Коши $\phi(z)$ описывается теоремой 4.8.1. Рассмотрим поведение этого интеграла в окрестности точек $\tau \in F$, точнее, в области $B_\rho(\tau)$.

Напомним, что $B_\rho(\tau) = \{|z-\tau| \leqslant \rho\}$ при $\tau \neq \infty$ и $B_\rho(\tau) = \{|z| \geqslant 1/\rho\}$ при $\tau = \infty$. В силу выбора ρ окружности $|z-\tau| = s$, $0 < s \leqslant \rho$ (окружности $|z| = 1/s$ при $\tau = \infty$) некасательно пересекают радиальные дуги $\Gamma_{\tau,k}$, $1 \leqslant k \leqslant n_\tau$, составляющие кривую $\Gamma_\tau = \Gamma \cap B_\rho(\tau)$. Положим $J_\tau = (0, \rho]$ при $\tau \neq \infty$ и $J_\tau = [1/\rho, \infty)$ при $\tau = \infty$ и введем на J_τ максимальную функцию по формуле

$$(M_\tau \phi)(s) = \sup_{|z-\tau|=s} |\phi(z)|, \tag{4.9.11}$$

где при $\tau = \infty$ следует $|z-\tau|$ заменить на $|z|$.

Теорема 4.9.2. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая Γ не содержит точек возврата, обобщенное ядро Коши $Q(t; \xi, \eta) \in C_0^{\nu(1)}(\Gamma, F)$ и интеграл типа Коши* (4.9.1) *определяется плотностью $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$, где $p > 1$, $-1 < \lambda < 0$.*

Тогда функция $M_\tau\phi$ в (4.9.11) *принадлежит $L^p_{\lambda_\tau}(J_\tau, \tau)$ с соответствующей оценкой нормы*

$$|M_\tau \phi|_{L^p_{\lambda_\tau}} \leqslant C|\varphi|_{L^p_\lambda}. \tag{4.9.12}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для двух случаев $\tau = 0$ и $\tau = \infty$, которые, как и при доказательстве теоремы 4.8.2, можно объединить в рамках кривой Γ, составленной из некоторого числа радиальных дуг $\Gamma^1, \ldots, \Gamma^n$ с общими концами в точках $\tau = 0$ и $\tau = \infty$. При этом по предположению $\tau = 0, \infty$ не являются точками возврата этой кривой.

Переходя также к переобозначениям и полагая $\lambda_\tau = \lambda$, теорему можно доказывать по отношению к функции

$$\phi(z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_\Gamma |t|^\lambda Q(t; t-z, dt)\varphi(t), \quad z \notin \Gamma, \tag{4.9.13}$$

в пространстве L^p_0. Более точно, с этой функцией аналогично (4.9.11) связывается максимальная функция

$$(M\phi)(s) = \sup_{|z|=s} |\phi(z)|, \quad 0 < s < \infty, \tag{4.9.14}$$

для которой и нужно установить оценку (4.9.12) с $\lambda = 0$.

Как и при доказательстве теоремы 4.8.2, от (4.9.13) перейдем к равенству

$$\phi(2^i z) = |z|^{-\lambda} \int\limits_{2^{-i}\Gamma} |t|^\lambda Q(2^i t; t-z, dt)\varphi(2^i t), \quad |z| = s,\ 1/2 \leqslant s \leqslant 2,$$

и положим для краткости $\Gamma_i = (2^{-i}\Gamma) \cap \{1/4 \leqslant |t| \leqslant 4\}$ и $\varphi_i(t) = \varphi(2^i t),\ t \in \Gamma_i$. Тогда, как и в пункте 4.8, предыдущее равенство можно представить в форме

$$4\phi(2^i z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \phi_{ij}(z), \quad \phi_{ij}(z) = 2^{-(1+\lambda)j} \int\limits_{\Gamma_{i-j}} |t|^\lambda Q(2^{i-j}t; 2^{-j}t - z, dt)\varphi_{i-j}(t),$$

так что

$$4(M\phi)(2^i s) \leqslant \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (M\phi_{ij})(s), \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 2, \tag{4.9.15}$$

по отношению к максимальным функциям

$$(M\phi_{ij})(s) = \sup_{|z|=s} |\phi_{ij}(z)|, \quad 1/2 \leqslant s \leqslant 2.$$

Как уже отмечалось, окружность $|z| = s$ при $1/2 \leqslant s \leqslant 2$ пересекает некасательно радиальные дуги $\Gamma_i^k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$. При $i \to \pm\infty$ дуга Γ_i^k стремится к отрезку $I_\pm^k$ в метрике $C^{1,\nu}$. Поэтому так же, как и при доказательстве леммы 4.9.1, убеждаемся в справедливости неравенства (4.9.4), где z меняется на окружности $|z| = s,\ 1/2 \leqslant s \leqslant 2,\ t \in \Gamma_i$ и $t_0 \in \Gamma_i,\ |t_0| = s$. С учетом замечания к этой лемме постоянную $m > 0$ в этом неравенстве можно выбрать не зависящей от $i = 0, \pm 1, \ldots$. Поэтому можно воспользоваться аналогом теоремы 4.9.1, согласно которой максимальная функция $M\phi_{i0}$ принадлежит $L^p[1/2, 2]$ и справедлива оценка

$$|M\phi_{i0}|_{L^p} \leqslant C|\varphi_i|_{\Gamma_i},$$

равномерная по i. Что касается функций ϕ_{ij} для $j \neq 0$, то для них получается аналогичная (4.8.20) оценка

$$\sup_{1/2 \leqslant |z| \leqslant 2} |\phi_{ij}(z)| \leqslant C\sigma_j \int\limits_{\Gamma_{i-j}} |\varphi_{i-j}(t)| dt, \quad \sigma_j = \begin{cases} 2^{-(1+\lambda)j}, & j \geqslant 1, \\ 2^{-\lambda j}, & j \leqslant -1, \end{cases}$$

Как и в пункте 4.8, из этих оценок совместно с (4.9.15) вытекает оценка (4.9.12) для максимальной функции (4.9.14) в пространстве L_0^p. $\square$

Свойства интегралов типа Коши, содержащиеся в теоремах 4.9.1, 4.9.2, положим в основу определения классов H^p Харди—Литтлвуда. Пусть область D ограничена кусочно-гладкой кривой Γ и конечное множество $F \subseteq \Gamma$ содержит все ее граничные точки, так что $\Gamma \setminus F$ является открытой гладкой кривой. Обозначим $H^p_{loc}(D, F)$ класс функций $\phi \in C(D)$, которые вблизи каждой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$ ведут себя так же, как интеграл типа Коши в первом утверждении теоремы 4.9.1. Рассмотрим это определение более подробно.

Как отмечено в пункте 2.5, для дуги Γ_0 существует такой стандартный радиус ρ_0, что для $t_0 \in \Gamma_0$ круг $B(t_0, \rho_0) = \{|z - t_0| \leqslant \rho_0\}$ разбивается кривой Γ на две связные компоненты $B^\pm(t_0, \rho_0)$. Если дуга Γ_0 ориентируема, то знаки выбираются так, что $B^+(t_0, \rho_0)$ лежит слева от Γ_0. При этом ρ_0 можно выбрать столь малым, что каждая из компонент $B^\pm(t_0, \rho_0)$, имеющая общие точки с D, целиком содержится в D. В соответствии с этим область D лежит слева или справа от Γ_0, если только $B^+(t_0, \rho_0)$ или, соответственно, $B^-(t_0, \rho_0)$ содержатся в D, и по обе стороны от D в противном случае (когда Γ_0 служит разрезом для D).

Пусть в определении секторов (4.9.6) для дуги Γ_0 число $\rho = \rho(\theta, \Gamma_0)$ не превосходит указанный стандартный радиус ρ_0. Положим $S(t_0, \Gamma_0) = S^\pm(t_0, \Gamma_0)$, если область D лежит только слева или справа от Γ_0 (с выбором соответствующего знака) и $S(t_0, \Gamma_0) = S^+(t_0, \Gamma_0) \cup S^-(t_0, \Gamma_0)$, если Γ_0 служит разрезом для D. Очевидно, тогда $S(t_0, \Gamma_0) \subseteq D$ и для $\phi \in C(D)$ можно ввести максимальную функцию

$$(M_\theta \phi)(t_0) = \sup_{z \in S_\theta(t_0, \Gamma_0)} |\phi(z)|, \quad t_0 \in \Gamma_0. \tag{4.9.16}$$

Тогда точное определение класса $H^p_{loc}(\Gamma, F)$, $p \geqslant 1$, состоит в требовании, чтобы для любой дуги $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$ и произвольного $0 < \theta < \pi$ так определенная функция $M_\theta \phi$ принадлежала $L^p(\Gamma_0)$.

Очевидно, класс H^p выдерживает умножение на ограниченные непрерывные функции. Точно так же из неравенства Гельдера следует, что произведение $\phi\psi$ двух функций $\phi \in H^p$ и $\psi \in H^q$ с сопряженными показателями p и q принадлежит H^1. Следующие несколько более содержательных свойств этого класса объединим в одной теореме.

Пусть $\phi \in H^p(D, F)$, дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma \setminus F$ и τ является внутренней точкой этой дуги.

Теорема 4.9.3.

(a) *Пусть гладкая дуга Γ_1 с концом τ, за исключением этого конца, содержится в D. Тогда сужение функции ϕ на эту дугу принадлежит $L^p(\Gamma_1)$.*

(b) *Пусть L_r есть пересечение окружности $\{|z - \tau| = r\}$ с D и*

$$(M_\tau \phi)(r) = \sup_{z \in L_r} |\phi(z)|, \quad 0 < r \leqslant \varepsilon.$$

Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $M_\tau \phi$ принадлежит $L^p[0, \varepsilon]$.

(c) *Пусть последовательность гладких дуг $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится к Γ_0 в метрике C^1, т. е. найдутся такие их гладкие параметризации $\gamma_n : [0, 1] \to L_n$, что последовательность γ_n сходится к гладкой параметризации γ_0 дуги Γ_0 в пространстве $C^1[0, 1]$. Тогда*

$$\sup_n |\phi|_{L^p(\Gamma_n)} < \infty. \tag{4.9.17}$$

Доказательство. (a) Точка τ разбивает Γ на две дуги $\Gamma_0^\pm$. Не ограничивая общности, можно считать, что все три дуги Γ_1 и $\Gamma_0^\pm$ радиальны по отношению к этой точке, причем их вторые концы лежат на одном и том же расстоянии ε от нее. Тогда достаточно показать, что функция $\phi[\gamma_1(r)] \in L^p[0, \varepsilon]$ по отношению к радиальной параметризации γ_1 дуги Γ_1. Поскольку в обозначениях (4.9.16) эта функция по модулю не превосходит $M_\tau \phi$, рассматриваемое утверждение является следствием (b).

(b) Пусть дуга Γ_1 удовлетворяет условиям (a) и ортогональна Γ_0 в точке τ. Для определенности считаем, что она лежит слева от Γ_0. В частности, в (4.9.15) под S_θ можно понимать сектор S_θ^+. Как и в (a), не ограничивая общности, можно считать, что дуги Γ_1 и $\Gamma_0^\pm$ радиальны по отношению к точке τ и их вторые концы лежат на одном и том же расстоянии ε от нее. Как и выше, обозначим через γ_1 и $\gamma_0^\pm$ радиальные параметризации этих дуг. Кроме того, в случае, когда Γ_0 служит разрезом для D, под L_r можно понимать ту из двух дуг окружности, которая пересекает Γ_1. Тогда для $0 < r \leqslant \varepsilon$ точка $\gamma_1(r)$ разбивает L_r на две дуги $L_r^\pm$ с концами $\gamma_1(r)$ и $\gamma_0^\pm(r)$. Нетрудно видеть, что для некоторого $0 < \theta < \pi$ и всех $0 < r \leqslant \varepsilon$ дуга $L_r^\pm$ содержится в секторе $S_\theta^+(t_0, \Gamma_0)$ с вершиной $t_0 = \gamma_0^\pm(r)$. Поэтому

$$\sup_{z \in L_r^\pm} |\phi(z)| \leqslant (M_\theta \phi)[\gamma_0^\pm(r)],$$

так что по определению класса H^p функции в левой части этого неравенства принадлежат $L^p[0, \varepsilon]$. Но тогда этот факт справедлив и для функции (4.9.17).

(c) Как и в (b), не ограничивая общности, можно считать, что дуги Γ_n лежат слева от Γ_0. Достаточно показать, что для некоторого $0 < \theta < \pi$ и достаточно большого номера n_0 параметризации γ_n можно подчинить условию

$$\gamma_n(s) \in S_\theta^+[\gamma(s), \Gamma_0], \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{4.9.18}$$

Тогда в соответствии с (4.9.15) функции $\phi \circ \gamma_n$ будут мажорироваться по модулю функцией $M_\theta \circ \gamma \in L^p[0, 1]$.

Проверку выполнения условия достаточно провести локально. Поэтому можно считать, что Γ_0 в декартовой системе координат $z = x + iy$ задается графиком функции $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, с вещественной функцией $f \in C^1[a, b]$ и, соответственно, Γ_n задаются уравнениями $y = f_n(x)$, где $f_n > f$ и $f_n \to f$ в $C^1[a, b]$. В этом случае справедливость условия (4.9.18) очевидна. $\square$

В определении класса $H^p_{loc}(D, F)$ случай $F = \varnothing$ не исключается. В этом случае кривая Γ не содержит граничных точек, т. е. является гладким контуром, и класс Харди—Литтлвуда естественно обозначить $H^p(D)$. В этом случае утверждение (c) теоремы 4.9.3 можно формулировать по отношению к последовательности гладких контуров $\Gamma_n \subseteq D$, сходящихся к граничному контуру Γ в метрике C^1. Точно так же из теоремы 4.9.3(a) следует, что для любой подобласти $D_0 \subseteq D$, ограниченной гладким контуром, сужение функций $\phi \in H^p(D)$ на эту подобласть принадлежат $H^p(D_0)$. Из этих свойств, в частности, следует, что аналитические в D функции $\phi \in H^p(D)$ принадлежат классу Харди—Смирнова $E^p(D)$ (см., например, [12]), который служит обобщением классических классов Харди H^p в единичном круге [13]. В случае гармонических функций аналогичный класс часто обозначается [12] символом $e^p(D)$.

Введем теперь весовой класс Харди—Литтлвуда $H^p_\lambda(D,F)$ с произвольным весовым порядком λ. По определению он состоит из всех функций $\phi \in H^p_{loc}(D,F)$, которые в окрестности особых точек $\tau \in F$ ведут себя как интегралы типа Коши в теореме 4.9.2. Другими словами, в обозначениях (4.9.11) для любого $\tau \in F$ функция $M_\tau \phi$ принадлежит $L^p_{\lambda_\tau}(I_\tau, \tau)$. Согласно теореме 4.9.2 при $-1 < \lambda < 0$ и $p > 1$ интеграл типа Коши с плотностью $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$ принадлежит классу $H^p(D,F)$. При этом кривая Γ предполагается кусочно-ляпуновской без точек возврата. Из доказательства этой теоремы видно, что в действительности достаточно потребовать, чтобы внутренние углы области D в точках $\tau \in F$ были положительными. В частности, случай, когда в некоторой точке $\tau \in F$ этот угол равен 2π (и когда Γ имеет τ точкой возврата), не исключается.

Из теоремы 4.9.3(b) совместно со свойством (4.1.11) L^p-пространств непосредственно вытекает следующее предложение, которое является некоторым аналогом указанного свойства для H^p-пространств.

Лемма 4.9.2. *Пусть кусочно-гладкая кривая Γ_1, за исключением некоторых своих концов, целиком содержится в области D, и D_1 — одна из связных компонент $D \setminus \Gamma_1$. Пусть конечное множество $F_1 \subseteq \partial D_1$ содержит $F \cup (\Gamma \cap \Gamma_1)$ и весовой порядок λ^1 на F_1 определяется равенством*

$$\lambda^1_\tau = \begin{cases} \lambda_\tau, & \tau \in F, \\ -1/p, & \tau \in F_1 \setminus F. \end{cases}$$

Тогда сужение функции $\phi \in H^p_\lambda(D,F)$ на D_1 принадлежит $H^p_{\lambda^1}(D_1, \partial D_1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аниконов Д. С.* Об ограниченности сингулярного интегрального оператора в пространстве $C^\alpha(\overline{G})$// Мат. сб. — 1977. — *104*, № 4. — С. 516–534.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. — М.: Наука, 1969.
3. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980.
4. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1966.
5. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
6. *Бицадзе А. В.* Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения// Докл. АН СССР. — 1953. — *93*, № 3. — С. 389–392.
7. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. — М.: Наука, 1970.
8. *Гельфанд И. М., Райков Д. А., Шилов Г. Е.* Коммутативные нормированные кольца. — М.: Физматгиз, 1960.
9. *Гамелин Т.* Равномерные алгебры. — М.: Мир, 1973.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1977.
12. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1972.
13. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. — М.: ИЛ, 1963.
14. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. И.* Введение в теорию одномерных сингулярных уравнений. — Кишинев: Штиинца, 1973.
15. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. — М.: Наука, 1970.
16. *Глушко В. П.* Об операторах типа потенциала и некоторых теоремах вложения// Докл. АН СССР. — 1959. — *126*, № 3. — С. 467–470.
17. *Дудучава Р. В.* О сингулярных интегральных операторах в пространствах гельдеровых функций с весом// Докл. АН СССР. — 1970. — *191*, № 1. — С. 16–19.

18. *Дудучава Р. В.* О теоремах Нетера для сингулярных интегральных уравнений в пространствах гельдеровских функций с весом// Труды Симп. по мех. спл. среды и родственным пробл. анализа, Тбилиси, 1971. — Тбилиси: Мецниереба, 1973. — *1*. — С. 89–102.
19. *Дудучава Р. В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики// Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрССР. — 1979. — *60*. — С. 1–135.
20. *Дынькин Е. М.* Методы теории сингулярных интегралов. I. Преобразование Гильберта и теория Кальдерона—Зигмунда// В сб. «Итоги науки и техники». — М.: ВИНИТИ, 1987. — *15*. — С. 197–292.
21. *Дынькин Е. М.* Методы теории сингулярных интегралов. II. Теория Литлвуда—Пэли и ее приложения// В сб. «Итоги науки и техники». — М.: ВИНИТИ, 1989. — *42*. — С. 105–198.
22. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1968.
23. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
24. *Красносельский М. А. и др.* Интегральные операторы в пространстве суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
25. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
26. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.
27. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространстве Гельдера. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
28. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные эллиптические уравнения. — М.: Наука, 1964.
29. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953.
30. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
31. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. — М.: Наука, 1977.
32. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: ЛГУ, 1985.
33. *Мальцев Н. И.* Основы линейной алгебры. 3-е изд. — М.: Наука, 1970.
34. *Михлин С. Г.* Сингулярные интегральные уравнения// Усп. мат. наук. — 1948. — *3*, № 3. — С. 29–112.
35. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962.
36. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
37. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. — М.: Мир, 1971.
38. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969.
39. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
40. *Пирковский А. Ю.* Спектральная теория и функциональные исчисления для линейных операторов. — М.: Изд-во МЦНМО, 2010.
41. *Полунин В. А., Солдатов А. П.* Трехмерный аналог интеграла типа Коши// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 3. — С. 366–375.
42. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. — М.: Мир, 1979.
43. *Привалов И. И.* Интеграл Cauchy// Изв. физ.-мат. ф-та Саратовского ун-та. — 1918. — *11*, № 1. — С. 94–105.
44. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. 2-ое изд. — М.: Наука, 1967.
45. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
46. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1991.
47. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. — М.: Наука, 1988.
48. *Солдатов А. П.* К нетеровской теории операторов. Винеровские вложения B-алгебр// Дифф. уравн. — 1978. — *14*, № 1. — С. 104–115.
49. *Солдатов А. П.* Категория двойственности в теории нетеровых операторов// Дифф. уравн. — 1979. — *15*, № 2. — С. 303–309.
50. *Солдатов А. П.* Асимптотика решений сингулярных интегральных уравнений// Дифф. уравн. — 1986. — *22*, № 1. — С. 143–153.
51. *Солдатов А. П.* Асимптотика решений краевых задач для эллиптических систем вблизи угловых точек// Докл. АН СССР. — 1990. — *315*, № 1. — С. 34–36.
52. *Солдатов А. П.* Граничные свойства интегралов типа Коши// Дифф. уравн. — 1990. — *26*, № 1. — С. 131–136.
53. *Солдатов А. П.* Обобщенный интеграл типа Коши// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 2. — С. 3–8.
54. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. — М.: Высшая школа, 1991.

55. *Солдатов А. П.* Обобщенный интеграл типа Коши и сингулярный интеграл в пространстве Гельдера с весом// Докл. РАН. — 1993. — *330*. — С. 164–166.
56. *Солдатов А. П.* Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой. I. Операторы типа свертки на полуоси// Дифф. уравн. — 2000. — *36*, № 9. — С. 1209–1219.
57. *Солдатов А. П.* Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой. II. Основные построения// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 6. — С. 825–838.
58. *Солдатов А. П.* Алгебра сингулярных операторов с концевым символом на кусочно-гладкой кривой. III. Операторы нормального типа// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 10. — С. 1364–1376.
59. *Солдатов А. П.* Граничные свойства обобщенных интегралов типа Коши с суммируемой плотностью// Докл. Адыгской (Черкесской) Межд. акад. наук. — 2008. — *10*, № 1. — С. 62–66.
60. *Солдатов А. П., Александров А. В.* Граничные свойства интегралов типа Коши. L_p-случай// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 3–8.
61. *Солдатова Т. А.* Обобщенные потенциалы двойного слоя// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2009. — *6*. — С. 8–17.
62. *Солдатова Т. А.* Граничные свойства обобщенных интегралов типа Коши в пространствах гладких функций// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2011. — *11*, № 3(1). — С. 95–109.
63. *Сохоцкий Ю. В.* Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды. — С.-Петербург, 1873.
64. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1972.
65. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. — М.: Мир, 1974.
66. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
67. *Хведелидзе Б. В.* Линейные разрывные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения// Тр. Тбил. Мат. Ин-та АН ГрССР. — 1956. — *23*. — С. 3–158.
68. *Хермандер Л.* Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. — М.: Мир, 1962.
69. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. т. 1. — М.: Мир, 1986.
70. *Calderon A. P.* Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1977. — *74*, № 4. — С. 1324–1327.
71. *Christ M.* Lectures on singular integral operators. — Providence: Am. Math. Soc., 1990.
72. *Duduchava R. V.* On singular integral operators on piecewise smooth lines// In: «Function theoretic methods in differential equations». — London—San Francisco—Melbourne: Pitman, 1976. — С. 109–131.
73. *Fichera G.* Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity// Proc. Int. Conf. «Part. Differ. Equ. Contin. Mech.», Madison, Wisconsin, 1960. — 1961. — С. 55–80.
74. *Fichera G., Ricci P. E.* The single layer potential approach in the theory of boundary value problems for elliptic equations// In: «Lecture Notes in Math», *561*. — Berlin—N.Y.: Springer, 1976. — С. 39–50.
75. *Giraud G.* Équations à intégrales principales; étude suivie d'une application// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér (3). — *51*. — 1934. — С. 251–372.
76. *Kufner A.* Weighted Sobolev spaces. — Leipzig: Teubner Texte zur Mathematik, 1980.
77. *Mikhlin S. G., Prosdorf S.* Singular integral operators. — Berlin: Academic-Verlag, 1986.
78. *Plemelj J.* Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend// Mon. Math. Phys. — 1908. — *19*. — С. 205–210.
79. *Tricomi F.* Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie «con asterisco»// Rend. Accad. d. L. Roma (6). — 1926. — *3*. — С. 535–539.

Александр Павлович Солдатов
Национальный исследовательский университет «Белгородский государственный университет», кафедра дифференциальных уравнений
308015, г. Белгород, ул. Победы, д. 85
E-mail: soldatov@bsu.edu.ru

UDC 517.968

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-1-1-189

Singular Integral Operators and Elliptic Boundary-Value Problems. I

© 2017 **A. P. Soldatov**

Abstract. The book consists of three Parts I–III and Part I is presented here. In this book, we develop a new approach mainly based on the author's papers. Many results are published here for the first time.

Chapter 1 is introductory. The necessary background from functional analysis is given there for completeness. In this book, we mostly use weighted Hölder spaces, and they are considered in Ch. 2. Chapter 3 plays the main role: in weighted Hölder spaces we consider there estimates of integral operators with homogeneous difference kernels, which cover potential-type integrals and singular integrals as well as Cauchy-type integrals and double layer potentials. In Ch. 4, analogous estimates are established in weighted Lebesgue spaces.

Integrals with homogeneous difference kernels will play an important role in Part III of the monograph, which will be devoted to elliptic boundary-value problems. They naturally arise in integral representations of solutions of first-order elliptic systems in terms of fundamental matrices or their parametrixes. Investigation of boundary-value problems for second-order and higher-order elliptic equations or systems is reduced to first-order elliptic systems.

REFERENCES

1. D. S. Anikonov, "Ob ogranichennosti singuliarnogo integralnogo operatora v prostranstve $C^\alpha(\overline{G})$" [On boundedness of a singular integral operator in the space $C^\alpha(\overline{G})$], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **104**, № 4, 516–534 (in Russian).
2. A. Erdélyi, etc. *Tables of Integral Transforms. Vol. I*, McGraw-Hill Book Co., N.Y., 1954.
3. J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1976.
4. L. Bers, F. John, and M. Schechter, *Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York—London—Sydney, 1964.
5. O. V. Besov, V. P. Ilin, and S. M. Nikolskii, *Integralnye predstavleniia funktsii i teoremy vlozheniia* [Integral Representation of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
6. A. V. Bitsadze, "Prostranstvennyi analog integrala tipa Koshi i nekotorye ego primeneniia" [Spatial analog of the Cauchy-type integral and some its applications], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1953, **93**, № 3, 389–392 (in Russian).
7. N. P. Vekua, *Sistemy singuliarnykh integralnykh uravnenii* [Systems of Singular Integral Equations], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
8. I. M. Gelfand, D. A. Raikov, and G. E. Shilov, *Kommutativnye normirovannye koltsa* [Commutative Normed Rings], Fizmatgiz, Moscow, 1960 (in Russian).
9. T. Gamelin, *Ravnomernye algebry* [Uniform Algebras], Mir, Moscow, 1973 (in Russian).
10. F. R. Gantmacher, *Teoriia matrits* [The Theory of Matrices], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
11. F. D. Gakhov, *Kraevye zadachi* [Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
12. G. M. Goluzin, *Geometricheskaia teoriia funktsii kompleksnogo peremennogo* [Geometric Theory of Functions of Complex Variable], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
13. K. Hoffman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
14. I. Ts. Gokhberg and N. I. Krupnik, *Vvedenie v teoriiu odnomernykh singuliarnykh uravnenii* [Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Equations], Shtiintsa, Kishinev, 1973 (in Russian).
15. I. Ts. Gokhberg and I. A. Feldman, *Uravneniia v svertkakh i proektsionnye metody ikh resheniia* [Convolutions Equations and Projection Methods of Their Solution], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
16. V. P. Glushko, "Ob operatorakh tipa potentsiala i nekotorykh teoremakh vlozheniia" [On operators of potential type and certain embedding theorems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **126**, № 3, 467–470 (in Russian).

17. R. V. Duduchava, “O singuliarnykh integralnykh operatorakh v prostranstvakh gelderovykh funktsii s vesom” [On singular integral operators in weighted spaces of Hölder functions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1970, **191**, № 1, 16–19 (in Russian).
18. R. V. Duduchava, “O teoremakh Netera dlia singuliarnykh integralnykh uravnenii v prostranstvakh gelderovskikh funktsii s vesom” [On the Noether theorems for singular integral equations in weighted spaces of Hölder functions], *Proc. Symp. on Contin. Mech. and Related Probl. of Anal., Tbilisi, 1971*, Metsniereba, Tbilisi, 1973, **1**, 89–102 (in Russian).
19. R. V. Duduchava, “Integralnye uravneniia svertki s razryvnymi predsimvolami, singuliarnye integralnye uravneniia s nepodvizhnymi osobennostiami i ikh prilozheniia k zadacham mekhaniki” [Integral convolution equations with discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities, and their applications to problems of mechanics], *Tr. Tbil. matem. in-ta AN GrSSR* [Proc. Tbilisi Math. Inst. Acad. Sci. Georgia SSR], 1979, **60**, 1–135 (in Russian).
20. E. M. Dynkin, “Metody teorii singuliarnykh integralov. I. Preobrazovanie Gilberta i teoriia Kalderona—Zigmunda” [Methods of the theory of singular integrals. I. Hilbert transformation and the Calderon—Zygmund theory], In: *Itogi nauki i tekhniki* [Totals of Science and Technics], VINITI, Moscow, 1987, **15**, 197–292 (in Russian).
21. E. M. Dynkin, “Metody teorii singuliarnykh integralov. II. Teoriia Litlvuda—Peli i ee prilozheniia” [Methods of the theory of singular integrals. II. The Littlewood—Paley theory and its applications], In: *Itogi nauki i tekhniki* [Totals of Science and Technics], VINITI, Moscow, 1989, **42**, 105–198 (in Russian).
22. K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1965.
23. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
24. M. A. Krasnosel’skii, etc., *Integralnye operatory v prostranstve summiruemykh funktsii* [Integral Operators in the Space of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
25. S. G. Krein, *Lineinye uravneniia v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
26. S. G. Krein, Iu. I. Petunin, and E. M. Semenov, *Interpoliatsiia lineinykh operatorov* [Interpolation of Linear Operators], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
27. H. B. Krylov, *Lektsii po ellipticheskim i parabolicheskim uravneniiam v prostranstve Geldera* [Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Space], Nauchnaia kniga, Novosibirsk, 1998 (in Russian).
28. O. A. Ladyzhenskaia and N. N. Uraltseva, *Lineinye i kvazilineinye ellipticheskie uravneniia* [Linear and Quasilinear Elliptic Equations], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
29. B. M. Levitan, *Pochti-periodicheskie funktsii* [Almost Periodic Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1953 (in Russian).
30. S. Lang, *Introduction to Differentiable Manifolds*, Interscience Publishers, New York—London, 1962.
31. G. S. Litvinchuk, *Kraevye zadachi i singuliarnye integralnye uravneniia so sdvigom* [Boundary-Value Problems and Singular Integral Equations with Shift], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
32. V. G. Maz’ya, *Prostranstva S. L. Soboleva* [Sobolev Spaces], LGU, Leningrad, 1985 (in Russian).
33. N. I. Maltsev, *Osnovy lineinoi algebry. 3-e izd* [Essentials of Linear Algebra. 3d ed.], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
34. S. G. Mikhlin, “Singuliarnye integralnye uravneniia” [Singular integral equations], *Usp. mat. nauk.* [Progr. Math. Sci.], 1948, **3**, № 3, 29–112 (in Russian).
35. S. G. Mikhlin, *Mnogomernye singuliarnye integraly i integralnye uravneniia* [Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations], Fizmatgiz, Moscow, 1962 (in Russian).
36. N. I. Muskhelishvili, *Singuliarnye integralnye uravneniia* [Singular Integral Equations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
37. R. Narasimkhan, *Analiz na deistvitelnykh i kompleksnykh mnogoobraziiakh* [Analysis on Real and Complex Manifolds], Mir, Moscow, 1971 (in Russian).
38. S. M. Nikolskii, *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniia* [Approximation of Multivariable Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
39. R. S. Palais, *Seminar po teoreme Ati—Zingera ob indekse* [Seminar on the Atiyah—Singer Index Theorem], Mir, Moscow, 1970 (in Russian).
40. A. Iu. Pirkovskii, *Spektralnaia teoriia i funktsionalnye ischisleniia dlia lineinykh operatorov* [Spectral Theory and Functional Calculi for Linear Operators], MTsNMO, Moscow, 2010 (in Russian).
41. V. A. Polunin and A. P. Soldatov, “Trekhmernyi analog integrala tipa Koshi” [Three-dimensional analog of the Cauchy-type integral], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, № 3, 366–375 (in Russian).

42. S. Prössdorf, *Some Classes of Singular Equations*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—New York—Oxford, 1978.
43. I. I. Privalov, "Integral Cauchy" [The Cauchy integral], *Izv. fiz.-mat. f-ta Saratovskogo un-ta* [Bull. Phys.-Math. Fac. Saratov Univ.], 1918, **11**, № 1, 94–105 (in Russian).
44. I. I. Privalov, *Granichnye svoistva analiticheskikh funktsii. 2-oe izd* [Boundary Properties of Analytic Functions. 2nd ed.], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
45. F. Riesz and B. Szokefalvi-Nagy, *Functional Analysis*, Blackie & Son, London—Glasgow, 1956.
46. U. Rudin, *Funktsionalnyi analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1991 (in Russian).
47. S. L. Sobolev, *Nekotorye primeneniia funktsionalnogo analiza v matematicheskoi fizike. 3-e izd.* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics. 3d ed.], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
48. A. P. Soldatov, "K neterovskoi teorii operatorov. Vinerovskie vlozheniia B-algebr" [To Noether theory of operators. Wiener embeddings of B-algebras], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1978, **14**, № 1, 104–115 (in Russian).
49. A. P. Soldatov, "Kategoriia dvoistvennosti v teorii neterovykh operatorov" [Category of duality in the theory of Noether operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, № 2, 303–309 (in Russian).
50. A. P. Soldatov, "Asimptotika reshenii singuliarnykh integralnykh uravnenii" [Asymptotics of solutions of singular integral equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, № 1, 143–153 (in Russian).
51. A. P. Soldatov, "Asimptotika reshenii kraevykh zadach dlia ellipticheskikh sistem vblizi uglovykh tochek" [Asymptotics of solutions of boundary-value problems for elliptic systems near angular points], *Dokl. AH SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, № 1, 34–36 (in Russian).
52. A. P. Soldatov, "Granichnye svoistva integralov tipa Koshi" [Boundary properties of the Cauchy-type integrals], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, № 1, 131–136 (in Russian).
53. A. P. Soldatov, "Obobshchennyi integral tipa Koshi" [Generalized Cauchy-type integral], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, № 2, 3–8 (in Russian).
54. A. P. Soldatov, *Odnomernye singuliarnye operatory i kraevye zadachi teorii funktsii* [One-Dimensional Singular Operators and Boundary-Value Problems of the Function Theory], Vysshaia shkola, Moscow, 1991 (in Russian).
55. A. P. Soldatov, "Obobshchennyi integral tipa Koshi i singuliarnyi integral v prostranstve Geldera s vesom" [Generalized Cauchy-type integral and singular integral in weighted Hölder space], *Dokl. RAH* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1993, **330**, 164–166 (in Russian).
56. A. P. Soldatov, "Algebra singuliarnykh operatorov s kontsevym simvolom na kusochno-gladkoi krivoi. I. Operatory tipa svertki na poluosi" [Algebra of singular operators with end symbol on a piecewise-smooth curve. I. Convolution-type operators on semiaxis], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, № 9, 1209–1219 (in Russian).
57. A. P. Soldatov, "Algebra singuliarnykh operatorov s kontsevym simvolom na kusochno-gladkoi krivoi. II. Osnovnye postroeniia" [Algebra of singular operators with end symbol on a piecewise-smooth curve. II. Main constructions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, № 6, 825–838 (in Russian).
58. A. P. Soldatov, "Algebra singuliarnykh operatorov s kontsevym simvolom na kusochno-gladkoi krivoi. III. Operatory normalnogo tipa" [Algebra of singular operators with end symbol on a piecewise-smooth curve. III. Normal type operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, № 10, 1364–1376 (in Russian).
59. A. P. Soldatov, "Granichnye svoistva obobshchennykh integralov tipa Koshi s summiruemoi plotnostiu" [Boundary properties of generalized Cauchy-type integrals with summable density], *Dokl. Adygskoi (Cherkesskoi) Mezhd. akad. nauk* [Rep. Adyg (Circassian) Int. Acad. Sci.], 2008, **10**, № 1, 62–66 (in Russian).
60. A. P. Soldatov and A. V. Aleksandrov, "Granichnye svoistva integralov tipa Koshi. L_p-sluchai" [Boundary properties of the Cauchy-type integrals. L_p-case], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, № 1, 3–8 (in Russian).
61. T. A. Soldatova, "Obobshchennye potentsialy dvoinogo sloia" [Generalized double layer potentials], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2009, **6**, 8–17 (in Russian).
62. T. A. Soldatova, "Granichnye svoistva obobshchennykh integralov tipa Koshi v prostranstvakh gladkikh funktsii" [Boundary properties of generalized Cauchy-type integrals in spaces of smooth functions], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. New Ser. Ser. Math. Mech. Inform.], 2011, **11**, № 3(1), 95–109 (in Russian).
63. J. Sochocki, *Ob opredelennykh integralakh i funktsiiakh, upotrebliaemykh pri razlozheniiakh v riady* [On Definite Integrals and Functions Used for Series Expansion], Saint-Petersburg, 1873 (in Russian).

64. E. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
65. E. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971.
66. M. E. Taylor, *Pseudodifferential operators*, Princeton University Press, Princeton, 1981.
67. B. V. Khvedelidze, "Lineinye razryvnye zadachi teorii funktsii, singuliarnye integralnye uravneniia i nekotorye ikh prilozheniia" [Linear discontinuous problems of the theory of functions, singular integral equations, and some their applications], *Tr. Tbil. Mat. In-ta AN GrSSR.* [Proc. Tbilisi Math. Inst. Acad. Sci. Georgia SSR], 1956, **23**, 3–158 (in Russian).
68. L. Hörmander, "Estimates for translation invariant operators in L_p spaces," *Acta Math.*, 1960, **104**, 93–140.
69. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo, 1983.
70. A. P. Calderon, "Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators," *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1977, **74**, № 4, 1324–1327.
71. M. Christ, *Lectures on Singular Integral Operators*, Am. Math. Soc., Providence, 1990.
72. R. V. Duduchava, "On singular integral operators on piecewise smooth lines," In: *Function theoretic methods in differential equations*, 109–131, Pitman, London—San Francisco—Melbourne, 1976.
73. G. Fichera, "Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity," Proc. Int. Conf. *Part. Differ. Equ. Contin. Mech.*, Madison, Wisconsin, 1960, 1961, 55–80.
74. G. Fichera and P. E. Ricci, "The single layer potential approach in the theory of boundary value problems for elliptic equations," In: *Lecture Notes in Math*, **561**, 39–50, Springer, Berlin–N.Y., 1976.
75. G. Giraud, "Équations à intégrales principales; étude suivie d'une application," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér (3)*, 1934, **51**, 251–372.
76. A. Kufner, *Weighted Sobolev Spaces*, Teubner Texte zur Mathematik, Leipzig, 1980.
77. S. G. Mikhlin and S. Prosdorf, *Singular Integral Operators*, Academic-Verlag, Berlin, 1986.
78. J. Plemelj, "Ein Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend," *Mon. Math. Phys.*, 1908, **19**, 205–210.
79. F. Tricomi, "Formula d'inversione dell'ordine di due integrazioni doppie «con asterisco»," *Rend. Accad. d. L. Roma (6)*, 1926, **3**, 535–539.

Alexandre P. Soldatov
National Research University "Belgorod State University"
Department of Differential Equations
85 Pobedy st., 308015 Belgorod, Russia
E-mail: soldatov48@gmail.com