Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 3 (2017). С. 516–541

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-516-541 УДК 517.925.52

ЧАСТИЧНОЕ СОХРАНЕНИЕ ЧАСТОТ И ПОКАЗАТЕЛЕЙ ФЛОКЕ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРОВ В ОБРАТИМОМ КОНТЕКСТЕ 2 ТЕОРИИ КАМ

© 2017 г. **М. Б. СЕВРЮК**

Аннотация. С помощью метода Эрмана изучается сохранение гладких семейств инвариантных торов в обратимом контексте 2 теории КАМ при различных слабых условиях невырожденности. Обратимый контекст 2 — это ситуация, в которой размерность многообразия неподвижных точек обращающей инволюции меньше половины коразмерности рассматриваемого инвариантного тора. Используемые условия невырожденности гарантируют сохранение любых заранее выбранных подмножеств частот невозмущенных торов и их показателей Флоке (собственных чисел матрицы коэффициентов вариационного уравнения вдоль тора).

Светлой памяти Гельмута Рюссмана,
чей вклад в теорию КАМ столь значителен и многогранен

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Обратимые контексты 1 и 2. Положения равновесия, периодические орбиты, инвариантные торы, заполненные квазипериодическими движениями (условно-периодическими движениями с рационально независимыми частотами), и их асимптотические многообразия (в частности, гомоклинические и гетероклинические траектории) являются ключевыми элементами конечномерной динамики. Важность положений равновесия (инвариантных нульмерных торов) и периодических орбит (инвариантных одномерных торов) автономных потоков была осознана еще А. Пуанкаре; в дальнейшем А. А. Андронов и Э. Хопф подчеркивали их значение для теории бифуркаций (см. [4, 32]). Квазипериодические движения с более чем одной базисной частотой изучает теория Колмогорова—Арнольда—Мозера (теория КАМ), основанная в пятидесятых-шестидесятых годах прошлого века (см. [2, 5, 10, 16, 18, 22–24, 26, 35, 38, 59]). Согласно теории КАМ, наличие канторовых семейств инвариантных торов различных размерностей, заполненных квазипериодическими движениями, типично для неинтегрируемых динамических систем. Возможные размерности торов и количество параметров их канторовых семейств (как правило, сами эти семейства образуют сложные иерархические конгломераты) сильно зависят от структур на фазовом пространстве, сохраняемых данной системой.

Например, типичная автономная гамильтонова система с N степенями свободы имеет изолированные положения равновесия, однопараметрические гладкие семейства периодических орбит (параметром является значение энергии) и n-параметрические канторовы семейства изотропных инвариантных n-мерных торов, по которым происходят квазипериодические движения, для каждого $n = 2, \dots, N$ (см. [10, 16, 18, 38]). Существование других типов семейств квазипериодических движений, заполняющих изотропные инвариантные торы, свидетельствует о наличии дополнительных симметрий системы. Между прочим, в типичном однопараметрическом семействе периодических орбит период не является константой и может использоваться в качестве альтернативного параметра.

В теории КАМ рассматриваются различные классы динамических систем, и искомые инвариантные торы могут быть связаны с соответствующими структурами на фазовом пространстве различным образом. Поэтому иногда говорят о тех или иных *контекстах* теории КАМ. Из конечномерных контекстов лучше всего исследованы диссипативный контекст (означающий отсутствие каких-либо специальных структур на фазовом пространстве), контекст, сохраняющий объемы (в котором ищутся инвариантные торы систем, сохраняющих объемы), гамильтонов изотропный контекст (в котором исследуются изотропные инвариантные торы в гамильтоновых системах) и так называемый обратимый контекст 1 (см. [8, 9, 13–17, 36, 41, 44, 45, 55]). В качестве примеров менее изученных контекстов можно привести гамильтонов коизотропный контекст (с коизотропными инвариантными торами) и гамильтонов атропный контекст, где исследуемые инвариантные торы атропны, т. е. не являются ни изотропными, ни коизотропными (библиографию по обоим этим контекстам можно найти в [18]), а также так называемый конформно гамильтонов контекст (см. [19] и приведенную там библиографию). Еще один пример — обратимый контекст 2, которому посвящена настоящая работа. Напомним соответствующие определения и основные факты.

Определение 1.1 (см. [29, 37, 40]). Для любого множества $\mathcal{M}$ отображение $G : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ называется *инволюцией* множества $\mathcal{M}$, если $G^2 = G \circ G$ — тождественное преобразование. Динамическая система называется *обратимой* относительно гладкой инволюции G фазового пространства (или G-обратимой), если эта система инвариантна относительно преобразования $(\mathfrak{p}, t) \mapsto (G\mathfrak{p}, -t)$, где $\mathfrak{p}$ — точка фазового пространства, а t — время (т. е. если G переводит данную систему в систему с обратным направлением течения времени).

В обратимой теории КАМ рассматриваются только торы, инвариантные как относительно самой системы, так и относительно обращающей инволюции.

Лемма 1.1 (см. [15, 16, 40, 48]). *Пусть n-мерный тор $\mathcal{T} \subset \mathcal{M}$ инвариантен относительно G-обратимого потока на $\mathcal{M}$ и относительно соответствующей обращающей инволюции G. Если движение на $\mathcal{T}$ квазипериодично, то на $\mathcal{T}$ можно ввести такую координату $x \in \mathbb{T}^n = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^n$, что динамика на $\mathcal{T}$ примет вид $\dot{x} = \omega$, а ограничение G на $\mathcal{T}$ будет иметь вид $G|_{\mathcal{T}} : x \mapsto -x$. Следовательно, множество неподвижных точек инволюции $G|_{\mathcal{T}}$ состоит из 2^n изолированных точек $(x_1, \dots, x_n)$, где каждая компонента x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, равна либо 0, либо π.*

Множество $\operatorname{Fix} G$ неподвижных точек инволюции $G : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ многообразия $\mathcal{M}$ является подмногообразием $\mathcal{M}$ того же класса гладкости, что и сама G (см. [1, 11, 33]; отметим также, что книги [1, 3, 11, 21] содержат обширную информацию о множествах неподвижных точек инволюций различных многообразий). Однако в условиях леммы 1.1 разные точки множества $\operatorname{Fix}(G|_{\mathcal{T}}) = (\operatorname{Fix} G) \cap \mathcal{T}$ могут принадлежать компонентам связности множества $\operatorname{Fix} G$ разных размерностей (в [8, 36] приводится несколько примеров для случая, когда $n = 1$). Ни одна из этих размерностей не превышает коразмерности $\operatorname{codim} \mathcal{T}$ тора $\mathcal{T}$ в фазовом пространстве, потому что $\dim(\mathcal{T} \cap \operatorname{Fix} G) = 0$.

Определение 1.2 (см. [15, 16]). Пусть в условиях леммы 1.1 все компоненты связности множества $\operatorname{Fix} G$, пересекающие тор $\mathcal{T}$, имеют одну и ту же размерность d_G. Тогда ситуация, в которой справедливы неравенства $\frac{1}{2} c_{\mathcal{T}} \leqslant d_G \leqslant c_{\mathcal{T}}$ (здесь $c_{\mathcal{T}} = \operatorname{codim} \mathcal{T}$), называется *обратимым контекстом* 1. Противоположная ситуация, т. е. ситуация, в которой имеет место неравенство $d_G < \frac{1}{2} c_{\mathcal{T}}$, называется *обратимым контекстом* 2.

Отметим, что для большинства инволюций G, встречающихся на практике, многообразие неподвижных точек $\operatorname{Fix} G$ непусто и все его компоненты связности имеют одну и ту же размерность, так что $\dim \operatorname{Fix} G$ определено корректно (см. [29, 37]).

Принципиальные различия между двумя обратимыми контекстами и особенности обратимого контекста 2 подробно обсуждаются в наших предыдущих работах [47–51]. Здесь мы продемонстрируем эти различия лишь для тривиального случая $n = 0$, когда исследуемые инвариантные торы представляют собой положения равновесия, а их коразмерность равна размерности фазового пространства. Эти положения равновесия должны быть инвариантны относительно обращающей инволюции G, т. е. должны быть неподвижными точками G.

Пример 1.1. Рассмотрим инволюцию $G : (u, v) \mapsto (u, -v)$ пространства $\mathbb{R}^{a+b}$, где $u \in \mathbb{R}^a$ и $v \in \mathbb{R}^b$, так что $\operatorname{Fix} G = \{v = 0\}$ и $\dim \operatorname{Fix} G = a$. Система

$$\dot{u} = U(u, v), \qquad \dot{v} = V(u, v)$$

обратима относительно G тогда и только тогда, когда U нечетно по v, а V четно по v. Мы ищем положения равновесия такой системы на плоскости $\operatorname{Fix} G$, т. е. такие точки $u \in \mathbb{R}^a$, что $U(u, 0) = 0$ и $V(u, 0) = 0$. Поскольку $U(u, 0) \equiv 0$, искомые положения равновесия $(u, 0)$ задаются уравнением $V(u, 0) = 0$.

Здесь обратимый контекст 1 соответствует неравенству $\frac{1}{2}(a+b) \leqslant a$, т. е. $a \geqslant b$. В этом контексте уравнение $V(u, 0) = 0$ в общем случае задает гладкую $(a - b)$-мерную поверхность в $\operatorname{Fix} G$. С другой стороны, в обратимом контексте 2 (т. е. при $a < b$) в общем случае $\operatorname{Fix} G$ не содержит положений равновесия. Чтобы такие положения равновесия существовали, нужно, чтобы система зависела по крайней мере от $b-a$ *внешних параметров*. Для G-обратимой системы $\dot{u} = U(u, v, \mathfrak{w})$, $\dot{v} = V(u, v, \mathfrak{w})$, зависящей от $\mathfrak{c}$-мерного внешнего параметра $\mathfrak{w}$, где $\mathfrak{c} \geqslant b-a$, в общем случае имеем гладкую $(\mathfrak{c}-b+a)$-мерную поверхность положений равновесия, лежащую в произведении плоскости $\operatorname{Fix} G$ и пространства $\mathbb{R}^{\mathfrak{c}}$ значений параметра $\mathfrak{w}$.

Пусть $R \in \mathrm{GL}(a + b, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица с собственным числом 1 кратности a и собственным числом -1 кратности b. Говорят, что матрица $M \in \mathfrak{gl}(a+b, \mathbb{R})$ антикоммутирует с R, или *инфинитезимально обратима* относительно R, если $MR = -RM$. В этом случае для каждого собственного числа λ матрицы M число $-\lambda$ также является собственным, а если еще выполняется и неравенство $b \neq a$, то 0 — собственное число матрицы M кратности $\mathfrak{t} \geqslant |b-a|$ (см. [7,27,40,52]). В общем случае $\mathfrak{t} = |b - a|$.

В рамках примера 1.1 рассмотрим линеаризацию G-обратимой системы в каком-либо положении равновесия, лежащем в $\operatorname{Fix} G$. Если $b \neq a$, то у этой линеаризации есть нулевое собственное число кратности $\mathfrak{t} \geqslant |b - a|$ (в общем случае $\mathfrak{t} = |b - a|$). Ненулевые собственные числа образуют пары $(\lambda, -\lambda)$.

1.2. Невозмущенные системы в обратимом контексте 2. Введем следующие обозначения. Пусть $\mathbb{N}$ — множество положительных целых чисел, а $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. На протяжении всей статьи будем обозначать ℓ_1-норму векторов из $\mathbb{C}^s$ через $|\cdot|$, ℓ_2-норму векторов из $\mathbb{R}^s$ — через $\|\cdot\|$, а скалярное произведение двух векторов из $\mathbb{R}^s$ — через $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Замкнутый s-мерный шар с центром в точке $\mu \in \mathbb{R}^s$ — это множество $B = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{R}^s \mid \|\mathfrak{p} - \mu\| \leqslant \varrho\}$, где $\varrho > 0$. Для $s = 0$ это определение дает $\mu = 0$ и $B = \{0\} = \mathbb{R}^0$. Через $\mathcal{O}_s(\mu)$ будем обозначать произвольную окрестность точки $\mu \in \mathbb{R}^s$. Если $d \in \mathbb{N}$, а $x, y, z, \ldots$ — некоторые переменные, то будем писать $O_d(x, y, z, \ldots)$ вместо $O\big(|x|^d + |y|^d + |z|^d + \cdots\big)$. Вместо $O_1(\cdot)$ будем писать просто $O(\cdot)$.

Для любой матрицы $M \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$ через $\mathbf{0}_m \oplus M$ будем обозначать блочно-диагональную матрицу порядка $(m + N) \times (m + N)$, первый блок которой — нулевая матрица порядка $m \times m$, а второй блок — матрица M. Пространство вещественных матриц размера $n \times N$ будет обозначаться через $\mathbb{R}^{n \times N}$, так что $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$.

Напомним также, что C^1-гладкое отображение $\mathcal{F} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ гладких многообразий называется *субмерсивным* в точке $\mu \in \mathcal{M}$, если $\dim \mathcal{M} \geqslant \dim \mathcal{N}$ и ранг дифференциала отображения $\mathcal{F}$ равен $\dim \mathcal{N}$ в точке μ. В этом случае $\mathcal{F}$ субмерсивно в каждой точке μ' многообразия $\mathcal{M}$, достаточно близкой к μ.

Определение 1.3. Пусть $\mathcal{T}$ — инвариантный n-мерный тор некоторого потока на $(n+N)$-мерном многообразии. Говорят, что этот тор *приводим* (является *тором Флоке*), если в некоторой окрестности $\mathcal{T}$ существует система координат $x \in \mathbb{T}^n$, $\mathcal{X} \in \mathcal{O}_N(0)$, в которой сам тор $\mathcal{T}$ задается уравнением $\mathcal{X} = 0$, а динамическая система принимает *вид Флоке* $\dot{x} = \omega + O(\mathcal{X})$, $\dot{\mathcal{X}} = \Lambda\mathcal{X} + O_2(\mathcal{X})$ с не зависящим от x вектором $\omega \in \mathbb{R}^n$ и не зависящей от x матрицей $\Lambda \in \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$. Вектор ω (он не определен однозначно) называется *вектором частот* тора $\mathcal{T}$, а матрица Λ (она также не определена однозначно) называется *матрицей Флоке* тора $\mathcal{T}$. Ее собственные числа называются *показателями Флоке* тора $\mathcal{T}$, а координаты $(x, \mathcal{X})$ называются *координатами Флоке* для тора $\mathcal{T}$.

Отметим, что показатели Флоке положения равновесия (когда $n = 0$) — это просто собственные числа линеаризации векторного поля в этом положении равновесия.

В подавляющем большинстве работ по теории КАМ все изучаемые инвариантные торы приводимы. В частности, это так во всех статьях по обратимому контексту 2 (см. [47–51]). В действительности канторовы семейства приводимых инвариантных торов в теории КАМ являются *гладкими по Уитни*. Это означает, что, хотя координаты Флоке для торов данного $\mathfrak{s}$-параметрического семейства определены априори в некотором канторовом подмножестве пространства $\mathbb{R}^{\mathfrak{s}}$, эти координаты могут быть продолжены до гладких (скажем, бесконечно дифференцируемых) функций, определенных в открытой области пространства $\mathbb{R}^{\mathfrak{s}}$. Ссылки на основные работы, относящиеся к гладкости по Уитни в теории КАМ, приведены в [16, 18].

Из результатов настоящей работы следует, что ситуация с приводимыми инвариантными торами произвольной размерности n в рамках обратимого контекста 2 более или менее сходна с тривиальным случаем $n = 0$ (см. пример 1.1). А именно, если коразмерность каждого тора в фазовом пространстве равна $a + b$ и $\dim \operatorname{Fix} G = a < b$ (где G — обращающая инволюция), то при $n \geqslant 2$ требуется по крайней мере $b - a + 1$ внешних параметров. Точнее, $b - a$ параметров нужны по тем же причинам, что и при $n = 0$ (ср. предложение 6.1 из раздела 6 ниже), а еще один параметр нужен, чтобы контролировать резонансы, включающие частоты и мнимые части показателей Флоке. У каждого тора есть нулевой показатель Флоке кратности $\mathfrak{t} \geqslant b - a$ (в общем случае $\mathfrak{t} = b - a$). Ненулевые показатели Флоке образуют пары $(\lambda, -\lambda)$. Если количество внешних параметров равно $\mathfrak{c} \geqslant b - a + 1$, то мы получаем $(\mathfrak{c} - b + a)$-параметрическое канторово семейство инвариантных торов, лежащих в произведении фазового пространства и пространства внешних параметров. Подчеркнем, что в четырех «общепринятых» контекстах теории КАМ (в обратимом контексте 1, гамильтоновом изотропном контексте, контексте, сохраняющем объемы, и диссипативном контексте) всегда (за исключением очень особых ситуаций) достаточно одномерного внешнего параметра (см. [9, 15, 16, 41, 44, 45]).

Чтобы построить теорию КАМ для обратимого контекста 2, надо прежде всего выбрать невозмущенные системы, в которых инвариантные торы образуют $(\mathfrak{c} - b + a)$-параметрическое гладкое (а не канторово) семейство. Следуя [50, 51], рассмотрим невозмущенные системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega(\mu) + \Delta(\sigma, \mu) + \xi(y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{z} &= M(\mu) z + \zeta(y, z, \sigma, \mu), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве, $\sigma \in \mathcal{O}_m(0)$ и $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ — внешние параметры ($n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$), M — $(2p \times 2p)$-матричнозначная функция, $\Delta = O(\sigma)$ и, наконец, $\xi = O(y, z)$, $\eta = O_2(y, z)$, $\zeta = O_2(y, z, \sigma)$. Предполагается, что эти системы обратимы относительно инволюции

$$G : (x, y, z) \mapsto (-x, -y, Rz), \tag{1.2}$$

где $R \in \mathrm{GL}(2p, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица с p-кратными собственными числами 1 и -1, причем $M(\mu)R \equiv -RM(\mu)$. Размерность пространства $\{(\sigma, \mu)\}$ внешних параметров равна $m + s$. Системы (1.1) «интегрируемы» в том смысле, что они $\mathbb{T}^n$-эквивариантны, т. е. правая часть систем (1.1) не зависит от угловой переменной x.

Для $\sigma = 0$ и любого значения μ система (1.1) и инволюция (1.2) имеют общий приводимый инвариантный n-мерный тор $\{y = 0, z = 0\}$ с вектором частот $\Omega(\mu) \in \mathbb{R}^n$ и матрицей Флоке $\mathbf{0}_m \oplus M(\mu) \in \mathfrak{gl}(m + 2p, \mathbb{R})$. Коразмерность этого тора в фазовом пространстве равна $m + 2p$, а $\dim \operatorname{Fix} G = p$ (в прежних обозначениях это значит, что $a = p$, $b = m + p > a$ и $\mathfrak{c} = m + s$, так что $\mathfrak{c} - b + a = s$). Параметр σ — это «средство борьбы» со систематическим сдвигом вдоль оси y в G-обратимых возмущениях систем (1.1).

Замечание 1.1. Может возникнуть вопрос, почему уравнение для $\dot{z}$ из (1.1) не содержит слагаемого типа $\Pi(\sigma, \mu)z$, где $\Pi = O(\sigma)$ и $\Pi(\sigma, \mu)R \equiv -R\Pi(\sigma, \mu)$. Ответ простой — такое слагаемое может быть включено в $\zeta(y, z, \sigma, \mu) = O_2(y, z, \sigma)$ (ср. [50, Eqs. (2.2)]).

Замечание 1.2. В рамках так называемого *апостериорного* формата теорем КАМ рассматриваются инвариантные торы в динамических системах, которые не предполагаются почти интегрируемыми ни в каком смысле (см. [26, Ch. 4] и имеющуюся в этой книге библиографию). Насколько известно автору, к обратимым контекстам апостериорный подход еще на применялся.

1.3. Цель настоящей работы. Собственные числа матрицы $M(\mu)$ в (1.1) образуют пары $(\lambda, -\lambda)$ для каждого μ, и в общем случае $\det M(\mu) \neq 0$.

Определение 1.4. Пусть матрица $M \in \mathrm{GL}(2p, \mathbb{R})$ антикоммутирует с инволютивной матрицей порядка $2p \times 2p$, имеющей p-кратные собственные числа 1 и -1. Будем говорить, что спектр матрицы M имеет вид $\mathfrak{M}(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha, \beta)$, где $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \in \mathbb{Z}_+$, $\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 = p$, а $\alpha \in \mathbb{R}^{\nu_1+\nu_3}$ и $\beta \in \mathbb{R}^{\nu_2+\nu_3}$ — векторы с положительными компонентами, если $\det M \neq 0$ и собственные числа матрицы M имеют вид

$$\begin{gathered}\pm\alpha_1, \dots, \pm\alpha_{\nu_1}, \qquad \pm\mathrm{i}\beta_1, \dots, \pm\mathrm{i}\beta_{\nu_2},\\ \pm\alpha_{\nu_1+1} \pm \mathrm{i}\beta_{\nu_2+1}, \dots, \pm\alpha_{\nu_1+\nu_3} \pm \mathrm{i}\beta_{\nu_2+\nu_3}.\end{gathered}$$

Предположим, что для любого $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ матрица $M(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}\big(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha(\mu), \beta(\mu)\big)$, где $\nu_1 + \nu_2 + 2\nu_3 = p$. Для $\sigma = 0$ и любого μ приводимый инвариантный n-мерный тор $\mathcal{T}_\mu = \{y = 0,\ z = 0\}$ системы (1.1) имеет m-кратный нулевой показатель Флоке и $2p$ ненулевых показателей Флоке

$$\begin{gathered}\pm\alpha_j(\mu),\ \ 1 \leqslant j \leqslant \nu_1; \qquad \pm\mathrm{i}\beta_j(\mu),\ \ 1 \leqslant j \leqslant \nu_2;\\ \pm\alpha_{\nu_1+j}(\mu) \pm \mathrm{i}\beta_{\nu_2+j}(\mu),\ \ 1 \leqslant j \leqslant \nu_3.\end{gathered} \tag{1.3}$$

Для невозмущенных систем (1.1) могут быть сформулированы различные теоремы КАМ. Укажем следующие четыре направления исследований.

A) Во-первых, можно доказывать так называемую «теорему-источник» (или теорему типа Брура—Хайтэмы—Такенса), в которой предполагается, что частоты $\Omega_i(\mu)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, и ненулевые показатели Флоке (1.3) невозмущенных торов зависят от μ «наиболее невырожденным» образом, т. е. отображение

$$\mu \mapsto \big(\Omega(\mu), \alpha(\mu), \beta(\mu)\big) \in \mathbb{R}^{n+p} \tag{1.4}$$

субмерсивно. Этот случай рассмотрен в нашей статье [50]. Согласно теореме-источнику, *все* невозмущенные торы $\mathcal{T}_\mu$, частоты и ненулевые показатели Флоке которых удовлетворяют подходящему диофантову условию, сохраняются при малых G-обратимых возмущениях систем (1.1). Соответствующие возмущенные n-мерные торы имеют *те же самые* векторы частот и матрицы Флоке и образуют гладкое по Уитни семейство. Субмерсивность отображения (1.4) аналогична классическому условию невырожденности Колмогорова для невозмущенных лагранжевых инвариантных торов в гамильтоновом изотропном контексте без внешних параметров (см. [10, 18, 23]).

B) Во-вторых, можно рассматривать более слабые условия невырожденности, обеспечивающие лишь *частичное сохранение* частот и ненулевых показателей Флоке невозмущенных торов $\mathcal{T}_\mu$ при малых G-обратимых возмущениях систем (1.1). Это означает, что можно установить такое соответствие между невозмущенными и возмущенными n-мерными торами, что заранее заданное *подмножество* частот $\Omega_i(\mu)$, положительных вещественных частей $\alpha_j(\mu)$ показателей Флоке (1.3) и положительных мнимых частей $\beta_j(\mu)$ показателей Флоке (1.3) невозмущенных торов $\mathcal{T}_\mu$ совпадает с так же заданным подмножеством спектральных характеристик соответствующих возмущенных торов. Теорема о частичном сохранении является предметом настоящей статьи. В предельном случае очень слабых условий невырожденности (условий типа Рюссмана, см. [38, 39]) возмущенные системы по-прежнему имеют гладкое по Уитни семейство приводимых инвариантных n-мерных торов, но нет никакого разумного способа поставить невозмущенные торы в соответствие возмущенным.

C) В-третьих, можно изучать ситуацию, в которой обратимые возмущения систем (1.1) неавтономны и зависят от времени квазипериодически с N базисными частотами. В такой задаче, рассмотренной в нашей статье [51], возмущенные торы в расширенном фазовом пространстве имеют размерность $n + N$.

D) В-четвертых, если $\nu_2 > 0$, то, возможно, есть смысл искать инвариантные $(n + d)$-мерные торы $\mathfrak{V}^{n+d}$ «вокруг» n-мерных торов $\mathcal{T}_\mu$, $d = 1, \dots, \nu_2$, как в самих системах (1.1), так и в их малых G-обратимых возмущениях. Можно говорить о возбуждении эллиптических нормальных мод (т. е. чисто мнимых показателей Флоке $\pm \mathrm{i}\beta_j(\mu)$, $1 \leqslant j \leqslant \nu_2$) невозмущенных торов $\mathcal{T}_\mu$. Эта задача будет рассмотрена в последующих публикациях.

В обратимом контексте 1, гамильтоновом изотропном контексте, контексте, сохраняющем объемы, и диссипативном контексте четыре аналогичные задачи более или менее полно изучены (см. [9, 14–18, 41–45] и приведенную в этих работах библиографию). Соответствующие теоремы-источники доказаны Х. В. Бруром, Г. Б. Хайтемой и Ф. Такенсом в [14, 17] (некоторые обобщения содержатся в статьях [12, 13, 55] группы Брура). Условия невырожденности типа Рюссмана использованы в [15, 16, 18, 41] (см. также исходную формулировку Рюссмана для гамильтонова изотропного контекста в [38]), общие теоремы о частичном сохранении получены в [9, 44], квазипериодические по времени возмущения исследованы в [45], а возбуждение эллиптических нормальных мод рассмотрено в [16, 41–43].

Более того, во всех наших работах [9,15,16,18,41,44,45], посвященных четырем вышеуказанным «общепринятым» контекстам теории КАМ, результаты в задачах типа B) и C) получены как следствия соответствующих теорем-источников (этим и обусловлено название «теорема-источник»). Основная используемая при этом редукционная техника называется *методом Эрмана*. Этот метод специально приспособлен для того, чтобы строить инвариантные торы возмущений интегрируемых или частично интегрируемых систем со слабыми условиями невырожденности. Он был предложен в 1990 г. в докладе М. Р. Эрмана на международной конференции по динамическим системам в Лионе (ср. [60, § 4.6.2]). Результаты типа D) в [16, 41–43] получены в основном как следствия результатов типа B) с самыми слабыми условиями невырожденности (таким образом, их тоже можно в конечном счете считать следствиями теорем-источников). В принципе, возбуждение эллиптических нормальных мод возможно только в контексте, сохраняющем объемы (для торов, коразмерность которых в фазовом пространстве равна 2, см. [43]), в гамильтоновом изотропном контексте (см. [16, 42]) и в обратимом контексте 1 (см. [16, 41]).

Грубо говоря, идея подхода Эрмана заключается в следующем. Вначале, добавляя *новые* внешние параметры, мы добиваемся полного контроля над частотами и показателями Флоке невозмущенных торов (подходящий аналог отображения (1.4) становится субмерсивным). Теперь к новым системам можно применить соответствующую теорему-источник. Тогда, используя гладкость по Уитни семейства возмущенных инвариантных торов, теорему о неявной функции и подходящую лемму из теории чисел о диофантовых приближениях на подмногообразиях евклидовых пространств (иногда еще называемых диофантовыми приближениями зависимых величин), можно «извлечь» информацию об инвариантных торах исходных систем (т. е. систем без дополнительных внешних параметров). Во всей этой процедуре вся громоздкая и трудоемкая «машинерия КАМ» требуется только для доказательства теоремы-источника; для сведения же теорем с вырождениями к теореме-источнику эта техника уже не нужна.

В обратимом контексте 2 мы также использовали метод Эрмана в задаче C) (см. [51]), а в настоящей статье применяем этот подход снова в ситуации B). Таким образом, настоящая работа продолжает сформулированную в [46, 47] программу по переносу результатов, полученных в [9, 14–18, 41–45], на более трудный обратимый контекст 2 без усложнения доказательств.

Замечание 1.3. Частичное сохранение частот (или их отношений) невозмущенных инвариантных торов в гамильтоновом изотропном контексте впервые рассматривалось в [20, 30, 31]. Эти работы не используют никакой редукционной техники эрмановского типа; соответственно, доказательства в [20,30,31], основанные на так называемой квазилинейной бесконечной итерационной схеме, очень сложны.

Замечание 1.4. В задачах типа D) коразмерность торов $\mathfrak{V}^{n+d}$ равна $m+2p-d$. Следовательно, при $\frac{1}{2}(m+2p-d) \leqslant p = \dim \operatorname{Fix} G$, т. е. при $d \geqslant m$, торы $\mathfrak{V}^{n+d}$ относятся к обратимому контексту 1. Таким образом, исследуя возбуждение эллиптических нормальных мод, можно перейти от обратимого контекста 2 к контексту 1 (ср. [49]). Аналогично, изучая разрушение невозмущенных инвариантных торов с резонансными частотами, можно перейти от обратимого контекста 1 к контексту 2 (см. [47, 49, 50]). Действительно, если резонансный инвариантный тор $\mathcal{T}$ G-обратимой системы распадается на конечный набор возмущенных инвариантных торов $\mathfrak{W}_1, \dots, \mathfrak{W}_\mathfrak{l}$ меньшей размерности, то возможна такая ситуация, что $\frac{1}{2}\operatorname{codim}\mathcal{T} \leqslant \dim \operatorname{Fix} G$, но $\frac{1}{2}\operatorname{codim}\mathfrak{W}_i > \dim \operatorname{Fix} G$. Есть основания предполагать, что в обратимом контексте 2 возбуждение эллиптических нормальных мод — гораздо более сложное явление, чем в обратимом контексте 1 (однако было бы наивно надеяться, что в обратимом контексте 2 разрушение резонансных невозмущенных торов изучать легче, чем в обратимом контексте 1). Еще один метод «перехода» от обратимого контекста 1 к контексту 2 развивается в работе [50], доказывающей теорему-источник для обратимого контекста 2. В [50] эта теорема получена (также рассуждениями эрмановского типа) в качестве следствия из основного результата статьи [12], рассматривающей (в рамках обратимого контекста 1) системы с вырожденным нормальным поведением инвариантных торов.

Замечание 1.5. В наших первых трех работах [47–49] по обратимому контексту 2 основным средством доказательств была теория модифицирующих слагаемых Мозера (см. [5, 35]).

Замечание 1.6. Подчеркнем, что на протяжении настоящей статьи слово «диссипативный» означает «не связанный ни с какой структурой на фазовом пространстве». Например, конформно гамильтоновы векторные поля V и конформно симплектические диффеоморфизмы A, интенсивно изучаемые в теории КАМ в последнее время (см. [19] и содержащуюся там библиографию), определяются тождествами $d(i_V\boldsymbol{\omega}^2) \equiv \eta\boldsymbol{\omega}^2$ и $A^*\boldsymbol{\omega}^2 \equiv \pm e^{\eta}\boldsymbol{\omega}^2$ с отличной от нуля постоянной η и поэтому *не* являются диссипативными в этом смысле (здесь $\boldsymbol{\omega}^2$ — симплектическая структура на фазовом пространстве). Однако конформно гамильтоновы системы диссипативны в другом смысле этого слова — их динамика не обладает никакими свойствами, характерными для консервативных систем.

Как и в наших предыдущих работах по «общепринятым» контекстам теории КАМ и обратимому контексту 2, мы рассматриваем только аналитические системы, но наши результаты (теоремы 3.1 и 3.2 ниже), несомненно, могут быть распространены на системы, регулярные по Жевре или просто бесконечно дифференцируемые, и даже на C^r-гладкие системы с конечным (но достаточно большим) r. Аналогично, в приведенных ниже теоремах 3.1, 3.2 и 4.1 утверждается, что семейства аналитических возмущенных инвариантных торов являются C^∞-гладкими в смысле Уитни, но эти семейства заведомо регулярны по Жевре в смысле Уитни (ср. [55]).

План настоящей статьи следующий. В разделе 2 формулируется диофантова лемма (лемма 2.1), которую надо использовать в процедуре Эрмана. Основной результат работы (теорема 3.1) приведен в разделе 3. В разделе 4 дается точная формулировка теоремы-источника для обратимого контекста 2 (теорема 4.1) в нужной нам форме. Доказательство основного результата приведено в разделе 5. Наконец, в разделе 6 дается строгое доказательство того факта, что для наличия инвариантных торов в обратимом контексте 2 требуется много внешних параметров.

2. Диофантова лемма

Определение 2.1 (см. [9, 44, 45, 51]). Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Для $\tau \geqslant 0$, $\gamma > 0$ и $L \in \mathbb{N}$ пара векторов

$$\Omega \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^\nu \tag{2.1}$$

называется *аффинно* (τ, γ, L)*-диофантовой*, если имеет место неравенство

$$\bigl|\langle\Omega, k\rangle + \langle\beta, \ell\rangle\bigr| \geqslant \gamma|k|^{-\tau}$$

для любого $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ и любого $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$, удовлетворяющего неравенству $|\ell| \leqslant L$.

Если $n \in \mathbb{N}$, а пара векторов (2.1) аффинно (τ, γ, L)-диофантова, то, очевидно, вектор $\Omega \in \mathbb{R}^n$ (τ, γ)-диофантов в обычном смысле, так что $\tau \geqslant n-1$. Если $n = 0$, то пара векторов (2.1) аффинно (τ, γ, L)-диофантова для любых τ, γ, L, ν и $\beta \in \mathbb{R}^\nu$ (см. [9]).

Определение 2.2 (см. [9, 44, 45, 51]). Пусть $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Мы будем использовать стандартные обозначения для мультииндексов:

$$q! = q_1! q_2! \cdots q_s!, \quad \mu^q = \mu_1^{q_1}\mu_2^{q_2}\cdots\mu_s^{q_s}, \quad D_\mu^q\Omega = \frac{\partial^{|q|}\Omega}{\partial\mu_1^{q_1}\partial\mu_2^{q_2}\cdots\partial\mu_s^{q_s}},$$

где $q \in \mathbb{Z}_+^s$, $\mu \in \mathbb{R}^s$, а Ω — (векторнозначная) функция, $C^{|q|}$-гладкая по переменной μ. Пусть $\mathfrak{A}$ — открытая область пространства $\mathbb{R}^s$ и $Q \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{N}$. Рассмотрим пару C^Q-гладких отображений $\Omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n$, $\beta : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^\nu$. Для положительных n введем обозначение

$$\rho^Q(\mu) = \min_{\|e\|=1} \max_{J=1}^{Q} J! \max_{\|\mathfrak{u}\|=1} \left| \sum_{|q|=J} \left\langle D_\mu^q \Omega(\mu), e \right\rangle \frac{\mathfrak{u}^q}{q!} \right|$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$, $e \in \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{u} \in \mathbb{R}^s$) при $\mu \in \mathfrak{A}$. Для положительных ν введем обозначение

$$\kappa_\ell^Q(\mu) = \max_{J=1}^{Q} J! \max_{\|\mathfrak{u}\|=1} \left| \sum_{|q|=J} \left\langle D_\mu^q \beta(\mu), \ell \right\rangle \frac{\mathfrak{u}^q}{q!} \right|$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$, $\mathfrak{u} \in \mathbb{R}^s$) при $\mu \in \mathfrak{A}$, $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$. Пара отображений Ω, β называется *аффинно* (Q, L)-*невырожденной* в точке $\mu \in \mathfrak{A}$, если выполняется одно из следующих четырех условий.

1) $n > 0$, $\nu > 0$, $\rho^Q(\mu) > 0$ и

$$\max_{1 \leqslant |q| \leqslant Q} \left| \left\langle D_\mu^q \Omega(\mu), k \right\rangle + \left\langle D_\mu^q \beta(\mu), \ell \right\rangle \right| > 0$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$) для всех $k \in \mathbb{Z}^n$ и $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant |\ell| \leqslant L$ и $\|k\| \leqslant \kappa_\ell^Q(\mu)/\rho^Q(\mu)$.
2) $n > 0$, $\nu = 0$ и $\rho^Q(\mu) > 0$.
3) $n = 0$, $\nu > 0$ и $\kappa_\ell^Q(\mu) > 0$ для всех $\ell \in \mathbb{Z}^\nu$, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant |\ell| \leqslant L$.
4) $n = \nu = 0$.

Отметим, что для любой (векторнозначной) C^J-гладкой функции H, определенной на $\mathfrak{A} \subset \mathbb{R}^s$ ($J \in \mathbb{Z}_+$), и любых $\mu \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{u} \in \mathbb{R}^s$ справедливо равенство

$$J! \sum_{|q|=J} D_\mu^q H(\mu) \frac{\mathfrak{u}^q}{q!} = \frac{d^J}{dt^J} H(\mu + t\mathfrak{u}) \Big|_{t=0}$$

($q \in \mathbb{Z}_+^s$). Неравенство $\rho^Q(\mu) > 0$ (при $n > 0$) означает, что пространство $\mathbb{R}^n$ натянуто на набор всех $\binom{s+Q}{s} - 1$ частных производных всех порядков от 1 до Q отображения Ω, взятых в точке μ, т. е. линейная оболочка этих производных есть $\mathbb{R}^n$ (свойство типа Рюссмана, см. [38]). Неравенство $\kappa_\ell^Q(\mu) > 0$ (при $\nu > 0$ для некоторого ℓ из $\mathbb{Z}^\nu \setminus \{0\}$) означает, что хотя бы одна из $\binom{s+Q}{s} - 1$ частных производных порядков от 1 до Q отображения β, взятая в точке μ, не ортогональна ℓ. Нетрудно убедиться, что, если пара отображений Ω, β аффинно (Q, L)-невырождена в точке $\mu \in \mathfrak{A}$, то она аффинно (Q, L)-невырождена в любой достаточно близкой к μ точке $\mu' \in \mathfrak{A}$.

Лемма 2.1 (см. [9]). *Пусть $s \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, $Q \in \mathbb{N}$ и $L \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — открытая область пространства $\mathbb{R}^s$, A — подмножество области $\mathfrak{A}$, диффеоморфное замкнутому s-мерному шару, а B — произвольное компактное метрическое пространство. Предположим, что отображения*

$$\Omega : \mathfrak{A} \times B \to \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \beta : \mathfrak{A} \times B \to \mathbb{R}^\nu$$

являются C^Q-гладкими по $a \in \mathfrak{A}$ и, кроме того, все частные производные любого порядка от 1 до Q функций Ω и β по переменным $a_1, \ldots, a_s$ непрерывны по совокупности аргументов $(a, b) \in \mathfrak{A} \times B$ (а не только по $a \in \mathfrak{A}$). Пусть пара отображений

$$a \mapsto \Omega(a, b) \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad a \mapsto \beta(a, b) \in \mathbb{R}^\nu \tag{2.2}$$

аффинно (Q, L)-невырождена в каждой точке $a \in A$ для любого фиксированного значения $b \in B$. Тогда

(1) *существует такое положительное число δ и*
(2) *для любых $n^{\mathrm{add}} \in \mathbb{Z}_+$, $\nu^{\mathrm{add}} \in \mathbb{Z}_+$, любого τ_*, удовлетворяющего неравенству $\tau_* \geqslant \max(0, n^{\mathrm{add}} - 1)$, любого положительного γ_*, любого ε из интервала $(0, 1)$ и любого τ,*

удовлетворяющего неравенствам $\tau > (n + n^{\mathrm{add}})Q$ и $\tau \geqslant \tau_*$, существует такое положительное число $\gamma = \gamma_0(\varepsilon, \tau, \gamma_*)$, что справедливо следующее утверждение. Пусть отображения

$$\widetilde{\Omega} : \mathfrak{A} \times B \to \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta} : \mathfrak{A} \times B \to \mathbb{R}^\nu$$

являются C^Q-гладкими по $a \in \mathfrak{A}$ и всюду в $\mathfrak{A} \times B$ все частные производные любого порядка от 1 до Q каждой компоненты разностей $\widetilde{\Omega} - \Omega$ и $\widetilde{\beta} - \beta$ по переменным $a_1, \dots, a_s$ по абсолютной величине меньше, чем δ. Пусть

$$\Omega^{\mathrm{add}} : B \to \mathbb{R}^{n^{\mathrm{add}}} \quad \text{и} \quad \beta^{\mathrm{add}} : B \to \mathbb{R}^{\nu^{\mathrm{add}}} \tag{2.3}$$

— произвольные отображения. Тогда для любого элемента $b \in B$, для которого пара векторов $\Omega^{\mathrm{add}}(b)$, $\beta^{\mathrm{add}}(b)$ аффинно (τ_*, γ_*, L)-диофантова, мера Лебега множества тех точек $a \in A$, для которых пара векторов

$$\left(\widetilde{\Omega}(a, b), \Omega^{\mathrm{add}}(b)\right) \in \mathbb{R}^{n+n^{\mathrm{add}}}, \quad \left(\widetilde{\beta}(a, b), \beta^{\mathrm{add}}(b)\right) \in \mathbb{R}^{\nu+\nu^{\mathrm{add}}}$$

аффинно (τ, γ, L)-диофантова, превосходит величину $(1 - \varepsilon) \operatorname{meas}_s A$.

Здесь и далее meas_s обозначает меру Лебега в $\mathbb{R}^s$. Некоторые частные случаи леммы 2.1 сформулированы в [44, 45, 51].

Пример 2.1. В лемме 2.1 компактность B существенна. Например, предположим, что $n \in \mathbb{N}$, а пара C^Q-гладких отображений

$$\Omega_0 : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \beta_0 : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}^\nu \tag{2.4}$$

аффинно (Q, L)-невырождена в каждой точке $a \in A$. Пусть $B = [1, +\infty)$ и $\Omega(a, b) = \Omega_0(a)/b$, $\beta(a, b) = \beta_0(a)/b$. Пара отображений (2.2) аффинно (Q, L)-невырождена в каждой точке $a \in A$ для любого фиксированного значения $b \in B$. Кроме того, предположим, что всюду в $\mathfrak{A}$ все частные производные любого порядка от 1 до Q каждой компоненты функций (2.4) по абсолютной величине не превосходят некоторого числа $\mathfrak{D} < +\infty$. Для любого $\delta > 0$ положим $c_1 = \max(\mathfrak{D}/\delta, 1)$ и выберем произвольное число $c_2 > c_1$. Рассмотрим произвольную функцию $\vartheta : B \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую равенству $\vartheta(b) = 1$ при $1 \leqslant b \leqslant c_1$, неравенству $0 < \vartheta(b) < 1$ при $c_1 < b < c_2$ и равенству $\vartheta(b) = 0$ при $b \geqslant c_2$ (такую функцию можно выбрать даже C^∞-гладкой, но здесь в этом нет необходимости). Положим

$$\widetilde{\Omega}(a, b) = \vartheta(b)\Omega(a, b) = \vartheta(b)\Omega_0(a)/b \quad \text{и} \quad \widetilde{\beta}(a, b) = \vartheta(b)\beta(a, b) = \vartheta(b)\beta_0(a)/b. \tag{2.5}$$

Поскольку

$$\frac{\mathfrak{D}\bigl(1 - \vartheta(b)\bigr)}{b} < \delta$$

для любого $b \in B$, всюду в $\mathfrak{A} \times B$ все частные производные любого порядка от 1 до Q каждой компоненты разностей $\widetilde{\Omega} - \Omega$ и $\widetilde{\beta} - \beta$ по переменной a по абсолютной величине меньше, чем δ. Теперь положим $n^{\mathrm{add}} = \nu^{\mathrm{add}} = 0$, т. е. рассмотрим случай, когда отображения (2.3) отсутствуют. Какие бы числа $\varepsilon \in (0, 1)$, $\tau > nQ$ и $\gamma > 0$ ни взять, *нельзя* утверждать, что для любого $b \in B$ мера Лебега множества $\mathcal{A}_b$, состоящего из тех точек $a \in A$, для которых пара векторов (2.5) аффинно (τ, γ, L)-диофантова, превосходит величину $(1 - \varepsilon) \operatorname{meas}_s A$. Действительно, $\mathcal{A}_b$ пусто при $b \geqslant c_2$, потому что при таких b оба вектора (2.5) равны нулю для каждого a.

3. Основной результат

В разделах 3 и 4 мы будем иногда писать $\{0 \in \mathbb{R}^s\}$ вместо $\{0\}$ для $0 \in \mathbb{R}^s$.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{N}$. Рассмотрим аналитическое $(m + s)$-параметрическое семейство аналитических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Omega(\mu) + \Delta(\sigma, \mu) + \xi(y, z, \sigma, \mu) + f(x, y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y, z, \sigma, \mu) + g(x, y, z, \sigma, \mu), \\ \dot{z} &= M(\mu)z + \zeta(y, z, \sigma, \mu) + h(x, y, z, \sigma, \mu), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве, $\sigma \in \mathcal{O}_m(0)$ и $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ — внешние параметры, M — $(2p \times 2p)$-матричнозначная функция, $\Delta = O(\sigma)$ и, наконец, $\xi =$

$O(y,z)$, $\eta = O_2(y,z)$, $\zeta = O_2(y,z,\sigma)$. Предполагается, что функции Ω, M, Δ, ξ, η, ζ фиксированы, а слагаемые f, g, h — малые возмущения (ср. (1.1)). Пусть системы (3.1) обратимы относительно инволюции (1.2) фазового пространства, где $R \in \mathrm{GL}(2p,\mathbb{R})$ — инволютивная матрица с p-кратными собственными числами 1 и -1, причем $M(\mu)R \equiv -RM(\mu)$, а $M(0)$ имеет простой спектр. Можно считать, что спектр матрицы $M(\mu)$ прост для каждого μ и имеет вид $\mathfrak{M}\bigl(\nu_1,\nu_2,\nu_3;\alpha(\mu),\beta(\mu)\bigr)$, где $\nu_1+\nu_2+2\nu_3 = p$ (см. определение 1.4). Введем обозначение $\nu = \nu_2+\nu_3 \in \mathbb{Z}_+$.

Выберем произвольные (возможно, пустые) подмножества индексов

$$\mathfrak{S}_1 \subset \{1;2;\ldots;n\}, \quad \mathfrak{S}_2 \subset \{1;2;\ldots;\nu_1+\nu_3\}, \quad \mathfrak{S}_3 \subset \{1;2;\ldots;\nu\},$$
$$\mathfrak{T} \subset \{1;2;\ldots;s\},$$

удовлетворяющие условию

$$0 \leqslant \#\mathfrak{S}_1 + \#\mathfrak{S}_2 + \#\mathfrak{S}_3 = \#\mathfrak{T} \leqslant \min(n+p, s-1).$$

Здесь и далее $\#$ обозначает количество элементов конечного множества. Нас интересует сохранение частот Ω_i (невозмущенных инвариантных торов $\mathcal{T}_\mu = \{y=0,\ z=0\}$ при $\sigma = 0$) с $i \in \mathfrak{S}_1$, вещественных частей α_j показателей Флоке с $j \in \mathfrak{S}_2$ и мнимых частей β_j показателей Флоке с $j \in \mathfrak{S}_3$. Мы будем писать

$$\begin{aligned}
\Omega_+ &= (\Omega_i \mid i \in \mathfrak{S}_1), \quad \Omega_- = (\Omega_i \mid i \notin \mathfrak{S}_1),\\
\alpha_+ &= (\alpha_j \mid j \in \mathfrak{S}_2), \quad \alpha_- = (\alpha_j \mid j \notin \mathfrak{S}_2),\\
\beta_+ &= (\beta_j \mid j \in \mathfrak{S}_3), \quad \beta_- = (\beta_j \mid j \notin \mathfrak{S}_3),\\
\mu_+ &= (\mu_l \mid l \in \mathfrak{T}), \quad \mu_- = (\mu_l \mid l \notin \mathfrak{T}).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Подобная запись будет ниже использоваться (без специального упоминания) и для векторных величин, обозначаемых буквами Ω, α, β, μ с верхними индексами или диакритическими знаками. Положим

$$\#\mathfrak{S}_1 = d_1, \quad \#\mathfrak{S}_2 = d_2, \quad \#\mathfrak{S}_3 = d_3, \qquad d_1+d_2+d_3 = d = \#\mathfrak{T}.$$

Тогда

$$\begin{gathered}
0 \leqslant d_1 \leqslant n, \quad 0 \leqslant d_2 \leqslant \nu_1+\nu_3, \quad 0 \leqslant d_3 \leqslant \nu,\\
0 \leqslant d \leqslant \min(n+p, s-1).
\end{gathered} \tag{3.3}$$

Для любого вектора $b \in \mathbb{R}^d$ мы будем писать

$$b^{:1} = (b_1,\ldots,b_{d_1}) \in \mathbb{R}^{d_1}, \quad b^{:2} = (b_{d_1+1},\ldots,b_{d_1+d_2}) \in \mathbb{R}^{d_2}, \quad b^{:3} = (b_{d_1+d_2+1},\ldots,b_d) \in \mathbb{R}^{d_3}.$$

Мы будем также использовать обозначение

$$\mathfrak{P}_0 = \bigl(\Omega_+(0),\alpha_+(0),\beta_+(0)\bigr) \in \mathbb{R}^d.$$

Теорема 3.1. *Предположим, что либо $d = 0$, либо $d > 0$, и якобиан*

$$\frac{\partial(\Omega_+,\alpha_+,\beta_+)}{\partial\mu_+} \tag{3.4}$$

порядка d не обращается в нуль при $\mu = 0$. Отсюда, в частности, следует, что $(\Omega_+,\alpha_+,\beta_+)$ может быть использовано как часть новой системы координат в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^s$. Другими словами, в окрестности точки $\mu = 0$ существует такая аналитическая замена координат $\mu = \mu(a,b)$, что

$$a \in \mathcal{O}_{s-d}(0), \quad b \in \mathcal{O}_d(\mathfrak{P}_0), \qquad \mu(0,\mathfrak{P}_0) = 0$$

и

$$(\Omega_+,\alpha_+,\beta_+)\big|_{\mu=\mu(a,b)} \equiv b,$$

точнее,

$$\Omega_+\bigl(\mu(a,b)\bigr) \equiv b^{:1}, \quad \alpha_+\bigl(\mu(a,b)\bigr) \equiv b^{:2}, \quad \beta_+\bigl(\mu(a,b)\bigr) \equiv b^{:3}. \tag{3.5}$$

Предположим также, что замена координат $\mu = \mu(a,b)$, обладающая этим свойством, может быть выбрана так, что пара отображений

$$a \mapsto \Omega_-\bigl(\mu(a,0)\bigr) \in \mathbb{R}^{n-d_1} \quad \text{и} \quad a \mapsto \beta_-\bigl(\mu(a,0)\bigr) \in \mathbb{R}^{\nu-d_3} \tag{3.6}$$

аффинно $(Q, 2)$*-невырождена в точке* $a = 0$ *для некоторого числа* $Q \in \mathbb{N}$ (*см. определение* 2.2).

Тогда существуют такой замкнутый $(s-d)$*-мерный шар* $A \subset \mathbb{R}^{s-d}$ *с центром в начале координат и такой замкнутый* d*-мерный шар* $B \subset \mathbb{R}^d$ *с центром в точке* $\mathfrak{P}_0$, *что выполнено следующее. Положим*

$$\Gamma = \bigl\{\mu(a,b) \bigm| a \in A,\, b \in B\bigr\} \subset \mathbb{R}^s \tag{3.7}$$

$(0 \in \Gamma)$. *Тогда для любой комплексной окрестности*

$$\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^n \times \mathbb{C}^{2m+2p+s} \tag{3.8}$$

множества

$$\mathbb{T}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \{0 \in \mathbb{R}^{2p}\} \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \Gamma, \tag{3.9}$$

любого $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$, *любого положительного* ε_1, *любых* ε_2, ε_3 *из интервала* $(0,1)$, *любого* τ_*, *удовлетворяющего неравенству* $\tau_* \geqslant \max(0, d_1 - 1)$, *любого положительного* γ_* *и любого* τ, *удовлетворяющего неравенствам* $\tau > nQ$ *и* $\tau \geqslant \tau_*$, *существуют числа* $\delta > 0$ *и* $\gamma \in (0, \gamma_*]$, *обладающие следующими свойствами.*

Предположим, что возмущающие слагаемые f, g, h *в* (3.1) *могут быть голоморфно продолжены в окрестность* $\mathcal{C}$ *и* $|f| < \delta$, $|g| < \delta$, $|h| < \delta$ *в* $\mathcal{C}$. *Рассмотрим такой замкнутый* $(s-d)$*-мерный шар* $\widetilde{A} \subset A$ *с центром в начале координат и такой замкнутый* d*-мерный шар* $\widetilde{B} \subset B$ *с центром в точке* $\mathfrak{P}_0$, *что*

$$\operatorname{meas}_{s-d} \widetilde{A} = (1-\varepsilon_3) \operatorname{meas}_{s-d} A, \quad \operatorname{meas}_d \widetilde{B} = (1-\varepsilon_3) \operatorname{meas}_d B, \tag{3.10}$$

и положим

$$\widetilde{\Gamma} = \Bigl\{\mu(a,b) \Bigm| a \in \widetilde{A},\, b \in \widetilde{B}\Bigr\} \subset \Gamma \tag{3.11}$$

$(0 \in \widetilde{\Gamma})$. *Тогда существуют такие функции*

$$\begin{gathered}\Theta : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^m, \quad \Xi : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^s,\\ \widetilde{\Omega} : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{M} : \widetilde{\Gamma} \to \mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})\end{gathered} \tag{3.12}$$

и такая замена переменных

$$\begin{aligned}x &= \overline{x} + X(\overline{x}, \mu),\\ y &= \overline{y} + Y^0(\overline{x}, \mu) + Y^1(\overline{x}, \mu)\overline{y} + Y^2(\overline{x}, \mu)\overline{z},\\ z &= \overline{z} + Z^0(\overline{x}, \mu) + Z^1(\overline{x}, \mu)\overline{y} + Z^2(\overline{x}, \mu)\overline{z}\end{aligned} \tag{3.13}$$

(*для каждого* $\mu \in \widetilde{\Gamma}$), *где* $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$, $\overline{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\overline{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, *что справедливы следующие утверждения.*

i) *Функции* (3.12) *являются* C^∞*-гладкими, и всюду в* $\widetilde{\Gamma}$ *все частные производные всех порядков от* 0 *до* $\mathcal{L}$ *каждой компоненты функций* Θ, Ξ, $\widetilde{\Omega} - \Omega$, $\widetilde{M} - M$ *по абсолютной величине меньше, чем* ε_1. *Если* $d = 0$, *то* $\Xi \equiv 0$. *Коэффициенты* X, Y^0, Y^1, Y^2, Z^0, Z^1, Z^2 *в* (3.13) *являются отображениями со значениями в* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{m\times 2p}$, $\mathbb{R}^{2p}$, $\mathbb{R}^{2p\times m}$, $\mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})$ *соответственно. Эти отображения аналитические по* $\overline{x}$ *и* C^∞*-гладкие по* μ. *Всюду в* $\mathbb{T}^n \times \widetilde{\Gamma}$ *все частные производные всех порядков от* 0 *до* $\mathcal{L}$ *каждой компоненты этих отображений по абсолютной величине меньше, чем* ε_1.

ii) *Для каждого* $\mu \in \widetilde{\Gamma}$ *замена переменных* (3.13) *коммутирует с инволюцией* (1.2) *в том смысле, что в новых переменных* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ *инволюция* G *принимает вид*

$$G : (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \mapsto (-\overline{x}, -\overline{y}, R\overline{z}).$$

Имеет место тождество $\widetilde{M}(\mu)R \equiv -R\widetilde{M}(\mu)$.

iii) *Для каждого* $\mu \in \widetilde{\Gamma}$ *матрица* $\widetilde{M}(\mu)$ *имеет простой спектр вида* $\mathfrak{M}\Bigl(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \widetilde{\alpha}(\mu), \widetilde{\beta}(\mu)\Bigr)$ (*см. определение* 1.4), *и в* $\widetilde{\Gamma}$ *выполняются тождества*

$$\widetilde{\Omega}_+ \equiv \Omega_+, \quad \widetilde{\alpha}_+ \equiv \alpha_+, \quad \widetilde{\beta}_+ \equiv \beta_+. \tag{3.14}$$

iv) *Для любой точки* $b \in \widetilde{B}$, *для которой пара векторов* $b^{:1} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^{:3} \in \mathbb{R}^{d_3}$ *аффинно* $(\tau_*, \gamma_*, 2)$-*диофантова* (*см. определение* 2.1), *существует множество* $\mathcal{G}_b \subset \widetilde{A}$, *удовлетворяющее следующим условиям.*
   (a) $\mathrm{meas}_{s-d}\, \mathcal{G}_b > (1-\varepsilon_2)\, \mathrm{meas}_{s-d}\, \widetilde{A}$.
   (b) *Для любой точки* $a \in \mathcal{G}_b$ *пара векторов* $\widetilde{\Omega}(\mu^0) \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\beta}(\mu^0) \in \mathbb{R}^\nu$ *аффинно* $(\tau, \gamma, 2)$-*диофантова, где* $\mu^0 = \mu(a, b)$.
   (c) *Для любой точки* $a \in \mathcal{G}_b$ *возмущенная система* (3.1) *с* $\mu = \mu^0 + \Xi(\mu^0)$ *и* $\sigma = \Theta(\mu^0)$ *после замены координат* (3.13) *с* $\mu = \mu^0$ *принимает вид*

$$\dot{\overline{x}} = \widetilde{\Omega}(\mu^0) + O(\overline{y}, \overline{z}), \quad \dot{\overline{y}} = O_2(\overline{y}, \overline{z}), \quad \dot{\overline{z}} = \widetilde{M}(\mu^0)\overline{z} + O_2(\overline{y}, \overline{z}). \tag{3.15}$$

Замечание 3.1. Легко показать, что при $d_1 \in \mathbb{N}$ мера Лебега meas_d множества тех точек $b \in \widetilde{B}$, для которых пара векторов $b^{:1} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^{:3} \in \mathbb{R}^{d_3}$ *не* является аффинно $(\tau_*, \gamma_*, 2)$-диофантовой, для любого фиксированного $\tau_* > d_1 - 1$ стремится к 0 при $\gamma_* \to 0$. Если $d_1 = 0$, то это множество пусто при любых $\tau_* \geqslant 0$ и $\gamma_* > 0$.

Итак, рассмотрим произвольную точку $\mu^\star = \mu(a^\star, b^\star)$ из $\widetilde{\Gamma}$, для которой пара векторов $b^{\star:1} = \Omega_+(\mu^\star) \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^{\star:3} = \beta_+(\mu^\star) \in \mathbb{R}^{d_3}$ аффинно $(\tau_*, \gamma_*, 2)$-диофантова (см. (3.5)). Невозмущенные инвариантные n-мерные торы $\mathcal{T}_\mu$, $\mu \in \Gamma$, для которых

$$\Omega_+(\mu) = \Omega_+(\mu^\star), \quad \alpha_+(\mu) = \alpha_+(\mu^\star), \quad \beta_+(\mu) = \beta_+(\mu^\star), \tag{3.16}$$

образуют $(s-d)$-параметрическое гладкое семейство: равенства (3.16) равносильны существованию такого $a \in A$, что $\mu = \mu(a, b^\star)$. Теперь выберем любое $a \in \mathcal{G}_{b^\star}$ и обозначим $\mu(a, b^\star)$ через μ^0. Возмущенная система (3.1) со *сдвинутыми* значениями параметров $\mu = \mu^0 + \Xi(\mu^0)$, $\sigma = \Theta(\mu^0)$ и инволюция (1.2) имеют общий приводимый инвариантный n-мерный тор $\{\overline{y} = 0,\ \overline{z} = 0\}$ с вектором частот $\widetilde{\Omega}(\mu^0)$ и матрицей Флоке $\mathbf{0}_m \oplus \widetilde{M}(\mu^0)$ (см. (3.15)). Согласно (3.14) и (3.16), частоты $\widetilde{\Omega}_i(\mu^0)$ этого тора, положительные вещественные части $\widetilde{\alpha}_j(\mu^0)$ и положительные мнимые части $\widetilde{\beta}_j(\mu^0)$ его показателей Флоке удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}_+(\mu^0) &= \Omega_+(\mu^0) = \Omega_+(\mu^\star), \\
\widetilde{\alpha}_+(\mu^0) &= \alpha_+(\mu^0) = \alpha_+(\mu^\star), \\
\widetilde{\beta}_+(\mu^0) &= \beta_+(\mu^0) = \beta_+(\mu^\star).
\end{aligned}$$

Все эти возмущенные торы образуют $(s-d)$-параметрическое канторово семейство (параметром является точка $a \in \mathcal{G}_{b^\star}$). Тор $\{\overline{y} = 0,\ \overline{z} = 0\}$ аналитичен и зависит от $(a, b^\star)$ бесконечно дифференцируемым образом в смысле Уитни.

Такое частичное сохранение частот, а также вещественных и мнимых частей показателей Флоке невозмущенных торов $\mathcal{T}_\mu$ обеспечено по существу двумя условиями невырожденности: условием типа Брура—Хайтемы—Такенса (см. [14, 17]), наложенным на компоненты Ω_+, α_+, β_+, подлежащие сохранению (якобиан (3.4) не обращается в нуль для $\mu \in \mathbb{R}^s$ в окрестности 0), и условием типа Рюссмана (см. [38]), наложенным на компоненты Ω_-, β_- (пара отображений (3.6) аффинно $(Q, 2)$-невырождена для $a \in \mathbb{R}^{s-d}$ в окрестности 0). Второе условие требует положительности $s-d$, поэтому в теореме 3.1 мы предполагаем, что $d \leqslant s-1$, хотя ограничение $d \leqslant \min(n+p, s)$ в (3.3) может показаться более «естественным», чем ограничение $d \leqslant \min(n+p, s-1)$.

В преобразовании координат (3.13) слагаемые X, Y^0 и Z^0 отвечают за инвариантность тора $\{\overline{y} = 0,\ \overline{z} = 0\}$, а слагаемые $Y^1\overline{y}$, $Y^2\overline{z}$, $Z^1\overline{y}$ и $Z^2\overline{z}$ — за его приводимость, т. е. за вариационное уравнение вдоль $\{\overline{y} = 0,\ \overline{z} = 0\}$ (см. подробности в [51]).

Замечание 3.2. Векторы частот невозмущенных инвариантных торов $\mathcal{T}_\mu = \{y = 0,\ z = 0\}$ систем (1.1) суть $\Omega(\mu)$, и в общем случае некоторые из этих торов резонансны, а некоторые — нет. Теорема 3.1 (даже при $d = 0$) показывает, что малые типичные G-обратимые возмущения этих систем сохраняют семейство торов $\mathcal{T}_\mu$, но делают его канторовым (для $n \geqslant 2$ — при умеренных условиях невырожденности). Таким образом, обратимый контекст 2 подпадает под эвристический принцип, сформулированный в [15, Sec. 2] и [16, § 1.4.1].

В четырех «общепринятых» контекстах теории КАМ (в обратимом контексте 1, гамильтоновом изотропном контексте, контексте, сохраняющем объемы, и диссипативном контексте) мы имели следующую картину (см. [9, 15, 16, 41, 44]): если дифференциальные уравнения зависят от $\mathfrak{c}$ внешних параметров, а приводимые инвариантные торы образуют $\mathfrak{s}$-параметрическое канторово семейство в произведении фазового пространства и пространства внешних параметров, то всегда $\mathfrak{s} \geqslant \mathfrak{c}$ и любой тор имеет $\mathfrak{s}-\mathfrak{c}$ нулевых показателей Флоке (если $\mathfrak{s} = \mathfrak{c}$, то $\mathfrak{c}$ должно быть не меньше, чем 1). В обратимом контексте 2, наоборот, справедливо неравенство $\mathfrak{c} > \mathfrak{s}$ и любой тор имеет $\mathfrak{c}-\mathfrak{s}$ нулевых показателей Флоке. Действительно, в рамках теоремы 3.1 $\mathfrak{c} = m + s$, $\mathfrak{s} = s$ и любой тор имеет нулевой показатель Флоке кратности m. Во всех пяти контекстах каждый возмущенный тор имеет $|\mathfrak{s} - \mathfrak{c}|$ нулевых показателей Флоке.

Замечание 3.3. Для гамильтонова изотропного контекста и обратимого контекста 1 есть результаты о сохранении частот, в которых условие невырожденности формулируется не в терминах ранга некоторой матрицы типа Якоби, а в терминах топологической степени Брауэра. Для обратимых систем такие результаты получены в работах [28, 56–58]. Что же касается гамильтоновых систем, мы ограничимся статьями [59, 61] (см. также имеющуюся там библиографию). В работах [28, 56, 58, 61] применяется подход Эрмана. В [25] представлен обзор некоторых наборов условий невырожденности для гамильтонова изотропного контекста и обратимого контекста 1.

Если $d = 0$, то теорема 3.1 не гарантирует сохранения ни одной из частот и ни одного из показателей Флоке невозмущенных торов (это — ситуация типа Рюссмана, см. [38, 39]). Простейший случай, когда $d = 0$ и $p = 0$, исследован в [50, Sec. 5]. Поскольку случай нулевого d очень важен, мы представим его в виде отдельной теоремы. Снова рассмотрим систему (3.1) дифференциальных уравнений.

Теорема 3.2. *Пусть пара отображений*

$$\mu \mapsto \Omega(\mu) \in \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad \mu \mapsto \beta(\mu) \in \mathbb{R}^\nu$$

аффинно $(Q, 2)$*-невырождена в точке* $\mu = 0$ *для некоторого числа* $Q \in \mathbb{N}$ (*см. определение* 2.2). *Тогда существует такой замкнутый* s*-мерный шар* $\Gamma \subset \mathbb{R}^s$ *с центром в начале координат, что для любой комплексной окрестности* (3.8) *множества* (3.9)*, любого* $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$*, любого положительного* ε_1*, любых* ε_2*,* ε_3 *из интервала* $(0, 1)$ *и любого* $\tau > nQ$ *существуют положительные числа* δ *и* γ*, обладающие следующими свойствами.*

Предположим, что возмущающие слагаемые f*,* g*,* h *в* (3.1) *могут быть голоморфно продолжены в окрестность* $\mathcal{C}$ *и* $|f| < \delta$*,* $|g| < \delta$*,* $|h| < \delta$ *в* $\mathcal{C}$*. Рассмотрим такой замкнутый* s*-мерный шар* $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma$ *с центром в начале координат, что*

$$\operatorname{meas}_s \widetilde{\Gamma} = (1 - \varepsilon_3) \operatorname{meas}_s \Gamma.$$

Тогда существуют такие функции

$$\Theta : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^m, \quad \widetilde{\Omega} : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^n, \quad \widetilde{M} : \widetilde{\Gamma} \to \mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R}) \tag{3.17}$$

и такая замена переменных (3.13) (*для каждого* $\mu \in \widetilde{\Gamma}$)*, где* $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$*,* $\overline{y} \in \mathcal{O}_m(0)$*,* $\overline{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$*, что справедливы следующие утверждения.*

i) *Функции* (3.17) *являются* C^∞*-гладкими, и всюду в* $\widetilde{\Gamma}$ *все частные производные всех порядков от* 0 *до* $\mathcal{L}$ *каждой компоненты функций* Θ*,* $\widetilde{\Omega} - \Omega$*,* $\widetilde{M} - M$ *по абсолютной величине меньше, чем* ε_1*. Коэффициенты* X*,* Y^0*,* Y^1*,* Y^2*,* Z^0*,* Z^1*,* Z^2 *в* (3.13) *являются отображениями со значениями в* $\mathbb{R}^n$*,* $\mathbb{R}^m$*,* $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$*,* $\mathbb{R}^{m \times 2p}$*,* $\mathbb{R}^{2p}$*,* $\mathbb{R}^{2p \times m}$*,* $\mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})$ *соответственно. Эти отображения аналитические по* $\overline{x}$ *и* C^∞*-гладкие по* μ*. Всюду в* $\mathbb{T}^n \times \widetilde{\Gamma}$ *все частные производные всех порядков от* 0 *до* $\mathcal{L}$ *каждой компоненты этих отображений по абсолютной величине меньше, чем* ε_1*.*

ii) *Для каждого* $\mu \in \widetilde{\Gamma}$ *замена переменных* (3.13) *коммутирует с инволюцией* (1.2)*. Имеет место тождество* $\widetilde{M}(\mu) R \equiv -R \widetilde{M}(\mu)$*.*

iii) *Для каждого* $\mu \in \widetilde{\Gamma}$ *матрица* $\widetilde{M}(\mu)$ *имеет простой спектр вида* $\mathfrak{M}\Big(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \widetilde{\alpha}(\mu), \widetilde{\beta}(\mu)\Big)$ (*см. определение* 1.4)*.*

iv) *Существует множество* $\mathcal{G} \subset \widetilde{\Gamma}$*, удовлетворяющее следующим условиям.*

(a) $\mathrm{meas}_s\,\mathcal{G} > (1-\varepsilon_2)\,\mathrm{meas}_s\,\widetilde{\Gamma}$.

(b) *Для любой точки* $\mu \in \mathcal{G}$ *пара векторов* $\widetilde{\Omega}(\mu) \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\beta}(\mu) \in \mathbb{R}^\nu$ *аффинно* $(\tau,\gamma,2)$-*диофантова* (*см. определение* 2.1).

(c) *Для любой точки* $\mu \in \mathcal{G}$ *возмущенная система* (3.1) *с* $\sigma = \Theta(\mu)$ *после замены координат* (3.13) *принимает вид*

$$\dot{\overline{x}} = \widetilde{\Omega}(\mu) + O(\overline{y},\overline{z}), \quad \dot{\overline{y}} = O_2(\overline{y},\overline{z}), \quad \dot{\overline{z}} = \widetilde{M}(\mu)\overline{z} + O_2(\overline{y},\overline{z}). \tag{3.18}$$

Таким образом, для любого $\mu \in \mathcal{G}$ возмущенная система (3.1) и инволюция (1.2) имеют общий аналитический приводимый инвариантный n-мерный тор $\{\overline{y}=0,\ \overline{z}=0\}$ с вектором частот $\widetilde{\Omega}(\mu)$ и матрицей Флоке $\mathbf{0}_m \oplus \widetilde{M}(\mu)$ (см. (3.18)). Все такие торы образуют s-параметрическое бесконечно дифференцируемое в смысле Уитни семейство.

4. Теорема-источник в обратимом контексте 2

Содержание этого раздела почти полностью совпадает с содержанием [51, Sec. 4]; настоящий раздел включен в статью для того, чтобы изложение имело законченный вид. Чтобы «сделать» отображение (1.4) субмерсивным, заменим $\Omega(\mu) + \Delta(\sigma,\mu)$ на независимый внешний параметр $\omega \in \mathbb{R}^n$ и предположим, что отображение

$$\mu \mapsto \big(\alpha(\omega,\mu),\beta(\omega,\mu)\big) \in \mathbb{R}^p$$

(где M зависит от ω) субмерсивно для фиксированного ω.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{Z}_+$ и $\omega_\star \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим аналитическое $(m+n+s)$-параметрическое семейство аналитических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \omega + \xi(y,z,\sigma,\omega,\mu) + f(x,y,z,\sigma,\omega,\mu),\\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y,z,\sigma,\omega,\mu) + g(x,y,z,\sigma,\omega,\mu),\\ \dot{z} &= M(\omega,\mu)z + \zeta(y,z,\sigma,\omega,\mu) + h(x,y,z,\sigma,\omega,\mu), \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве, $\sigma \in \mathcal{O}_m(0)$, $\omega \in \mathcal{O}_n(\omega_\star)$, $\mu \in \mathcal{O}_s(0)$ — внешние параметры, M — $(2p\times 2p)$-матричнозначная функция и, наконец, $\xi = O(y,z)$, $\eta = O_2(y,z)$, $\zeta = O_2(y,z,\sigma)$. Предполагается, что функции M, ξ, η, ζ фиксированы, а слагаемые f, g, h — малые возмущения. Пусть системы (4.1) обратимы относительно инволюции (1.2) фазового пространства, где $R \in \mathrm{GL}(2p,\mathbb{R})$ — инволютивная матрица с p-кратными собственными числами 1 и -1, причем $M(\omega,\mu)R \equiv -RM(\omega,\mu)$, а $M(\omega_\star,0)$ имеет простой спектр. Можно считать, что спектр матрицы $M(\omega,\mu)$ прост для любых ω и μ и имеет вид $\mathfrak{M}\big(\nu_1,\nu_2,\nu_3;\alpha(\omega,\mu),\beta(\omega,\mu)\big)$, где $\nu_1+\nu_2+2\nu_3 = p$ (см. определение 1.4). Будем по-прежнему использовать обозначение $\nu = \nu_2+\nu_3 \in \mathbb{Z}_+$.

Теорема 4.1 (см. [50]). *Предположим, что отображение*

$$\mu \mapsto \big(\alpha(\omega_\star,\mu),\beta(\omega_\star,\mu)\big) \in \mathbb{R}^p$$

субмерсивно *в начале координат* $\mu = 0$ (*а значит,* $s \geqslant p$). *Тогда существует такая окрестность* $\mathfrak{O} \subset \mathbb{R}^{n+s}$ *точки* $(\omega_\star,0)$, *что для любого замкнутого множества* $\Gamma \subset \mathfrak{O}$, *диффеоморфного* $(n+s)$-*мерному шару и содержащего точку* $(\omega_\star,0)$ *внутри себя, выполнено следующее. Для любой комплексной окрестности*

$$\mathcal{C} \subset (\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z})^n \times \mathbb{C}^{2m+2p+n+s}$$

множества

$$\mathbb{T}^n \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \{0 \in \mathbb{R}^{2p}\} \times \{0 \in \mathbb{R}^m\} \times \Gamma,$$

любого $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$, *любого положительного* ε, *любого* τ, *удовлетворяющего неравенству* $\tau > n-1$ (*а при* $n = 0$ — *неравенству* $\tau \geqslant 0$), *и любого положительного* γ *существует положительное число* δ, *обладающее следующими свойствами.*

Предположим, что возмущающие слагаемые f, g, h *в* (4.1) *могут быть голоморфно продолжены в окрестность* $\mathcal{C}$ *и* $|f| < \delta$, $|g| < \delta$, $|h| < \delta$ *в* $\mathcal{C}$. *Тогда для каждого* $(\omega_0,\mu_0) \in \Gamma$ *существуют такие точки*

$$v(\omega_0,\mu_0) \in \mathbb{R}^m, \quad u(\omega_0,\mu_0) \in \mathbb{R}^n, \quad w(\omega_0,\mu_0) \in \mathbb{R}^s \tag{4.2}$$

и такая замена переменных

$$\begin{aligned}
x &= \overline{x} + X(\overline{x}, \omega_0, \mu_0), \\
y &= \overline{y} + Y^0(\overline{x}, \omega_0, \mu_0) + Y^1(\overline{x}, \omega_0, \mu_0)\overline{y} + Y^2(\overline{x}, \omega_0, \mu_0)\overline{z}, \\
z &= \overline{z} + Z^0(\overline{x}, \omega_0, \mu_0) + Z^1(\overline{x}, \omega_0, \mu_0)\overline{y} + Z^2(\overline{x}, \omega_0, \mu_0)\overline{z},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$, $\overline{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\overline{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, *что справедливы следующие утверждения.*

(1) *Функции* u, v, w *в* (4.2) *являются* C^∞*-гладкими по совокупности переменных* (ω_0, μ_0), *и всюду в* Γ *все частные производные всех порядков от* 0 *до* $\mathcal{L}$ *каждой компоненты этих функций по абсолютной величине меньше, чем* ε. *Коэффициенты* X, Y^0, Y^1, Y^2, Z^0, Z^1, Z^2 *в* (4.3) *являются отображениями со значениями в* $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{m\times 2p}$, $\mathbb{R}^{2p}$, $\mathbb{R}^{2p\times m}$, $\mathfrak{gl}(2p, \mathbb{R})$ *соответственно. Эти отображения аналитические по* $\overline{x}$ *и* C^∞*-гладкие по* (ω_0, μ_0). *Всюду в* $\mathbb{T}^n \times \Gamma$ *все частные производные всех порядков от* 0 *до* $\mathcal{L}$ *каждой компоненты этих отображений по абсолютной величине меньше, чем* ε.

(2) *Для каждого* $(\omega_0, \mu_0) \in \Gamma$ *замена переменных* (4.3) *коммутирует с инволюцией* (1.2).

(3) *Для* любой *точки* $(\omega_0, \mu_0) \in \Gamma$, *для которой пара векторов* $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^\nu$ *аффинно* $(\tau, \gamma, 2)$*-диофантова (см. определение* 2.1*), система* (4.1) *со значениями параметров*

$$\sigma = v(\omega_0, \mu_0), \quad \omega = \omega_0 + u(\omega_0, \mu_0), \quad \mu = \mu_0 + w(\omega_0, \mu_0) \tag{4.4}$$

после преобразования координат (4.3) *принимает вид*

$$\dot{\overline{x}} = \omega_0 + O(\overline{y}, \overline{z}), \quad \dot{\overline{y}} = O_2(\overline{y}, \overline{z}), \quad \dot{\overline{z}} = M(\omega_0, \mu_0)\overline{z} + O_2(\overline{y}, \overline{z}). \tag{4.5}$$

Фактически теорема 4.1 является частным случаем основного результата работы [50] (см. обсуждение в [51]). Рассмотрим произвольную точку $(\omega_0, \mu_0) \in \Gamma$, для которой пара векторов $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta(\omega_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^\nu$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$-диофантова. Возмущенная система (4.1) со *сдвинутыми* значениями (4.4) параметров имеет приводимый инвариантный n-мерный тор $\{\overline{y} = 0, \ \overline{z} = 0\}$ с *тем же самым* вектором частот ω_0 и *той же самой* матрицей Флоке $\mathbf{0}_m \oplus M(\omega_0, \mu_0)$ (см. (4.5)), что и у приводимого инвариантного n-мерного тора $\{y = 0, \ z = 0\}$ системы (4.1) без слагаемых f, g, h (невозмущенной системы) при значениях параметров $\sigma = 0$, $\omega = \omega_0$, $\mu = \mu_0$. Тор $\{\overline{y} = 0, \ \overline{z} = 0\}$ аналитичен, инвариантен относительно инволюции (1.2) и зависит от (ω_0, μ_0) бесконечно дифференцируемым образом в смысле Уитни.

5. Доказательство теоремы 3.1

Наша цель — вывести теорему 3.1 из теоремы 4.1, следуя общей схеме эрмановского типа (см. аналогичную редукционную технику для «общепринятых» контекстов теории КАМ в [9]). Пусть системы (3.1) удовлетворяют условиям теоремы 3.1. Поскольку $M(\mu)$ аналитически зависит от μ, а $M(0)$ имеет простой спектр, можно ввести такой дополнительный параметр $\chi \in \mathcal{O}_S(0)$ для подходящего $S \in \mathbb{Z}_+$ и построить такое аналитическое семейство $M^{\mathrm{new}}(\mu, \chi)$ вещественных матриц порядка $2p \times 2p$, что будут справедливы следующие утверждения.

(1) $M^{\mathrm{new}}(\mu, 0) \equiv M(\mu)$ и $M^{\mathrm{new}}(\mu, \chi)R \equiv -RM^{\mathrm{new}}(\mu, \chi)$. Как следствие, можно считать, что для любых μ и χ матрица $M^{\mathrm{new}}(\mu, \chi)$ имеет простой спектр вида

$$\mathfrak{M}\big(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \alpha^{\mathrm{new}}(\mu, \chi), \beta^{\mathrm{new}}(\mu, \chi)\big),$$

где $\alpha^{\mathrm{new}}(\mu, 0) \equiv \alpha(\mu)$ и $\beta^{\mathrm{new}}(\mu, 0) \equiv \beta(\mu)$.

(2) Отображение

$$(\mu, \chi) \mapsto \big(\alpha^{\mathrm{new}}(\mu, \chi), \beta^{\mathrm{new}}(\mu, \chi)\big) \in \mathbb{R}^p$$

субмерсивно в точке $\mu = 0$, $\chi = 0$ (а значит, $s + S \geqslant p$).

Существование $(2p \times 2p)$-матричнозначной функции M^{new}, удовлетворяющей этим условиям, непосредственно следует из теории нормальных форм и версальных деформаций инфинитезимально обратимых матриц (см. [7, 27, 52]). Такую функцию всегда можно построить уже при $S = p$.

Теперь введем еще один дополнительный параметр $\omega \in \mathcal{O}_n\bigl(\Omega(0)\bigr)$ и рассмотрим аналитическое $(m+s+S+n)$-параметрическое семейство аналитических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \omega + \xi(y,z,\sigma,\mu) + f(x,y,z,\sigma,\mu),\\ \dot{y} &= \sigma + \eta(y,z,\sigma,\mu) + g(x,y,z,\sigma,\mu),\\ \dot{z} &= M^{\mathrm{new}}(\mu,\chi)z + \zeta(y,z,\sigma,\mu) + h(x,y,z,\sigma,\mu).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Системы (5.1) обратимы относительно инволюции (1.2) и удовлетворяют всем условиям теоремы 4.1, при этом $\Omega(0)$, $s+S$, (μ,χ), M^{new} играют роль $\omega_\star$, s, μ, M соответственно.

Рассмотрим замкнутый шар $A \subset \mathbb{R}^{s-d}$ с центром в начале координат, замкнутый шар $B \subset \mathbb{R}^d$ с центром в точке $\mathfrak{P}_0$, замкнутый шар $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^S$ с центром в начале координат и замкнутый шар $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^n$ с центром в точке $\Omega(0)$. Если шары A и B достаточно малы, то множество Γ(3.7) определено корректно (и диффеоморфно замкнутому s-мерному шару). Согласно теореме 4.1, если все четыре шара A, B, Γ_1, Γ_2 достаточно малы, то для любой комплексной окрестности (3.8) множества (3.9), любого $\mathcal{L} \in \mathbb{N}$, любого τ, удовлетворяющего неравенству $\tau > n-1$ (а при $n=0$ — неравенству $\tau \geqslant 0$), и любого положительного γ справедливо следующее утверждение.

Предположим, что возмущающие слагаемые f, g, h в (3.1) и (5.1) могут быть голоморфно продолжены в окрестность (3.8) и достаточно малы в (3.8). Тогда для любых $\mu_0 \in \Gamma$, $\chi_0 \in \Gamma_1$ и $\omega_0 \in \Gamma_2$ существуют такие точки

$$\begin{aligned} v(\omega_0,\mu_0,\chi_0) \in \mathbb{R}^m, \quad u(\omega_0,\mu_0,\chi_0) \in \mathbb{R}^n,\\ w(\omega_0,\mu_0,\chi_0) \in \mathbb{R}^s, \quad W(\omega_0,\mu_0,\chi_0) \in \mathbb{R}^S\end{aligned} \tag{5.2}$$

и такая замена переменных

$$\begin{aligned} x &= \overline{x} + \mathfrak{X}(\overline{x},\omega_0,\mu_0,\chi_0),\\ y &= \overline{y} + \mathfrak{Y}^0(\overline{x},\omega_0,\mu_0,\chi_0) + \mathfrak{Y}^1(\overline{x},\omega_0,\mu_0,\chi_0)\overline{y} + \mathfrak{Y}^2(\overline{x},\omega_0,\mu_0,\chi_0)\overline{z},\\ z &= \overline{z} + \mathfrak{Z}^0(\overline{x},\omega_0,\mu_0,\chi_0) + \mathfrak{Z}^1(\overline{x},\omega_0,\mu_0,\chi_0)\overline{y} + \mathfrak{Z}^2(\overline{x},\omega_0,\mu_0,\chi_0)\overline{z},\end{aligned} \tag{5.3}$$

где $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$, $\overline{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\overline{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, что выполнено следующее.

Во-первых, функции u, v, w, W в (5.2) являются C^∞-гладкими. Коэффициенты $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}^0$, $\mathfrak{Y}^1$, $\mathfrak{Y}^2$, $\mathfrak{Z}^0$, $\mathfrak{Z}^1$, $\mathfrak{Z}^2$ в (5.3) аналитические по переменной $\overline{x}$ и C^∞-гладкие по совокупности переменных (ω_0,μ_0,χ_0). Все отображения u, v, w, W, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}^0$, $\mathfrak{Y}^1$, $\mathfrak{Y}^2$, $\mathfrak{Z}^0$, $\mathfrak{Z}^1$, $\mathfrak{Z}^2$ малы в $C^{\mathcal{L}}$-топологии.

Во-вторых, для любых $\mu_0 \in \Gamma$, $\chi_0 \in \Gamma_1$ и $\omega_0 \in \Gamma_2$ замена переменных (5.3) коммутирует с инволюцией (1.2).

В-третьих, для *любых* точек $\mu_0 \in \Gamma$, $\chi_0 \in \Gamma_1$ и $\omega_0 \in \Gamma_2$, для которых пара векторов $\omega_0 \in \mathbb{R}^n$, $\beta^{\mathrm{new}}(\mu_0,\chi_0) \in \mathbb{R}^\nu$ аффинно $(\tau,\gamma,2)$-диофантова, система (5.1) со значениями параметров

$$\begin{aligned}\sigma = v(\omega_0,\mu_0,\chi_0), \quad \omega = \omega_0 + u(\omega_0,\mu_0,\chi_0),\\ \mu = \mu_0 + w(\omega_0,\mu_0,\chi_0), \quad \chi = \chi_0 + W(\omega_0,\mu_0,\chi_0)\end{aligned} \tag{5.4}$$

после преобразования координат (5.3) принимает вид

$$\dot{\overline{x}} = \omega_0 + O(\overline{y},\overline{z}), \quad \dot{\overline{y}} = O_2(\overline{y},\overline{z}), \quad \dot{\overline{z}} = M^{\mathrm{new}}(\mu_0,\chi_0)\overline{z} + O_2(\overline{y},\overline{z}). \tag{5.5}$$

Можно считать, что шары A и B настолько малы, что $\Omega(\Gamma)$ лежит во внутренности шара Γ_2. Если функции u, v, w, W достаточно малы, то систему уравнений

$$\begin{aligned}&\omega + u(\omega,\mu,\chi) = \Omega\bigl(\mu + w(\omega,\mu,\chi)\bigr) + \Delta\bigl(v(\omega,\mu,\chi),\, \mu + w(\omega,\mu,\chi)\bigr),\\ &\chi + W(\omega,\mu,\chi) = 0\end{aligned} \tag{5.6}$$

при $\mu \in \Gamma$ можно решить относительно ω и χ:

$$\omega = \varphi(\mu), \quad \chi = \psi(\mu),$$

где $\varphi : \Gamma \to \Gamma_2$ и $\psi : \Gamma \to \Gamma_1$ — бесконечно дифференцируемые функции, близкие в $C^{\mathcal{L}}$-топологии к Ω и 0 соответственно. Ключевое наблюдение состоит в том, что для любого $\mu_0 \in \Gamma$ система (5.1) при значениях параметров (5.4), где $\omega_0 = \varphi(\mu_0)$ и $\chi_0 = \psi(\mu_0)$, совпадает с *исходной* системой (3.1) при значениях параметров

$$\sigma = v(\omega_0,\mu_0,\chi_0), \quad \mu = \mu_0 + w(\omega_0,\mu_0,\chi_0).$$

Действительно, если $\omega_0 = \varphi(\mu_0)$ и $\chi_0 = \psi(\mu_0)$, то из уравнений (5.6) следует, что значения параметров σ, ω, μ, χ, заданные выражениями (5.4), удовлетворяют соотношениям

$$\omega = \Omega(\mu) + \Delta(\sigma, \mu), \quad \chi = 0.$$

Пусть $\varepsilon_3 \in (0,1)$. Рассмотрим такой замкнутый $(s-d)$-мерный шар $A' \subset A$ с центром в начале координат и такой замкнутый d-мерный шар $B' \subset B$ с центром в точке $\mathfrak{P}_0$, что

$$\operatorname{meas}_{s-d} A' = (1-\varepsilon_3)^{1/2} \operatorname{meas}_{s-d} A, \quad \operatorname{meas}_d B' = (1-\varepsilon_3)^{1/2} \operatorname{meas}_d B,$$

и положим

$$\Gamma' = \bigl\{\mu(a,b) \bigm| a \in A',\, b \in B'\bigr\} \subset \Gamma$$

$(0 \in \Gamma')$. Если функции u, v, w, W достаточно малы, то уравнение

$$\mu = \mu_0 + w\bigl(\varphi(\mu_0), \mu_0, \psi(\mu_0)\bigr)$$

при $\mu \in \Gamma'$ можно решить относительно μ_0:

$$\mu_0 = \Upsilon(\mu),$$

где $\Upsilon : \Gamma' \to \Gamma$ — бесконечно дифференцируемая функция, близкая в $C^{\mathcal{L}}$-топологии к тождественному отображению $\mu \mapsto \mu$.

Мы пришли к следующему выводу. Для любой точки $\mu \in \Gamma'$ положим

$$\mu_0 = \Upsilon(\mu), \quad \omega_0 = \varphi\bigl(\Upsilon(\mu)\bigr), \quad \chi_0 = \psi\bigl(\Upsilon(\mu)\bigr).$$

Если пара векторов ω_0, $\beta^{\mathrm{new}}(\mu_0, \chi_0)$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$-диофантова, то *исходная* система (3.1) со значениями параметров μ и $\sigma = v(\omega_0, \mu_0, \chi_0)$ после преобразования координат (5.3) принимает вид (5.5).

Введем функции

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega}(\mu) &= \varphi\bigl(\Upsilon(\mu)\bigr),\\
\Psi(\mu) &= \psi\bigl(\Upsilon(\mu)\bigr),\\
\widehat{M}(\mu) &= M^{\mathrm{new}}\bigl(\Upsilon(\mu), \Psi(\mu)\bigr),\\
\widehat{\alpha}(\mu) &= \alpha^{\mathrm{new}}\bigl(\Upsilon(\mu), \Psi(\mu)\bigr),\\
\widehat{\beta}(\mu) &= \beta^{\mathrm{new}}\bigl(\Upsilon(\mu), \Psi(\mu)\bigr),\\
\widehat{\Theta}(\mu) &= v\Bigl(\widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)\Bigr)
\end{aligned}$$

для $\mu \in \Gamma'$ и функции

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(\overline{x}, \mu) &= \mathfrak{X}\Bigl(\overline{x}, \widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)\Bigr),\\
\widehat{Y}^r(\overline{x}, \mu) &= \mathfrak{Y}^r\Bigl(\overline{x}, \widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)\Bigr), \quad r = 0,1,2,\\
\widehat{Z}^r(\overline{x}, \mu) &= \mathfrak{Z}^r\Bigl(\overline{x}, \widehat{\Omega}(\mu), \Upsilon(\mu), \Psi(\mu)\Bigr), \quad r = 0,1,2
\end{aligned}$$

для $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$ и $\mu \in \Gamma'$. Отображения $\widehat{\Omega}$, Ψ, $\widehat{M}$, $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\Theta}$ являются C^∞-гладкими, причем функции $\widehat{\Omega}-\Omega$, Ψ, $\widehat{M}-M$, $\widehat{\alpha}-\alpha$, $\widehat{\beta}-\beta$, $\widehat{\Theta}$ малы в $C^{\mathcal{L}}$-топологии. Для любого $\mu \in \Gamma'$ справедливо соотношение $\widehat{M}(\mu)R = -R\widehat{M}(\mu)$, а $(2p \times 2p)$-матрица $\widehat{M}(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}\Bigl(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \widehat{\alpha}(\mu), \widehat{\beta}(\mu)\Bigr)$. Коэффициенты $\widehat{X}$, $\widehat{Y}^0$, $\widehat{Y}^1$, $\widehat{Y}^2$, $\widehat{Z}^0$, $\widehat{Z}^1$, $\widehat{Z}^2$ являются аналитическими по $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$, C^∞-гладкими по $\mu \in \Gamma'$ и малыми в $C^{\mathcal{L}}$-топологии, если возмущающие слагаемые f, g, h в (3.1) достаточно малы.

Вывод, к которому мы пришли на данный момент, можно переформулировать следующим образом. Если пара векторов $\widehat{\Omega}(\mu) \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{\beta}(\mu) \in \mathbb{R}^\nu$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$-диофантова при некотором $\mu \in \Gamma'$, то система (3.1) с параметрами μ и $\sigma = \widehat{\Theta}(\mu)$ после G-коммутирующей замены координат

$$\begin{aligned}
x &= \overline{x} + \widehat{X}(\overline{x}, \mu),\\
y &= \overline{y} + \widehat{Y}^0(\overline{x}, \mu) + \widehat{Y}^1(\overline{x}, \mu)\overline{y} + \widehat{Y}^2(\overline{x}, \mu)\overline{z},\\
z &= \overline{z} + \widehat{Z}^0(\overline{x}, \mu) + \widehat{Z}^1(\overline{x}, \mu)\overline{y} + \widehat{Z}^2(\overline{x}, \mu)\overline{z},
\end{aligned}$$

где $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$, $\overline{y} \in \mathcal{O}_m(0)$, $\overline{z} \in \mathcal{O}_{2p}(0)$, принимает вид

$$\dot{\overline{x}} = \widehat{\Omega}(\mu) + O(\overline{y}, \overline{z}), \quad \dot{\overline{y}} = O_2(\overline{y}, \overline{z}), \quad \dot{\overline{z}} = \widehat{M}(\mu)\overline{z} + O_2(\overline{y}, \overline{z}).$$

Рассмотрим такие замкнутые $(s-d)$-мерные шары $\widetilde{A} \subset A'' \subset A'$ с центром в начале координат и такой замкнутый d-мерный шар $\widetilde{B} \subset B'$ с центром в точке $\mathfrak{P}_0$, что

$$\operatorname{meas}_{s-d} A'' = (1-\varepsilon_3)^{3/4} \operatorname{meas}_{s-d} A$$

и имеют место соотношения (3.10). Определим множества $\widetilde{\Gamma} \subset \Gamma'' \subset \Gamma'$ при помощи уравнения

$$\Gamma'' = \Bigl\{\mu(a,b) \Bigm| a \in A'', \, b \in \widetilde{B}\Bigr\}$$

$(0 \in \Gamma'')$ и уравнения (3.11). Пусть шары A и B настолько малы, что в Γ якобиан (3.4) нигде не обращается в нуль при $d \geqslant 1$. Тогда систему уравнений

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega}_+(\mu_+^*, \mu_-) &= \Omega_+(\mu_+, \mu_-), \\
\widehat{\alpha}_+(\mu_+^*, \mu_-) &= \alpha_+(\mu_+, \mu_-), \\
\widehat{\beta}_+(\mu_+^*, \mu_-) &= \beta_+(\mu_+, \mu_-)
\end{aligned}$$

можно решить относительно μ_+^* при $\mu = (\mu_+, \mu_-) \in \Gamma''$, если функции u, v, w, W достаточно малы:

$$\mu_+^* = \mu_+ + \Xi_+(\mu_+, \mu_-) = \mu_+ + \Xi_+(\mu),$$

где $\Xi_+ : \Gamma'' \to \mathbb{R}^d$ — бесконечно дифференцируемая функция, малая в $C^{\mathcal{L}}$-топологии. «Дополним» отображение Ξ_+ *нулевой* функцией $\Xi_- : \Gamma'' \to \mathbb{R}^{s-d}$ так, чтобы имели место соотношения

$$\Xi_+ = (\Xi_l \mid l \in \mathfrak{T}), \quad \Xi_- = (\Xi_l \mid l \notin \mathfrak{T})$$

для отображения $\Xi = (\Xi_+, \Xi_-) : \Gamma'' \to \mathbb{R}^s$ (ср. (3.2)). Если $d = 0$, то $\Xi \equiv 0$. Если $\mu \in \Gamma''$, то $\mu + \Xi(\mu) \in \Gamma'$ и

$$\begin{aligned}
\widehat{\Omega}_+\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr) &= \Omega_+(\mu), \\
\widehat{\alpha}_+\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr) &= \alpha_+(\mu), \\
\widehat{\beta}_+\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr) &= \beta_+(\mu).
\end{aligned}$$

Теперь положим

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Omega}(\mu) &= \widehat{\Omega}\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr), \\
\widetilde{M}(\mu) &= \widehat{M}\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr), \\
\widetilde{\alpha}(\mu) &= \widehat{\alpha}\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr), \\
\widetilde{\beta}(\mu) &= \widehat{\beta}\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr), \\
\Theta(\mu) &= \widehat{\Theta}\bigl(\mu + \Xi(\mu)\bigr)
\end{aligned}$$

для $\mu \in \Gamma''$ и

$$\begin{aligned}
X(\overline{x}, \mu) &= \widehat{X}\bigl(\overline{x}, \mu + \Xi(\mu)\bigr), \\
Y^r(\overline{x}, \mu) &= \widehat{Y}^r\bigl(\overline{x}, \mu + \Xi(\mu)\bigr), \quad r = 0, 1, 2, \\
Z^r(\overline{x}, \mu) &= \widehat{Z}^r\bigl(\overline{x}, \mu + \Xi(\mu)\bigr), \quad r = 0, 1, 2
\end{aligned}$$

для $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$ и $\mu \in \Gamma''$. Отображения Ξ, $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{M}$, $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, Θ являются C^∞-гладкими, причем функции Ξ, $\widetilde{\Omega} - \Omega$, $\widetilde{M} - M$, $\widetilde{\alpha} - \alpha$, $\widetilde{\beta} - \beta$, Θ малы в $C^{\mathcal{L}}$-топологии. Для любого $\mu \in \Gamma''$ справедливо соотношение $\widetilde{M}(\mu)R = -R\widetilde{M}(\mu)$, а $(2p \times 2p)$-матрица $\widetilde{M}(\mu)$ имеет простой спектр вида $\mathfrak{M}\Bigl(\nu_1, \nu_2, \nu_3; \widetilde{\alpha}(\mu), \widetilde{\beta}(\mu)\Bigr)$. В Γ'' выполнены тождества (3.14). Коэффициенты X, Y^0, Y^1, Y^2, Z^0, Z^1, Z^2 являются аналитическими по $\overline{x} \in \mathbb{T}^n$, C^∞-гладкими по $\mu \in \Gamma''$ и малыми в $C^{\mathcal{L}}$-топологии, если возмущающие слагаемые f, g, h в (3.1) достаточно малы. Для любого $\mu \in \Gamma''$ замена переменных (3.13) коммутирует с инволюцией (1.2).

Для любого $\mu^0 \in \Gamma''$, для которого пара векторов $\widetilde{\Omega}(\mu^0)$, $\widetilde{\beta}(\mu^0)$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$-диофантова, система (3.1) при значениях параметров $\mu = \mu^0 + \Xi(\mu^0)$ и $\sigma = \Theta(\mu^0)$ после замены координат (3.13), где $\mu = \mu^0$, принимает вид (3.15).

Пара отображений (3.6) аффинно $(Q, 2)$-невырождена в точке $a = 0$. Можно считать, что шары A и B (а значит, и шары $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$) настолько малы, что для любого фиксированного значения $b \in \widetilde{B}$ пара отображений

$$a \mapsto \Omega_-\bigl(\mu(a, b)\bigr) \in \mathbb{R}^{n-d_1} \quad \text{и} \quad a \mapsto \beta_-\bigl(\mu(a, b)\bigr) \in \mathbb{R}^{\nu-d_3} \tag{5.7}$$

аффинно $(Q, 2)$-невырождена в каждой точке $a \in \widetilde{A}$. Теперь можно применить диофантову лемму 2.1, при этом

- $s - d \geqslant 1$, $n - d_1$, $\nu - d_3$, d_1, d_3 и 2 играют роль s, n, ν, n^{add}, ν^{add} и L соответственно,
- $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}$ и внутренность A'' играют роль B, A и $\mathfrak{A}$ соответственно,
- отображения (5.7) играют роль отображений (2.2),
- отображения $b \mapsto b^{:1} \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $b \mapsto b^{:3} \in \mathbb{R}^{d_3}$ играют роль отображений Ω^{add} и β^{add} соответственно,
- ε_2 играет роль ε.

Согласно лемме 2.1, если $\mathcal{L} \geqslant Q$, а разности $\widetilde{\Omega} - \Omega$ и $\widetilde{\beta} - \beta$ достаточно малы в Γ'' в $C^{\mathcal{L}}$-топологии, то справедливо следующее утверждение. Пусть $\varepsilon_2 \in (0, 1)$, $\tau_* \geqslant \max(0, d_1 - 1)$ и $\gamma_* > 0$. Предположим, что $\tau > nQ$, $\tau \geqslant \tau_*$, а γ достаточно мало: $0 < \gamma \leqslant \gamma_0(\varepsilon_2, \tau, \gamma_*)$. Тогда для любой точки $b \in \widetilde{B}$, для которой пара векторов $b^{:1} \in \mathbb{R}^{d_1}$, $b^{:3} \in \mathbb{R}^{d_3}$ аффинно $(\tau_*, \gamma_*, 2)$-диофантова, мера Лебега $\operatorname{meas}_{s-d}$ множества $\mathcal{G}_b$ тех точек $a \in \widetilde{A}$, для которых пара векторов $\widetilde{\Omega}\bigl(\mu(a, b)\bigr) \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\beta}\bigl(\mu(a, b)\bigr) \in \mathbb{R}^\nu$ аффинно $(\tau, \gamma, 2)$-диофантова, превосходит величину $(1 - \varepsilon_2) \operatorname{meas}_{s-d} \widetilde{A}$. Действительно, обозначая $\mu(a, b)$ через μ^0 и учитывая тождества (3.5) и (3.14), получаем соотношения

$$\widetilde{\Omega}(\mu^0) = \Bigl(\widetilde{\Omega}_+(\mu^0), \widetilde{\Omega}_-(\mu^0)\Bigr) = \Bigl(\Omega_+(\mu^0), \widetilde{\Omega}_-(\mu^0)\Bigr) = \Bigl(b^{:1}, \widetilde{\Omega}_-(\mu^0)\Bigr),$$

$$\widetilde{\beta}(\mu^0) = \Bigl(\widetilde{\beta}_+(\mu^0), \widetilde{\beta}_-(\mu^0)\Bigr) = \Bigl(\beta_+(\mu^0), \widetilde{\beta}_-(\mu^0)\Bigr) = \Bigl(b^{:3}, \widetilde{\beta}_-(\mu^0)\Bigr).$$

Этим завершается доказательство теоремы 3.1.

6. Инвариантные торы в общих системах

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathfrak{x}(x, y, z), \quad \dot{y} = \mathfrak{y}(y), \quad \dot{z} = \mathfrak{z}(x, y, z), \tag{6.1}$$

где $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in \mathcal{O}_m(0)$, $z \in \mathcal{O}_{2p}(0)$ — координаты на фазовом пространстве (ср. (1.1) и (3.1)). Предположим, что эта система обратима относительно инволюции (1.2) фазового пространства, где $R \in \mathrm{GL}(2p, \mathbb{R})$ — инволютивная матрица. Условие обратимости означает, что

$$\mathfrak{x}(-x, -y, Rz) \equiv \mathfrak{x}(x, y, z), \quad \mathfrak{y}(-y) \equiv \mathfrak{y}(y), \quad \mathfrak{z}(-x, -y, Rz) \equiv -R\mathfrak{z}(x, y, z).$$

Отметим, что на уравнения для $\dot{x}$ и $\dot{z}$ мы не накладываем никаких ограничений (кроме обратимости), но предполагается, что правая часть уравнения для $\dot{y}$ не зависит от x и z. В настоящем разделе дается строгое доказательство следующего утверждения.

Предложение 6.1. *Пусть система* (6.1) *и инволюция* (1.2) *имеют общий инвариантный тор, движение по которому квазипериодично. Тогда* $\mathfrak{y}(0) = 0$.

В предложении 6.1 не предполагается, что тор имеет размерность n (тем более — что он близок к тору $\{y = 0,\ z = 0\}$).

В частности, предположим, что система (6.1) зависит от $\mathfrak{c}$-мерного параметра $\mathfrak{w}$, причем $\mathfrak{c} < m$:

$$\dot{x} = \mathfrak{x}(x, y, z, \mathfrak{w}), \quad \dot{y} = \mathfrak{y}(y, \mathfrak{w}), \quad \dot{z} = \mathfrak{z}(x, y, z, \mathfrak{w}).$$

В общем случае точки $\mathfrak{y}(0, \mathfrak{w})$ образуют в $\mathbb{R}^m$ $\mathfrak{c}$-мерную поверхность, не содержащую начала координат. Следовательно, если $\mathfrak{c} < m$, то у $\mathfrak{c}$-параметрического семейства общего вида G-обратимых систем (6.1) нет инвариантного (относительно как самой системы, так и относительно инволюции G) тора, движение по которому было бы квазипериодично, *ни для какого* значения параметра.

Предложение 6.1 является частным случаем следующего более общего утверждения.

Предложение 6.2. *Пусть на прямом произведении $A \times B = \{(u, v)\}$ многообразий A и B система дифференциальных уравнений*

$$\dot{u} = U(u, v), \qquad \dot{v} = V(v) \tag{6.2}$$

обратима относительно инволюции $G : (u, v) \mapsto (G_A(u), G_B(v))$, где G_A и G_B — инволюции многообразий A и B соответственно. Предположим, что $\operatorname{Fix} G_B$ состоит из единственной точки $v^0 \in B$. Пусть система (6.2) *и инволюция G имеют общий инвариантный тор, движение по которому квазипериодично. Тогда $V(v^0) = 0$.*

Доказательство предложения 6.2, в свою очередь, основано на следующей лемме.

Лемма 6.1. *Пусть $F : \mathbb{T}^n \to K$ — сюръективное непрерывное отображение тора $\mathbb{T}^n$ на компактное топологическое пространство. Пусть $\mathfrak{g}^t$ — квазипериодический поток на $\mathbb{T}^n$, т. е. $\mathfrak{g}^t(\phi) = \phi + \omega t$ ($\phi \in \mathbb{T}^n$), где ω — фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$ с рационально независимыми компонентами. Пусть также $\mathfrak{G}^t$ — непрерывное действие группы $\mathbb{R}$ на K. Предположим, что $F \circ \mathfrak{g}^t = \mathfrak{G}^t \circ F$. Тогда K — тор, размерность которого не превосходит n, а $\mathfrak{G}^t$ квазипериодично.*

Лемма 6.1 вряд ли является новой, однако автору найти ее в литературе не удалось.

Сначала выведем предложение 6.2 из леммы 6.1. Предположим, что у системы (6.2) и инволюции G есть общий инвариантный n-мерный тор $F(\mathbb{T}^n)$, где $F = (F_A, F_B)$ — вложение $\mathbb{T}^n$ в $A \times B$ (F_A и F_B отображают $\mathbb{T}^n$ в A и B соответственно). Предположим, что движение на торе $F(\mathbb{T}^n)$ — квазипериодический поток $F \circ \mathfrak{g}^t \circ F^{-1}$, где $\mathfrak{g}^t$ — квазипериодический поток на $\mathbb{T}^n$. Поскольку $F(\mathbb{T}^n)$ инвариантно относительно G, для любого $\phi \in \mathbb{T}^n$ существует такое $\phi' \in \mathbb{T}^n$, что $F_A(\phi') = G_A(F_A(\phi))$ и $F_B(\phi') = G_B(F_B(\phi))$. Следовательно, множества $F_A(\mathbb{T}^n)$ и $F_B(\mathbb{T}^n)$ инвариантны относительно инволюций G_A и G_B соответственно. Также понятно, что $F_B(\mathbb{T}^n)$ является инвариантным множеством уравнения $\dot{v} = V(v)$ и что $F_B \circ \mathfrak{g}^t = \mathfrak{G}^t \circ F_B$, где $\mathfrak{G}^t$ — ограничение потока векторного поля V на $F_B(\mathbb{T}^n)$. Согласно лемме 6.1, $F_B(\mathbb{T}^n)$ является k-мерным тором для некоторого k ($0 \leqslant k \leqslant n$), а $\mathfrak{G}^t$ — квазипериодический поток на $F_B(\mathbb{T}^n)$. Согласно лемме 1.1, тор $F_B(\mathbb{T}^n)$ содержит 2^k неподвижных точек инволюции G_B. Так как $\operatorname{Fix} G_B = \{v^0\}$, мы приходим к выводу, что $k = 0$ и $F_B(\mathbb{T}^n) = \{v^0\}$. Тогда из инвариантности множества $F_B(\mathbb{T}^n)$ относительно потока векторного поля V вытекает, что $V(v^0) = 0$.

Осталось доказать лемму 6.1. Пусть $\Lambda = F^{-1}(F(0)) \subset \mathbb{T}^n$. Тогда Λ — замкнутое подмножество $\mathbb{T}^n$. Наша ближайшая цель — убедиться, что $F(\phi^1) = F(\phi^2)$ тогда и только тогда, когда $\phi^1 - \phi^2 \in \Lambda$. Действительно, рассмотрим такую последовательность $\{t_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ вещественных чисел, что $\lim\limits_{j\to\infty} \omega t_j = \phi^2$ на $\mathbb{T}^n$. Если $F(\phi^1) = F(\phi^2)$, то

$$F(\phi^1 - \phi^2) = \lim_{j\to\infty} F(\phi^1 - \omega t_j) = \lim_{j\to\infty} \mathfrak{G}^{-t_j}(F(\phi^1)) = \lim_{j\to\infty} \mathfrak{G}^{-t_j}(F(\phi^2)) = \lim_{j\to\infty} F(\phi^2 - \omega t_j) = F(0),$$

а значит, $\phi^1 - \phi^2 \in \Lambda$. С другой стороны, если $\phi^1 - \phi^2 \in \Lambda$, т. е. $F(\phi^1 - \phi^2) = F(0)$, то

$$F(\phi^1) = \lim_{j\to\infty} F(\phi^1 - \phi^2 + \omega t_j) = \lim_{j\to\infty} \mathfrak{G}^{t_j}(F(\phi^1 - \phi^2)) = \lim_{j\to\infty} \mathfrak{G}^{t_j}(F(0)) = \lim_{j\to\infty} F(\omega t_j) = F(\phi^2).$$

В частности, если $\phi^1 \in \Lambda$ и $\phi^2 \in \Lambda$, то $F(\phi^1 + \phi^2) = F(\phi^1) = F(0)$, так что $\phi^1 + \phi^2 \in \Lambda$, и $F(-\phi^1) = F(0)$, так что $-\phi^1 \in \Lambda$. Таким образом, Λ — замкнутая *подгруппа* тора $\mathbb{T}^n$, и существует естественная биекция $\mathbb{T}^n/\Lambda \to F(\mathbb{T}^n)$.

Теперь можно применить теорему двойственности Понтрягина для локально компактных абелевых групп (известную также как теорема двойственности Понтрягина—ван Кампена). Нужные нам следствия из этой фундаментальной теоремы, равно как и их частный случай, касающийся $\mathbb{T}^n$, можно найти, например, в [34, Prop. 38] (см. также [6]) и [54, Cor. 1.2.2, p. 706]. Согласно теореме двойственности Понтрягина, замкнутые подгруппы в $\mathbb{T}^n$ характеризуются их *аннуляторами* в группе характеров $X^*(\mathbb{T}^n) \approx \mathbb{Z}^n$, т. е. в группе всех непрерывных гомоморфизмов $\chi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:

$$\chi(\phi_1, \dots, \phi_n) = m_1\phi_1 + \dots + m_n\phi_n, \qquad m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$$

(группы $\mathbb{T}^n$ и $\mathbb{Z}^n$ *двойственны* друг другу). Иными словами, в $\mathbb{Z}^n$ существует такая подгруппа L, что

$$\Lambda = \{\phi \in \mathbb{T}^n \mid m_1\phi_1 + \dots + m_n\phi_n = 0 \ \forall (m_1, \dots, m_n) \in L\}.$$

С другой стороны, существует такая матрица $Q \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, что

$$LQ = \bigl\{(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}, q_1 r_1, \ldots, q_k r_k) \bigm| r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{Z}\bigr\},$$

где $q_1 \geqslant \cdots \geqslant q_k \geqslant 1$ — натуральные числа (здесь элементы $\mathbb{Z}^n$ рассматриваются как вектор-строки и $0 \leqslant k \leqslant n$). Ранг решетки L равен k. На торе $\mathbb{T}^n$ введем новую систему координат $\psi = Q^{-1}\phi$ (здесь точки тора $\mathbb{T}^n$ рассматриваются как вектор-столбцы). В новых координатах

$$\Lambda = \bigl\{(\psi_1, \ldots, \psi_{n-k}, 2\pi p_1/q_1, \ldots, 2\pi p_k/q_k)\bigr\},$$

где

$$0 \leqslant p_1 \leqslant q_1 - 1, \ldots, 0 \leqslant p_k \leqslant q_k - 1; \qquad \psi_1, \ldots, \psi_{n-k} \in \mathbb{S}^1, \quad p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}_+,$$

и $\dim \Lambda = n - k$. Кроме того, в новых координатах поток $\mathfrak{g}^t$ на $\mathbb{T}^n$ задается уравнением

$$\dot\psi = Q^{-1}\dot\phi = Q^{-1}\omega = \varpi = (\varpi_1, \ldots, \varpi_n).$$

Множество $K = F(\mathbb{T}^n)$ гомеоморфно фактору $\mathbb{T}^n/\Lambda \approx \mathbb{T}^k$. Естественные координаты на факторе $\mathbb{T}^n/\Lambda$, а значит, и на множестве $F(\mathbb{T}^n)$, — это координаты

$$(q_1\psi_{n-k+1}, \ldots, q_k\psi_n) \in \mathbb{T}^k.$$

Поток $\mathfrak{G}^t$ на k-мерном торе $F(\mathbb{T}^n)$ квазипериодичен с вектором частот

$$(q_1\varpi_{n-k+1}, \ldots, q_k\varpi_n) \in \mathbb{R}^k,$$

что и завершает доказательство леммы 6.1.

Замечание 6.1. Лемма 6.1, по-видимому, связана с теорией минимальных изометрических систем (ср. [53, Prop. 2.6.7]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бредон Г.* Введение в теорию компактных групп преобразований. — М.: Наука, 1980.
2. *Де ла Яве Р.* Введение в КАМ-теорию. — Москва—Ижевск: Ин-т комп. иссл., 2003.
3. *Коннер П., Флойд Э.* Гладкие периодические отображения. — М.: Мир, 1969.
4. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.
5. *Мозер Ю.* О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды// Усп. мат. наук. — 1969. — *24*, вып. 2. — С. 165–211.
6. *Моррис С.* Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. — М.: Мир, 1980.
7. *Севрюк М. Б.* Линейные обратимые системы и их версальные деформации// Тр. сем. им. И. Г. Петровского — 1991. — вып. 15. — С. 33–54.
8. *Севрюк М. Б.* Некоторые проблемы теории КАМ: условно-периодические движения в типичных системах// Усп. мат. наук. — 1995. — *50*, вып. 2. — С. 111–124.
9. *Севрюк М. Б.* Частичное сохранение частот и показателей Флоке в теории КАМ// Тр. МИАН. — 2007. — *259*. — С. 174–202.
10. *Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I.* Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. — Berlin: Springer-Verlag, 2006.[1]
11. *Bredon G. E.* Introduction to Compact Transformation Groups. — New York: Academic Press, 1972.
12. *Broer H. W., Ciocci M. C., Hanßmann H., Vanderbauwhede A.* Quasi-periodic stability of normally resonant tori// Phys. D. — 2009. — *238*, № 3. — С. 309–318.
13. *Broer H. W., Hoo J., Naudot V.* Normal linear stability of quasi-periodic tori// J. Differ. Equ. — 2007. — *232*, № 2. — С. 355–418.
14. *Broer H. W., Huitema G. B.* Unfoldings of quasi-periodic tori in reversible systems// J. Dynam. Differ. Equ. — 1995. — *7*, № 1. — С. 191–212.
15. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Families of quasi-periodic motions in dynamical systems depending on parameters// В сб.: «Nonlinear Dynamical Systems and Chaos». — Basel: Birkhäuser, 1996. — С. 171–211.
16. *Broer H. W., Huitema G. B., Sevryuk M. B.* Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Order amidst Chaos. — Berlin: Springer, 1996.

[1]Существующие русские издания этой книги, даже последнее: *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: Едиториал УРСС, 2017 — гораздо менее полны.

17. *Broer H. W., Huitema G. B., Takens F.* Unfoldings of quasi-periodic tori// Mem. Am. Math. Soc. — 1990. — *83*, № 421. — С. 1–81.
18. *Broer H. W., Sevryuk M. B.* KAM theory: Quasi-periodicity in dynamical systems// В сб.: «Handbook of Dynamical Systems», Vol. 3. — Amsterdam: Elsevier, 2010. — С. 249–344.
19. *Calleja R. C., Celletti A., de la Llave R.* Domains of analyticity and Lindstedt expansions of KAM tori in some dissipative perturbations of Hamiltonian systems// Nonlinearity. — 2017. — *30*, № 8. — С. 3151–3202.
20. *Chow S.-N., Li Y., Yi Y.* Persistence of invariant tori on submanifolds in Hamiltonian systems// J. Nonlinear Sci. — 2002. — *12*, № 6. — С. 585–617.
21. *Conner P. E., Floyd E. E.* Differentiable Periodic Maps. — New York: Academic Press, Berlin: Springer, 1964.
22. *De la Llave R.* A tutorial on KAM theory// Proc. Symp. Pure Math. — 2001. — *69*. — С. 175–292.
23. *Dumas H. S.* The KAM Story. A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov—Arnold—Moser Theory. — Hackensack: World Scientific, 2014.[1]
24. *González-Enríquez A., Haro À., de la Llave R.* Singularity theory for non-twist KAM tori// Mem. Am. Math. Soc. — 2014. — *227*, № 1067. — С. 1–115.
25. *Hanßmann H.* Non-degeneracy conditions in KAM theory// Indag. Math. (N. S.). — 2011. — *22*, № 3-4. — С. 241–256.
26. *Haro À., Canadell M., Figueras J.-L., Luque A., Mondelo J.-M.* The Parameterization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations. — Cham: Springer, 2016.
27. *Hoveijn I.* Versal deformations and normal forms for reversible and Hamiltonian linear systems// J. Differ. Equ. — 1996. — *126*, № 2. — С. 408–442.
28. *Kong Y., Xu J.* Persistence of lower dimensional hyperbolic tori for reversible system// Appl. Math. Comput. — 2014. — *236*. — С. 408–421.
29. *Lamb J. S. W., Roberts J. A. G.* Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey// Phys. D. — 1998. — *112*, № 1-2. — С. 1–39.
30. *Li Y., Yi Y.* Persistence of hyperbolic tori in Hamiltonian systems// J. Differ. Equ. — 2005. — *208*, № 2. — С. 344–387.
31. *Liu Zh.* Persistence of lower dimensional invariant tori on sub-manifolds in Hamiltonian systems// Nonlinear Anal. — 2005. — *61*, № 8. — С. 1319–1342.
32. *Marsden J. E., McCracken M.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. — New York: Springer, 1976.
33. *Montgomery D., Zippin L.* Topological Transformation Groups. — Huntington: R. E. Krieger Publishing, 1974.
34. *Morris S. A.* Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1977.
35. *Moser J.* Convergent series expansions for quasi-periodic motions// Math. Ann. — 1967. — *169*, № 1. — С. 136–176.
36. *Quispel G. R. W., Sevryuk M. B.* KAM theorems for the product of two involutions of different types// Chaos. — 1993. — *3*, № 4. — С. 757–769.
37. *Roberts J. A. G., Quispel G. R. W.* Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems// Phys. Rep. — 1992. — *216*, № 2-3. — С. 63–177.
38. *Rüssmann H.* Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems// Regul. Chaotic Dyn. — 2001. — *6*, № 2. — С. 119–204.
39. *Rüssmann H.* Addendum to «Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems»// Regul. Chaotic Dyn. — 2005. — *10*, № 1. — С. 21–31.
40. *Sevryuk M. B.* Reversible Systems. — Berlin: Springer, 1986.
41. *Sevryuk M. B.* The iteration-approximation decoupling in the reversible KAM theory// Chaos. — 1995. — *5*, № 3. — С. 552–565.
42. *Sevryuk M. B.* Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in Hamiltonian systems// В сб.: «Topics in Singularity Theory». — Providence: Am. Math. Soc., 1997. — С. 209–218.
43. *Sevryuk M. B.* Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in volume preserving flows// В сб.: «Global Analysis of Dynamical Systems». — Bristol: Inst. Phys., 2001. — С. 339–352.
44. *Sevryuk M. B.* Partial preservation of frequencies in KAM theory// Nonlinearity. — 2006. — *19*, № 5. — С. 1099–1140.
45. *Sevryuk M. B.* Invariant tori in quasi-periodic non-autonomous dynamical systems via Herman's method// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2007. — *18*, № 2-3. — С. 569–595.
46. *Sevryuk M. B.* KAM tori: persistence and smoothness// Nonlinearity. — 2008. — *21*, № 10. — С. T177–T185.

[1]Готовится русский перевод в издательстве «Ижевский институт компьютерных исследований».

47. *Sevryuk M. B.* The reversible context 2 in KAM theory: the first steps// Regul. Chaotic Dyn. — 2011. — *16*, № 1-2. — С. 24–38.
48. *Sevryuk M. B.* KAM theory for lower dimensional tori within the reversible context 2// Mosc. Math. J. — 2012. — *12*, № 2. — С. 435–455.
49. *Sevryuk M. B.* Quasi-periodic perturbations within the reversible context 2 in KAM theory// Indag. Math. (N. S.). — 2012. — *23*, № 3. — С. 137–150.
50. *Sevryuk M. B.* Whitney smooth families of invariant tori within the reversible context 2 of KAM theory// Regul. Chaotic Dyn. — 2016. — *21*, № 6. — С. 599–620.
51. *Sevryuk M. B.* Herman's approach to quasi-periodic perturbations in the reversible KAM context 2// Mosc. Math. J. — 2017. — *17*, № 4. — С. 803–823.
52. *Shih C. W.* Normal forms and versal deformations of linear involutive dynamical systems// Chinese J. Math. — 1993. — *21*, № 4. — С. 333–347.
53. *Tao T.* Poincaré's Legacies, Pages from Year Two of a Mathematical Blog. Part I. — Providence: Am. Math. Soc., 2009.
54. *Tits J.* Œuvres/Collected Works. Vol. IV. — Zürich: Eur. Math. Soc., 2013.
55. *Wagener F.* A parametrised version of Moser's modifying terms theorem// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2010. — *3*, № 4. — С. 719–768.
56. *Wang X., Xu J., Zhang D.* Persistence of lower dimensional elliptic invariant tori for a class of nearly integrable reversible systems// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2010. — *14*, № 3. — С. 1237–1249.
57. *Wang X., Xu J., Zhang D.* A new KAM theorem for the hyperbolic lower dimensional tori in reversible systems// Acta Appl. Math. — 2016. — *143*. — С. 45–61.
58. *Wang X., Xu J., Zhang D.* A KAM theorem for the elliptic lower dimensional tori with one normal frequency in reversible systems// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2017. — *37*, № 4. — С. 2141–2160.
59. *Xu J., Lu X.* General KAM theorems and their applications to invariant tori with prescribed frequencies// Regul. Chaotic Dyn. — 2016. — *21*, № 1. — С. 107–125.
60. *Yoccoz J.-C.* Travaux de Herman sur les tores invariants// Astérisque. — 1992. — *206*. — С. 311–344.
61. *Zhang D., Xu J., Wu H.* On invariant tori with prescribed frequency in Hamiltonian systems// Adv. Nonlinear Stud. — 2016. — *16*, № 4. — С. 719–735.

Михаил Борисович Севрюк
Институт энергетических проблем химической физики им. В. Л. Тальрозе РАН,
РФ, 119334, г. Москва, Ленинский проспект, д. 38, корп. 2
E-mail: 2421584@mail.ru, sevryuk@mccme.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-516-541 UDC 517.925.52

Partial Preservation of Frequencies and Floquet Exponents of Invariant Tori in the Reversible KAM Context 2

 M. B. Sevryuk

Abstract. We consider the persistence of smooth families of invariant tori in the reversible context 2 of KAM theory under various weak nondegeneracy conditions via Herman's method. The reversible KAM context 2 refers to the situation where the dimension of the fixed point manifold of the reversing involution is less than half the codimension of the invariant torus in question. The nondegeneracy conditions we employ ensure the preservation of any prescribed subsets of the frequencies of the unperturbed tori and of their Floquet exponents (the eigenvalues of the coefficient matrix of the variational equation along the torus).

REFERENCES

1. G. E. Bredon, *Vvedenie v teoriyu kompaktnykh grupp preobrazovaniy* [Introduction to Compact Transformation Groups], Nauka, Moscow, 1980 (Russian translation).

2. R. de la Llave, *Vvedenie v KAM-teoriyu* [A tutorial on KAM theory], In-t komp. issl., Moscow–Izhevsk, 2003 (Russian translation).
3. P. E. Conner and E. E. Floyd, *Gladkie periodicheskie otobrazheniya* [Smooth Periodic Mappings], Mir, Moscow, 1969 (Russian translation).
4. J. E. Marsden and M. McCracken, *Bifurkatsiya rozhdeniya tsikla i ee prilozheniya* [The Hopf Bifurcation and Its Applications], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
5. J. Moser, "O razlozhenii uslovno-periodicheskikh dvizheniy v skhodyashchiesya stepennye ryady" [On the expansion of quasi-periodic motions in convergent power series], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1969, **24**, vyp. 2, 165–211 (in Russian).
6. S. Morris, *Dvoystvennost' Pontryagina i stroenie lokal'no kompaktnykh abelevykh grupp* [Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
7. M. B. Sevryuk, "Lineynye obratimye sistemy i ikh versal'nye deformatsii" [Linear reversible systems and their versal deformations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1991, vyp. 15, 33–54 (in Russian).
8. M. B. Sevryuk, "Nekotorye problemy teorii KAM: uslovno-periodicheskie dvizheniya v tipichnykh sistemakh" [Some problems of the KAM-theory: conditionally-periodic motions in typical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1995, **50**, vyp. 2, 111–124 (in Russian).
9. M. B. Sevryuk, "Chastichnoe sokhranenie chastot i pokazateley Floke v teorii KAM" [Partial preservation of frequencies and Floquet exponents in KAM theory], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2007, **259**, 174–202 (in Russian).
10. V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
11. G. E. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New York, 1972.
12. H. W. Broer, M. C. Ciocci, H. Hanßmann, and A. Vanderbauwhede, "Quasi-periodic stability of normally resonant tori," *Phys. D*, 2009, **238**, No. 3, 309–318.
13. H. W. Broer, J. Hoo, and V. Naudot, "Normal linear stability of quasi-periodic tori," *J. Differ. Equ.*, 2007, **232**, No. 2, 355–418.
14. H. W. Broer and G. B. Huitema, "Unfoldings of quasi-periodic tori in reversible systems," *J. Dynam. Differ. Equ.*, 1995, **7**, No. 1, 191–212.
15. H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk, "Families of quasi-periodic motions in dynamical systems depending on parameters," In: *Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Birkhäuser, Basel, 1996, 171–211.
16. H. W. Broer, G. B. Huitema, and M. B. Sevryuk, *Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Order amidst Chaos*, Springer, Berlin, 1996.
17. H. W. Broer, G. B. Huitema, and F. Takens, "Unfoldings of quasi-periodic tori," *Mem. Am. Math. Soc.*, 1990, **83**, No. 421, 1–81.
18. H. W. Broer and M. B. Sevryuk "KAM theory: Quasi-periodicity in dynamical systems," In: *Handbook of Dynamical Systems, Vol.* 3, Elsevier, Amsterdam, 2010, 249–344.
19. R. C. Calleja, A. Celletti, and R. de la Llave, "Domains of analyticity and Lindstedt expansions of KAM tori in some dissipative perturbations of Hamiltonian systems," *Nonlinearity*, 2017, **30**, No. 8, 3151–3202.
20. S.-N. Chow, Y. Li, and Y. Yi, "Persistence of invariant tori on submanifolds in Hamiltonian systems," *J. Nonlinear Sci.*, 2002, **12**, No. 6, 585–617.
21. P. E. Conner and E. E. Floyd, *Differentiable Periodic Maps*, Academic Press, New York; Springer, Berlin, 1964.
22. R. De la Llave, "A tutorial on KAM theory," *Proc. Symp. Pure Math.*, 2001, **69**, 175–292.
23. H. S. Dumas, *The KAM Story. A Friendly Introduction to the Content, History, and Significance of Classical Kolmogorov–Arnold–Moser Theory*, World Scientific, Hackensack, 2014.
24. A. González-Enríquez, Haro À., and R. de la Llave, "Singularity theory for non-twist KAM tori," *Mem. Am. Math. Soc.*, 2014, **227**, No. 1067, 1–115.
25. H. Hanßmann, "Non-degeneracy conditions in KAM theory," *Indag. Math.* (*N. S.*), 2011, **22**, No. 3-4, 241–256.
26. Haro À., M. Canadell, J.-L. Figueras, A. Luque, and J.-M. Mondelo, *The Parameterization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations*, Springer, Cham, 2016.
27. I. Hoveijn, "Versal deformations and normal forms for reversible and Hamiltonian linear systems," *J. Differ. Equ.*, 1996, **126**, No. 2, 408–442.

28. Y. Kong and J. Xu, "Persistence of lower dimensional hyperbolic tori for reversible system," *Appl. Math. Comput.*, 2014, **236**, 408–421.
29. J. S. W. Lamb and J. A. G. Roberts, "Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey," *Phys. D*, 1998, **112**, No. 1-2, 1–39.
30. Y. Li and Y. Yi, "Persistence of hyperbolic tori in Hamiltonian systems," *J. Differ. Equ.*, 2005, **208**, No. 2, 344–387.
31. Zh. Liu, "Persistence of lower dimensional invariant tori on sub-manifolds in Hamiltonian systems," *Nonlinear Anal.*, 2005, **61**, No. 8, 1319–1342.
32. J. E. Marsden and M. McCracken, *The Hopf Bifurcation and Its Applications*, Springer, New York, 1976.
33. D. Montgomery and L. Zippin, *Topological Transformation Groups*, R. E. Krieger Publishing, Huntington, 1974.
34. S. A. Morris, *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1977.
35. J. Moser, "Convergent series expansions for quasi-periodic motions," *Math. Ann.*, 1967, **169**, No. 1, 136–176.
36. G. R. W. Quispel and M. B. Sevryuk, "KAM theorems for the product of two involutions of different types," *Chaos*, 1993, **3**, No. 4, 757–769.
37. J. A. Roberts and G. R. W. Quispel, "Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems," *Phys. Rep.*, 1992, **216**, No. 2-3, 63–177.
38. H. Rüssmann, "Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems," *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, **6**, No. 2, 119–204.
39. H. Rüssmann, "Addendum to «Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems»," *Regul. Chaotic Dyn.*, 2005, **10**, No. 1, 21–31.
40. M. B. Sevryuk, *Reversible Systems*, Springer, Berlin, 1986.
41. M. B. Sevryuk, "The iteration-approximation decoupling in the reversible KAM theory," *Chaos*, 1995, **5**, No. 3, 552–565.
42. M. B. Sevryuk, "Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in Hamiltonian systems," In: *Topics in Singularity Theory*, Am. Math. Soc., Providence, 1997, 209–218.
43. M. B. Sevryuk, "Excitation of elliptic normal modes of invariant tori in volume preserving flows," In: *Global Analysis of Dynamical Systems*, Inst. Phys., Bristol, 2001, 339–352.
44. M. B. Sevryuk, "Partial preservation of frequencies in KAM theory," *Nonlinearity*, 2006, **19**, No. 5, 1099–1140.
45. M. B. Sevryuk, "Invariant tori in quasi-periodic non-autonomous dynamical systems via Herman's method," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2007, **18**, No. 2-3, 569–595.
46. M. B. Sevryuk, "KAM tori: persistence and smoothness," *Nonlinearity*, 2008, **21**, No. 10, T177–T185.
47. M. B. Sevryuk, "The reversible context 2 in KAM theory: the first steps," *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, **16**, No. 1-2, 24–38.
48. M. B. Sevryuk, "KAM theory for lower dimensional tori within the reversible context 2," *Mosc. Math. J.*, 2012, **12**, No. 2, 435–455.
49. M. B. Sevryuk, "Quasi-periodic perturbations within the reversible context 2 in KAM theory," *Indag. Math.* (*N. S.*), 2012, **23**, No. 3, 137–150.
50. M. B. Sevryuk, "Whitney smooth families of invariant tori within the reversible context 2 of KAM theory," *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, **21**, No. 6, 599–620.
51. M. B. Sevryuk, "Herman's approach to quasi-periodic perturbations in the reversible KAM context 2," *Mosc. Math. J.*, 2017, **17**, No. 4, 803–823.
52. C. W. Shih, "Normal forms and versal deformations of linear involutive dynamical systems," *Chinese J. Math.*, 1993, **21**, No. 4, 333–347.
53. T. Tao, *Poincaré's Legacies, Pages from Year Two of a Mathematical Blog. Part I*, Am. Math. Soc., Providence, 2009.
54. J. Tits, *Œuvres/Collected Works. Vol. IV*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2013.
55. F. Wagener, "A parametrised version of Moser's modifying terms theorem," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2010, **3**, No. 4, 719–768.
56. X. Wang, J. Xu, and D. Zhang, "Persistence of lower dimensional elliptic invariant tori for a class of nearly integrable reversible systems," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2010, **14**, No. 3, 1237–1249.
57. X. Wang, J. Xu, and D. Zhang, "A new KAM theorem for the hyperbolic lower dimensional tori in reversible systems," *Acta Appl. Math.*, 2016, **143**, 45–61.

58. X. Wang, J. Xu, D. Zhang, “A KAM theorem for the elliptic lower dimensional tori with one normal frequency in reversible systems,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2017, **37**, No. 4, 2141–2160.
59. J. Xu and X. Lu, “General KAM theorems and their applications to invariant tori with prescribed frequencies,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, **21**, No. 1, 107–125.
60. J.-C. Yoccoz, “Travaux de Herman sur les tores invariants,” *Astérisque*, 1992, **206**, 311–344.
61. D. Zhang, J. Xu, and H. Wu, “On invariant tori with prescribed frequency in Hamiltonian systems,” *Adv. Nonlinear Stud.*, 2016, **16**, No. 4, 719–735.

Mikhail B. Sevryuk
V. L. Talroze Institute of Energy Problems of Chemical Physics of the Russia Academy of Sciences, 38 build. 2 Leninskii Prospect, 119334 Moscow, Russia
E-mail: 2421584@mail.ru, sevryuk@mccme.ru