Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 3 (2017). С. 418–436

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-418-436 УДК 517.952

ЛАГРАНЖЕВЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО И НЕЛИНЕЙНОГО ПЕРЕНОСА

© 2017 г. С. БЬЯНКИНИ, П. БОНИКАТТО, Э. МАРКОНИ

Аннотация. Представлен подход, объединяющий два класса дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка: вводится понятие лагранжева представления для уравнения неразрывности и скалярных законов сохранения. С одной стороны, это дает единственность слабых решений уравнений переноса, определяемых двумерными почти несжимаемыми векторными полями ограниченной вариации. С другой стороны, доказывается, что мера энтропийной диссипации для скалярных законов сохранения в случае одной пространственной переменной сконцентрирована на счетном множестве липшицевых кривых.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

В статье изучаются уравнение неразрывности и уравнение переноса

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) = 0, \tag{1.1a}$$

$$\partial_t u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = 0, \tag{1.1b}$$

где $u\colon I\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ — неизвестная скалярная функция, а $\mathbf{b}\colon I\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ — заданное векторное поле (здесь $I=(0,T)$, $T>0$).

С этими уравнениями связан следующий закон сохранения:

$$\partial_t u + \operatorname{div}(\mathbf{f}(u)) = 0, \tag{1.2}$$

где $u\colon I\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ — неизвестная скалярная функция, а поток $\mathbf{f}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ — заданное векторное поле.

Эти два класса дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка естественным образом возникают в математической физике: и уравнение (1.1a), и уравнение (1.2) моделируют сохранение физического количества. Ключевая разница между моделями заключается в том, что в уравнении (1.1a) (уравнение неразрывности) указанное количество зависит от заданного векторного поля $\mathbf{b}$, а в уравнении (1.2) (закон сохранения) поле скоростей зависит от количества u нелинейным образом.

Общим для обоих уравнений является то, что они могут быть решены (по крайней мере, формально) методом характеристик. Действительно, рассматривая для простоты уравнение переноса (1.1b) (которое является адвентивной формулировкой уравнения неразрывности и эквивалентно последнему при $\operatorname{div}\mathbf{b}=0$), можно заметить, что любое решение u постоянно вдоль характеристических кривых, которыми являются кривые, описываемые уравнениями

$$\gamma'(t)=\mathbf{b}(t,\gamma(t)) \quad \text{и} \quad \gamma'(t)=\mathbf{f}'(u(t,\gamma(t))) \tag{1.3}$$

для уравнений (1.1b) и (1.2) соответственно.

Приведенные выше рассуждения имеют смысл в том случае, когда мы имеем дело с гладкими функциями. Ниже мы предложим технику лагранжевых представлений, позволяющую распространить указанный метод на случай более слабых требований к регулярности.

Уравнения (1.1) и (1.2) можно считать эйлеровой формулировкой модели, а уравнения (1.3) — их лагранжевым эквивалентом. Таким образом, метод характеристик может интерпретироваться как мост между этими двумя формулировками.

Взаимосвязь между этими двумя формулировками впервые отмечена в [20] при изучении соболевских векторных полей; более подробно эта взаимосвязь изучена в [3], где рассматривается класс векторных полей ограниченной вариации. Устанавливается, что корректность уравнения переноса дает возможность определить поток способом, подходящим для этих классов векторных полей; с другой стороны, используя лагранжеву формулировку, можно доказать ряд интересных свойств эйлеровой модели. Настоящая статья посвящена именно этому подходу.

В частности, в разделе 3 получен результат о единственности (для двумерного случая) слабых решений уравнения переноса для векторных полей ограниченной вариации, дающий частичный ответ на гипотезу Брессана (этого результата нет в [3]). Более подробно этот результат изложен в [7].

В разделе 4, используя этот же подход, мы исследуем тонкие свойства энтропийных решений уравнения 1.2 для случая одной пространственной переменной. По определению, для любой выпуклой энтропии η энтропийное решение удовлетворяет (в смысле обобщенных функций) неравенству

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leqslant 0, \tag{1.4}$$

где $q'(u) = f'(u)\eta'(u)$ — поток энтропии. В частности, левая часть неравенства (1.4) есть некоторая неположительная локально ограниченная мера μ. Из структуры решения мы делаем вывод, что μ сконцентрирована на $\mathscr{H}^1$-спрямляемом множестве, которое можно интерпретировать, как множество уплотнения решения u. Более подробно это изложено в [10].

Отметим, что Дафермосом предложено другое обобщение метода характеристик (см., например, [17, Ch. X]); оно позволяет доказать, что $\mu = 0$, если решение u непрерывно (см. [16]).

В последнее время предложены различные определения лагранжевых представлений законов сохранения для случая одной пространственной переменной; они соответствуют различным постановкам задачи и различным требованиям регулярности (см., например, [9,10,12,13]). В работе [11] лагранжев подход используется, чтобы доказать аналог теоремы Дафермоса для случая нескольких пространственных переменных.

2. Лагранжевы представления

Покажем, как конкретизировать понятие лагранжева представления для двух различных постановок задачи.

2.1. Лагранжево представление для уравнения неразрывности. Начнем со следующего известного результата (см. [3]) для неотрицательных решений уравнения неразрывности, значениями которых являются меры.

Теорема 2.1 (принцип суперпозиции). *Пусть* $\mathbf{b}\colon [0,T]\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *— ограниченное борелевское векторное поле, а* $[0,T] \ni t \mapsto \mu_t$ *— неотрицательное локально конечное решение уравнения неразрывности*

$$\begin{cases} \partial_t \mu_t + \operatorname{div}(\mathbf{b}\mu_t) = 0 \\ \mu_0 = \overline{\mu} \end{cases} \qquad \text{в} \quad \mathscr{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^d), \tag{2.1}$$

значениями которого являются меры.

Тогда на пространстве непрерывных кривых $\Gamma := C([0,T];\mathbb{R}^d)$ *существует такая неотрицательная мера* η, *что*

$$\mu_t = e_{t\#}\eta \quad \text{для любого} \quad t \quad \text{из} \quad [0,T], \tag{2.2}$$

где $e_t\colon \Gamma \to \mathbb{R}^d$ *— отображение на значения,* $\gamma \mapsto \gamma(t)$, *и мера* η *сконцентрирована на абсолютно непрерывных решениях обыкновенного дифференциального уравнения, определяемого полем* $\mathbf{b}$.

Далее такую меру η будем называть *лагранжевым представлением*.

2.2. Лагранжевы представления для законов сохранения. Пусть u — энтропийное решение начальной задачи

$$\begin{cases}\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0,\\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot),\end{cases}$$

с u_0, принадлежащей $L^\infty(\mathbb{R})$. Дадим следующее определение.

Определение 2.1. *Лагранжевым представлением* функции u называется такая пара функций $(\mathtt{X}, \mathtt{u})$, для которой справедливы следующие утверждения:

1. функция $\mathtt{X} : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна, отображение $t \mapsto \mathtt{X}(t,y)$ липшицево для каждого значения y, а отображение $y \mapsto \mathtt{X}(t,y)$ является неубывающей функцией при каждом t;
2. $\mathtt{u} \in L^\infty(\mathbb{R})$;
3. для любого положительного t и почти любого (в смысле $\mathscr{L}^1$) вещественного x справедливо соотношение
$$u(t,x) = \mathtt{u}(\mathtt{X}(t)^{-1}(x));$$
4. поток $\mathtt{X}$ удовлетворяет характеристическому уравнению, т. е. для любого вещественного y и почти любого (в смысле $\mathscr{L}^1$) положительного t справедливо соотношение

$$D_t\mathtt{X}(t,y) = \begin{cases} f'(u(t,\mathtt{X}(t,y))), & \text{если } u(t) \text{ непрерывна на } \mathtt{X}(t,y),\\ \dfrac{f(u(t,\mathtt{X}(t,y)+)) - f(u(t,\mathtt{X}(t,y)-))}{\mathtt{X}((t,y)+) - \mathtt{X}((t,y)-)}, & \text{если } u \text{ терпит разрыв на } \mathtt{X}(t,y).\end{cases} \tag{2.3}$$

Замечание 2.1. Характеристическое уравнение в форме (2.3) имеет смысл для таких решений u, у которых функция $u(t)$ при любом положительном t имеет оба односторонних предела $u(t,x-)$ и $u(t,x+)$ в каждой вещественной точке x. Ниже мы увидим, что это выполняется, если u_0 непрерывна либо если f не является аффинным преобразованием ни на каком открытом интервале. В [10] объясняется, в каком смысле следы $u(t,x-)$ и $u(t,x+)$ понимаются в общем случае. Отметим, что требование $\mathtt{u} = u_0$ и, следовательно, $\mathtt{X}(0) = \mathbb{I}$ не накладывается: ему, например, не удовлетворяет представление центрированного разрежения.

3. Линейный перенос

В этом разделе мы покажем, как можно использовать лагранжевы представления, введенные в разделе 2, для доказательства результатов о корректности для уравнения переноса, связанного с плоским векторным полем ограниченной вариации. Доказательства приводимых здесь результатов можно найти в [7].

Мы изучаем начальные задачи

$$\begin{cases}\partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) = 0,\\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot),\end{cases} \tag{3.1a}$$

$$\begin{cases}\partial_t u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = 0,\\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot),\end{cases} \tag{3.1b}$$

где $u\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$ — неизвестная функция, $\mathbf{b}\colon I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — заданное векторное поле с носителем в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, а $u_0\colon \Omega \to \mathbb{R}$ — заданное скалярное поле.

Наша цель — получить результат о единственности решения задачи (3.1b) при слабых условиях, наложенных на регулярность векторного поля $\mathbf{b}$. Прежде всего введем определение слабого решения.

Если $\mathbf{b} \in L^\infty(I \times \Omega)$, то уравнение неразрывности системы (3.1a) может стандартно пониматься в смысле обобщенных функций. Что касается начального условия, то можно доказать (см., например, [18]), что, если u является слабым решением уравнения неразрывности системы (3.1a), то существует такое отображение $\widetilde{u}$ из $L^\infty([0,T] \times \Omega)$, что $u(t,\cdot) = \widetilde{u}(t,\cdot)$ для почти всех t из I и $t \mapsto \widetilde{u}(t,\cdot)$ $\star$-слабо непрерывно отображает $[0,T]$ в $L^\infty(\Omega)$. Таким образом, начальное условие для слабого решения u уравнения неразрывности может быть задано следующим образом: мы говорим, что $u(0,\cdot) = u_0(\cdot)$ выполняется, если $\widetilde{u}(0,\cdot) = u_0(\cdot)$.

Определить слабые решения уравнения переноса системы (3.1b) — несколько более сложная задача. Если $\operatorname{div}\mathbf{b} \ll \mathscr{L}^2$, где $\mathscr{L}^2$ — мера Лебега на плоскости, то уравнение переноса системы (3.1b) можно записать в виде

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) - u\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$$

и понимать последнее уравнение в смысле обобщенных функций (более подробно см., например, в [20]). Здесь, однако, нас интересует случай, в котором $\operatorname{div}\mathbf{b}$ не является абсолютно непрерывной по мере Лебега. В этом случае понятие слабого решения системы (3.1b) можно определить для класса почти несжимаемых векторных полей.

Определение 3.1. Ограниченное локально интегрируемое векторные поле $\mathbf{b}\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ называется *почти несжимаемым*, если существуют такая функция $\rho\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$ (называемая *плотностью* поля $\mathbf{b}$) и такая положительная постоянная C, что $C^{-1} \leqslant \rho(t,x) \leqslant C$ для почти всех (t,x) из $I \times \Omega$ и

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho\mathbf{b}) = 0 \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(I \times \Omega). \tag{3.2}$$

Легко видеть, что, если $\operatorname{div}\mathbf{b} \in L^\infty(I \times \Omega)$, то $\mathbf{b}$ почти несжимаемо. Обратное неверно, поэтому почти несжимаемость является более слабым условием, чем требование, чтобы $\operatorname{div}\mathbf{b}$ принадлежала $L^\infty(I \times \Omega)$.

Определение 3.2. Пусть $\mathbf{b}$ — почти несжимаемое векторное поле с плотностью ρ. Назовем функцию u из $L^\infty(I \times \Omega)$ *ρ-слабым решением* системы (3.1b), если

$$\begin{cases} \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u\mathbf{b}) = 0 \\ (\rho u)(0,\cdot) = \rho_0 u_0(\cdot) \end{cases} \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(I \times \Omega).$$

Существование слабых решений начальной задачи для уравнения переноса с почти несжимаемым векторным полем может быть доказано при помощи стандартной техники регуляризации (см. [18]).

Исследование единственности слабых решений является гораздо более сложной задачей. В [20] единственность для случая векторных полей с соболевской регулярностью выводится из так называемого свойства ренормализации. В [3] этот результат улучшен: единственность доказана для случая векторных полей с (локально) ограниченной вариацией из пространства полей с абсолютно непрерывной ограниченной дивергенцией. Как указано выше, векторные поля, рассматриваемые в [3], образуют истинное подмножество множества почти несжимаемых векторных полей. Поэтому возникает естественный вопрос, сохраняется ли свойство единственности в этом более широком классе. В связи с этим напомним следующую гипотезу Брессана (см. [14]) для двумерного случая:

Гипотеза 3.1 (Bressan). *Единственность слабого решения системы* (3.1b) *имеет место для любого почти несжимаемого векторного поля* $\mathbf{b}$ *из* $L^1(I; BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2))$.

В [1, 2, 8] проблема единственности исследуется для двумерного автономного случая. Устанавливается, что в случае двумерных бездивергентных автономных векторных полей единственность имеет место и при более слабых требованиях к регулярности векторного поля $\mathbf{b}$; это обусловлено структурой гамильтониана для данного случая. Работа [2] характеризует бездивергентные автономные векторные поля $\mathbf{b}$ на плоскости, для которых задача Коши для уравнения переноса (3.1b) имеет единственное ограниченное слабое решение для любых ограниченных начальных данных u_0. Указанная характеризация опирается на так называемое слабое свойство Сарда, являющееся (ослабленной) формулировкой леммы Сарда в терминах теории меры. Поскольку задача допускает гамильтонов потенциал, единственность доказывается следующим образом: уравнение разбивается на множества уровня этой функции, и тем самым задача сводится к одномерной. Такой подход требует предварительного изучения структуры множеств уровня липшицевых отображений определенных на $\mathbb{R}^2$; это исследование проведено в [1].

Основным результатом данного раздела является следующий частичный ответ на гипотезу 3.1:

Теорема 3.1. *Предположим, что* $\mathbf{b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *есть финитное почти несжимаемое векторное поле ограниченной вариации. Тогда имеет место единственность слабых решений задачи* (3.1b).

Точнее, мы покажем, что для любых ограниченных начальных данных u_0 из $L^\infty(\mathbb{R}^2)$ существует единственное ρ-слабое решение u уравнения переноса (3.1b), принадлежащее пространству $L^\infty(I\times\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяющее начальному условию $u(0,\cdot)=u_0(\cdot)$. Основная идея доказательства заключается в том, чтобы применить своего рода метод характеристик в негладкой постановке, используя принцип суперпозиции Амбросио, т. е. теорему 2.1. Мы находим такое «большое» семейство интегральных кривых γ векторного поля $\mathbf{b}$, что для любого решения u функция $t\mapsto u(t,\gamma(t))$ является константой; отсюда легко получить единственность.

Отметим, что в [6] гипотеза Брессана 3.1 подтверждена для любой размерности $d\geqslant 2$.

3.1. Предварительные результаты. В этом разделе собраны предварительные результаты, используемые при доказательстве теоремы 3.1.

3.1.1. Множества уровня липшицевых функций и разложение меры Лебега. Предположим, что Ω — плоское открытое множество, а $H\colon\Omega\to\mathbb{R}$ — финитная липшицева функция. Для любого вещественного h положим $E_h:=H^{-1}(h)$. Напомним следующий результат.

Теорема 3.2 ([1, Theorem 2.5]). *Для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) h из $H(\Omega)$ справедливы следующие утверждения*:

1. $\mathscr{H}^1(E_h)<+\infty$, *а E_h счетно $\mathscr{H}^1$-спрямляемо*;
2. *для почти любого (в смысле $\mathscr{H}^1$) x из E_h функция H дифференцируема в x и $\nabla H(x)\neq 0$*;
3. *если $\mathrm{Conn}^\star(E_h)$ обозначает множество компонент связности $\mathfrak{c}$ множества E_h, для которых $\mathscr{H}^1(\mathfrak{c})>0$, то множество $\mathrm{Conn}^\star(E_h)$ счетно и любое $\mathfrak{c}$ из $\mathrm{Conn}^\star(E_h)$ является замкнутой простой кривой, допускающей параметризацию $\gamma_\mathfrak{c}$, обладающую следующими свойствами*:
   - $\gamma_\mathfrak{c}\colon I_\mathfrak{c}\to\mathbb{R}^2$ *есть липшицева инъекция (вплоть до концевых точек), где $I_\mathfrak{c}=\mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ или $I_\mathfrak{c}=[0,\ell]$ с некоторым положительным ℓ*;
   - $\gamma_\mathfrak{c}'(s)$ *ортогонально $\nabla H(\gamma_\mathfrak{c}(s))$ для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) s из $I_\mathfrak{c}$.*
4. *Если $E_h^\star$ обозначает объединение всех $\mathfrak{c}$ из $\mathrm{Conn}^\star(E_h)$, то $\mathscr{H}^1(E_h\setminus E_h^\star)=0$.*

Множество уровня, соответствующее значению h, называется *регулярным*, если оно удовлетворяет условию 1 теоремы 3.2.

Используя теорему 3.2 и теорему о разложении (см. [4, Th. 2.28]), можно охарактеризовать разложение меры Лебега, суженной на открытое множество Ω. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1 ([2, Lemma 2.8]). *Существуют такие борелевские семейства мер $\{\sigma_h\}_{h\in\mathbb{R}}$ и $\{\kappa_h\}_{h\in\mathbb{R}}$, что*

$$\mathscr{L}^2\llcorner\Omega=\int\Big(c_h\mathscr{H}^1\llcorner E_h+\sigma_h\Big)\,dh+\int\kappa_h\,d\zeta(h),\tag{3.3}$$

где

1. $c_h\in L^1(\mathscr{H}^1\llcorner E_h^\star)$, *точнее, $c_h=1/|\nabla H|$ почти всюду (в смысле $\mathscr{H}^1\llcorner E_h^\star$) в силу формулы Кориа*;
2. σ_h,κ_h *сосредоточены на $E_h^\star\cap\{\nabla H=0\}$*;
3. $\zeta:=H_\#\mathscr{L}^2\llcorner(\Omega\setminus\bigcup_h E_h^\star)$ *сингулярна в смысле $\mathscr{L}^1$.*

3.1.2. Слабое свойство Сарда. Пусть $H\colon\Omega\to\mathbb{R}$ — такая же липшицева функция, как и в разделе 3.1.1, а S — *критическое множество* функции H, т. е. множество всех x из Ω, в которых H не является дифференцируемой либо $\nabla H(x)$ обращается в нуль. Нас интересует следующее свойство:

сдвиг вперед на H сужения $\mathscr{L}^2$ на S сингулярен в смысле $\mathscr{L}^1$, т. е.

$$H_\#\left(\mathscr{L}^2\llcorner S\right)\perp\mathscr{L}^1.$$

Это свойство очевидным образом влечет за собой следующее *слабое свойство Сарда*, используемое в [2, Sec. 2.13]:

$$H_\#\left(\mathscr{L}^2\llcorner(S\cap E^\star)\right)\perp\mathscr{L}^1,$$

где множество $E^\star$ есть объединение компонент связности E_h положительной длины по всем h из $H(\Omega)$. Связь слабого свойства Сарда с уравнениями переноса и неразрывности более подробно изложена в [2, Th. 4.7].

Замечание 3.1. Опуская строгую терминологию, можно сказать, что смысл слабого свойства Сарда — в следующем: «хорошие» множества уровня функции H не пересекаются с критическим множеством S за исключением множества, которым можно пренебречь. В терминах разложения меры Лебега (3.3) можно доказать, что H обладает слабым свойством Сарда тогда и только тогда, когда $\sigma_h = 0$ для почти всех h. В частности, это имеет место, если ∇ почти всюду отличен от нуля (см. п. 2 леммы 3.1) или $\nabla H \in \mathrm{BV}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ (см. [7]).

3.2. Первая часть доказательства: локальные рассуждения. Перейдем к доказательству основной теоремы 3.1. Разобъем доказательство на два шага. Вначале мы проведем локальные рассуждения, чтобы найти подходящее покрытие плоскости шарами и разложить наше уравнение внутри каждого шара. Затем мы «склеим» локальные результаты друг с другом, чтобы иметь возможность применить метод характеристик. Начнем локальные рассуждения.

Пусть $\mathbf{b}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — автономное почти несжимаемое векторное поле, принадлежащее $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$; будем считать, что $\mathbf{b}$ — финитное, всюду определенное и борелевское.

3.3. Разбиение и кривые. Рассмотрим счетное покрытие $\mathscr{B}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, определенное следующим образом:

$$\mathscr{B} := \left\{B(x,r) : x \in \mathbb{Q}^2, r \in \mathbb{Q}^+\right\}.$$

Здесь $B(x,r)$ — евклидов шар с центром в точке x и радиусом r. Для каждого шара B из $\mathscr{B}$ нас интересуют те траектории поля $\mathbf{b}$, которые пересекают B и остаются внутри B в течение некоторого положительного времени. Поэтому для каждого шара B из $\mathscr{B}$ и любых рациональных чисел s,t из $\mathbb{Q} \cap (0,T)$, удовлетворяющих неравенству $s<t$, мы определим множества

$$\mathsf{T}_{B,s,t} := \left\{\gamma \in \Gamma : \mathscr{L}^1(\{\tau \in [0,T] : \gamma(\tau) \in B\}) > 0,\ \gamma(s) \notin B,\ \gamma(t) \notin B\right\}.$$

В этом разделе мы имеем дело (для простоты) с множествами $\mathsf{T}_B := \mathsf{T}_{B,0,T}$, где $B \in \mathscr{B}$ (и считаем, не ограничивая общности, что $T \in \mathbb{Q}$).

Замечание 3.2. Легко видеть, что объединение множеств T_B по всем B из $\mathscr{B}$ совпадает с множеством всех траекторий, отличных от постоянных. То же самое справедливо и для объединения множеств $\mathsf{T}_{B,s,t}$ по всем B из $\mathscr{B}$ и всем s,t из $\mathbb{Q} \cap [0,T]$.

Согласно определению 3.1, существует функция $\rho : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая уравнению неразрывности (3.2) в $\mathscr{D}'((0,T) \times \mathbb{R}^2)$. Следовательно, в силу теоремы 2.1, существует Лагранжево представление, т. е. мера η на пространстве непрерывных траекторий Γ, сосредоточенная на множестве интегральных кривых поля $\mathbf{b}$, для которой

$$\rho(t,\cdot)\mathscr{L}^2 = (e_t)_\#\eta, \tag{3.4}$$

где, как и ранее, $e_t\colon \Gamma \to \mathbb{R}^2$ — отображение на значения, $\gamma \mapsto \gamma(t)$. Для каждого фиксированного шара B из $\mathscr{B}$ рассмотрим меру $\eta_B := \eta \llcorner \mathsf{T}_B$ и определим плотность ρ_B следующим образом: $\rho_B(t,\cdot)\mathscr{L}^2 = (e_t)_\#\eta_B$. Положим

$$r_B(x) := \int\limits_0^T \rho_B(t,x)dt, \qquad x \in B \tag{3.5}$$

(см. также рис. 1). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. $\operatorname{div}(r_B\mathbf{b}) = 0$ *в* $\mathscr{D}'(B)$.

3.4. Локальное разложение уравнения $\mathbf{div}(u\mathbf{b}) = \mu$. Из леммы 3.2 мы выводим, что для каждого односвязного B из $\mathscr{B}$) существует такая липшицева функция $H_B\colon B \to \mathbb{R}$, что $r_B\mathbf{b} = \nabla^\perp H_B$, где $\nabla^\perp = (-\partial_2, \partial_1)$. Функция H_B корректно определена (при условии, что $\mathbf{b}$ финитно) и ее часто называют *гамильтоновой* (относительно шара B).

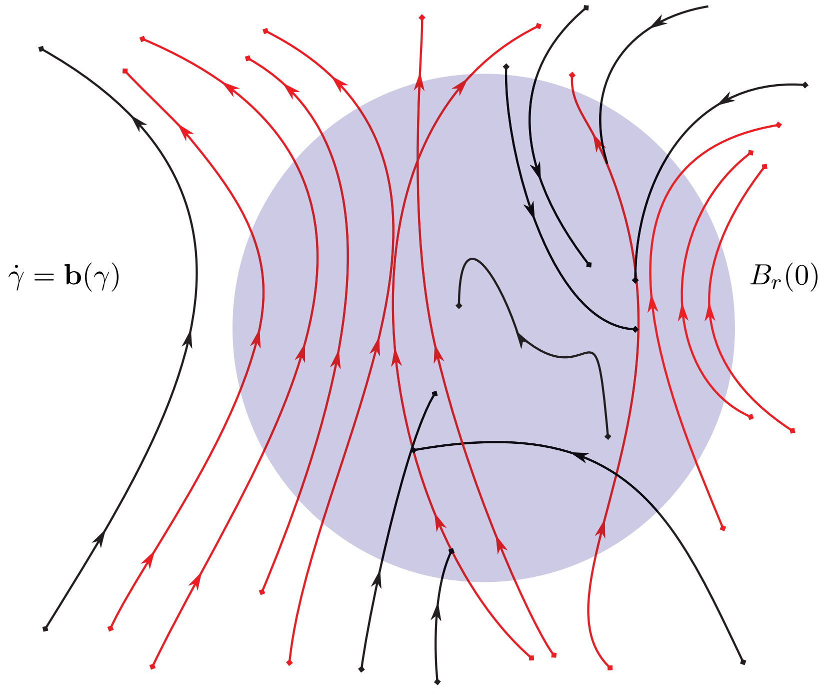

Рис. 1. С помощью принципа суперпозиции Амбросио находим лагранжево представление η для плотности ρ. Далее выбираем подходящее семейство характеристик, пересекающих шар B, что дает «установившуюся» плотность r, определенную соотношением (3.5).

3.4.1. Редукция уравнения на множества уровня. Зафиксируем шар B из $\mathscr{B}$ и рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}) = \mu \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'(B), \tag{3.6}$$

где $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, а μ — мера Радона на $\mathbb{R}^2$.

На первом шаге разложим уравнение по множествам уровня функции H.

Лемма 3.3. *Функция u удовлетворяет уравнению* (3.6) *тогда и только тогда, когда*

1. *разложение μ относительно H имеет вид*

$$\mu = \int \mu_h \, dh + \int \nu_h \, d\zeta(h), \tag{3.7}$$

где ζ определена в п. (3) *леммы* 3.1;

2. *для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) значений h выполнено соотношение*

$$\operatorname{div}\left(uc_h\mathbf{b}\mathscr{H}^1 \llcorner E_h\right) + \operatorname{div}(u\mathbf{b}\sigma_h) = \mu_h; \tag{3.8}$$

3. *для почти всех (относительно меры ζ) значений h выполнено соотношение*

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}\kappa_h) = \nu_h. \tag{3.9}$$

3.4.2. Редукция на компоненты связности. Следующий шаг — анализ уравнения (3.8) на нетривиальных компонентах связности (т. е. компонентах положительной длины) множеств уровня.

Лемма 3.4. *Функция u удовлетворяет уравнению* (3.8) *тогда и только тогда, когда*

- *для любой нетривиальной компоненты связности $\mathfrak{c}$ множества E_h выполняются соотношения*

$$\operatorname{div}\left(uc_h\mathbf{b}\mathscr{H}^1 \llcorner \mathfrak{c}\right) = \mu_h \llcorner \mathfrak{c}, \tag{3.10a}$$

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}\sigma_h \llcorner \mathfrak{c}) = 0; \tag{3.10b}$$

- *выполняется соотношение*

$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}\sigma_h \llcorner (E_h \setminus E_h^\star)) = \mu_h \llcorner (E_h \setminus E_h^\star). \tag{3.11}$$

3.4.3. Редукция уравнения на компоненты связности (*параметрический вид*). Рассмотрим уравнение (3.10a) в параметрическом виде. Пусть $\gamma_{\mathfrak{c}}\colon I_{\mathfrak{c}} \to \mathbb{R}^2$ — инъективная липшицева параметризация компоненты $\mathfrak{c}$, где $I_{\mathfrak{c}} = \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$ либо $I_{\mathfrak{c}} = (0,\ell)$ — область в γ (для некоторого положительного ℓ).

Лемма 3.5. *Функция u удовлетворяет уравнению* (3.10a) *тогда и только тогда, когда*

$$\partial_s(\widehat{u}\widehat{c}_h|\widehat{\mathbf{b}}|) = \widehat{\mu}_h, \tag{3.12}$$

где $(\gamma_{\mathfrak{c}})_{\#}\widehat{\mu}_h = \mu_h \llcorner \mathfrak{c}$, $\widehat{u} = u \circ \gamma_{\mathfrak{c}}$, $\widehat{c}_h = c_h \circ \gamma_{\mathfrak{c}}$ *и* $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \circ \gamma_{\mathfrak{c}}$.

3.4.4. Локальное разложение закона равновесия. Рассмотрим общий закон равновесия, связанный с гамильтоновым векторным полем $\mathbf{b}$, т. е. уравнение

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u\mathbf{b}) = \nu \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'((0,T)\times B), \tag{3.13}$$

считая, что $u \in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^2)$, а ν — мера Радона на $(0,T)\times\mathbb{R}^2$. Как и для уравнения $\operatorname{div}(u\mathbf{b}) = \mu$ (см. раздел 3.4), можно выполнить редукцию на нетривиальные компоненты связности множеств уровня гамильтониана H_B. Грубо говоря, представим версии лемм 3.3–3.5 для неавтономного случая.

Лемма 3.6. *Функция u удовлетворяет уравнению* (3.13) *тогда и только тогда, когда*

- *для почти всех* (*в смысле* $\mathscr{L}^1$) *значений h функция* $\widehat{u}_h(t,s) := u(t,\gamma_{\mathfrak{c}}(s))$ *удовлетворяет уравнению*
$$\partial_t\bigl(\widehat{u}_h\widehat{c}_h|\widehat{\mathbf{b}}|\bigr) + \partial_s\bigl(\widehat{u}_h\widehat{c}_h|\widehat{\mathbf{b}}|\bigr) = \widehat{\nu}_h \quad \text{в} \quad \mathscr{D}'((0,T)\times I_{\mathfrak{c}}), \tag{3.14}$$
где $\gamma_h\colon I_{\mathfrak{c}} \to \mathbb{R}^2$ — *инъективная липшицева параметризация связная параметризация компоненты связности $\mathfrak{c}$ множества уровня E_h гамильтониана H, а $\widehat{\nu}_h$ — такая мера, что* $\widehat{\nu}_h = (\gamma_{\mathfrak{c}}^{-1})_{\#}\nu$;
- *выполняется соотношение*
$$\operatorname{div}(u\mathbf{b}\sigma_h) = 0. \tag{3.15}$$

3.4.5. Лемма о совпадении и слабое свойство Сарда для H_B. Прежде чем перейти к глобальным рассуждениям, убедимся, что гамильтонианы, построенные в предыдущем пункте, совпадают в смысле следующего определения.

Определение 3.3. Предположим, что B_1, B_2 из $\mathscr{B}$ таковы, что $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$. Будем говорить, что гамильтонианы $H_1 := H_{B_1}$ и $H_2 := H_{B_2}$ *совпадают* в $B_1 \cap B_2$, если, обозначая через C_x^i компоненты связности множеств уровня функции $H_i^{-1}(H_i(x))$, содержащие x ($i = 1, 2$), мы имеем равенство $C_x^1 = C_x^2$ для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^2$) значений x из $B_1 \cap B_2$, для которых множества уровня функции $H_i^{-1}(H_i(x))$ регулярны.

Можно показать, что в нашей постановке задачи совпадение имеет место — это вытекает из того факта, что $\nabla H_1 \parallel \nabla H_2$ (если оба параллельны $\mathbf{b}$).

Лемма 3.7 (лемма о совпадении)**.** *Пусть H_1, H_2 — гамильтонианы, определенные выше. Тогда они совпадают в $B_1 \cap B_2$.*

Применяя лемму 3.7, можно получить следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Гамильтониан H_B обладает слабым свойством Сарда для любого B из $\mathscr{B}$.*

Замечание 3.3. Если мы не накладываем на $\mathbf{b}$ требование регулярности ограниченной вариации, но $\mathbf{b} \neq 0$ почти всюду, то утверждение леммы 3.8 остается справедливым.

Как только справедливость слабого свойства Сарда для гамильтониана H_B установлена, можно локально применить наш метод характеристик.

Лемма 3.9. *Пусть B — фиксированный шар из $\mathscr{B}$, а u из $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ — ρ-слабое решение задачи*

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathbf{b}\cdot\nabla u = 0 \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases} \qquad \text{в } \mathscr{D}'((0,T)\times\mathbb{R}^2). \tag{3.16}$$

Тогда существует такое пренебрежимое множество Z вещественных чисел, что для любого h, не принадлежащего Z, множество уровня $E_h = H_B^{-1}(h)$ регулярно, а для любой нетривиальной компоненты связности $\mathfrak{c}$ множества E_h с параметризацией $\gamma_\mathfrak{c}\colon I_\mathfrak{c} \to \mathbb{R}^2$, удовлетворяющей уравнению $\gamma_\mathfrak{c}'(s) = \nabla^\perp H(\gamma_\mathfrak{c}(s))$, соотношение

$$u(t, \gamma_\mathfrak{c}(s+t)) = u_0(\gamma_\mathfrak{c}(s)) \tag{3.17}$$

справедливо для любого s из $I_\mathfrak{c}$ и почти любого t из $(0,T)$, для которого $s+t \in I_\mathfrak{c}$.

3.4.6. Множества уровня и траектории. Исследуем связь между траекториями γ из T_B и множествами уровня гамильтониана H_B. Прежде всего можно доказать, что почти все (по мере η) траектории γ содержатся в некотором множестве уровня. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.10. *С точностью до пренебрежимого (в смысле η_B) множества N из Γ образ любой γ из T_B содержится в какой-либо компоненте связности какого-либо регулярного множества уровня гамильтониана H_B.*

Замечание о локальности дивергенции на классе векторных полей, дивергенции которых являются существенно ограниченными мерами. Пусть U — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, а $\mathbf{E}\colon U \to \mathbb{R}^d$ — векторное поле. Рассмотрим множество

$$M := \Big\{x \in \mathbb{R}^d : \mathbf{E}(x) = 0,\ x \in \mathcal{D}_\mathbf{E} \text{ и } \nabla^{\mathrm{appr}}\mathbf{E}(x) = 0\Big\}, \tag{3.18}$$

где $\mathcal{D}_\mathbf{E}$ — множество точек приближенной дифференцируемости, а $\nabla^{\mathrm{appr}}\mathbf{E}$ — приближенный дифференциал (см. [4, Def. 3.70]). Следующее утверждение доказано в [7].

Предложение 3.1. *Предположим, что $\mathbf{E}$ приближенно дифференцируемо почти всюду, $u \in L^\infty(U)$, и $\operatorname{div}(u\mathbf{E}) = \lambda$ в смысле обобщенных функций, где λ — мера Радона на U. Тогда $|\lambda|\llcorner M = 0$.*

Свойство, выраженное предложением 3.1, будем называть *локальностью дивергенции*. Отметим, что ни на u, ни на $u\mathbf{E}$ не накладывается никакого условия слабой дифференцируемости, поэтому предложение 3.1 не является непосредственным следствием стандартных свойств локальности приближенной производной (см., например, [4, Proposition 3.73]). Более того, в [1] можно найти пример ограниченного векторного поля, дивергенция которого (в смысле обобщенных функций) принадлежит L^∞ и нетривиальна, но множество, на котором векторное поле обращается в нуль, не содержит ее носителя.

Свойство локальности дивергенции, выраженное предложением 3.1, имеет место и в нашей постановке задачи, если $\mathbf{b} \in \mathrm{BV}$. Это позволяет улучшить описание взаимосвязи между траекториями γ из Γ_B и множествами уровня гамильтониана H_B, уточняя тем самым лемму 3.10. Действительно, пусть B — фиксированный шар из набора $\mathscr{B}$, а H_B, как и выше, обозначает гамильтониан. Тогда, согласно лемме 3.10, существует такое пренебрежимое (относительно меры η) множество N, что для любой γ из $\Gamma_B \setminus N$ образ $\gamma(0,T)$ содержится в некоторой компоненте связности $\mathfrak{c}$ некоторого множества уровня гамильтониана H_B.

Зададимся следующим вопросом: какое соотношение между траекторией γ из $\Gamma_B \setminus N$ и параметризацией $\gamma_\mathfrak{c}$ соответствующей компоненты связности задается п. 3 теоремы 3.2? Ответ дает следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Пусть N — множество, заданное леммой 3.10, а $\gamma \in \mathsf{T}_B \setminus N$. Тогда (подходящее сужение) γ совпадает с $\gamma_\mathfrak{c}$ с точностью до сдвига по времени.*

3.5. Вторая часть доказательства: глобальные рассуждения. Проанализируем вторую часть доказательства теоремы 3.1.

3.5.1. Регулярные множества уровня: свойство покрытия. Напомним, что для любого шара B из $\mathscr{B}$ и любой пары рациональных чисел s,t из $\mathbb{Q} \cap (0,T)$, удовлетворяющей неравенству $s < t$, определено множество

$$\mathsf{T}_{B,s,t} := \big\{\gamma \in \Gamma : \mathscr{L}^1(\{\tau \in [0,T] : \gamma(\tau) \in B\}) > 0,\ \gamma(s) \notin B,\ \gamma(t) \notin B\big\}$$

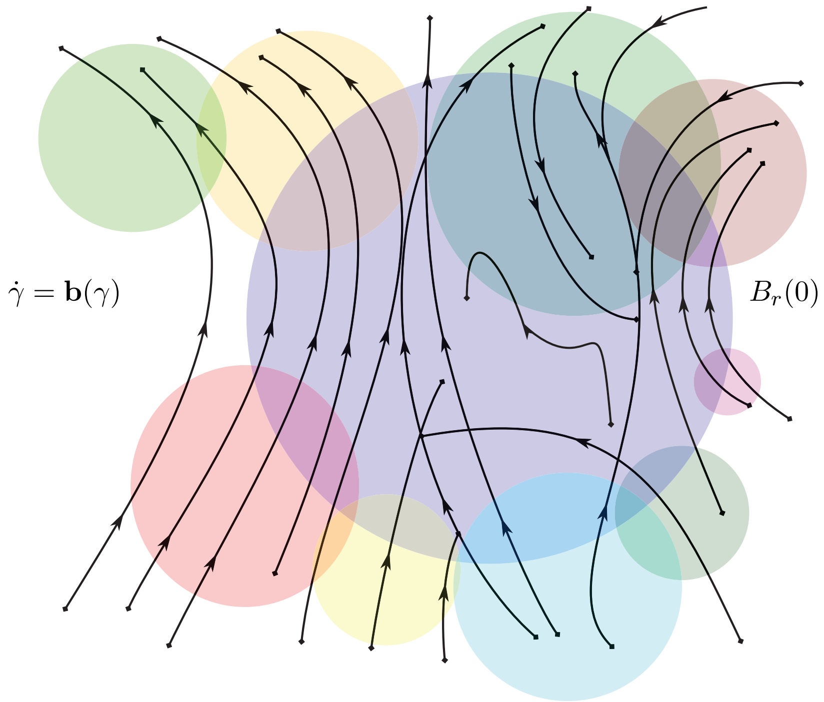

Рис. 2. Переход от локальных рассуждений к глобальным возможен благодаря лемме 3.7 о совпадении и соотношениям между траекториями и множествам уровня.

и из замечания 3.2 известно, что объединение множеств $\mathsf{T}_{B,s,t}$ по всем B из $\mathscr{B}$ и всем s,t из $\mathbb{Q}\cap[0,T]$ совпадает с множеством траекторий, не являющихся константами. Так же, как в разделе 3.3, для каждого B из $\mathscr{B}$, s из $\mathbb{Q}\cap(0,T)$ и t из $\mathbb{Q}\cap(s,T)$, сужая η на $\mathsf{T}_{B,s,t}$, можно построить локальный гамильтониан $H_{B,s,t}$. Тогда, полагая

$$E^\star := \bigcup_{\substack{B\in\mathscr{B}\\ s,t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]}} \bigcup_{h\in H_{B,s,t}(\mathbb{R}^2)} E^\star_h, \tag{3.19}$$

можно доказать следующее свойство покрытия, показывающее, что почти все точки, в которых $\mathbf{b}$ отлично от нуля, содержатся в некотором регулярном множестве уровня гамильтониана (см. также рис. 2).

Лемма 3.11. $E^\star = \{\mathbf{b}\neq 0\}$ *по модулю* $\mathscr{L}^2$.

3.5.2. Выбор подходящих траекторий. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.12. *С точностью до η-пренебрежимого множества, любая отличная от константы интегральная кривая γ векторного поля $\mathbf{b}$ обладает следующими свойствами*:

1. *если $B\in\mathscr{B}$, а $\gamma\in\mathsf{T}_{B,s,t}$, то каждая компонента связности множества $\gamma([s,t])\cap B$ содержится в некотором регулярном множестве уровня гамильтониана H_B*;
2. *для любого τ из $(0,T)$ существуют такой шар B из $\mathscr{B}$ и такие s из $\mathbb{Q}\cap(0,\tau)$ и t из $\mathbb{Q}\cap(\tau,T)$, что $\gamma\in\mathsf{T}_{B,s,t}$.*

В силу леммы 3.12, для почти всех (в смысле η) траекторий γ, отличных от констант, существует шар из набора $\mathscr{B}$, для которого некоторый кусок траектории γ покрывается каким-либо регулярным множеством уровня гамильтониана H_B. Теперь, чтобы локально решить уравнение в этом шаре при помощи леммы 3.9, нам потребуется следующий технический результат.

Лемма 3.13. *Пусть $Z_{B,s,t}$ обозначает пренебрежимое множество, существование которого установлено леммой 3.9. Тогда почти все (в смысле η) траектории γ, отличные от констант, удовлетворяют соотношению*

$$H_{B,s,t}(\gamma([0,T]))\cap Z_{B,s,t} = \varnothing, \tag{3.20}$$

а концевые точки $\gamma(0)$ и $\gamma(T)$ содержатся в регулярных множествах уровня некоторых гамильтонианов:

$$\gamma(0) \in E^\star, \qquad \gamma(T) \in E^\star. \tag{3.21}$$

Используя леммы 3.12-3.13, удаляем η-пренебрежимые множества траекторий поля $\mathbf{b}$. Следующее утверждение содержит некоторые свойства оставшихся траекторий.

Предложение 3.3. *Для почти всех отличных от констант γ из Γ и всех τ из $[0,T]$ существуют такое положительное δ и такая постоянная w, что функция $\xi \mapsto u(\xi,\gamma(\xi))$ равна w для почти всех ξ из $(\tau-\delta,\tau+\delta)\cap[0,T]$. Если $\tau=0$, то постоянная w равна $u_0(\gamma(0))$.*

3.5.3. Вывод: вдоль почти каждой (в смысле η) траектории решение является постоянным. Теперь мы можем применить метод характеристик к нашей задаче в слабой постановке. Следующее утверждение есть глобальный аналог леммы 3.9; оно непосредственно следует из предложения 3.3 и компактности отрезка $[0,T]$.

Лемма 3.14. *Пусть u из $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^2)$ — ρ-слабое решение задачи* 3.16. *Тогда для почти каждой (в смысле η) траектории γ из Γ соотношение*

$$u(t,\gamma(t)) = u_0(\gamma(0))$$

справедливо для почти всех t из $[0,T]$.

Доказательство. Обозначим через N множество траекторий, задаваемое предложением 3.3. Пусть γ из $\Gamma\setminus N$ — траектория, отличная от константы. Для любой τ из $[0,T]$ существует такое положительное δ, что функция $t\mapsto u(t,\gamma(t))$ равна некоторой константе w_τ для почти всех t из $\in(\tau-\delta,\tau+\delta)\cap[0,T]$. Кроме того, если $\tau=0$, то $w_\tau=u_0(\gamma(0))$. Остается выделить конечное покрытие отрезка $[0,T]$, что и завершает доказательство. □ □

4. Законы сохранения

Нас интересует структура энтропийного решения u скалярного закона сохранения для случая одной пространственной переменной:

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{4.1}$$

Скалярная функция f одной скалярной переменной предполагается гладкой, начальные данные $u_0(x)$ предполагаются существенно ограниченными в $\mathbb{R}$. Энтропийное решение, по определению, для любой выпуклой энтропии η удовлетворяет в смысле обобщенных функций неравенству

$$\mu := \eta(u)_t + q(u)_x \leqslant 0, \tag{4.2}$$

где соотношение $q'(w)=f'(w)\eta'(w)$ определяет поток энтропии q с точностью до постоянных при почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) вещественных w, а $\mu \ll \mathscr{H}^1$, где мера μ есть дивергенция некоторого существенно ограниченного векторного поля.

Для решений ограниченной вариации, обозначая множество скачков функции u через J, получаем, по формуле Вольперта, соотношение

$$\eta(u)_t + q(u)_x = \eta'(u)\big(D_t^{\mathrm{cont}}u + f'(u)D_x^{\mathrm{cont}}u\big) + \mu\llcorner J = \mu\llcorner J,$$

где $D^{\mathrm{cont}}u = (D_t^{\mathrm{cont}}u, D_x^{\mathrm{cont}}u)$ — непрерывная часть меры Du.

Такие рассуждения непосредственно применяются к случаю, когда вариация начальных данных ограничена, поскольку включение $u_0\in\mathrm{BV}(\mathbb{R})$ влечет за собой включение $u\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}([0+,\infty)\times\mathbb{R})$, и к случаю, когда поток f — равномерно выпуклый, а начальная функция u_0 всего лишь существенно ограничена на $\mathbb{R}$. Из оценки Олейник (см. [21]) следует, что

$$f'' \geqslant c > 0, \quad \text{а значит,} \quad u\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}((0+,\infty)\times\mathbb{R}).$$

Если поток f имеет конечное число точек перегиба и в окрестности каждой из этих точек удовлетворяет некоторым дополнительным требованиям регулярности, то $f'\circ u\in\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$ (это доказано в [15]), а μ сконцентрирована на множестве скачков функции $f'\circ u$ (это доказано в [19]).

Основной результат настоящего раздела заключается в следующем.

Теорема 4.1. *Существует такое 1-спрямляемое множество J, что для любой выпуклой энтропии η мера рассеяния μ сконцентрирована на J.*

Единственное требование, накладываемое на поток f — гладкость. Результат вытекает из описания структуры решения u, в частности, из поведения его характеристик.

Оказывается, существует такое разложение плоскости $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = A \cup B \cup C$, что

1. A счетно 1-спрямляемо;
2. B открыто и $u \llcorner B \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$;
3. C — объединение отрезков, начинающихся в начале координат и таких, что решение u постоянно на каждом из таких отрезков, а их угол наклона задается характеристической скоростью $f'(u)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы 4.1, достаточно проанализировать $\mu \llcorner C$. В разделе 4.2 будет показано, как эта структура позволяет вычислить μ, используя баланс u и $\eta(u)$ в областях, ограниченных указанными сегментами.

Самые важные инструменты и идеи, используемые для доказательства теоремы 4.1, здесь представлены, но подробности зачастую опущены либо представлены в упрощенном виде. Там, где ссылки на подробности не приведены, считаем, что мы ссылаемся на [10].

4.1. Лагранжево представление и структура решения. В [9, 12, 13] существование лагранжева представления доказывается следующим образом: строится лагранжево представление для плотного множества решений либо для приближенных решений, а затем выполняется переход к пределу. Формулировка, данная в определении 2.1, непригодна для предельного перехода в пространстве существенно ограниченных решений, поэтому ищется более устойчивая интерпретация лагранжевых представлений. В BV-постановке задачи можно показать, что характеристика γ со значением w есть допустимая граница для решения u в следующем смысле:

Определение 4.1. Пусть $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — липшицева кривая, $w \in \mathbb{R}$, а u — энтропийное решение уравнения (4.1). Введем обозначения

$$\Omega^- = \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} : x < \gamma(t)\}, \quad \Omega^+ = \{(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R} : x > \gamma(t)\}.$$

Пусть u^- — решение уравнения (4.1) в Ω^- с начальным условием $u_0 \llcorner \{x < \gamma(0)\}$ и постоянными граничными данными, равными w на $\{(t, \gamma(t)) : t \in (0, T)\}$. Определим u^+ аналогичным образом. Будем говорить, что (γ, w) — *допустимая граница* в $(0, T)$ для u, если

$$u^- = u \llcorner \Omega^- \quad \text{и} \quad u^+ = u \llcorner \Omega^+.$$

В [5] понятие решения начальной задачи для скалярных законов сохранения в введено BV-постановке. Более общий подход изложен в [22].

Используя технику приближений (например, слежение за волновым фронтом), получаем следующий результат для решений u с ограниченной вариацией.

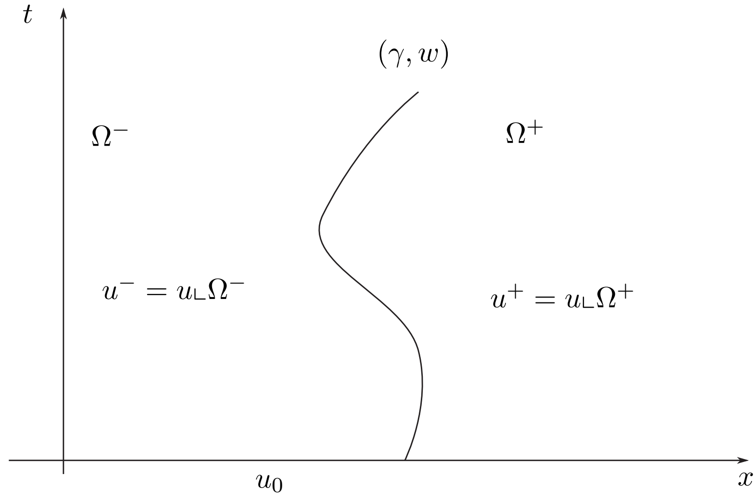

Рис. 3. Интерпретация характеристик как допустимой границы.

Предложение 4.1. *Существует такое семейство $\mathcal{K}$ допустимых границ (γ, w) для u и такая функция $T : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, что справедливы следующие утверждения*:

1. *Для любых (γ, w) и (γ', w') из $\mathcal{K}$*
$$\gamma(t) \leqslant \gamma'(t)\ \forall t > 0 \quad \text{или} \quad \gamma'(t) \leqslant \gamma(t)\ \forall t > 0.$$
В частности, множество $\mathcal{K}_\gamma = \{\gamma : \exists w((\gamma, w) \in \mathcal{K})\}$ упорядочено.
2. *Для любого (t, x) из $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ и любого w из $\operatorname{conv}(u(t, x-), u(t, x+))$ существует такая допустимая граница (γ, w) из $\mathcal{K}$, что $T(\gamma, w) \geqslant t$.*
3. *Если $(\gamma, w) \in \mathcal{K}$ и $t < T(\gamma, w)$, то*
$$w \in \operatorname{conv}(u(t, \gamma(t)-), u(t, \gamma(t)+)).$$
4. *Выполняется следующее характеристическое уравнение*: *для любого γ из $\mathcal{K}_\gamma$ и почти любого (в смысле $\mathscr{L}^1$) положительного t имеем соотношение*
$$\dot{\gamma}(t) = \begin{cases} f'(u(t, \gamma(t))), & \text{если } u(t) \text{ непрерывна на } \gamma(t), \\ \dfrac{f(u(t, \gamma(t)+)) - f(u(t, \gamma(t)-))}{u(t, \gamma(t)+) - u(t, \gamma(t)-)}, & \text{если } u(t) \text{ имеет скачок на } \gamma(t). \end{cases}$$

В скалярных законах сохранения возникает эффект *аннулирования*. Чтобы учесть это явление, вводится функция T такая, что $T(\gamma, w)$ обозначает момент, в который значение w аннулируется вдоль γ.

Чтобы в условиях этой формулировки перейти к пределу, требуется свойство устойчивости, устанавливаемое следующей леммой.

Лемма 4.1. *Пусть (γ^n, w^n) — допустимые границы для энтропийных решений u^n уравнения* (4.1)*, и пусть выполняются следующие условия*:

1. *$\gamma^n \to \gamma$ равномерно*;
2. *$w^n \to w$*;
3. *$u^n \to u$ сильно в $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$.*

Тогда (γ, w) — допустимая граница для u.

Любое u_0 из $L^\infty(\mathbb{R})$ можно аппроксимировать последовательностью элементов u_0^n из $\mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$ в сильной L^1_{loc}-топологии. Отсюда, по известной теореме Кружкова, следует сходимость соответствующих решений u^n к u в L^1_{loc}. Поскольку кривые γ^n из $\mathcal{K}^n_\gamma$ удовлетворяют характеристическому уравнению, они равнолипшицевы. Значит, имеет место компактность, требуемая для применения леммы 4.1.

Полученное в результате перехода к пределу множество $\mathcal{K}$ всех предельных точек последовательностей допустимых границ обладает следующим свойством:
$$\operatorname{Graph} u \subset U \subset \{(t, \gamma(t), w) : (\gamma, w) \in \mathcal{K} \text{ и } T(\gamma, w) \geqslant t\},$$
где U — предел последовательности графиков u_n в смысле Куратовского. Первое из этих включений может быть строгим и, вообще говоря, U не определяет существенно ограниченную функцию u единственным образом, однако в следующем разделе мы увидим, что он определяет ее единственным образом с точностью до линейно вырожденных компонентов потока f, т. е. с точностью до интервалов, на которых $f'' = 0$.

4.1.1. Структура решения. В этом разделе мы увидим, что полученное множество $\mathcal{K}$ наделено некоторой дополнительной структурой, поскольку его элементы — допустимые границы энтропийного решения u.

Пусть $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, $\bar{\gamma} \in \mathcal{K}_\gamma$ и $\bar{\gamma}(\bar{t}) = \bar{x}$. Выделим следующие три случая (см. рис. 4).

1. Существует такая γ из $\mathcal{K}_\gamma$ и такие $t', \bar{t}$, что $t' < \bar{t}$, $\bar{\gamma}(\bar{t}) < \gamma(\bar{t})$ и $\bar{\gamma}(t') = \gamma(t')$.
2. Условие 1 не выполняется и, если $\{x^n\}$ сходится к $\bar{x}$, $x^n > \bar{x}$ и $\gamma^n \in \mathcal{K}_\gamma$, где $\gamma^n(\bar{t}) = x^n$, то γ^n равномерно сходится к $\bar{\gamma}$ в $[0, \bar{t}]$.
3. Условия 1-2 не выполняются.

Нетрудно доказать, что все точки, для которых условия 1-2 не выполняются, лежат на графиках счетного множества липшицевых кривых из $\mathcal{K}_\gamma$. В следующих двух леммах рассматриваются первые два случая.

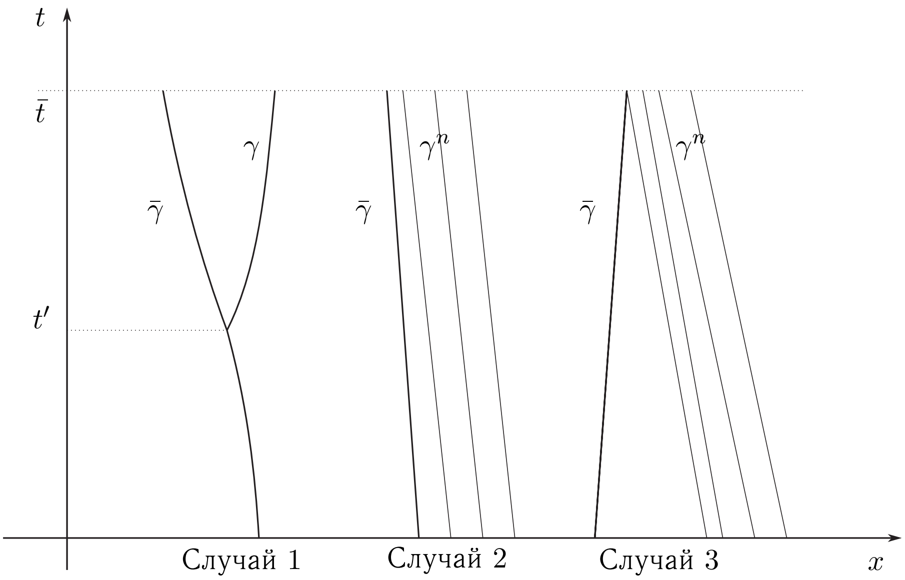

Рис. 4. Точка $(\bar{t}, \bar{\gamma}(\bar{t}))$: три случая.

Лемма 4.2. *Если $\bar{\gamma}$ и γ соответствуют первому случаю, то решение u монотонно по x в следующей области, ограниченной двумя кривыми*:

$$\Omega = \{(t, x) \in (t', \bar{t}) \times \mathbb{R} : \bar{\gamma}(t) < x < \gamma(t)\}.$$

В следующей лемме линейное вырождение потока имеет значение, поэтому вводится следующее обозначение: через $\mathcal{L}_f$ обозначается множество максимальных замкнутых интервалов (включая одноточечные), на которых f' постоянна.

Лемма 4.3. *Если x^n и γ^n соответствуют второму случаю, а им соответствуют значения w^n, то существует такое I из $\mathcal{L}_f$, что*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(w^n, I) = 0 \quad \textit{и из соотношения} \quad \forall t \in (0, \bar{t})\big(\dot{\bar{\gamma}}(t) = f'(I)\big),$$

где $f'(I)$ обозначает $f'(w)$ для единицы, следует, что любое w принадлежит I. В частности, $\bar{\gamma} \llcorner (0, \bar{t})$ есть отрезок.

Из лемм 4.2-4.3 вытекает существование такого разложения $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} = A \cup B \cup C$ (см. выше), что (см. рис. 5):

1. A содержится в объединении счетного множества графиков кривых из $\mathcal{K}_\gamma$;
2. B открыто и $u \llcorner B \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$;
3. C есть объединение отрезков, начинающихся в начале координат с характеристической скоростью.

Из структуры характеристик можно вывести результат о структуре решения u: оно непрерывно в каждой точке за исключением счетного множества липшицевых кривых, на которых оно терпит разрыв первого рода. Все это справедливо с точностью до линейно вырождающихся компонентов потока.

Чтобы получить более точный результат, рассмотрим γ из $\mathcal{K}_\gamma$, точку $\bar{t}$, в которой γ дифференцируема, и положительные r, δ. Введем обозначения

$$B^{\delta+}_{\bar{t},\gamma}(r) := \Big\{(t, x) \in B_{\bar{t},\gamma(\bar{t})}(r) : x > \gamma(\bar{t}) + \dot{\gamma}(\bar{t})(t - \bar{t}) + \delta|t - \bar{t}|\Big\}$$

$$B^{\delta-}_{\bar{t},\gamma}(r) := \Big\{(t, x) \in B_{\bar{t},\gamma(\bar{t})}(r) : x < \gamma(\bar{t}) + \dot{\gamma}(\bar{t})(t - \bar{t}) - \delta|t - \bar{t}|\Big\},$$

$$U^{\delta\pm}_{\bar{t},\bar{\gamma}}(r) := \Big\{w \in \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{R}^+, (\gamma, w) \in \mathcal{K} \;\Big|\; T(\gamma, w) > t, (t, \gamma(t)) \in B^{\delta\pm}_{\bar{t},\bar{\gamma}}(r)\Big\}.$$

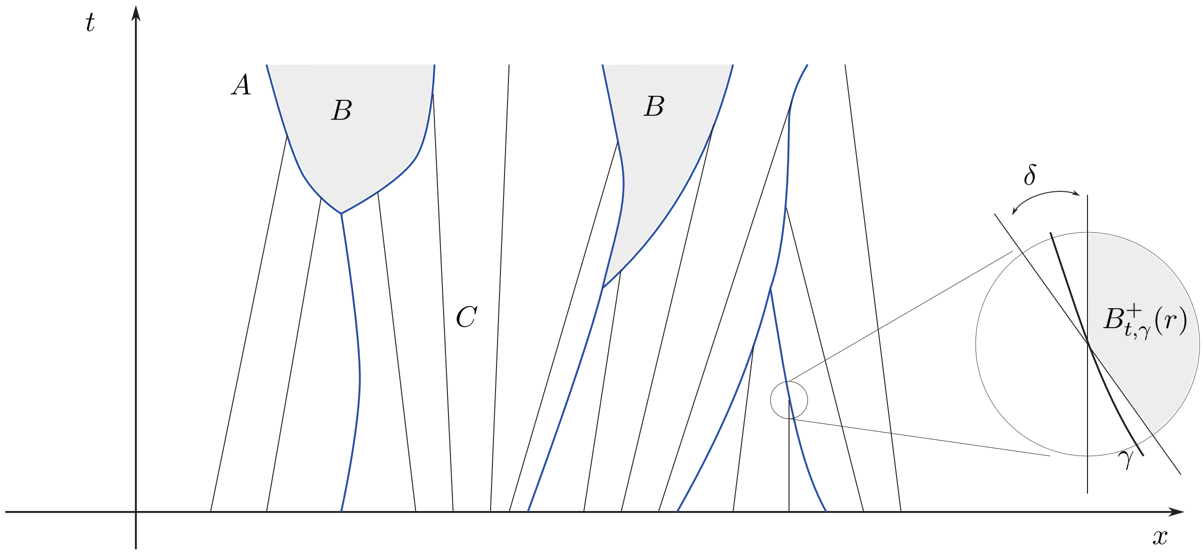

Рис. 5. Разбиение полуплоскости.

Предложение 4.2. *Существует такое подмножество J полуплоскости $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, содержащееся в графиках счетного множества кривых из $\mathcal{K}_\gamma$, и такой представитель u, что*:

1. *для любого $(\bar t,\bar x)$ из $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\setminus J$ существует такое I из $\mathcal{L}_f$, что для любого положительного ε существует такое положительное r, что*
$$\max_{(t,x)\in B_r(\bar t,\bar x)}\operatorname{dist}(u(t,x),I)<\varepsilon;$$
2. *для любой γ из $\mathcal{K}_\gamma$ и почти любого (в смысле $\mathscr{L}^1$) положительного t существуют такие I^+,I^- из $\mathcal{L}_f$, что*
$$\forall\delta>0\ \forall\varepsilon>0\,\exists r>0\,\big(U^{\delta\pm}_{t,\gamma}(r)\subset I^\pm+(-\varepsilon,\varepsilon)\big).$$

4.2. Концентрация энтропийной диссипации. Для доказательства теоремы 4.1 используем полученную в предложении 4.2 структуру решения. Рассмотрим энтропии η, для которых $\eta(0)=0$ и, тем самым, существует такая положительная постоянная L, что $|\eta(u)|\leqslant L|u|$. Это условие не ограничивает общности рассмотрения, поскольку
$$\mu_\eta=\mu_{\eta-\eta(0)}.$$
Как отмечено во введении, достаточно рассмотреть $\mu\llcorner C$.

Зафиксируем положительный момент времени T. Чтобы избежать некоторых технических трудностей, приведем доказательство теоремы 4.1 для случая, когда для любого вещественного x точка (T,x) принадлежит C. В этом случае можно доказать, что $\mu\llcorner C_T$ сконцентрировано на счетном множестве характеристических отрезков, где
$$C_T:=\{(t,\gamma(t))\in[0,T]\times\mathbb{R}:\gamma\in\mathcal{K}_\gamma,(T,\gamma(T))\in C\}.$$

Отсюда, в силу леммы 4.3, вытекает, что каждая γ из $\mathcal{K}_\gamma$, суженная на $[0,T]$, есть отрезок. Пусть $\varepsilon>0$ и $2\varepsilon<T$. Параметризуем характеристические отрезки их положением y в момент ε, т. е. $\gamma_y(\varepsilon)=y$. Из леммы 4.3 следует, что для любого вещественного y существуют такие $I^-(y),I^+(y)$ из $\mathcal{L}_f$, для которых пределы допустимых границ слева и справа от γ_y содержатся в $I^-(y)$ и $I^+(y)$ соответственно. Кроме того, нетрудно показать, что $I^-(y)=I^+(y)=:I(y)$ всюду, за исключением не более чем счетного множества точек. Наконец, для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) y существует такое $U(y)$ из $I(y)$, что $u(t,\gamma_y(t))=U(y)$ для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) t из $(0,T)$.

Пусть $P:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — такое, что $P(t,x)=y$, где $\gamma_y(t)=x$. Наша цель — показать, что $m:=P_\sharp\mu$ атомарна, из чего непосредственно следует, что μ сконцентрирована не более чем на счетном множестве отрезков, что доказывает теорему 4.1. Идея заключается в том, чтобы вычислить балансы
$$u_t+f(u)_x=0,\qquad \eta(u)_t+q(u)_x=\mu_\eta$$

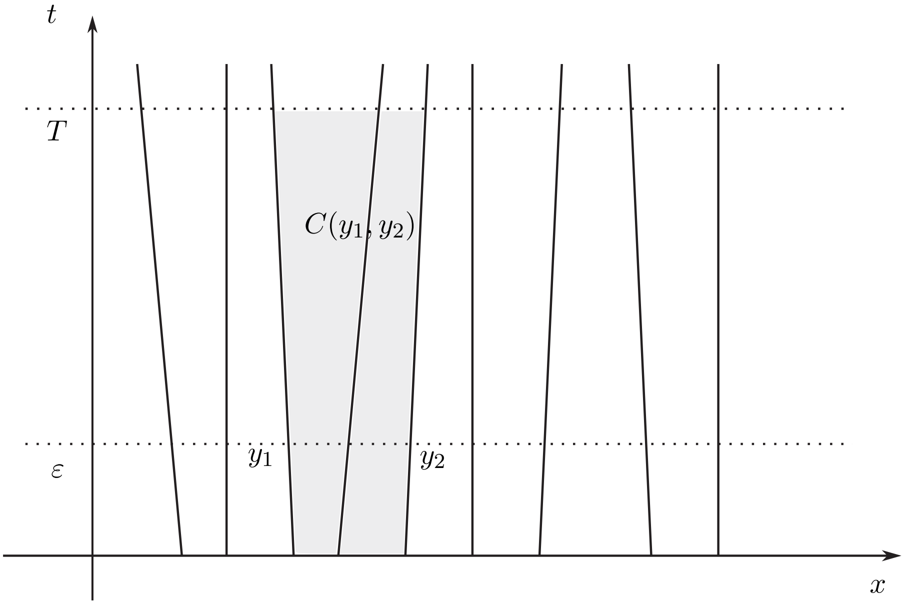

Рис. 6. Модельное множество сегментов, параметризуемое их положением в момент ε и цилиндром.

для сохраненного количества u и энтропии $\eta(u)$ в цилиндрических областях вида

$$C(y_1,y_2)=\{(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}:\gamma_{y_1}(t)<x<\gamma_{y_2}(t)\}.$$

Пусть F (Q) — поток u $(\eta(u))$ через γ_y за единицу времени. Тогда

$$F(y)=f(U(y))-\lambda(y)U(y),\qquad Q(y)=q(U(y))-\lambda(y)\eta(U(y)),$$

где $\lambda(y)=f'(U(y))$ — угол наклона отрезка γ_y. Они не зависят от времени. Отметим, что, поскольку эти отрезки не пересекаются с $(0,T)$ в силу монотонности семейства границ, скорость $\lambda(y)$ является $1/\varepsilon$-липшицевой. Следовательно, баланс для $\eta(u)$ в $C(y_1,y_2)$ дает соотношение

$$\int\limits_{\gamma_{y_1}(T)}^{\gamma_{y_2}(T)}\eta(u(T,x))dx-\int\limits_{\gamma_{y_1}(0)}^{\gamma_{y_2}(0)}\eta(u_0(x))dx+T(Q(y_2)-Q(y_1))=m((y_1,y_2)).$$

Отсюда следует, что $Q\in\mathrm{BV}$ и

$$D_yQ=-\lambda'(y)\eta(U(y))\mathscr{L}^1+\frac{m}{T}. \tag{4.3}$$

В частности, F является липшицевой, и для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) вещественных y справедливо соотношение

$$F'(y)=-\lambda'(y)U(y).$$

Это равенство получено дифференцированием сложной функции: $(f(u)-f'(u)u)_y=-(f'(u))_yu$.

Следующая общая лемма связывает между собой поток F и поток Q (см. рис. 7).

Лемма 4.4. *Пусть $\alpha=(\alpha^1,\alpha^2):[-M,M]\to\mathbb{R}^2$ — такая гладкая кривая, а L — такая положительная постоянная, что для любого w из $[-M,M]$ справедливо неравенство $|\dot\alpha^2(w)|\leqslant L|\dot\alpha^1(w)|$. Пусть $\gamma=(\gamma^1,\gamma^2):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ — такое отображение, что γ^1 липшицево, γ^2 имеет ограниченную вариацию и $\operatorname{Im}\gamma\subset\operatorname{Im}\alpha$. Тогда $D\gamma^2$ не имеет канторовой части и существует такое $w(y)$, что $\gamma(y)=\alpha(w(y))$ и*

$$(\gamma^2)'(y)(\alpha^1)'(w(y))=(\gamma^1)'(y)(\alpha^2)'(w(y))$$

для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) вещественных y.

Лемму 4.4 можно применить к кривым y. В этом случае

$$\alpha(w)=\begin{pmatrix} f(w)-f'(w)w\\ q(w)-f'(w)\eta(w)\end{pmatrix},\qquad \gamma(y)=\begin{pmatrix} F(y)\\ Q(y)\end{pmatrix}.$$

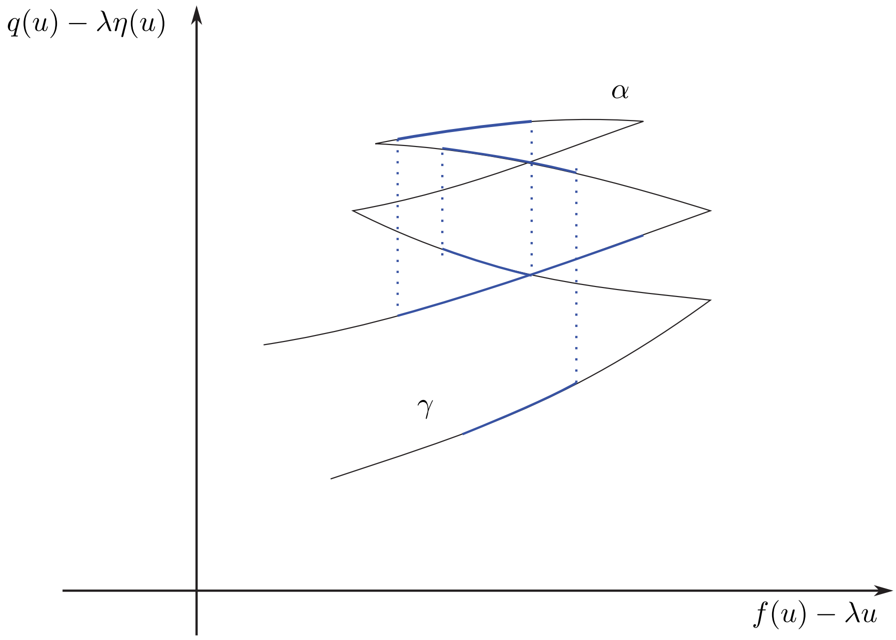

Рис. 7. Иллюстрация к лемме 4.4. Поскольку угол наклона α ограничен и первая проекция γ липшицева, то $\gamma^2 \in \mathrm{SBV}$ и почти всюду в $\mathscr{L}^1$ угол наклона γ совпадает с углом наклона α.

Тогда

$$\alpha'(w) = \begin{pmatrix} -f''(w)w \\ -f''(w)\eta(w) \end{pmatrix}$$

и, по условию, справедливо неравенство $|\eta(w)| \leqslant L|w|$. Поэтому D_yQ не имеет канторовой части и для почти всех (в смысле $\mathscr{L}^1$) вещественных y выполняется соотношение

$$Q'(y) = -\lambda'(y)\eta(U(y)).$$

Сравнивая это с (4.3), получаем, что m атомарна, что и завершает доказательство теоремы 4.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alberti G., Bianchini S., Crippa G.* Structure of level sets and Sard-type properties of Lipschitz maps// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). — 2013. — *12*, № 4. — С. 863–902.
2. *Alberti G., Bianchini S., Crippa G.* A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions// J. Eur. Math. Soc. (JEMS). — 2014. — *16*, № 2. — С. 201–234.
3. *Ambrosio L.* Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields// Invent. Math. — 2004. — *158*, № 2. — С. 227–260.
4. *Ambrosio L., Fusco N., Pallara D.* Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. — Oxford: Clarendon Press, 2000.
5. *Bardos C., le Roux A. Y., Nédélec J.-C.* First order quasilinear equations with boundary conditions// Commun. Part. Differ. Equ. — 1979. — *4*. — С. 1017–1034.
6. *Bianchini S., Bonicatto S.* A uniqueness result for the decomposition of vector fields in $\mathbb{R}^d$// Preprint SISSA 15/2017/MATE.
7. *Bianchini S., Bonicatto A., Gusev N. A.* Renormalization for autonomous nearly incompressible BV vector fields in two dimensions// SIAM J. Math. Anal. — 2016. — *48*, № 1. — С. 1–33.
8. *Bianchini S., Gusev N. A.* Steady nearly incompressible vector fields in two-dimension: chain rule and renormalization// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2016. — *222*, № 2. — С. 451–505.
9. *Bianchini S., Marconi E.* On the concentration of entropy for scalar conservation laws// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — *9*. — С. 73–88.
10. *Bianchini S., Marconi E.* On the structure of L^∞ entropy solutions to scalar conservation laws in one-space dimension// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2017. — *226*, № 1. — С. 441–493.
11. *Bianchini S., Marconi E., Bonicatto S.* A Lagrangian approach to multidimensional scalar conservation laws// Preprint SISSA 36/2017/MATE.

12. *Bianchini S., Modena S.* Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws// Commun. Math. Phys. — 2015. — *338*, № 3. — C. 1075–1152.
13. *Bianchini S., Yu L.* Structure of entropy solutions to general scalar conservation laws in one space dimension// J. Math. Anal. Appl. — 2015. — *428*, № 1. — C. 356–386.
14. *Bressan A.* An ill posed Cauchy problem for a hyperbolic system in two space dimensions// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 2003. — *110*. — C. 103–117.
15. *Cheng K. S.* A regularity theorem for a nonconvex scalar conservation law// J. Differ. Equ. — 1986. — *61*. — C. 79–127.
16. *Dafermos C. M.* Continuous solutions for balance laws// Ric. Mat. — 2006. — *55*, № 1. — C. 79–92.
17. *Dafermos C. M.* Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2010.
18. *de Lellis C.* Notes on hyperbolic systems of conservation laws and transport equations// Handb. Differ. Equ. — 2007. — *3*. — C. 277–382.
19. *de Lellis C., Riviere T.* Concentration estimates for entropy measures// J. Math. Pures Appl. (9). — 2003. — *82*. — C. 1343–1367.
20. *DiPerna R. J., Lions P.-L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces// Invent. Math. — 1989. — *98*, № 3. — C. 511–547.
21. *Oleĭnik O. A.* Discontinuous solutions of non-linear differential equations// Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — 1963. — *26*. — C. 95–172.
22. *Otto F.* Initial-boundary value problem for a scalar conservation law// C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1996. — *322*, № 8. — C. 729–734.

Stefano Bianchini
S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail: bianchin@sissa.it

Paolo Bonicatto
S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail: paolo.bonicatto@sissa.it

Elio Marconi
S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail: elio.marconi@sissa.it

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-418-436 UDC 517.952

Lagrangian Representations for Linear and Nonlinear Transport

© 2017 **S. Bianchini, P. Bonicatto, E. Marconi**

Abstract. In this note we present a unifying approach for two classes of first order partial differential equations: we introduce the notion of Lagrangian representation in the settings of continuity equation and scalar conservation laws. This yields, on the one hand, the uniqueness of weak solutions to transport equation driven by a two dimensional BV nearly incompressible vector field. On the other hand, it is proved that the entropy dissipation measure for scalar conservation laws in one space dimension is concentrated on countably many Lipschitz curves.

REFERENCES

1. G. Alberti, S. Bianchini, and G. Crippa, "Structure of level sets and Sard-type properties of Lipschitz maps," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2013, **12**, No. 4, 863–902.
2. G. Alberti, S. Bianchini, and G. Crippa, "A uniqueness result for the continuity equation in two dimensions," *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 2014, **16**, No. 2, 201–234.

3. L. Ambrosio, "Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields," *Invent. Math.*, 2004, **158**, No. 2, 227–260.
4. L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Clarendon Press, Oxford, 2000.
5. C. Bardos, A. Y. le Roux, and J.-C. Nédélec, "First order quasilinear equations with boundary conditions," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1979, **4**, 1017–1034.
6. S. Bianchini and S. Bonicatto, "A uniqueness result for the decomposition of vector fields in $\mathbb{R}^d$," *Preprint SISSA*, 15/2017/MATE.
7. S. Bianchini, A. Bonicatto, and N. A. Gusev, "Renormalization for autonomous nearly incompressible BV vector fields in two dimensions," *SIAM J. Math. Anal.*, 2016, **48**, No. 1, 1–33.
8. S. Bianchini, and N. A. Gusev, "Steady nearly incompressible vector fields in two-dimension: chain rule and renormalization," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2016, **222**, No. 2, 451–505.
9. S. Bianchini and E. Marconi, "On the concentration of entropy for scalar conservation laws," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, 73–88.
10. S. Bianchini and E. Marconi, "On the structure of L^∞ entropy solutions to scalar conservation laws in one-space dimension," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2017, **226**, No. 1, 441–493.
11. S. Bianchini, E. Marconi, and S. Bonicatto, "A Lagrangian approach to multidimensional scalar conservation laws," *Preprint SISSA*, 36/2017/MATE.
12. S. Bianchini and S. Modena, "Quadratic interaction functional for general systems of conservation laws," *Commun. Math. Phys.*, 2015, **338**, No. 3, 1075–1152.
13. S. Bianchini and L. Yu, "Structure of entropy solutions to general scalar conservation laws in one space dimension," *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, **428**, No. 1, 356–386.
14. A. Bressan, "An ill posed Cauchy problem for a hyperbolic system in two space dimensions," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 2003, **110**, 103–117.
15. K. S. Cheng, "A regularity theorem for a nonconvex scalar conservation law," *J. Differ. Equ.*, 1986, **61**, 79–127.
16. C. M. Dafermos, "Continuous solutions for balance laws," *Ric. Mat.*, 2006, **55**, No. 1, 79–92.
17. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2010.
18. C. de Lellis, "Notes on hyperbolic systems of conservation laws and transport equations," *Handb. Differ. Equ.*, 2007, **3**, 277–382.
19. C. de Lellis and T. Riviere, "Concentration estimates for entropy measures," *J. Math. Pures Appl.* (9), 2003, **82**, 1343–1367.
20. R. J. DiPerna and P.-L. Lions, "Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces," *Invent. Math.*, 1989, **98**, No. 3, 511–547.
21. O. A. Oleĭnik, "Discontinuous solutions of non-linear differential equations," *Am. Math. Soc. Transl. Ser.* 2, 1963, **26**, 95–172.
22. F. Otto, "Initial-boundary value problem for a scalar conservation law," *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 1996, **322**, No. 8, 729–734.

Stefano Bianchini
S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail: bianchin@sissa.it

Paolo Bonicatto
S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail: paolo.bonicatto@sissa.it

Elio Marconi
S.I.S.S.A., via Bonomea 265, 34136 Trieste, Italy
E-mail: elio.marconi@sissa.it