Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 3 (2017). С. 475–493

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-475-493 УДК 517.956.25

ОБ ЭНТРОПИЙНЫХ РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТЕЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2017 г. **Л. М. КОЖЕВНИКОВА**

Аннотация. Для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с переменными показателями нелинейностей и L_1-правой частью в произвольных неограниченных областях рассматривается задача Дирихле. Доказаны существование и единственность энтропийных решений в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения вида

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, \nabla u))_{x_i} = |u|^{p_0(x)-2}u + a(\mathrm{x}, u), \quad \mathrm{x} \in \Omega; \tag{1}$$

с однородным краевым условием

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2}$$

С конца прошлого столетия ведутся активные исследования нелинейных эллиптических уравнений второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(\mathrm{x}, u, \nabla u) = f \tag{3}$$

с $f \in L_1$ и мерами в качестве правых частей. Слабые решения уравнений вида (3) со степенными нелинейностями во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ с $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ исследовались в работах [14, 21, 23] и др. Существование слабых решений задачи Дирихле в ограниченной области Ω для эллиптических уравнений с правой частью $f \in L_1(\Omega)$ или ограниченной мерой Радона f, соответственно, установлено в работах [19, 20].

Ф. Бенилан, Л. Боккардо, Т. Галле, Р. Гариепи, М. Пьер, Дж. Л. Васкез для эллиптических уравнений со степенными нелинейностями с L_1-правой частью в [16] предложили понятие энтропийного решения задачи Дирихле и доказали его существование и единственность. Вместо энтропийного решения, введенного впервые С. Н. Кружковым [7] для уравнений первого порядка, можно рассматривать также ренормализованное решение. Такие решения являются элементами того же функционального класса, которому принадлежат энтропийные решения, но в отличие от последних удовлетворяют другому семейству интегральных соотношений. В ряде случаев понятия энтропийного и ренормализованного решения эквивалентны.

Свойства суммируемости и оценки энтропийных решений задачи Дирихле в ограниченных областях для нелинейного эллиптического уравнения (3) с условием вырождающейся коэрцитивности установлены А. А. Ковалевским [2]. Существование энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью и L^1-правой частью установлено в работе [9] и, в более общем случае, А. А. Ковалевским в [3].

В работе [18] введено понятие локального энтропийного решения для уравнения с p-лапласианом, поглощением и мерой Радона f:

$$\Delta_p u - |u|^{p_0-2}u = f, \quad p \in (1,n), \quad p < p_0. \tag{4}$$

В частности, М. Ф. Биде-Верон для $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ доказала существование локального энтропийного решения уравнения (4) в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Вопросы существования и единственности ренормализованных и энтропийных решений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями и $f \in L_1(\Omega)$ (Ω — ограниченная область) в пространствах Орлича исследовались в работах [8,17,27]. Теоремы существования и единственности энтропийных решений задачи Дирихле в произвольных областях для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями доказаны автором в [4, 5].

В настоящее время широко изучаются дифференциальные уравнения и вариационные задачи, связанные с условиями $p(\mathrm{x})$-роста. Интерес к исследованию был вызван тем фактом, что такие уравнения могут быть использованы для моделирования явлений, возникающих в математической физике. Электрореологические и термореологические жидкости являются двумя примерами физических полей, для которых востребованы такого рода исследования [28]. Другие важные приложения связаны с обработкой изображений и эластичностью.

В работах [10, 12, 13, 15, 22, 29, 30] для уравнений с переменными показателями нелинейностей доказаны теоремы существования и единственности ренормализованных и энтропийных решений задачи Дирихле в ограниченных областях Ω. Из наиболее близких работ к представленному здесь результату являются [22, 29]. А именно, в работе [22] Б. К. Бонзи, С. Оуаро рассматривали в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, задачу Дирихле с граничным условием (2) для изотропного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, \nabla u))_{x_i} = f + a(u),$$

где $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, \nabla u))_{x_i}$ — оператор типа $p(\mathrm{x})$-лапласиана, $p : \Omega \to (1,\infty)$ — измеримая функция, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная неубывающая функция. Для $f \in L_1(\Omega)$ доказаны существование и единственность энтропийного решения.

С. Оуаро в работе [29] для анизотропного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, u_{x_i}))_{x_i} = f$$

с $f \in L_1(\Omega)$ доказал существование и единственность энтропийного решения задачи Дирихле в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, с граничным условием (2). На каратеодориевы функции $a_i(\mathrm{x}, s) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наложены довольно ограничительные условия. В качестве примера можно взять $a_i(\mathrm{x}, s) = |s|^{p_i(\mathrm{x})-2}s$, $i = 1, \ldots, n$. Здесь $p_i : \overline{\Omega} \to [2, n)$ — непрерывные функции такие, что

$$\frac{\overline{p}^-(n-1)}{n(\overline{p}^- - 1)} < p_i^- < \frac{\overline{p}^-(n-1)}{n - \overline{p}^-}, \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i^-} > 1, \quad \frac{p_i^+ - p_i^- - 1}{p_i^-} < \frac{\overline{p}^- - n}{\overline{p}^-(n-1)},$$

где $\overline{p}^- = n\left(\sum\limits_{i=1}^{n} 1/p_i^-\right)^{-1}$, $p_i^- = \inf\limits_{\mathrm{x}\in\Omega} p_i(\mathrm{x})$, $p_i^+ = \sup\limits_{\mathrm{x}\in\Omega} p_i(\mathrm{x})$, $i = 1, \ldots, n$.

Следует отметить, что имеется немало работ по рассматриваемой тематике с краевым условием Неймана, в том числе и нелинейным (см., например, [25]), здесь мы не будем останавливаться на этих результатах.

Таким образом, в известных автору публикациях результаты установлены для энтропийных и ренормализованных решений эллиптических задач в ограниченных областях (за исключением работ [16, 18]). В настоящей статье доказаны существование и единственность энтропийных решений задачи Дирихле (1), (2) в анизотропных пространствах Соболева с переменными показателями без предположения ограниченности области Ω для существенно более широкого класса уравнений, чем в работах [22, 29] (см. ниже условия (2.1)–(2.7)).

1. Анизотропное пространство Соболева с переменными показателями

Пусть $Q \subsetneq \mathbb{R}^n$ — произвольная область. Обозначим

$$C^+(\overline{Q}) = \{p \in C(\overline{Q}) : \ 1 < p^- \leqslant p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf\limits_{\mathrm{x}\in Q} p(\mathrm{x})$, $\ p^+ = \sup\limits_{\mathrm{x}\in Q} p(\mathrm{x})$.

Пусть $p \in C^+(\overline{Q})$. Справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leqslant |y|^{p(\mathrm{x})} + |z|^{p'(\mathrm{x})}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in Q, \quad p'(\mathrm{x}) = p(\mathrm{x})/(p(\mathrm{x}) - 1), \tag{1.5}$$

кроме того, ввиду выпуклости имеет место неравенство:

$$|y + z|^{p(\mathrm{x})} \leqslant 2^{p^+-1}(|y|^{p(\mathrm{x})} + |z|^{p(\mathrm{x})}), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{x} \in Q. \tag{1.6}$$

Определим лебегово пространство с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(Q)$ как множество измеримых на Q вещественнозначных функций v таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int\limits_Q |v(\mathrm{x})|^{p(\mathrm{x})} d\mathrm{x} < \infty.$$

Норма Люксембурга в пространстве $L_{p(\cdot)}(Q)$ определяется равенством

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \|v\|_{p(\cdot),Q} = \inf\left\{k > 0 \ \middle| \ \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \leqslant 1\right\}.$$

Ниже будут использоваться обозначения $\|v\|_{p(\cdot),\Omega} = \|v\|_{p(\cdot)}$, $\rho_{p(\cdot),\Omega}(v) = \rho_{p(\cdot)}(v)$. Норма пространства $L_p(Q)$ будет обозначаться как $\|v\|_{p,Q}$, причем $\|v\|_{p,\Omega} = \|v\|_p$. Пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством [24].

Для любых $u \in L_{p'(\cdot)}(Q)$, $v \in L_{p(\cdot)}(Q)$ справедливо неравенство Гельдера

$$\left|\int\limits_Q u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})d\mathrm{x}\right| \leqslant 2\|u\|_{p'(\cdot),Q}\|v\|_{p(\cdot),Q}, \tag{1.7}$$

а также имеют место следующие соотношения [24]:

$$\|v\|^{p^-}_{p(\cdot),Q} - 1 \leqslant \rho_{p(\cdot),Q}(v) \leqslant \|v\|^{p^+}_{p(\cdot),Q} + 1, \tag{1.8}$$

$$\left(\rho_{p(\cdot),Q}(v) - 1\right)^{1/p^+} \leqslant \|v\|_{p(\cdot),Q} \leqslant \left(\rho_{p(\cdot),Q}(v) + 1\right)^{1/p^-}. \tag{1.9}$$

Обозначим $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), ..., p_n(\cdot)) \in (C^+(\overline{Q}))^n$ и определим

$$p_+(\mathrm{x}) = \max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in Q.$$

Анизотропное пространство Соболева с переменными показателями $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)} = \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot),Q}.$$

Пространство $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ является рефлексивным банаховым [26].

Пусть

$$\overline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}, \quad p_*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \dfrac{n\overline{p}(\mathrm{x})}{n-\overline{p}(\mathrm{x})}, & \overline{p}(\mathrm{x}) < n, \\ +\infty, & \overline{p}(\mathrm{x}) \geqslant n, \end{cases}$$

$$p_\infty(\mathrm{x}) = \max\{p_*(\mathrm{x}), p_+(\mathrm{x})\}.$$

Приведем теорему вложения для пространства $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ [26, Теорема 2.5].

Лемма 1.1. *Пусть Q — ограниченная область и $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot) = (p_1(\cdot), p_2(\cdot), ..., p_n(\cdot)) \in (C^+(\overline{Q}))^n$. Если $q \in C^+(\overline{Q})$ и*

$$q(\mathrm{x}) < p_\infty(\mathrm{x}) \quad \forall\, \mathrm{x} \in Q, \tag{1.10}$$

то имеет место непрерывное и компактное вложение $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

Замечание 1.1. Интересная особенность пространства Соболева с переменным показателем $W^1_{p(\cdot)}(Q)$ заключается в том, что гладкие функции не плотны в нем без дополнительных предположений о степени $p(\mathrm{x})$. Это было отмечено В. В. Жиковым [1] в связи с эффектом Лаврентьева. Однако, если модуль непрерывности показателя $p(\mathrm{x})$ удовлетворяет логарифмическому условию, то гладкие функции плотны в пространстве $W^1_{p(\cdot)}(Q)$ и нет никакой путаницы в определении пространства Соболева с переменным показателем $\mathring{H}^1_{p(\cdot)}(Q)$ в виде пополнения пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме $\|\nabla\cdot\|_{p(\cdot),Q}$.

2. Предположения и формулировка результатов

Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot) = (p_0(\cdot), p_1(\cdot), ..., p_n(\cdot)) \in (C^+(\overline{\Omega}))^{n+1}$. Будем считать, что

$$p_+(\mathrm{x}) \leqslant p_0(\mathrm{x}) < p_*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{2.1}$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s})$, $a(\mathrm{x}, s_0)$, $i = 1, \ldots, n$, входящие в (1), измеримы по $\mathrm{x} \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$. Функция $a(\mathrm{x}, s_0)$ не убывает по $s_0 \in \mathbb{R}$. Кроме того, существуют положительные числа $\widehat{a}, \overline{a}$ и неотрицательные измеримые функции $\Phi_i \in L_{p_i'(\cdot)}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$|a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s})| \leqslant \widehat{a}(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}))^{1/p_i'(\mathrm{x})} + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{2.2}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0, \quad \mathrm{s} \neq \mathrm{t}; \tag{2.3}$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a}\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \tag{2.4}$$

где $\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|^{p_i(\mathrm{x})}$, $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t}$ обозначает скалярное произведение $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \ldots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s}))$. Кроме того, будем использовать обозначения $\mathrm{P}'(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |s_i|^{p_i'(\mathrm{x})}$, $\mathbf{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}_0, \mathrm{s}) = \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})}$.

Применяя (1.6), из неравенств (2.2) выводим оценки:

$$|a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s})|^{p_i'(\mathrm{x})} \leqslant \widehat{A}\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) + \Psi_i(\mathrm{x}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.2$'$}$$

с неотрицательными измеримыми функциями $\Psi_i \in L_1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$.

Сформулируем дополнительные условия, которые используются в теореме существования. Положим $a(\mathrm{x}, s_0) = a(\mathrm{x}, 0) + b(\mathrm{x}, s_0)$. Будем считать, что

$$a(\mathrm{x}, 0) \in L_1(\Omega), \tag{2.5}$$

$$\sup_{|s_0| \leqslant k} |b(\mathrm{x}, s_0)| = G_k(\mathrm{x}) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega). \tag{2.6}$$

Функция $b(\mathrm{x}, s_0)$ каратеодориева, неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\mathrm{x}, 0) = 0$ для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, поэтому для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\mathrm{x}, s_0)s_0 \geqslant 0. \tag{2.7}$$

Через $\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{p_1(\cdot)}(\Omega)\times\ldots\times L_{p_n(\cdot)}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathrm{v}\|_{\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)}=\|\mathrm{v}\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}=\|v_1\|_{p_1(\cdot)}+\ldots+\|v_n\|_{p_n(\cdot)},$$
$$\mathrm{v}=(v_1,\ldots,v_n)\in\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega).$$

А через $\mathbf{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ обозначим пространство $L_{p_0(\cdot)}(\Omega)\times\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$ с нормой

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)}=\|v_0\|_{p_0(\cdot)}+\|\mathrm{v}\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)},\quad \mathbf{v}=(v_0,v_1,\ldots,v_n)\in\mathbf{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega).$$

Определим пространство Соболева с переменными показателями $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)}=\|v\|_{p_0(\cdot)}+\|v\|_{\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)}.$$

Определим функцию

$$T_k(r)=\begin{cases}k & \text{при } r>k,\\ r & \text{при } |r|\leqslant k,\\ -k & \text{при } r<-k.\end{cases}$$

Введем обозначение $\langle u\rangle=\int\limits_\Omega u d\mathrm{x}$.

Определение 2.1. *Энтропийным решением* задачи (1), (2) называется измеримая функция $u:\Omega\to\mathbb{R}$ такая, что

1. $A(\mathrm{x})=a(\mathrm{x},u)\in L_1(\Omega)$;
2. $T_k(u)\in\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ при всех $k>0$;
3. при всех $k>0$, $\xi(\mathrm{x})\in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\langle(a(\mathrm{x},u)+|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u)T_k(u-\xi)\rangle+\langle\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\xi)\rangle\leqslant 0. \tag{2.8}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.4) *и* u^1,u^2 — *энтропийные решения задачи* (1),(2)*, тогда* $u^1=u^2$ *в* Ω.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.7)*, тогда существует энтропийное решение задачи* (1), (2).

3. Подготовительные сведения

Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Пусть $\chi_G(\mathrm{x})$ — характеристическая функция множества G. Из условия 2 определения энтропийного решения следует, что для любого $k>0$

$$\nabla T_k(u)=\chi_{\{\Omega:|u|<k\}}\nabla u\in\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega). \tag{3.1}$$

Отсюда, применяя (2.2′), устанавливаем, что для любого $k>0$

$$\chi_{\{\Omega:|u|<k\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\in\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega). \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. *Если* u — *энтропийное решение задачи* (1), (2)*, тогда для всех* $k>0$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}}\mathbf{P}(\mathrm{x},u,\nabla u)d\mathrm{x}+k\int\limits_{\{\Omega:|u|\geqslant k\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})-1}d\mathrm{x}\leqslant C_1k. \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно неравенству (2.8) и условию 1 для $\xi=0$ имеем

$$\int\limits_\Omega|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}uT_k(u)d\mathrm{x}+\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u d\mathrm{x}\leqslant-\int\limits_\Omega a(\mathrm{x},u)T_k(u)d\mathrm{x}\leqslant k\|A\|_1.$$

Применяя неравенство (2.4), устанавливаем

$$k\int\limits_{\{\Omega:|u|\geqslant k\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})-1}d\mathrm{x}+\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})}d\mathrm{x}+\overline{a}\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}}\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u)d\mathrm{x}\leqslant k\|A\|_1.$$

Отсюда имеем (3.3). □

Лемма 3.2. *Пусть измеримая функция $v:\Omega\to\mathbb{R}$ такова, что при всех $k>0$ имеем $T_k v\in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{\Omega:|v|\geqslant k\}} |v|^{p_0(\mathrm{x})-1}d\mathrm{x}\leqslant C_2, \tag{3.4}$$

тогда

$$\operatorname{meas}\{\Omega:|v|\geqslant k\}\to 0,\quad k\to\infty; \tag{3.5}$$

$$|v|^{p_0(\mathrm{x})-1}\in L_1(\Omega). \tag{3.6}$$

Доказательство. Включение (3.6) является очевидным следствием (3.4). Кроме того, из неравенства (3.4) следует

$$k^{p_0^- -1}\operatorname{meas}\{\Omega:|v|\geqslant k\}\leqslant C_2,\quad k\geqslant 1,$$

отсюда имеем (3.5). □

Замечание 3.1. Если u — энтропийное решение задачи (1), (2), то из лемм 3.1, 3.2 следует

$$\operatorname{meas}\{\Omega:|u|\geqslant k\}\to 0,\quad k\to\infty; \tag{3.7}$$

$$|u|^{p_0(\mathrm{x})-1}\in L_1(\Omega). \tag{3.8}$$

Лемма 3.3. *Пусть измеримая функция $v:\Omega\to\mathbb{R}$ такова, что при всех $k>0$ имеем $T_k v\in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{\Omega:|v|<k\}} \mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla v)d\mathrm{x}+k\int\limits_{\{\Omega:|v|\geqslant k\}} |v|^{p_0(\mathrm{x})-1}d\mathrm{x}\leqslant C_3 k, \tag{3.9}$$

тогда

$$\operatorname{meas}\{\Omega:\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla v)\geqslant h\}\to 0,\quad h\to\infty. \tag{3.10}$$

Доказательство. Положим $\Phi(k,h)=\operatorname{meas}\{\Omega:|v|\geqslant k,\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla v)\geqslant h\},\ k,h>0$. Выше установлено (см. (3.5)), что

$$\Phi(k,0)\to 0,\quad k\to\infty.$$

Поскольку функция $h\to\Phi(k,h)$ невозрастающая, то для $k,h>0$ справедливы неравенства

$$\Phi(0,h)\leqslant\frac{1}{h}\int\limits_0^h\Phi(0,\varrho)d\varrho\leqslant\Phi(k,0)+\frac{1}{h}\int\limits_0^h(\Phi(0,\varrho)-\Phi(k,\varrho))d\varrho. \tag{3.11}$$

Отметим, что

$$\Phi(0,\varrho)-\Phi(k,\varrho)=\operatorname{meas}\{\Omega:|v|<k,\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla v)\geqslant\varrho\}.$$

Поэтому из (3.9) следует, что

$$\int\limits_0^\infty(\Phi(0,\varrho)-\Phi(k,\varrho))d\varrho=\int\limits_{\{\Omega:|v|<k\}}\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla v)d\mathrm{x}\leqslant C_3 k.$$

Теперь, из (3.11) получаем неравенство

$$\Phi(0,h)\leqslant\Phi(k,0)+C_3k/h.$$

Выбирая k так, чтобы $\Phi(k,0)<\varepsilon$, затем выбирая h, добиваемся неравенства $\Phi(0,h)<2\varepsilon$. Тем самым (3.10) установлено.

□

Лемма 3.4. *Пусть $p\in C^+(\overline{\Omega})$, $v^m(\mathrm{x}),\ m\in\mathbb{N},\ v$ — такие функции из $L_{p(\cdot)}(\Omega)$, что $\{v^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ ограничена в $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ и*

$$v^m\to v,\quad m\to\infty,\quad \text{п.в. в}\quad\Omega,$$

тогда $v^m\rightharpoonup v$ слабо в $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ при $m\to\infty$.

Доказательство леммы 3.4 для ограниченной области проведено в [11], для неограниченной области оно также справедливо.

Лемма 3.5. *Если u является энтропийным решением задачи* (1), (2), *то неравенство* (2.8) *справедливо для любой функции* $\xi \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$.

Доказательство. По определению пространства $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ существует последовательность $\xi^m \in C_0^\infty(\Omega)$, ограниченная в $L_\infty(\Omega)$, такая, что $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ в $\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, $\xi^m \to \xi$ в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega)$ при $m \to \infty$. Отсюда следует сходимость $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $m \to \infty$, а значит можно выделить подпоследовательность (обозначим ее так же) такую, что $\xi^m \to \xi$, $\nabla\xi^m \to \nabla\xi$ п.в. в Ω. Тогда для любого $k > 0$ имеют место сходимости:

$$T_k(u-\xi^m) \to T_k(u-\xi), \quad \nabla T_k(u-\xi^m) \to \nabla T_k(u-\xi), \quad m\to\infty, \quad \text{п.в.} \quad \text{в} \quad \Omega. \tag{3.12}$$

Пусть $\widehat{k} = k + \sup\limits_{m\in\mathbb{N}}(\|\xi^m\|_\infty, \|\xi\|_\infty)$, тогда

$$|\nabla T_k(u-\xi^m)| \leqslant |\nabla T_{\widehat{k}}(u)| + |\nabla\xi^m|, \quad \mathrm{x}\in\Omega, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Поскольку сходящаяся последовательность $\nabla\xi^m$ ограничена в $\mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega)$, то отсюда, согласно (3.1), следует ограниченность норм $\|\nabla T_k(u-\xi^m)\|_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}$, $m \in \mathbb{N}$. Применяя (3.12), пользуясь леммой 3.4, при любом $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(u-\xi^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u-\xi), \quad m\to\infty, \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(\Omega). \tag{3.13}$$

Теперь перейдем к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве

$$\int\limits_\Omega (a(\mathrm{x},u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u) T_k(u-\xi^m)d\mathrm{x} + \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla T_k(u-\xi^m)d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Поскольку $a(\mathrm{x},u)$, $|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u \in L_1(\Omega)$ (см. определение 2.1 и (3.8)), то в первом слагаемом, применяя (3.12), согласно теореме Лебега, можно перейти к пределу при $m \to \infty$. Ввиду того, что $\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<\widehat{k}\}} \in \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega)$ (см. (3.2)), применяя (3.13), устанавливаем, что второе слагаемое последнего неравенства также имеет предел при $k \to \infty$. □

Замечание 3.2. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа «из последовательности u^m можно выделить подпоследовательность (обозначим ее так же) сходящуюся п.в. в Ω при $m \to \infty$» будем писать просто «последовательность u^m выборочно сходится п.в. в Ω при $m \to \infty$». Соответственно, будем использовать термин «выборочно слабо сходится» и т.п.

Лемма 3.6. *Пусть* $(X, \mathcal{T}, \mathrm{meas})$ — *измеримое пространство такое, что* $\mathrm{meas}(X) < \infty$. *Пусть* $\gamma : X \to [0,+\infty]$ — *измеримая функция такая, что* $\mathrm{meas}\{\mathrm{x}\in X : \gamma(\mathrm{x}) = 0\} = 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что неравенство*

$$\int\limits_Q \gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x} < \delta$$

влечет $\mathrm{meas}\, Q < \varepsilon$ [19, лемма 2].

4. Единственность решения

Рассмотрим при $k, h > 0$ функцию $T_{k,h}(r) = T_k(r - T_h(r))$. Очевидно,

$$T_{k,h}(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r| < h, \\ r - h\,\mathrm{sign}\, r & \text{при } h \leqslant |r| < k+h, \\ k\,\mathrm{sign}\, r & \text{при } |r| \geqslant k+h. \end{cases}$$

Пусть u — энтропийное решение задачи (1), (2). Зафиксировав $k,h>0$, положим в (2.8) $\xi = T_h(u)\in L_\infty(\Omega)\cap \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$. Имеем

$$\int\limits_{\Omega}|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}uT_{k,h}(u)d\mathrm{x}+\int\limits_{\Omega}\mathrm{a}\cdot\nabla T_{k,h}(u)d\mathrm{x}=$$

$$=k\int\limits_{\{\Omega:|u|\geqslant k+h\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})-1}d\mathrm{x}+\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<k+h\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}uT_{k,h}(u)+\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<k+h\}}\mathrm{a}\cdot\nabla u d\mathrm{x}\leqslant$$

$$\leqslant-\int\limits_{\Omega}a(\mathrm{x},u)T_{k,h}(u)d\mathrm{x}\leqslant k\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|\}}|A|d\mathrm{x}.$$

Применяя (2.4), выводим

$$k\int\limits_{\{\Omega:|u|\geqslant k+h\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})-1}d\mathrm{x}+\overline{a}\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<k+h\}}\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u)d\mathrm{x}\leqslant k\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|\}}|A|d\mathrm{x}. \tag{4.1}$$

Поскольку $A\in L_1(\Omega)$, то из (3.7) следует, что правая часть в (4.1) стремится к нулю при $h\to\infty$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть u^1,u^2 — энтропийные решения задачи (1), (2). В неравенстве (2.8) для u^1 положим $\xi=T_h(u^2)$, а для u^2 положим $\xi=T_h(u^1)$, $h>k$. Сложив интегральные неравенства, получим

$$I(h,k)=\int\limits_{\Omega^1(h,k)}\mathrm{A}^1\cdot\nabla(u^1-T_h(u^2))d\mathrm{x}+\int\limits_{\Omega^2(h,k)}\mathrm{A}^2\cdot\nabla(u^2-T_h(u^1))d\mathrm{x}\leqslant \tag{4.2}$$

$$\leqslant-\int\limits_{\Omega(h,k)}(A^1+|u^1|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^1)T_k(u^1-T_h(u^2))d\mathrm{x}-\int\limits_{\Omega(h,k)}(A^2+|u^2|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^2)T_k(u^2-T_h(u^1))d\mathrm{x}=J(h,k).$$

Здесь $\mathrm{A}^i(\mathrm{x})=\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^i)$, $A^i(\mathrm{x})=a(\mathrm{x},u^i)$, $\Omega^i(k,h)=\{\mathrm{x}\in\Omega:\ |u^i-T_h(u^{3-i})|<k\}$, $i=1,2$.

Множества $\Omega^1(h,k),\Omega^2(h,k)$ представляются в виде объединения непересекающихся подмножеств: $\Omega^1(h,k)=\Omega^{12}(h,k)\cup\Omega^1_1(h,k)\cup\Omega^1_2(h,k)$, $\Omega^2(h,k)=\Omega^{12}(h,k)\cup\Omega^2_1(h,k)\cup\Omega^2_2(h,k)$,

$$\Omega^{12}(h,k)=\{\mathrm{x}\in\Omega:\ |u^1-u^2|<k,\,|u^1|<h,\,|u^2|<h\},$$

$$\Omega^i_{3-i}(h,k)=\{\mathrm{x}\in\Omega:\ |u^i-h\ \mathrm{sign}\ u^{3-i}|<k,\,|u^{3-i}|\geqslant h\},\quad i=1,2,$$

$$\Omega^i_i(h,k)=\{\mathrm{x}\in\Omega:\ |u^i-u^{3-i}|<k,\,|u^i|\geqslant h,\,|u^{3-i}|<h\},\quad i=1,2.$$

Интегралы в левой части (4.2) от функций $\mathrm{A}^i\cdot\nabla(u^i-T_h(u^{3-i}))$, $i=1,2$, по множеству $\Omega^{12}(h,k)$ принимают вид:

$$\int\limits_{\Omega^{12}(h,k)}(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2)\cdot\nabla(u^1-u^2)d\mathrm{x}=I^{12}(h,k). \tag{4.3}$$

Интегралы от функций $\mathrm{A}^i\cdot\nabla(u^i-T_hu^{3-i})$ по множествам $\Omega^i_{3-i}(h,k)$, $i=1,2$, соответственно, благодаря (2.4), неотрицательны:

$$\int\limits_{\Omega^1_2(h,k)}\mathrm{A}^1\cdot\nabla u^1d\mathrm{x}+\int\limits_{\Omega^2_1(h,k)}\mathrm{A}^2\cdot\nabla u^2d\mathrm{x}\geqslant 0. \tag{4.4}$$

Наконец, пользуясь (2.4), получаем:

$$\int\limits_{\Omega^1_1(h,k)}\mathrm{A}^1\cdot\nabla(u^1-u^2)d\mathrm{x}+\int\limits_{\Omega^2_2(h,k)}\mathrm{A}^2\cdot\nabla(u^2-u^1)d\mathrm{x}\geqslant$$

$$\geqslant-\int\limits_{\Omega^1_1(h,k)}\mathrm{A}^1\cdot\nabla u^2d\mathrm{x}-\int\limits_{\Omega^2_2(h,k)}\mathrm{A}^2\cdot\nabla u^1d\mathrm{x}=-I^1_1(h,k)-I^2_2(h,k). \tag{4.5}$$

Соединяя (4.3)–(4.5), устанавливаем оценку

$$I(h,k) \geqslant I^{12}(h,k) - I^3(h,k), \quad I^3(h,k) = I_1^1(h,k) + I_2^2(h,k).$$

Покажем, что $I^3(h,k) \to 0$ при $h \to \infty$. Используя (1.5), оценим интеграл

$$|I_1^1(h,k)| \leqslant \|\chi_{\{\Omega: h \leqslant |u^1| < h+k\}} \mathrm{P}'(\mathrm{x}, \mathrm{A}^1)\|_1 + \|\chi_{\{\Omega: h-k \leqslant |u^2| < h\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^2)\|_1.$$

Применяя (4.1), (3.2), (3.7), устанавливаем, что $I_1^1(h,k) \to 0$ при $h \to \infty$. Аналогично оценивается интеграл $I_2^2(h,k)$.

Очевидно представление: $\Omega = \widetilde{\Omega}^{12}(h) \cup \widetilde{\Omega}^1(h) \cup \widetilde{\Omega}^2(h)$,

$$\widetilde{\Omega}^{12}(h) = \{\mathrm{x} \in \Omega : |u^1| < h, |u^2| < h\}, \quad \widetilde{\Omega}^i(h) = \{\mathrm{x} \in \Omega : |u^i| \geqslant h\}, \quad i = 1, 2.$$

Для интегралов в правой части неравенства (4.2) от функций $-(A^i + |u^i|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^i)T_k(u^i - T_h(u^{3-i}))$, $i = 1, 2$, по множеству $\widetilde{\Omega}^{12}(h)$, ввиду неубывания функций $a(\mathrm{x}, s_0)$, $|s_0|^{p_0(\mathrm{x})-2}s_0$ по s_0, имеем:

$$J^{12}(h) = -\int\limits_{\widetilde{\Omega}^{12}(h)} (a(\mathrm{x}, u^1) - a(\mathrm{x}, u^2) + |u^1|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^1 - |u^2|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^2) T_k(u^1 - u^2) d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Для интегралов от тех же функций по множеству $\widetilde{\Omega}^1(h)$ получаем оценку:

$$|J^1(h)| \leqslant k \int\limits_{\widetilde{\Omega}^1(h)} (|A^1| + |A^2| + |u^1|^{p_0(\mathrm{x})-1} + |u^2|^{p_0(\mathrm{x})-1}) d\mathrm{x}. \tag{4.6}$$

Аналогичная оценка имеет место для интегралов от тех же функций по множеству $\widetilde{\Omega}_2(h)$:

$$|J^2(h)| \leqslant k \int\limits_{\widetilde{\Omega}^2(h)} (|A^1| + |A^2| + |u^1|^{p_0(\mathrm{x})-1} + |u^2|^{p_0(\mathrm{x})-1}) d\mathrm{x}. \tag{4.7}$$

Поскольку $A^1, A^2 \in L_1(\Omega)$, $|u^1|^{p_0(\mathrm{x})-1}, |u^2|^{p_0(\mathrm{x})-1} \in L_1(\Omega)$ и мера множеств $\widetilde{\Omega}^1(h), \widetilde{\Omega}^2(h)$ стремится к нулю при $h \to \infty$ (см. (3.7)), то из оценок (4.6), (4.7) следует, что $\lim\limits_{h\to\infty}(|J^1(h)| + |J^2(h)|) = 0$.

Таким образом, предельный переход в (4.2) дает соотношение

$$\lim_{h\to\infty} I^{12}(h,k) = \lim_{h\to\infty} \int\limits_{\Omega^{12}(h,k)} (\mathrm{A}^1 - \mathrm{A}^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Множество $\Omega^{12}(h,k)$ при $h \to \infty$ сходится к $\widehat{\Omega}^{12}(k) = \{\mathrm{x} \in \Omega \mid |u^1 - u^2| \leqslant k\}$, поэтому при любом $k > 0$ справедливо неравенство

$$\lim_{h\to\infty} I^{12}(h) = \int\limits_{\widehat{\Omega}^{12}(k)} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^1) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^2) \cdot \nabla(u^1 - u^2) d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Это противоречит условию (2.3), поэтому $\nabla(u^1 - u^2) = 0$ п.в. в $\widehat{\Omega}^{12}(k)$ при любом $k > 0$. Отсюда следует, что $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.

□

5. Существование решения

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, \nabla u))_{x_i} - a_0(\mathrm{x}, u) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{5.1}$$

Пусть существуют положительные числа $\widehat{a}, \overline{a}$ и измеримые неотрицательные функции $\phi \in L_1(\Omega)$, $\Phi_i \in L_{p_i'(\cdot)}(\Omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такие, что для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ и любых $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_0(\mathrm{x}, s_0)| \leqslant \widehat{a}|s_0|^{p_0(\mathrm{x})-1} + \Phi_0(\mathrm{x}), \quad |a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s})| \leqslant \widehat{a}(\mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{s}))^{1/p_i'(\mathrm{x})} + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{5.2}$$

$$a_0(\mathrm{x}, s_0)s_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s})s_i \geqslant \overline{a}\mathbf{P}(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - \phi(\mathrm{x}). \tag{5.3}$$

Определение 5.1. *Обобщенным решением* задачи (5.1), (2) назовем функцию $u \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\langle a_0(\mathrm{x}, u)v\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla v\rangle = 0 \tag{5.4}$$

для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$.

В частности, в [6] доказана

Теорема 5.1. *Если выполнены условия* (2.3), (5.2), (5.3), (2.1)*, то существует обобщенное решение задачи* (5.1), (2).

На основе теоремы 5.1 строится

Доказательство теоремы 2.2. Шаг 1. Выберем последовательность функций $A^m(\mathrm{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ так, чтобы

$$A^m(\mathrm{x}) \to A^0(\mathrm{x}) = a(\mathrm{x}, 0), \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_1(\Omega) \tag{5.5}$$

и при этом

$$\|A^m\|_1 \leqslant \|A^0\|_1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, \nabla u))_{x_i} = a_0^m(\mathrm{x}, u), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.7}$$

с функцией $a_0^m(\mathrm{x}, s_0) = A^m(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x}, s_0) + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})-2}s_0$. Здесь $b^m(\mathrm{x}, s_0) = T_m(b(\mathrm{x}, s_0))\chi_{\Omega(m)}$, где $\Omega(m) = \{\mathrm{x} \in \Omega : |\mathrm{x}| < m\}$. Очевидно, что

$$|b^m(\mathrm{x}, s_0)| \leqslant |b(\mathrm{x}, s_0)|, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad s_0 \in \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

Кроме того, применяя (2.7), устанавливаем неравенство

$$b^m(\mathrm{x}, s_0)s_0 \geqslant 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \quad s_0 \in \mathbb{R}. \tag{5.9}$$

Обобщенным решением задачи (5.7), (2) является функция $u^m \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\langle (A^m(\mathrm{x}) + T_m(b(\mathrm{x}, u^m))\chi_{\Omega(m)} + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m)v\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla v\rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.10}$$

для любой функции $v \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$.

Для функций $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})$, $a_0^m(\mathrm{x}, s_0)$ проверим условия (5.2), (5.3). Очевидно, что

$$|b^m(\mathrm{x}, s_0)| = |T_m(b(\mathrm{x}, s_0))|\chi_{\Omega(m)} \leqslant m\chi_{\Omega(m)} \in L_{p_0'(\cdot)}(\Omega),$$

поэтому устанавливаем

$$|a_0^m(\mathrm{x}, s_0)| \leqslant |A^m(\mathrm{x})| + |b^m(\mathrm{x}, s_0)| + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})-1} \leqslant |s_0|^{p_0(\mathrm{x})-1} + \Phi_0^m(\mathrm{x}), \quad \Phi_0^m \in L_{p_0'(\cdot)}(\Omega). \tag{5.11}$$

Из (2.2), (5.11) следуют неравенства (5.2).

Далее, применяя (1.5), (5.9), выводим

$$a_0^m(\mathrm{x}, s_0)s_0 = (A^m(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x}, s_0) + |s_0|^{p_0(\mathrm{x})-2}s_0)s_0 \geqslant |s_0|^{p_0(\mathrm{x})} - \varepsilon|s_0|^{p_0(\mathrm{x})} - C(\varepsilon)|A^m|^{p_0'(\mathrm{x})}.$$

Отсюда, выбирая $\varepsilon < 1$, получаем неравенство

$$a_0^m(\mathrm{x}, s_0)s_0 \geqslant (1 - \varepsilon)|s_0|^{p_0(\mathrm{x})} - \phi_0^m(\mathrm{x}), \quad \phi_0^m(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega). \tag{5.12}$$

Соединяя (2.4), (5.12), устанавливаем неравенство (5.3).

Согласно теореме 5.1 при каждом $m \in \mathbb{N}$ существует $u^m \in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (5.7), (2). Единственность решения задачи (5.7), (2) следует из условия строгой монотонности (2.3) и неубывания функции $a(\mathrm{x}, s_0)$ по $s_0 \in \mathbb{R}$.

Шаг 2. В (5.10) положив $v = T_{k,h}(u^m)$, учитывая (5.9), будем иметь

$$\int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m)\cdot\nabla u^m d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k+h\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m)| + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\right) d\mathrm{x} + \tag{5.13}$$

$$+ \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} \left(b^m(\mathrm{x}, u^m) + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m\right)(u^m - h\operatorname{sign}u^m)d\mathrm{x} \leqslant k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |A^m|d\mathrm{x}.$$

Ввиду (5.9) для $h \leqslant |u^m|$ справедливо неравенство $(b^m(\mathrm{x}, u^m) + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m)(u^m - h\operatorname{sign}u^m) \geqslant 0$. Учитывая это, из (5.13) выводим

$$\int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m)\cdot\nabla u^m d\mathrm{x} +$$

$$+ k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k+h\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m)| + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\right) d\mathrm{x} \leqslant k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |A^m|d\mathrm{x}.$$

С помощью (2.4), согласно (5.6), последнее неравенство приводится к виду:

$$\overline{a} \int\limits_{\{\Omega: h\leqslant|u^m|<k+h\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^m)d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k+h\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m)| + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\right) d\mathrm{x} \leqslant \tag{5.14}$$

$$\leqslant k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |A^m|d\mathrm{x} \leqslant k\|A^0\|_1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теперь в качестве пробной функции в (5.10) возьмем $T_k(u^m)$. Применяя (5.6), устанавливаем

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m)\cdot\nabla u^m d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m)| + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\right) d\mathrm{x} +$$

$$+ \int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} |u^m|^{p_0(\mathrm{x})}d\mathrm{x} \leqslant k\|A^m\|_1 \leqslant k\|A^0\|_1.$$

Отсюда, используя неравенство (2.4), получаем

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^m)d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k\}} \left(|b^m(\mathrm{x}, u^m)| + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\right) d\mathrm{x} +$$

$$+ \int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} |u^m|^{p_0(\mathrm{x})}d\mathrm{x} \leqslant kC_1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.15}$$

Из оценки (5.15) имеем

$$\int\limits_{\Omega} |T_k(u^m)|^{p_0(\mathrm{x})}d\mathrm{x} = \int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} |u^m|^{p_0(\mathrm{x})}d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k\}} k^{p_0(\mathrm{x})}d\mathrm{x} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} |u^m|^{p_0(\mathrm{x})}d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant k\}} |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}d\mathrm{x} \leqslant kC_1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.16}$$

Кроме того, из (5.15) следует оценка

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^m)d\mathrm{x} = \int\limits_{\Omega} \mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m))d\mathrm{x} \leqslant C_1 k, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.17}$$

Ввиду произвольности $k > 0$ из неравенства (5.15) имеем оценку

$$\|b^m(\mathrm{x}, u^m)\|_1 + \||u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\|_1 \leqslant C_1, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{5.18}$$

И наконец, благодаря (5.8), (2.6), устанавливаем:

$$\sup_{|u^m|\leqslant k}(|b^m(\mathrm{x},u^m)|+|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1})\leqslant \sup_{|u^m|\leqslant k}|b(\mathrm{x},u^m)|+k^{p_0^+-1}+1= \tag{5.19}$$
$$=G_k(\mathrm{x})+k^{p_0^+-1}+1\in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega),\quad m\in\mathbb{N}.$$

Шаг 3. Из (5.15), согласно лемме 3.2, имеем:

$$\mathrm{meas}\,(\Omega:|u^m|\geqslant h)\to 0,\quad h\to\infty,\quad \text{равномерно по } m\in\mathbb{N}. \tag{5.20}$$

Установим сходимость:

$$u^m\to u,\quad m\to\infty,\quad \text{п.в. в}\quad \Omega. \tag{5.21}$$

Пусть $\eta_R(r)=\min(1,\max(0,R+1-r))$. Из оценки (5.17), применяя (1.6), выводим:

$$\int\limits_{\Omega}\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla(\eta_R(|\mathrm{x}|)T_k(u^m)))d\mathrm{x}\leqslant C_2\int\limits_{\{\Omega:|u^m|<k\}}\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u^m)d\mathrm{x}+C_2\int\limits_{\Omega}\mathrm{P}(\mathrm{x},T_k(u^m)\nabla\eta_R(|\mathrm{x}|))d\mathrm{x}\leqslant$$
$$\leqslant C_3(k,R),\quad m\in\mathbb{N}.$$

Отсюда, при любых фиксированных $k,R>0$ следует ограниченность последовательности $\{\eta_R(|\mathrm{x}|)T_k(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega(R+1))$. По лемме 1.1, согласно условию (2.1), пространство $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega(R+1))$ компактно вложено в пространство $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R+1))$. Таким образом, для любых фиксированных $k,R>0$ установлена выборочная сходимость $\eta_R(|\mathrm{x}|)T_k(u^m)\to v_k$ в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R+1))$ при $m\to\infty$. Отсюда следует сходимость $T_k(u^m)\to v_k$ в $L_{p_0(\cdot)}(\Omega(R))$, а также выборочная сходимость $T_k(u^m)\to v_k$ почти всюду в $\Omega(R)$ при $m\to\infty$ для $k\in\mathbb{N}$. Диагональным процессом устанавливается, что найдется измеримая функция $u:\Omega\to\mathbb{R}$ такая, что $v_k=T_k(u)$ и $u^m\to u$ п.в. в $\Omega(R)$ для любого $R>0$. Отсюда следует сходимость (5.21).

Из сходимости $u^m\to u$ п.в. в $\Omega(R)$ для любого $R>0$ следует сходимость по мере, а значит и фундаментальность u^m по мере:

$$\mathrm{meas}\,\{\Omega(R):|u^m-u^l|\geqslant\nu\}\to 0\quad\text{при}\quad m,l\to\infty\quad\text{для любого}\quad\nu>0. \tag{5.22}$$

Шаг 4. Из (5.17), (2.2′) при любом $k>0$ имеем оценку:

$$\|\mathrm{P}'(\mathrm{x},\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m))\chi_{\{\Omega:|u^m|<k\}}\|_1\leqslant C_4(k),\quad m\in\mathbb{N}. \tag{5.23}$$

Из неравенства (5.15), согласно лемме 3.3, имеем:

$$\mathrm{meas}\,\{\Omega:\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u^m)\geqslant h\}\to 0\quad\text{при}\quad h\to\infty\quad\text{равномерно по}\quad m\in\mathbb{N}. \tag{5.24}$$

Сначала установим сходимость:

$$\nabla u^m\to\nabla u,\quad m\to\infty,\quad\text{локально по мере}. \tag{5.25}$$

Для $\nu,\theta,h,R>0$ рассмотрим множество

$$E_{\nu,\theta,h}(R)=\{\Omega(R):|u^l-u^m|<\nu,\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u^l)\leqslant h,\ \mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u^m)\leqslant h,\ |u^l|<h,\ |u^m|<h,$$
$$|\nabla(u^l-u^m)|\geqslant\theta\}.$$

Поскольку справедливо включение

$$\{\Omega(R):|\nabla(u^l-u^m)|\geqslant\theta\}\subset\{\Omega:\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u^l)>h\}\cup\{\Omega:\mathrm{P}(\mathrm{x},\nabla u^m)>h\}\cup$$
$$\cup\{\Omega(R):|u^l-u^m|\geqslant\nu\}\cup\{\Omega:|u^l|\geqslant h\}\cup\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}\cup E_{\nu,\theta,h}(R),$$

то, в силу (5.20), (5.24), выбором h добьемся неравенств

$$\mathrm{meas}\,\{\Omega(R):|\nabla(u^l-u^m)|\geqslant\theta\}< \tag{5.26}$$
$$<4\varepsilon+\mathrm{meas}\,E_{\nu,\theta,h}(R)+\mathrm{meas}\,\{\Omega(R):|u^l-u^m|\geqslant\nu\},\quad m,l\in\mathbb{N}.$$

По условию монотонности (2.3) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(\mathrm{x})>0$ п.в. в Ω такая, что при $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{s})\leqslant h$, $\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{t})\leqslant h$, $|\mathrm{s}-\mathrm{t}|\geqslant\theta$ справедливо неравенство

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})-\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{t}))\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{t})\geqslant\gamma(\mathrm{x}). \tag{5.27}$$

Введем обозначение $A_0^m(\mathrm{x}) = a_0^m(\mathrm{x}, u^m) = A^m(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x}, u^m) + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m$. Из (5.6), (5.18) следует ограниченность последовательности $\{A_0^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Запишем (5.10) дважды для u^m и u^l и вычтем из первого второе; получим

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big) \cdot \nabla v d\mathrm{x} + \int\limits_{\Omega} (A_0^m - A_0^l) v d\mathrm{x} = 0.$$

Подставляя пробную функцию $v = \eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|)T_\nu(u^m - u^l)$, устанавливаем соотношение

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big) \cdot \nabla(\eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|)T_\nu(u^m - u^l))d\mathrm{x} =$$
$$= -\int\limits_{\Omega} (A_0^m - A_0^l)\eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|)T_\nu(u^m - u^l)d\mathrm{x} \leqslant C_5\nu, \quad m, l \in \mathbb{N}. \tag{5.28}$$

Далее, применяя (5.27), выводим

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}(R)} \gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{E_{\nu,\theta,h}(R)} \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big) \cdot \nabla(u^m - u^l)d\mathrm{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\{\Omega:|u^m-u^l|<\nu\}} \eta_R(|\mathrm{x}|)\eta_h(|u^l|)\eta_h(|u^m|)(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l))\nabla(u^m - u^l)d\mathrm{x}. \tag{5.29}$$

Соединяя (5.29), (5.28), применяя (1.5), (5.17), (5.23), получаем

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}(R)} \gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega:|u^m|<h+1,|\mathrm{x}|<R+1\}} |a_i(\mathrm{x}, \nabla u^m)||T_\nu(u^m - u^l)|d\mathrm{x} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega:|u^l|<h+1,|\mathrm{x}|<R+1\}} |a_i(\mathrm{x}, \nabla u^l)||T_\nu(u^m - u^l)|d\mathrm{x} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega:h<|u^l|<h+1,|u^m|<h+1\}} (|a_i(\mathrm{x}, \nabla u^m)| + |a_i(\mathrm{x}, \nabla u^l)|)|u^l_{x_i}||T_\nu(u^m - u^l)|d\mathrm{x} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\{\Omega:h<|u^m|<h+1,|u^l|<h+1\}} (|a_i(\mathrm{x}, \nabla u^m)| + |a_i(\mathrm{x}, \nabla u^l)|)|u^m_{x_i}||T_\nu(u^m - u^l)|d\mathrm{x} + C_5\nu \leqslant \tag{5.30}$$
$$\leqslant \nu(3\|\mathrm{P}'(\mathrm{x}, \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m))\chi_{\{\Omega:|u^m|<h+1\}}\|_1 + 3\|\mathrm{P}'(\mathrm{x}, \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l))\chi_{\{\Omega:|u^l|<h+1\}}\|_1 +$$
$$+ 2\|\mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^m)\chi_{\{\Omega:|u^m|<h+1\}}\|_1 + 2\|\mathrm{P}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\chi_{\{\Omega:|u^l|<h+1\}}\|_1 + C_6(R)) \leqslant C_7(R, h)\nu.$$

Для произвольного $\delta > 0$ при фиксированных R, h выбором ν из (5.30) устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}(R)} \gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x} < \delta.$$

Применяя лемму 3.6, для любого $\varepsilon > 0$ выводим

$$\operatorname{meas} E_{\nu,\theta,h}(R) < \varepsilon. \tag{5.31}$$

Кроме того, согласно (5.22), можно выбрать $m_0(\nu, R, \varepsilon)$ такое, что

$$\operatorname{meas}\{\Omega(R) : |u^l - u^m| \geqslant \nu\} < \varepsilon, \quad m, l \geqslant m_0. \tag{5.32}$$

Соединяя (5.26), (5.31), (5.32), в итоге для любого $\theta > 0$ выводим неравенство

$$\operatorname{meas}\{\Omega(R) : |\nabla(u^l - u^m)| \geqslant \theta\} < 6\varepsilon, \quad m, l \geqslant m_0.$$

Отсюда следует фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ на множестве $\Omega(R)$ при любом $R>0$, это влечет сходимость (5.25), а также выборочную сходимость:

$$\nabla u^m \to \nabla u, \quad m\to\infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.33}$$

Шаг 5. Докажем, что

$$|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m \to |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u, \quad b^m(\mathrm{x},u^m)\to b(\mathrm{x},u), \quad m\to\infty, \quad \text{в} \quad L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega), \tag{5.34}$$

$$|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m \to |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u, \quad b^m(\mathrm{x},u^m)\to b(\mathrm{x},u), \quad m\to\infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{5.35}$$

Из (5.14) при $k=h$ имеем:

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant 2h\}} \left(|b^m(\mathrm{x},u^m)|+|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\right)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |A^m-A^0|d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |A^0|d\mathrm{x}, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Ввиду включения $A^0\in L_1(\Omega)$, сходимости (5.5) и абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства, учитывая (5.20), для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать достаточно большое h такое, что:

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant 2h\}} \left(|b^m(\mathrm{x},u^m)|+|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-1}\right)d\mathrm{x} < \varepsilon, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{5.36}$$

Из непрерывности $b(\mathrm{x},s_0)$ по s_0 и сходимости (5.21) следует, что при фиксированном h имеют место сходимости

$$\chi_{\{\Omega:|u^m|<2h\}}|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m \to \chi_{\{\Omega:|u|\leqslant 2h\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u, \quad m\to\infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega,$$

$$\chi_{\{\Omega:|u^m|<2h\}}b^m(\mathrm{x},u^m) \to \chi_{\{\Omega:|u|\leqslant 2h\}}b(\mathrm{x},u), \quad m\to\infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Пусть K — произвольное компактное подмножество Ω. Ввиду (5.19), применяя теорему Лебега, устанавливаем сходимости

$$\chi_{\{\Omega:|u^m|<2k\}}|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m \to \chi_{\{\Omega:|u|\leqslant 2k\}}|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u, \quad m\to\infty, \quad \text{в} \quad L_1(K),$$

$$\chi_{\{\Omega:|u^m|<2k\}}b^m(\mathrm{x},u^m) \to \chi_{\{\Omega:|u|\leqslant 2k\}}b(\mathrm{x},u), \quad m\to\infty, \quad \text{в} \quad L_1(K).$$

Отсюда, учитывая (5.36), получаем (5.34).

Из оценки (5.18), ввиду (5.35), согласно теореме Фату заключаем, что $b(\mathrm{x},u)$, $|u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u\in L_1(\Omega)$, отсюда из (2.5) вытекает справедливость условия 1 определения 2.1.

Шаг 6. Покажем, что $T_k(u)\in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ для любого $k>0$. Соединяя (5.16), (5.17), (1.9) для любого фиксированного $k>0$, выводим оценку

$$\|T_k u^m\|_{\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{n}\|D_{x_i}T_k(u^m)\|_{p_i(\cdot)} \leqslant \sum_{i=0}^{n}\left(1+\int\limits_{\Omega}|D_{x_i}T_k(u^m))_{x_i}|^{p_i(\mathrm{x})}d\mathrm{x}\right)^{1/p_i^-} \leqslant C_8(k), \quad m\in\mathbb{N}.$$

Рефлексивность пространства $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ позволяет выделить слабо сходящуюся в $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ подпоследовательность $T_k u^m \rightharpoonup v$, $m\to\infty$, причем $v\in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$. Непрерывность естественного отображения $\mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)\to \mathbf{L}_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$ влечет слабую сходимость

$$T_k(u^m)\rightharpoonup v, \quad m\to\infty, \quad \text{в} \quad L_{p_0(\cdot)}(\Omega). \tag{5.37}$$

Пользуясь сходимостью (5.21), применяя лемму 3.4, для любого фиксированного $k>0$ имеем слабую сходимость

$$T_k(u^m)\rightharpoonup T_k(u), \quad m\to\infty, \quad \text{в} \quad L_{p_0(\cdot)}(\Omega). \tag{5.38}$$

Из (5.37), (5.38) следует равенство $v=T_k u\in \mathring{W}^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(\Omega)$.

Шаг 7. Чтобы доказать (2.8), возьмем пробную функцию $v=T_k(u^m-\xi)$, $\xi\in C_0^1(\Omega)$, в тождестве (5.10). Получим

$$\int\limits_{\Omega}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)\cdot\nabla T_k(u^m-\xi)d\mathrm{x} + \int\limits_{\Omega}\left(b^m(\mathrm{x},u^m)+|u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m+A^m\right)T_k(u^m-\xi)d\mathrm{x} = I^m+J^m=0.$$

Положим $M = k + \|\xi\|_\infty$. Если $|u^m| \geqslant M$, то $|u^m - \xi| \geqslant |u^m| - \|\xi\|_\infty \geqslant k$, поэтому $\{\Omega : |u^m - \xi| < k\} \subseteq \{\Omega : |u^m| < M\}$, что означает

$$I^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi) d\mathrm{x} = \tag{5.39}$$

$$= \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u^m)) \cdot (\nabla T_M(u^m) - \nabla\xi)\chi_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} d\mathrm{x} = I_1^m - I_2^m.$$

Из сходимостей (5.21), (5.33), ввиду непрерывности функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})$ по s, имеем:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u^m)) \cdot \nabla T_M(u^m)\chi_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} \to \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla T_M(u)\chi_{\{\Omega:|u-\xi|\leqslant k\}}, \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в } \Omega.$$

Кроме того, применяя (5.17), (5.23), (1.5), устанавливаем оценку

$$I_1^m = \int\limits_{\{\Omega:\, |u^m-\xi|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u^m)) \cdot \nabla T_M(u^m) d\mathrm{x} \leqslant C_9(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тогда по лемме Фату имеем:

$$\int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla T_M(u)\chi_{\{\Omega:|u-\xi|\leqslant k\}} d\mathrm{x} \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf I_1^m. \tag{5.40}$$

Из (5.23) следует ограниченность последовательности норм

$$\|\mathrm{P}'(\mathrm{x}, \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u^m))\chi_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}}\|_1 \leqslant \|\mathrm{P}'(\mathrm{x}, \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m))\chi_{\{\Omega:|u^m|<M\}}\|_1 \leqslant C_{10}(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Применяя лемму 3.4, устанавливаем слабую сходимость:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u^m))\chi_{\{\Omega:|u^m-\xi|<k\}} \rightharpoonup \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u))\chi_{\{\Omega:|u-\xi|\leqslant k\}}, \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\overrightarrow{\mathrm{p}}'(\cdot)}(\Omega).$$

Выполняя предельный переход в I_2^m, имеем:

$$\lim_{m\to\infty} I_2^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla\xi\chi_{\{\Omega:|u-\xi|\leqslant k\}} d\mathrm{x}. \tag{5.41}$$

Соединяя (5.39)–(5.41), устанавливаем

$$\lim_{m\to\infty} \inf I^m \geqslant \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_M(u)) \cdot (\nabla T_M(u) - \nabla\xi)\chi_{\{\Omega:|u-\xi|\leqslant k\}} d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla(u - \xi)\chi_{\{\Omega:|u-\xi|\leqslant k\}} d\mathrm{x} = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u - \xi) d\mathrm{x}. \tag{5.42}$$

Ввиду того, что

$$T_k(u^m - \xi) \to T_k(u - \xi), \quad m \to \infty, \quad \text{п.в. в} \quad \Omega;$$

$$|vT_k(u^m - \xi)| \leqslant k|v| \in L_1(\Omega), \quad \forall\, v \in L_1(\Omega), \quad m \in \mathbb{N},$$

согласно теореме Лебега, имеем

$$T_k(u^m - \xi) \overset{*}{\rightharpoonup} T_k(u - \xi), \quad m \to \infty, \quad \text{в} \quad L_\infty(\Omega). \tag{5.43}$$

Интеграл J^m также разобьем на два слагаемых. Первый интеграл

$$J_1^m = \int\limits_\Omega \left(b^m(\mathrm{x}, u^m) + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m\right) T_k(u^m - \xi) d\mathrm{x}$$

оценивается следующим образом. Рассмотрим возрастающую последовательность $\{K^l\}$ компактных подмножеств Ω таких, что $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K^l = \Omega$. Пусть $\operatorname{supp}\xi \subset K^l$, $l \geqslant l_0$, $v^m = u^m - \xi$, $v = u - \xi$,

$c^m(\mathrm{x}, u^m) = b^m(\mathrm{x}, u^m) + |u^m|^{p_0(\mathrm{x})-2}u^m$, $c(\mathrm{x}, u) = b(\mathrm{x}, u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u$. Тогда, учитывая (5.9), при $l \geqslant l_0$ имеем:

$$J_1^m = \int\limits_{\Omega\setminus K^l} c^m(\mathrm{x}, u^m)T_k(u^m)d\mathrm{x} + \int\limits_{K^l} c^m(\mathrm{x}, u^m)T_k(v^m)d\mathrm{x} \geqslant \int\limits_{K^l} c^m(\mathrm{x}, u^m)T_k(v^m)d\mathrm{x} = \overline{J}_1^{lm}.$$

Применяя (5.34), (5.43), переходим к пределу при $m \to \infty$, а затем при $l \to \infty$, получим

$$\int\limits_{\Omega} (b(\mathrm{x}, u) + |u|^{p_0(\mathrm{x})-2}u)T_k(u - \xi)d\mathrm{x} = \lim_{l\to\infty} \lim_{m\to\infty} \overline{J}_1^{lm} \leqslant \lim_{m\to\infty} \inf J_1^m. \tag{5.44}$$

Используя (5.5), (5.43), выполняя предельный переход при $m \to \infty$ во втором интеграле, устанавливаем

$$J_2^m = \int\limits_{\Omega} A^m T_k(u^m - \xi)d\mathrm{x} \to \int\limits_{\Omega} A^0 T_k(u - \xi)d\mathrm{x}. \tag{5.45}$$

Соединяя (5.42), (5.44), (5.45), выводим (2.8).

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жиков В. В.* О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста// Пробл. мат. анализа. — 2011. — *54*. — С. 23–112.
2. *Ковалевский А. А.* Априорные свойства решений нелинейных уравнений с вырождающейся коэрцитивностью и L^1-данными// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — *16*. — С. 47–67.
3. *Ковалевский А. А.* О сходимости функций из соболевского пространства, удовлетворяющих специальным интегральным оценкам// Укр. мат. ж. — 2006. — *58*, № 2. — С. 168–183.
4. *Кожевникова Л. М.* Об энтропийном решении эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — *57*, № 3. — С. 429–447.
5. *Кожевникова Л. М.* Существование энтропийных решений эллиптической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прилож. Темат. обз. — 2017. — *139*. — С. 15–38.
6. *Кожевникова Л. М., Камалетдинов А. Ш.* Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей в неограниченных областях// Вестн. Волоград. гос. ун-та. Сер. 1. Мат. Физ. — 2016. — № 5(36). — С. 29–41.
7. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81*, № 123. — С. 228–255.
8. *Aharouch L., Bennouna J., Touzani A.* Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces// Rev. Mat. Complut. — 2009. — *22*, № 1. — С. 91–110.
9. *Alvino A., Boccardo L., Ferone V., Orsina L., Trombetti G.* Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity// Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 2003. — *182*, № 1. — С. 53–79.
10. *Azroul E., Hjiaj H., Touzani A.* Existence and regularity of entropy solutions for strongly nonlinear $p(x)$-elliptic equations// Electron. J. Differ. Equ. — 2013. — *2013*, № 68. — С. 1–27.
11. *Benboubker M. B., Azroul E., Barbara A.* Quasilinear elliptic problems with nonstandartd growths// Electron. J. Differ. Equ. — 2011. — *2011*, № 62. — С. 1–16.
12. *Benboubker M. B., Chrayteh H., El Moumni M., Hjiaj H.* Entropy and renormalized solutions for nonlinear elliptic problem involving variable exponent and measure data// Acta Math. Sin. (Engl. Ser.). — 2015. — *31*, № 1. — С. 151–169.
13. *Benboubker M. B., Hjiaj H., Ouaro S.* Entropy solutions to nonlinear elliptic anisotropic problem with variable exponent// J. Appl. Anal. Comput. — 2014. — *4*, № 3. — С. 245–270.
14. *Bendahmane M., Karlsen K.* Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data// Potential Anal. — 2005. — *22*, № 3. — С. 207–227.
15. *Bendahmane M., Wittboldb P.* Renormalized solutions for nonlinear elliptic equation with variable exponents and L^1-data// Nonlinear Anal. — 2009. — С. 1–21.
16. *Benilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L.* An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). — 1995. — *22*, № 2. — С. 241–273.
17. *Benkirane A., Bennouna J.* Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces// Abstr. Appl. Anal. — 2002. — *7*, № 2. — С. 85–102.

18. *Bidaut-Veron M. F.* Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data// Adv. Nonlinear Stud. — 2003. — *3*. — С. 25–63.
19. *Boccardo L., Gallouët Th.* Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures// Commun. Part. Differ. Equ. — 1992. — *17*, № 3-4. — С. 641–655.
20. *Boccardo L., Gallouët Th., Marcellini P.* Anisotropic equations in L^1// Differ. Integral Equ. — 1996. — *9*, № 1. — С. 209–212.
21. *Boccardo L., Gallouët T., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in R^N without growth restrictions on the data// J. Differ. Equ. — 1993. — *105*, № 2. — С. 334–363.
22. *Bonzi B. K., Ouaro S.* Entropy solutions for a doubly nonlinear elliptic problem with variable exponent// J. Math. Anal. Appl. — 2010. — *370*. — С. 392–405.
23. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity// Appl. Math. Optim. — 1984. — *12*, № 3. — С. 271–282.
24. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Ruzicka M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2011.
25. *El Hachimi A., Jamea A.* Uniqueness result of entropy solution to nonlinear neumann problems with variable exponent and L^1-data// J. Nonlinear Evol. Equ. Appl. — 2017. — *2017*, № 2. — С. 13–25.
26. *Fan X.* Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations// Complex Var. Elliptic Equ. — 2011. — *56*, № 7–9. — С. 623–642.
27. *Gwiazda P., Wittbold P., Wróblewska A., Zimmermann A.* Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces// J. Differ. Equ. — 2012. — *253*. — С. 635–666.
28. *Halsey T. C.* Electrorheological fluids// Science. — 1992. — *258*, № 5083. — С. 761–766.
29. *Ouaro S.* Well-Posedness Results for Anisotropic Nonlinear Elliptic Equations with Variable Exponent and L^1-Data// Cubo. — 2010. — *12*, № 1. — С. 133–148.
30. *Sancho'n M., Urbano J. M.* Entropy solutions for the $p(x)$-laplace equation// Trans. Am. Math. Soc. — 2009. — *361*, № 12. — С. 6387–6405.

Л. М. Кожевникова
Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,
453103, Башкортостан, г. Стерлитамак, пр. Ленина, 37;
Елабужский Институт Казанского Федерального университета,
423604, Татарстан, г. Елабуга, ул. Казанская, 89
E-mail: kosul@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-475-493 UDC 517.956.25

On Entropy Solutions of Anisotropic Elliptic Equations with Variable Nonlinearity Indices

© 2017 **L. M. Kozhevnikova**

Abstract. For a certain class of second-order anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity indices and L_1 right-hand side we consider the Dirichlet problem in arbitrary unbounded domains. We prove the existence and uniqueness of entropy solutions in anisotropic Sobolev spaces with variable indices.

REFERENCES

1. V. V. Zhikov, "O variatsionnykh zadachakh i nelineynykh ellipticheskikh uravneniyakh s nestandartnymi usloviyami rosta" [On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2011, **54**, 23–112 (in Russian).
2. A. A. Kovalevskiy, "Apriornye svoystva resheniy nelineynykh uravneniy s vyrozhdayushcheysya koertsitivnost'yu i L^1-dannymi" [A priori properties of solutions of nonlinear equations with degenerate coercivity and L^1-data], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **16**, 47–67 (in Russian).

3. A. A. Kovalevskiy, “O skhodimosti funktsiy iz sobolevskogo prostranstva, udovletvoryayushchikh spetsial’nym integral’nym otsenkam” [On convergence of functions from Sobolev space satisfying special integral estimates], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 2006, **58**, No. 2, 168–183 (in Russian).
4. L. M. Kozhevnikova, “Ob entropiynom reshenii ellipticheskoy zadachi v anizotropnykh prostranstvakh Soboleva–Orlicha” [On entropy solution of an elliptic problem in anisotropic Sobolev–Orlich spaces], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 429–447 (in Russian).
5. L. M. Kozhevnikova, “Sushchestvovanie entropiynykh resheniy ellipticheskoy zadachi v anizotropnykh prostranstvakh Soboleva–Orlicha” [Existence of entropy solutions of an elliptic problem in anisotropic Sobolev–Orlich spaces], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee prilozh. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Ser. Contemp. Math. Appl.], 2017, **139**, 15–38 (in Russian).
6. L. M. Kozhevnikova and A. Sh. Kamaletdinov, “Sushchestvovanie resheniy anizotropnykh ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami nelineynostey v neogranichennykh oblastyakh” [Existence of solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity index in unbounded domains], *Vestn. Volgograd. gos. un-ta. Ser. 1. Mat. Fiz.* [Bull. Volgograd. State Univ. Ser. 1. Math. Phys.], 2016, No. 5(36), 29–41 (in Russian).
7. S. N. Kruzhkov, “Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi” [First-order quasilinear equations with multiple independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 123, 228–255 (in Russian).
8. L. Aharouch, J. Bennouna, and A. Touzani, “Existence of renormalized solution of some elliptic problems in Orlicz spaces,” *Rev. Mat. Complut.*, 2009, **22**, No. 1, 91–110.
9. A. Alvino, L. Boccardo, V. Ferone, L. Orsina, and G. Trombetti, “Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity,” *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), 2003, **182**, No. 1, 53–79.
10. E. Azroul, H. Hjiaj, and A. Touzani, “Existence and regularity of entropy solutions for strongly nonlinear $p(x)$-elliptic equations,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2013, **2013**, No. 68, 1–27.
11. M. B. Benboubker, E. Azroul, and A. Barbara, “Quasilinear elliptic problems with nonstandartd growths,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2011, **2011**, No. 62, 1–16.
12. M. B. Benboubker, H. Chrayteh, M. El Moumni, and H. Hjiaj, “Entropy and renormalized solutions for nonlinear elliptic problem involving variable exponent and measure data,” *Acta Math. Sin.* (*Engl. Ser.*), 2015, **31**, No. 1, 151–169.
13. M. B. Benboubker, H. Hjiaj, and S. Ouaro, “Entropy solutions to nonlinear elliptic anisotropic problem with variable exponent,” *J. Appl. Anal. Comput.*, 2014, **4**, No. 3, 245–270.
14. M. Bendahmane and K. Karlsen, “Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data,” *Potential Anal.*, 2005, **22**, No. 3, 207–227.
15. M. Bendahmane and P. Wittboldb, “Renormalized solutions for nonlinear elliptic equation with variable exponents and L^1-data,” *Nonlinear Anal.*, 2009, 1–21.
16. Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, and J. L. Vazquez, “An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (5), 1995, **22**, No. 2, 241–273.
17. A. Benkirane and J. Bennouna, “Existence of entropy solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms in Orlicz spaces,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2002, **7**, No. 2, 85–102.
18. M. F. Bidaut-Veron, “Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data,” *Adv. Nonlinear Stud.*, 2003, **3**, 25–63.
19. L. Boccardo and Th. Gallouët, “Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1992, **17**, No. 3-4, 641–655.
20. L. Boccardo, Th. Gallouët, and P. Marcellini, “Anisotropic equations in L^1,” *Differ. Integral Equ.*, 1996, **9**, No. 1, 209–212.
21. L. Boccardo, T. Gallouët, and J. L. Vazquez, “Nonlinear elliptic equations in R^N without growth restrictions on the data,” *J. Differ. Equ.*, 1993, **105**, No. 2, 334–363.
22. B. K. Bonzi and S. Ouaro, “Entropy solutions for a doubly nonlinear elliptic problem with variable exponent,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, **370**, 392–405.
23. H. Brezis, “Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity,” *Appl. Math. Optim.*, 1984, **12**, No. 3, 271–282.
24. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ruzicka, *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2011.

25. A. El Hachimi and A. Jamea, “Uniqueness result of entropy solution to nonlinear neumann problems with variable exponent and L^1-data,” *J. Nonlinear Evol. Equ. Appl.*, 2017, **2017**, No. 2, 13–25.
26. X. Fan, “Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and $p(x)$-Laplacian equations,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2011, **56**, No. 7–9, 623–642.
27. P. Gwiazda, P. Wittbold, A. Wróblewska, and A. Zimmermann, “Renormalized solutions of nonlinear elliptic problems in generalized Orlicz spaces,” *J. Differ. Equ.*, 2012, **253**, 635–666.
28. T. C. Halsey, “Electrorheological fluids,” *Science*, 1992, **258**, No. 5083, 761–766.
29. S. Ouaro, “Well-Posedness Results for Anisotropic Nonlinear Elliptic Equations with Variable Exponent and L^1-Data,” *Cubo*, 2010, **12**, No. 1, 133–148.
30. M. Sancho’n and J. M. Urbano, “Entropy solutions for the $p(x)$-laplace equation,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2009, **361**, No. 12, 6387–6405.

L. M. Kozhevnikova
Sterlitamak Branch of Bashkir State University,
37 Lenina av., 453103 Sterlitamak, Russia;
Elabuga Branch of Kazan Federal University,
89 Kazanskaya st., 423604 Elabuga, Russia
E-mail: kosul@mail.ru