Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 3 (2017). С. 373–391

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-373-391 УДК 517.958, 517.984, 519.21

О ЛАКУНАХ В НИЖНЕЙ ЧАСТИ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА В ПОЛОСЕ

© 2017 г. **Д. И. БОРИСОВ**

Аннотация. В работе рассматривается периодический магнитный оператор Шредингера в бесконечной плоской прямой полосе. Показано, что при определенных условиях на магнитный потенциал и достаточно малом периоде нижняя часть зонного спектра не содержит внутренних лакун. Длина нижней части зонного спектра, в которой гарантируется отсутствие внутренних лакун, получена в явном виде. Верхняя оценка на величину малого параметра, гарантирующая описанный выше результат, также получена в виде конкретного числа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

На сегодняшний день гипотеза Бете—Зоммерфельда, предполагающая конечность числа внутренних спектральных лакун у многих периодических дифференциальных операторов, установлена доказана для ряда операторов в многомерных пространствах. Все они представляют собой оператор с постоянными коэффициентами с возмущением меньшего порядка. Гипотеза Бете—Зоммерфельда была доказана для оператора Шредингера с периодическим потенциалом разных размерностей с различными потенциалами [4, 5, 13, 14, 17, 20]. Случай магнитного оператора Шредингера был разобран в статьях [15, 16]. В работах [7, 18, 19] гипотеза была доказана для полигармонического оператора с различными возмущениями, в том числе, для псевдодифференциального оператора меньшего порядка. Дальнейшие работы по данной теме можно найти в списках литературы цитированных статей.

Смысл гипотезы Бете—Зоммерфельда состоит в том, что в верхней части спектра, то есть выше (правее) некоторой точки, отсутствуют внутренние лакуны. Независимо можно рассматривать и другую интересную задачу об отсутствии лакун в нижней части спектра, то есть ниже (левее) некоторой точки. Насколько нам известно, первый подобный результат содержится в [4, гл. 15]. Здесь рассматривался оператор Лапласа в многомерном пространстве размерности три и больше, возмущенный ограниченным самосопряженным периодическим оператором. Было доказано (теоремы 15.2 и 16.2), что при достаточно малой норме возмущающего оператора в спектре рассматриваемого оператора вовсе нет спектральных лакун.

В 2017 г. появилась новая работа, где рассматривался более простой вопрос об отсутствии лакун лишь в нижней части спектра, но для более сложного оператора [1]. Здесь вместо возмущения оператором вводилась периодическая смена типа краевого условия. Основной результат этой работы — отсутствие внутренних лакун в нижней части спектра для достаточно малых периодов. При этом верхняя оценка на допустимые значения периодов была получена в максимально явном

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01004).

виде конкретного числа. Длина нижней части спектра, в которой гарантируется отсутствие лакун, также была получена в виде явной несложной функции периода.

Исследование периодического дифференциального оператора с малым периодом в [1] мотивировано в определенной степени относительно недавними работами по усреднению операторов с быстро осциллирующими коэффициентами и различными возмущениями из теории граничного усреднения в областях типа полос и бесконечных цилиндров [3, 6, 8–12]. В случае чисто периодических возмущений все рассматриваемые операторы оказывались периодическими с малым периодом. Один из основных полученных результатов — это равномерная резольвентная сходимость возмущенных операторов к усредненным. Отсюда вытекает сходимость спектров возмущенных операторов к спектрам усредненных, в которых могут отсутствовать внутренние лакуны. Однако результаты о сходимости устроены таким образом, что отсутствие внутренних лакун в спектре усредненных операторов не означает отсутствие лакун в спектре возмущенных операторов. Единственное, что здесь можно утверждать — это увеличение длины части спектра, свободной от лакун, для возмущенного оператора. С помощью двучленных асимптотик первых зонных функций, построенных в [8–10] для оператора Лапласа с частой сменой краевых условий, можно получить оценку длины такой зоны — по крайней мере, это есть величина порядка $O(\varepsilon^{-2})$, где ε — период. В работе [1] для длины первой зоны получен существенно лучший результат — по крайней мере, это величина порядка $O(\varepsilon^{-6})$, причем длина выписана явно, без каких-либо оценок с неизвестными константами.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение исследований, начатых в статье [1]. Здесь мы рассматриваем магнитный оператор в полосе с краевым условием Дирихле. Магнитный потенциал предполагается периодическим и не слишком большим по модулю. Показано, что при достаточно малом периоде в нижней части спектра отсутствуют внутренние лакуны. Верхняя оценка на период, гарантирующая такой результат, получена явно. Длина нижней части спектра, в которой гарантированно отсутствуют лакуны, также выписана в виде явной функции от периода; вид функции весьма простой. В настоящей работе мы использовали в целом тот же подход, что и в [1]. Однако специфика магнитного поля потребовала определенных изменений. Кроме того, многие оценки в процессе доказательств мы провели более аккуратным образом по сравнению с [1], что несколько усложнило счет, но позволило в итоге расширить интервал значений малого параметра, на котором имеется описанный эффект.

Отметим еще, что данную работу можно рассматривать как первый шаг к доказательству усиленной гипотезы Бете—Зоммерфельда, предложенной в работе [1]. Суть этой гипотезы — полное отсутствие внутренних лакун в спектрах многомерных операторов при достаточно малом периоде. Вместе с тем, техники настоящей работы недостаточно для доказательства такой гипотезы и необходимо привлекать дополнительные новые идеи.

2. Постановка задачи и основные результаты

Пусть $x = (x_1, x_2)$ — декартовы координаты на плоскости, Π — горизонтальная полоса ширины π, а именно, $\Pi := \{x : 0 < x_2 < \pi\}$, ε — положительное число. Через $A^\varepsilon = A^\varepsilon(x) = \big(A_1^\varepsilon(x), A_2^\varepsilon(x)\big)$ обозначим магнитный потенциал, где $A_j^\varepsilon(x) = A_j\left(\dfrac{x_1}{\varepsilon}, x_2\right)$, $j = 1, 2$, и функции $A_j(y_1, y_2)$ вещественны и 2π-периодичны по y_1. Также предполагаем, что функции A_j измеримы и выполнена оценка:

$$|A_1(y_1, y_2)|^2 + |A_2(y_1, y_2)|^2 \leqslant a^2 < 1, \quad a = \mathrm{const}, \quad y_1 \in \mathbb{R}, \quad y_2 \in [0, \pi]. \tag{2.1}$$

В настоящей работе рассматривается магнитный оператор Шредингера

$$\mathcal{H}_\varepsilon := (\mathrm{i}\nabla + A^\varepsilon)^2$$

в полосе Π с краевым условием Дирихле. Строго его определяем как самосопряженный оператор в $L_2(\Pi)$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_\varepsilon[u] := \big\|(\mathrm{i}\nabla + A^\varepsilon)u\big\|^2_{L_2(\Pi)}$$

в $L_2(\Pi)$ на области определения $\mathring{W}_2^1(\Pi)$, где $\mathring{W}_2^1(\Pi)$ — пространство Соболева функций из $W_2^1(\Pi)$ с нулевым следом на $\partial\Pi$.

Через $[\cdot]$ обозначим целую часть числа, через $\sigma(\cdot)$ — спектр оператора.

Оператор $\mathcal{H}_\varepsilon$ имеет зонный спектр, который вводится как объединение образов зонных функций. Наш основной результат устанавливает отсутствие внутренних лакун в нижней части спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (2.1) *и*

$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \frac{17567}{10^6}, \quad \varepsilon_1 := \frac{539772289\sqrt{509}}{63625 \cdot 10^7\sqrt{\pi+1}} < \varepsilon_0. \tag{2.2}$$

Обозначим:

$$K_\varepsilon := \begin{cases} 3, & \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \\ \max\bigl\{3, \bigl[\mu^2(\varepsilon)\bigr] + 1\bigr\}, & \varepsilon < \varepsilon_1, \end{cases}$$

где

$$\mu(\varepsilon) := \frac{\beta}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\varepsilon^2} - 4\gamma}, \quad \beta := \frac{539772289\sqrt{2}}{15625 \cdot 10^6(\pi+1)}, \quad \gamma := \frac{1018}{625(\pi+1)}.$$

Тогда часть спектра

$$\bigl[0, (K_\varepsilon - \varepsilon a)^2 \varepsilon^{-2}\bigr] \cap \sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)$$

оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ не содержит внутренних лакун.

Обсудим кратко теорему. Основная ее суть — это отсутствие лакун в нижней части спектра при достаточно малом периоде у рассматриваемого оператора. Под нижней частью спектра понимается зона спектра от начала до некоторой точки; в нашем случае это точка $(K_\varepsilon - \varepsilon a)^2\varepsilon^{-2}$. Теорема гарантирует отсутствие лакун только в данной части спектра. Выше (правее) указанной точки спектр может как иметь, так и не иметь внутренние лакуны, наша теорема по этому поводу ничего не утверждает.

Длина указанной нижней части спектра зависит от периода, причем чем меньше период, тем больше данная длина. Как следует из формулы для K_ε, при $\varepsilon \to +0$ длина данной части спектра растет по крайней мере как $O(\varepsilon^{-6})$. Этот результат существенно лучше оценки, которую можно получить на основе двучленных асимптотик первых зонных функций аналогично работам [8–10] — здесь максимально возможная оценка есть величина $O(\varepsilon^{-2})$. Наша оценка схожа по порядку с аналогичной оценкой работы [1].

Обсудим еще методику настоящей работы. В целом она воспроизводит подход работы [1]. Однако здесь имеется ряд отличий. Первое из них состоит в том, что необходимые оценки считающих функций для магнитного оператора, которые мы приводим в следующем разделе, потребовали определенных усилий и их вывод отличается от простого применения принципа минимакса в работе [1]. Следующее отличие состоит в том, что ключевой параметр τ_{max}, который вводится в четвертом разделе, здесь выбирается ближе к значениям, подсказанным предварительным численным счетом. Кроме того, многочисленные технические оценки в четвертом разделе проведены аккуратнее, нежели в [1], что в итоге привело к увеличению константы ε_0 по сравнению с аналогичной константой из цитированной работы.

Условие (2.1) является существенным и используется в доказательстве одной из ключевых лемм, леммы 3.2, в следующем разделе. В случае нарушения условия (2.1) утверждение леммы 3.2, видимо, также будет нарушаться, что делает неприменимыми дальнейшие рассуждения доказательства теоремы 2.1.

3. Считающие функции

В настоящем разделе приводится первая часть доказательства теорем 2.1.

Через $\square_\varepsilon$ обозначим ячейку периодичности $\square_\varepsilon := \{x : |x_1| < \varepsilon\pi, 0 < x_2 < \pi\}$. Зонные функции оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ — это упорядоченные по возрастанию с учетом кратностей собственные значения $E_k^\varepsilon(\tau, A)$, $k \geqslant 1$, оператора

$$\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, A) := \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + A_1^\varepsilon + \frac{\tau}{\varepsilon}\right)^2 + \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + A_2^\varepsilon\right)^2$$

на $\square_\varepsilon$ с краевым условием Дирихле на $\partial\square_\varepsilon \cap \partial\Pi$ и периодическими краевыми условиями на боковых сторонах $\square_\varepsilon$. Строго оператор $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau)$ вводим как самосопряженный оператор в $L_2(\square_\varepsilon)$, соответствующий квадратичной форме

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)[u] := \left\| \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + A_1^\varepsilon + \frac{\tau}{\varepsilon} \right) u \right\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)} + \left\| \left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2} + A_2^\varepsilon \right) u \right\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}, \quad \tau \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \tag{3.1}$$

в $L_2(\square)$ на области определения $\mathring{W}^1_{2,per}(\square)$, где последнее пространство вводится как множество функций из $W_2^1(\square_\varepsilon)$, удовлетворяющих периодическому краевому условию на боковых сторонах $\square_\varepsilon$ и имеющих нулевой след на $\partial\Pi \cap \partial\square_\varepsilon$.

В силу положительности формы $\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau, A)$ собственные значения $E_k^\varepsilon(\tau, A)$ неотрицательны для всех значений ε, τ, k.

Для произвольного $L > 0$ через $N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$ обозначим масштабированную считающую функцию оператора $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, A)$, а именно, число собственных значений $E_k^\varepsilon(\tau, A)$, не превосходящих $\dfrac{L^2}{\varepsilon^2}$:

$$N_\varepsilon(L^2, \tau, A) := \max\left\{ k : \, E_k^\varepsilon(\tau, A) \leqslant \frac{L^2}{\varepsilon^2} \right\}.$$

Отметим, что при $A = 0$ считающая функция $N_\varepsilon(L^2, \tau, 0)$ соответствует оператору Лапласа.

Для всех $L > 0$ число зонных функций $E_k^\varepsilon(\tau, A)$, чьи минимумы не превосходят $\dfrac{L^2}{\varepsilon^2}$, совпадает с $\sup\limits_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$. Аналогично, число зонных функций, чьи максимумы не превосходят $\dfrac{L^2}{\varepsilon^2}$, дается числом $\inf\limits_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A)$. Поэтому условие перекрытия соседних зон спектра, $\left[\min\limits_\tau E_k^\varepsilon(\tau, A), \max\limits_\tau E_k^\varepsilon(\tau, A)\right]$ и $\left[\min\limits_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau, A), \max\limits_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau, A)\right]$, эквивалентно неравенству

$$\sup_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A) - \inf_\tau N_\varepsilon(L^2, \tau, A) \geqslant 1 \tag{3.2}$$

для всех L, удовлетворяющих неравенству

$$\min_\tau E_k^\varepsilon(\tau, A) \leqslant \frac{L^2}{\varepsilon^2} \leqslant \max_\tau E_{k+1}^\varepsilon(\tau, A).$$

Следовательно, отсутствие лакун в части спектра $[\lambda_-, \lambda_+]$ оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ эквивалентно выполнению неравенства (3.2) для $L^2 \in [\varepsilon^2\lambda_-, \varepsilon^2, \lambda_+]$.

Отметим, что при $A = 0$ собственные значения и собственные функции оператора $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, 0)$ легко находятся разделением переменных

$$E_k^\varepsilon(\tau, 0) = \frac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2, \quad \Psi_k^\varepsilon(x) = e^{\frac{\mathrm{i}nx_1}{\varepsilon}} \sin mx_2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

где индекс k следует выбирать из условия упорядочения собственных значений $\dfrac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2$.

Далее нам понадобятся две вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. *Для всех ε, L, k, τ выполнено неравенство*

$$N_\varepsilon(L^2, \tau, 0) \leqslant N_\varepsilon((L + \varepsilon a)^2, \tau, A),$$

где a — из (2.1).

Доказательство. Выберем $L > 0$, и пусть $E_k^\varepsilon(\tau, 0)$ — собственные значения Лапласиана $\mathcal{H}_\varepsilon(\tau, 0)$, удовлетворяющие условию

$$E_k^\varepsilon(\tau, 0) \leqslant \frac{L^2}{\varepsilon^2}, \quad k = 1, \ldots, N_\varepsilon(L^2, \tau, 0).$$

Через u обозначим произвольную линейную комбинацию собственных функций Ψ_k^ε, соответствующих $E_k^\varepsilon(\tau,0)$. Тогда в силу (2.1), (3.1), (3.3) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,A)[u]}{\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}} &\leqslant \frac{\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,0)[u]+2a\big(\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,0)[u]\big)^{\frac12}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}+a^2\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}}{\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}} \leqslant \\ &\leqslant E_k^\varepsilon(\tau,0)+2a\big(E_k^\varepsilon(\tau,0)\big)^{\frac12}+a^2 \leqslant \left(\frac{L}{\varepsilon}+a\right)^2.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, в области определения формы $\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,A)$ найдено подпространство размерности $N_\varepsilon(L^2,\tau,A)$ такое, что для всех $u\neq 0$ из этого подпространства выполнено неравенство (3.4). Отсюда в силу принципа минимакса уже вытекает требуемая оценка. □

Лемма 3.2. *Для всех k, ε, τ справедливы неравенства*

$$E_k^\varepsilon(\tau,A) \geqslant \left(\sqrt{E_k^\varepsilon(\tau,0)}-a\right)^2 \tag{3.5}$$

и при $L\geqslant \varepsilon a$

$$N_\varepsilon(L^2,\tau,0)\geqslant N_\varepsilon\big((L-\varepsilon a)^2,\tau,A\big). \tag{3.6}$$

Доказательство. Ясно, что оценка (3.6) есть прямое следствие неравенств (3.5), поэтому достаточно доказать только последние неравенства.

Для всех $u\in \mathring{W}^1_{2,per}(\square_\varepsilon)$ очевидным образом имеем:

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,A)[u] &\geqslant \mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,0)[u]-2a\big(\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,0)[u]\big)^{\frac12}\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}+a^2\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}= \\ &=\Big(\big(\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,0)[u]\big)^{\frac12}-a\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\Big)^2.\end{aligned} \tag{3.7}$$

И так как функция u обращается в нуль на $\partial\square_\varepsilon\cap\partial\Pi$, то

$$\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,0)[u]=\|\nabla u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}\geqslant \left\|\frac{\partial u}{\partial x_2}\right\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}\geqslant \|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)} > a^2\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}. \tag{3.8}$$

Поэтому в силу принципа минимакса и соотношений (2.1), (3.7) выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned}E_k^\varepsilon(\tau,A) &= \sup_{u_1,\ldots,u_{k-1}\in L_2(\square_\varepsilon)}\ \inf_{\substack{u\in \mathring{W}^1_{2,per}(\square_\varepsilon)\\ (u,u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)}=0,\, j=1,\ldots,k-1}} \frac{\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,A)[u]}{\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}}\geqslant \\ &\geqslant \sup_{u_1,\ldots,u_{k-1}\in L_2(\square_\varepsilon)}\ \inf_{\substack{u\in \mathring{W}^1_{2,per}(\square_\varepsilon)\\ (u,u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)}=0,\, j=1,\ldots,k-1}} \frac{\Big(\big(\mathfrak{h}_\varepsilon(\tau,0)[u]\big)^{\frac12}-a\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}\Big)^2}{\|u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}}= \\ &= \sup_{u_1,\ldots,u_{k-1}\in L_2(\square_\varepsilon)}\ \inf_{\substack{u\in \mathring{W}^1_{2,per}(\square_\varepsilon)\\ (u,u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)}=0,\, j=1,\ldots,k-1}} \left(\frac{\|\nabla u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}}{\|u\|_{L_2(\square_\varepsilon)}}-a\right)^2= \\ &= \left(\left(\sup_{u_1,\ldots,u_{k-1}\in L_2(\square_\varepsilon)}\ \inf_{\substack{u\in \mathring{W}^1_{2,per}(\square_\varepsilon)\\ (u,u_j)_{L_2(\square_\varepsilon)}=0,\, j=1,\ldots,k-1}} \frac{\|\nabla u\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}}{\|u_\varepsilon\|^2_{L_2(\square_\varepsilon)}}\right)^{\frac12}-a\right)^2= \\ &= \left(\sqrt{E_k^\varepsilon(\tau,0)}-a\right)^2,\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы. □

Из доказанных лемм выводим двустороннюю оценку считающей функции $N_\varepsilon(L^2,\tau,A)$:

$$N_\varepsilon\big((L-\varepsilon a)^2,\tau,0\big)\leqslant N_\varepsilon(L^2,\tau,A)\leqslant N_\varepsilon\big((L+\varepsilon a)^2,\tau,0\big).$$

Из этой оценки следует, что

$$\begin{aligned}&\sup_{\tau} N_\varepsilon(L^2,\tau,A) \geqslant \sup_{\tau} N_\varepsilon((L-\varepsilon a)^2,\tau,0),\\ &\inf_{\tau} N_\varepsilon(L^2,\tau,A) \leqslant \inf_{\tau} N_\varepsilon((L+\varepsilon a)^2,\tau,0).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Тогда для выполнения неравенства (3.2) достаточно потребовать выполнения условия

$$\sup_{\tau} N_\varepsilon((L-\varepsilon a)^2,\tau,0) - \inf_{\tau} N_\varepsilon((L+\varepsilon a)^2,\tau,0) \geqslant 1.$$

В свою очередь, для проверки этого неравенства достаточно подобрать точки τ_{min}, $\tau_{max} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ такие, что

$$N_\varepsilon((L-\varepsilon a)^2,\tau_{max},0) - N_\varepsilon((L+\varepsilon a)^2,\tau_{min},0) \geqslant 1. \tag{3.10}$$

Для упрощения обозначений положим

$$M_\varepsilon(L^2,\tau) := N_\varepsilon(L^2,\tau,0).$$

Тогда неравенство (3.10) перепишется в виде

$$M_\varepsilon((L-\varepsilon a)^2,\tau_{max}) - M_\varepsilon((L+\varepsilon a)^2,\tau_{min}) \geqslant 1.$$

Так как величины $M_\varepsilon((L-\varepsilon a)^2,\tau_{max})$ и $M_\varepsilon((L+\varepsilon a)^2,\tau_{min})$ целочисленные, то для проверки последнего неравенства достаточно проверить, что

$$M_\varepsilon((L-\varepsilon a)^2,\tau_{max}) - M_\varepsilon((L+\varepsilon a)^2,\tau_{min}) > 0. \tag{3.11}$$

Именно это неравенство мы и будем проверять далее в доказательстве теоремы 2.1.

Отметим еще, что если при некотором L и некотором $\tau_{min} \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ выполнено

$$M_\varepsilon((L+\varepsilon a)^2,\tau_{min}) = 0, \tag{3.12}$$

то это означает, что в спектре оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ ниже (левее) точки $\dfrac{L^2}{\varepsilon^2}$ отсутствуют внутренние лакуны. Действительно, в этом случае в силу (3.9)

$$\inf_{\tau} N_\varepsilon(L^2,\tau,A) = 0$$

и это означает, что ниже (левее) точки $\dfrac{L^2}{\varepsilon^2}$ отсутствуют максимумы зонных функций $E_k^\varepsilon(\tau,A)$.

При $A=0$ функции $E_k^\varepsilon(\tau,0)$ даются формулами (3.3), а потому $M_\varepsilon(L^2,\tau)$ есть число точек (n,m), $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{N}$, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{(n+\tau)^2}{\varepsilon^2} + m^2 \leqslant \frac{L^2}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}M_\varepsilon(L^2,\tau) =&\#\big\{(n,m):\,(n+\tau)^2+\varepsilon^2m^2\leqslant L^2,\ n\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}\big\} =\\ =&\sum_{n\in\mathbb{Z}:\,|n+\tau|\leqslant L}\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+\tau)^2}}{\varepsilon}\right] = \sum_{n=-[L+\tau]}^{[L-\tau]}\left[\frac{\sqrt{L^2-(n+\tau)^2}}{\varepsilon}\right].\end{aligned} \tag{3.13}$$

4. Отсутствие лакун

В настоящем разделе мы заканчиваем доказательство теоремы 2.1, начатое в выше. Здесь нашей целью будет проверка неравенства (3.11) с подходящими τ_{min}, τ_{max} для максимально возможных значений L. Ключевым моментом станет достаточно нетривиальный выбор чисел τ_{min}, τ_{max}.

Вначале выясним положение нижней границы спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$. Согласно диамагнитному неравенству, см., например, [2, гл. 7, § 7.21], для всех $u\in \mathring{W}_2^1(\Pi)$ верно неравенство

$$\|(\nabla+\mathrm{i}A^\varepsilon)u\|^2_{L_2(\Pi)} \geqslant \|\nabla|u|\|^2_{L_2(\Pi)}.$$

Отсюда в силу принципа минимакса выводим оценку для нижнего края спектра оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$:

$$\inf\sigma(\mathcal{H}_\varepsilon)=\inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^1(\Pi)\\ u\neq0}}\frac{\|(\nabla+\mathrm{i}A^\varepsilon)u\|^2_{L_2(\Pi)}}{\|u\|^2_{L_2(\Pi)}}\geqslant\inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^1(\Pi)\\ u\neq0}}\frac{\|\nabla|u|\|^2_{L_2(\Pi)}}{\|u\|^2_{L_2(\Pi)}}=\inf_{\substack{u\in\mathring{W}_2^1(\Pi)\\ u\neq0}}\frac{\|\nabla u\|^2_{L_2(\Pi)}}{\|u\|^2_{L_2(\Pi)}}\geqslant1,$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались оценкой (3.8). Таким образом, достаточно рассмотреть значения $L\geqslant\varepsilon$.

Рассмотрим значения $\varepsilon\leqslant L<\frac{1}{2}-\varepsilon a$. Положим $\tau_{min}:=\frac{1}{2}$. Тогда на основе формул (3.13) несложно проверить, что выполнено равенство (3.12) и, следовательно, ниже (левее) точки $\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon a\right)^2$ в спектре оператора $\mathcal{H}_\varepsilon$ отсутствуют внутренние лакуны.

Переходим к случаю

$$L\geqslant\frac{1}{2}-\varepsilon a. \tag{4.1}$$

Обозначим: $K:=[L+\varepsilon a]$, $\alpha:=L+\varepsilon a-K$ — дробная часть числа $L+\varepsilon a$, так что

$$L+\varepsilon a=K+\alpha. \tag{4.2}$$

Величины τ_{min}, τ_{max} будем выбирать по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
&\tau_{min}:=\begin{cases}\alpha & \text{при}\quad 0\leqslant\alpha<\frac{1}{2},\\ 1-\alpha & \text{при}\quad \frac{1}{2}\leqslant\alpha<1,\end{cases}\\
&\tau_{max}:=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{при}\quad 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{13}{100}\quad\text{или}\quad\frac{39267}{62500}\leqslant\alpha\leqslant1,\\ 0 & \text{при}\quad \frac{13}{100}<\alpha<\frac{39267}{62500}.\end{cases}
\end{aligned}\tag{4.3}$$

Поясним указанный выбор чисел τ_{min}, τ_{max}. Ясно, что наиболее оптимальный выбор этих чисел — это точка глобального минимума функции $M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau)$ по τ в качестве τ_{min} и точка глобального максимума $M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau)$ в качестве τ_{max}. Отыскать аналитически подобные точки экстремума — крайне нетривиальная задача. Вместе с тем, предварительные численные эксперименты показали, что при указанном выборе τ_{min} и τ_{max} соответствующие значения функций $M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min})$ и $M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max})$ близки к экстремальным. Окончательный вид числовых констант в определении τ_{max} уточнялся из условия максимальности константы ε_0 в рамках аналитических вычислений, которые мы приводим ниже.

Ввиду указанного выбора чисел τ_{min} и τ_{max} далее мы будем рассматривать отдельно четыре случая:

$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{13}{100},\quad\frac{13}{100}<\alpha<\frac{1}{2},\quad\frac{1}{2}\leqslant\alpha<\frac{39267}{62500},\quad\frac{39267}{62500}\leqslant\alpha<1.$$

Напомним также, что всюду далее считаем выполненным условие (4.1).

Для рассмотрения указанных случаев нам понадобятся предварительные вспомогательные оценки.

4.1. Вспомогательные оценки.

Положим:

$$F_0(L,\xi,t):=2F_1(L,\xi,0)-F_1(L,\xi,t)-F_1(L,\xi,-t),\quad F_1(L,\xi,t):=\sqrt{L^2-(\xi+t)^2}.$$

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned}
F_0(L,\xi,t)=t^2&\left(\frac{1}{F_2(L,\xi,0,t)}+\frac{1}{F_2(L,\xi,0,-t)}\right)+\frac{8t^2\xi^2}{F_2(L,\xi,0,t)F_2(L,\xi,0,-t)F_2(L,\xi,t,-t)},\\
F_2(L,\xi,t,s):=&F_1(L,\xi,t)+F_1(L,\xi,s).
\end{aligned}$$

Следовательно, функция $F_0(L,\xi,A)$ положительна при положительных подкоренных выражениях в ее определении. Кроме того, при $A\geqslant0$, $\xi\geqslant A$, $\xi+A\leqslant L$ монотонно возрастает по ξ и выполнено неравенство:

$$F_0(L,\xi,t) \geqslant t^2 \left(\frac{1}{F_1(L,\xi,-t)} + \frac{\xi^2}{F_1^3(L,\xi,-t)} \right) \geqslant t^2 \frac{L^2+2t(\xi-t)}{(L^2-(\xi-t)^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{4.4}$$

Непосредственными вычислениями легко проверить, что

$$F_3(L,s,\xi) := F_1(L+s,\xi,0) - F_1(L-s,\xi,0) = \frac{4sL}{F_1(L+s,\xi,0)+F_1(L-s,\xi,0)}.$$

И так как в силу выпуклости функции $z \mapsto \sqrt{z^2-1}$ верна оценка

$$F_1(L+s,\xi,0)+F_1(L-s,\xi,0) \leqslant 2F_1(L,\xi,0),$$

то имеем:

$$F_3(L,s,\xi) \leqslant \frac{2sL}{\sqrt{L^2-\xi^2}}. \tag{4.5}$$

4.2. Случай $0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{13}{100}$**.** В данном случае из (4.1) следует, что $K \geqslant 1$.

Из (3.13), (2.2), (4.3) выводим:

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min}) &= M_\varepsilon\left(L-\varepsilon a,\frac{1}{2}\right) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\alpha) = \\ &= \sum_{n=-K}^{K-1} \left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K}^{K} \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ &= \sum_{n=-K}^{K-1} \left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon} \right] - \sum_{n=-K}^{K-1} \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{K-1} \left(2\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)^2}}{\varepsilon} \right] - \right. \\ &\qquad \left. - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon} \right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon} \right] \right). \end{aligned}$$

И так как $z-1 \leqslant [z] \leqslant z$, имеем:

$$M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min}) \geqslant \frac{S_1(L,\varepsilon)}{\varepsilon} - 2K, \tag{4.6}$$

где

$$S_1(L,\varepsilon) := \sum_{n=0}^{K-1} F_4(L,n,\varepsilon), \tag{4.7}$$

$$F_4(L,\xi,\varepsilon) := 2\sqrt{(L-\varepsilon a)^2 - \left(\xi+\frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi+\alpha)^2} - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi+1-\alpha)^2}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $K=1,2$. Здесь функция S_1 имеет вид:

$$S_1(L,\varepsilon) = 2\sqrt{(1+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac{1}{4}} - \sqrt{(1+\alpha)^2-\alpha^2} - \sqrt{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}$$

при $K=1$ и

$$\begin{aligned} S_1(L,\varepsilon) = 2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac{1}{4}} - \sqrt{(2+\alpha)^2-\alpha^2} - \sqrt{(2+\alpha)^2-(1-\alpha)^2} + \\ + 2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac{9}{4}} - \sqrt{(2+\alpha)^2-(1+\alpha)^2} - \sqrt{(2+\alpha)^2-(2-\alpha)^2} \end{aligned}$$

при $K = 2$. В обоих случаях минимум правых частей достигается при $\alpha = \dfrac{13}{100}$, $\varepsilon a = \varepsilon_0$. Здесь и всюду далее подобные утверждения проверяются вычислением соответствующих производных. В работе мы не приводим данных вычислений, чтобы не перегружать текст громоздкими техническими вычислениями. В результате имеем:

$$S_1(L,\varepsilon) \geqslant S_1(L,\varepsilon)\Big|_{\substack{\alpha=\frac{13}{100}\\ \varepsilon a=\varepsilon_0}} > \frac{29}{5}\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad K=1,$$

$$S_1(L,\varepsilon) \geqslant S_1(L,\varepsilon)\Big|_{\substack{\alpha=\frac{13}{100}\\ \varepsilon a=\varepsilon_0}} > \frac{11}{2}\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad K=2.$$

Отсюда и из (4.6) вытекает, что

$$M_\varepsilon(L-\varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a, \tau_{min}) > \frac{3}{2} \tag{4.8}$$

при $K = 1, 2$.

Далее рассматриваем случай $K \geqslant 3$. Функцию F_4 представим в виде:

$$F_4(L,\xi,\varepsilon) = F_0\left(L+\varepsilon a, \xi+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) - 2F_3\left(L, \varepsilon a, \xi+\frac{1}{2}\right). \tag{4.9}$$

Из свойств функции F_0, описанных в пункте 4.2, следует положительность величины $F_0\Big(L+\varepsilon a, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}-\alpha\Big)$ и оценка

$$\sum_{n=0}^{K-1} F_0\left(L+\varepsilon a, n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) \geqslant F_0\left(L+\varepsilon a, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) + \int\limits_0^{K-1} F_0\left(L+\varepsilon a, \xi+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha\right) d\xi. \tag{4.10}$$

Оценим снизу интеграл в последнем неравенстве. В силу (4.4) имеем:

$$\begin{gathered}
\int\limits_0^{K-1} F_0\left(L+\varepsilon a, \xi+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\alpha, 0\right) dx \geqslant \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2 \int\limits_0^{K-1} \frac{(K+\alpha)^2+(1-2\alpha)(\xi+\alpha)}{\left((K+\alpha)^2-(\xi+\alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \\
= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2 \int\limits_\alpha^{K-1+\alpha} \frac{(K+\alpha)^2+(1-2\alpha)\xi}{\left((K+\alpha)^2-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\xi = \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2 \frac{\xi+1-2\alpha}{\sqrt{(K+\alpha)^2-\xi^2}}\Bigg|_\alpha^{K-1+\alpha} = \\
= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)^2 \left(\frac{K-\alpha}{\sqrt{2(K+\alpha)-1}} - \frac{1-\alpha}{\sqrt{K^2+2\alpha K}}\right).
\end{gathered} \tag{4.11}$$

Применяя оценку (4.5) с $s = \varepsilon a$, $\xi = n+\alpha$ и $\xi = n+1-\alpha$, немедленно получаем:

$$\begin{aligned}
-2\sum_{n=0}^{K-1} F_3\left(L, \varepsilon a, \xi+\frac{1}{2}\right) &\geqslant -\sum_{n=0}^{K-1} \frac{4\varepsilon a L}{\sqrt{L^2-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}} \geqslant \\
&\geqslant -4\varepsilon a L\left(\frac{1}{\sqrt{L^2-\frac{1}{4}}} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{K-\frac{1}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{L^2-\xi^2}}\right) = \\
&= -4\varepsilon a L\left(\frac{1}{\sqrt{L^2-\frac{1}{4}}} + \arcsin\left(\frac{K-\frac{1}{2}}{L}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{2L}\right)\right) \geqslant \\
&\geqslant -\frac{105697}{5\cdot 10^4}\varepsilon a - 4\varepsilon a\left(K-\frac{1}{2}\right)\frac{L}{K-\frac{1}{2}}\arcsin\left(\frac{K-\frac{1}{2}}{L}\right).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Воспользуемся теперь тем, что функция $z \mapsto \dfrac{\arcsin z}{z}$ монотонно растет при $z \in [0,1]$ и ограничена сверху константой $\dfrac{\pi}{2}$. Тогда окончательно выводим:

$$-2\sum_{n=0}^{K-1} F_3\left(L, \varepsilon a, \xi + \frac{1}{2}\right) \geqslant -\frac{105697}{5\cdot 10^4}\varepsilon a - 2\pi\varepsilon a\left(K - \frac{1}{2}\right). \tag{4.13}$$

Из последней оценки, (4.7), (4.9), (4.10), (4.11) получаем оценку для S_1 в случае $K \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
&S_1(L,\varepsilon) \geqslant F_5(K,\alpha) - \varepsilon a\left(2\pi K + \pi - -\frac{105697}{5\cdot 10^4}\right),\\
&F_5(K,\alpha) := 2\sqrt{(K+\alpha)^2 - \frac{1}{4}} - \sqrt{(K+\alpha)^2 - \alpha^2} - \sqrt{(K+\alpha)^2 - (1-\alpha)^2} +\\
&\qquad + \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)^2 \left(\frac{K-\alpha}{\sqrt{2(K+\alpha)-1}} - \frac{1-\alpha}{\sqrt{K^2 + 2\alpha K}}\right).
\end{aligned}$$

Минимум функции F_5 достигается при $\alpha = \dfrac{13}{100}$. Кроме того, функция

$$K \mapsto \frac{F_5\left(K, \frac{13}{100}\right)}{\sqrt{K}}$$

монотонно убывает по $K \geqslant 2$ и потому

$$\frac{F_5\left(K, \frac{13}{100}\right)}{\sqrt{K}} \geqslant \left.\frac{F_5\left(K, \frac{13}{100}\right)}{\sqrt{K}}\right|_{K=+\infty} > \frac{1369\sqrt{2}}{2\cdot 10^4}.$$

Следовательно,

$$S_1(L,\varepsilon) \geqslant \frac{1369\sqrt{2}}{2\cdot 10^4}\sqrt{K} - \varepsilon a\left(2\pi K + \pi - \frac{105697}{5\cdot 10^4}\right).$$

Таким образом, из (4.6) окончательно выводим:

$$\begin{aligned}
&M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geqslant Q_1(K, a, \varepsilon), \qquad (4.14)\\
&Q_1(K,a,\varepsilon) := \frac{1369\sqrt{2}}{2\cdot 10^4}\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - a\left(2\pi K + \pi - \frac{105697}{5\cdot 10^4}\right)
\end{aligned}$$

при $K \geqslant 3$.

4.3. Случай $\dfrac{13}{100} < \alpha < \dfrac{1}{2}$. Как и в предыдущем случае, здесь условие (4.1) вновь означает, что $K \geqslant 1$. Согласно (3.13), (2.2), (4.3) имеем:

$$\begin{aligned}
&M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) = M_\varepsilon(L - \varepsilon a, 0) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \alpha) =\\
&= \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2 - n^2}}{\varepsilon}\right] - \sum_{n=-K}^{K-1}\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2 - (n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right] =\\
&= \sum_{n=1}^{K-1}\left(2\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2 - n^2}}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2 - (n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2 - (n-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\right) +\\
&\quad + \left[\frac{L - \varepsilon a}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2 - \alpha^2}}{\varepsilon}\right] + 2\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2 - K^2}}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2 - (K-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right],
\end{aligned}$$

откуда следует:

$$M_\varepsilon(L - \varepsilon a, \tau_{max}) - M_\varepsilon(L + \varepsilon a, \tau_{min}) \geqslant \frac{S_2(L,\varepsilon)}{\varepsilon} - 2K - 1, \tag{4.15}$$

где

$$S_2(L,\varepsilon) := \sum_{n=1}^{K-1} F_6(L,n,\varepsilon) + F_7(L,\varepsilon), \tag{4.16}$$

$$F_6(L,\xi,\varepsilon) := 2\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\xi^2} - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi+\alpha)^2} - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi-\alpha)^2},$$

$$F_7(L,\varepsilon) := L-\varepsilon a - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-\alpha^2} + 2\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-K^2} - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(K-\alpha)^2}.$$

Вновь случаи $K=1,2$ рассматриваем отдельно. Имеем:

$$S_2(L,\varepsilon) = 1+\alpha-2\varepsilon a - \sqrt{(1+\alpha)^2-\alpha^2} + 2\sqrt{(1+\alpha-2\varepsilon a)^2-1} - \sqrt{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}$$

при $K=1$ и

$$\begin{aligned} S_2(L,\varepsilon) =& 2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-1} - \sqrt{(2+\alpha)^2-(1+\alpha)^2} - \sqrt{(2+\alpha)^2-(1-\alpha)^2} + \\ &+ 2+\alpha-2\varepsilon a - \sqrt{(2+\alpha)^2-\alpha^2} + 2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-4} - \sqrt{(2+\alpha)^2-(2-\alpha)^2} \end{aligned}$$

при $K=2$. Минимумы этих функций достигаются при $\alpha = \dfrac{13}{100}$, $\varepsilon a = \varepsilon_0$, то есть,

$$S_2(L,\varepsilon) \geqslant S_2(L,\varepsilon)\Big|_{\substack{\alpha=\frac{13}{100}\\ \varepsilon a=\varepsilon_0}} > 8\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad K=1,$$

$$S_2(L,\varepsilon) \geqslant S_2(L,\varepsilon)\Big|_{\substack{\alpha=\frac{13}{100}\\ \varepsilon a=\varepsilon_0}} > 7\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad K=2.$$

Тогда при $K=1,2$ в силу (4.15)

$$M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min}) > 2. \tag{4.17}$$

Далее рассматриваем случай $K\geqslant 3$. Функцию F_6 представим в виде

$$F_6(L,\xi,\varepsilon) = F_0(L+\varepsilon a,\xi,\alpha) - 2F_3(L,\varepsilon a,\xi). \tag{4.18}$$

Аналогично (4.10) имеем:

$$\sum_{n=1}^{K-1} F_0(L+\varepsilon a,n,\alpha) \geqslant F_0(L+\varepsilon a,1,\alpha) + \int\limits_1^{K-1} F_0(L+\varepsilon a,\xi,\alpha)\,d\xi.$$

Используя оценку (4.4), аналогично (4.11) получаем:

$$\begin{aligned} \int\limits_1^{K-1} F_0(L+\varepsilon a,\xi,\alpha)\,d\xi \geqslant \alpha^2 \int\limits_1^{K-1} \frac{(K+\alpha)^2+2\alpha(\xi-\alpha)}{\left((K+\alpha)^2-(\xi-\alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\xi = \alpha^2 \int\limits_{1-\alpha}^{K-1-\alpha} \frac{(K+\alpha)^2+2\alpha\xi}{\left((K+\alpha)^2-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,d\xi = \\ = \alpha^2 \frac{\xi+2\alpha}{\sqrt{(K+\alpha)^2-\xi^2}}\Bigg|_{1-\alpha}^{K-1-\alpha} = \alpha^2\left(\frac{K+\alpha-1}{\sqrt{(2K-1)(2\alpha+1)}} - \frac{1+\alpha}{\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}}\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{K-1} F_0(L+\varepsilon a,n,\alpha) \geqslant& 2\sqrt{(K+\alpha)^2-1} - \sqrt{(K+\alpha)^2-(1+\alpha)^2} - \sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2} + \\ &+ \alpha^2\left(\frac{K+\alpha-1}{\sqrt{(2K-1)(2\alpha+1)}} - \frac{1+\alpha}{\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}}\right). \end{aligned}$$

Аналогично (4.12), (4.13) выводим:

$$\begin{aligned} -2\sum_{n=1}^{K-1} F_3(L,\varepsilon a,\xi) \geqslant& -4\varepsilon a L\left(\frac{1}{\sqrt{L^2-1}} + \int\limits_1^{K-1}\frac{d\xi}{\sqrt{L^2-\xi^2}}\right) \geqslant \\ &\geqslant -4\varepsilon a L\left(\frac{1}{\sqrt{L^2-1}} + \arcsin\left(\frac{K-1}{L}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{L}\right)\right) \geqslant \end{aligned}$$

$$\geqslant -\frac{3841}{25000}\varepsilon a - 2\pi\varepsilon a(K-1).$$

Складывая последние две оценки и учитывая (4.18), (4.16), приходим к следующему неравенству:

$$S_2(L,\varepsilon) \geqslant F_8(K,\alpha,\varepsilon) - 2\pi\varepsilon a(K-1) - \frac{53841}{25\cdot 10^3}\varepsilon a, \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} F_8(K,\alpha,\varepsilon) := {}& K+\alpha - \sqrt{(K+\alpha)^2-\alpha^2} + 2\sqrt{(K+\alpha-2\varepsilon a)^2 - K^2} - \\ & - \sqrt{(K+\alpha)^2-(K-\alpha)^2} + 2\sqrt{(K+\alpha)^2-1} - \sqrt{(K+\alpha)^2-(1+\alpha)^2} - \\ & - \sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2} + \alpha^2\left(\frac{K+\alpha-1}{\sqrt{(2K-1)(2\alpha+1)}} - \frac{1+\alpha}{\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}}\right). \end{aligned}$$

Для функции F_8 верна оценка

$$\frac{F_8(K,\alpha,\varepsilon)}{\sqrt{K}} \geqslant \frac{F_8(K,\alpha,\varepsilon)}{\sqrt{K}}\bigg|_{K=+\infty,\,\alpha=\frac{13}{100},\,\varepsilon=\varepsilon_0} > \frac{1607}{10^4}.$$

Следовательно, в силу (4.19), (4.15) выполнено:

$$M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min}) \geqslant Q_2(K,a,\varepsilon), \tag{4.20}$$

$$Q_2(K,a,\varepsilon) := \frac{1607}{10^4}\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - 2K(\pi a+1) + a\left(2\pi - \frac{53841}{25\cdot 10^3}\right) - 1$$

при $K \geqslant 3$.

4.4. Случай $\frac{1}{2} \leqslant \alpha < \frac{39267}{62500}$. В данном случае условие (4.1) не накладывает никаких дополнительных ограничений на K, поэтому считаем, что $K \geqslant 0$.

В силу (3.13), (2.2), (4.3) получаем:

$$\begin{aligned} & M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min}) = M_\varepsilon(L-\varepsilon a,0) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,1-\alpha) = \\ & = \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-n^2}}{\varepsilon}\right] - \sum_{n=-K-1}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right] = \\ & = \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-n^2}}{\varepsilon}\right] - \sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right] = \\ & = \sum_{n=1}^{K}\left(2\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-n^2}}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n-1+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\right) + \\ & \quad + \left[\frac{L-\varepsilon a}{\varepsilon}\right] - \left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]. \end{aligned}$$

Отсюда выводим:

$$M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min}) \geqslant \frac{S_3(L,\varepsilon)}{\varepsilon} - 2K - 1, \tag{4.21}$$

где

$$S_3(L,\varepsilon) = \sum_{n=1}^{K} F_9(L,n,\varepsilon) + F_{10}(L,\varepsilon), \tag{4.22}$$

$$F_9(L,\xi,\varepsilon) := 2\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\xi^2} - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi+1-\alpha)^2} - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi-1+\alpha)^2},$$

$$F_{10}(L,\varepsilon) := L-\varepsilon a - \sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(1-\alpha)^2}.$$

Рассмотрим отдельно случаи $K=0,1,2$. Здесь функция S_3 имеет вид:

$$S_3(L,\varepsilon) = \alpha - 2\varepsilon a - \sqrt{2\alpha-1} \quad \text{при} \quad K=0,$$

$$S_3(L,\varepsilon) = 2\sqrt{(1+\alpha-2\varepsilon a)^2-1} - \sqrt{(1+\alpha)^2-(2-\alpha)^2} - \sqrt{(1+\alpha)^2-\alpha^2} +$$

$$
\begin{aligned}
&+1+\alpha-2\varepsilon a-\sqrt{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2} \quad \text{при} \quad K=1,\\
S_3(L,\varepsilon)=&\,2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-1}-\sqrt{(2+\alpha)^2-(2-\alpha)^2}-\sqrt{(2+\alpha)^2-\alpha^2}+\\
&+2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-1}-\sqrt{(2+\alpha)^2-(3-\alpha)^2}-\sqrt{(2+\alpha)^2-(1+\alpha)^2}+\\
&+2+\alpha-2\varepsilon a-\sqrt{(2+\alpha)^2-(1-\alpha)^2} \quad \text{при} \quad K=2.
\end{aligned}
$$

Минимумы этих функций достигается при $\varepsilon a=\varepsilon_0$, $\alpha=\dfrac{39267}{62500}$ и

$$
\begin{aligned}
&S_3(L,\varepsilon)>4\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad K=0, \qquad S_3(L,\varepsilon)>6\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad K=1,\\
&S_3(L,\varepsilon)>\left(5+\frac{1}{2000}\right)\varepsilon_0 \quad \text{при} \quad K=2.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в силу последних неравенств и (4.21) имеем:

$$
M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max})-M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min})\geqslant\frac{1}{2000} \tag{4.23}
$$

при $K=0,1,2$.

Переходим к случаю $K\geqslant 3$. Функцию F_9 представляем в виде:

$$
F_9(L,\xi,\alpha)=F_0(L+\varepsilon a,\xi,1-\alpha)-2F_3(L,\varepsilon a,\xi).
$$

Аналогично (4.10) получаем оценку:

$$
\sum_{n=1}^{K}F_0(L+\varepsilon a,n,1-\alpha)\geqslant F_0(L+\varepsilon a,1,1-\alpha)+\int_1^K F_0(L+\varepsilon a,\xi,1-\alpha)\,d\xi. \tag{4.24}
$$

Используя (4.4), оценим интеграл в последнем неравенстве:

$$
\begin{aligned}
&\int_1^K F_0(L+\varepsilon a,\xi,1-\alpha)\,d\xi\geqslant(1-\alpha)^2\int_1^K\frac{(K+\alpha)^2+2(1-\alpha)(\xi-1+\alpha)}{\left((K+\alpha)^2-(\xi-1+\alpha)^2\right)^{\frac32}}\,d\xi=\\
&=(1-\alpha)^2\int_\alpha^{K-1+\alpha}\frac{(K+\alpha)^2+2(1-\alpha)\xi}{\left((K+\alpha)^2-\xi^2\right)^{\frac32}}\,d\xi=\alpha^2\frac{\xi+2(1-\alpha)}{\left((K+\alpha)^2-\xi^2\right)^{\frac12}}\Bigg|_\alpha^{K-1+\alpha}=\\
&=(1-\alpha)^2\left(\frac{K+1-\alpha}{\sqrt{2(K+\alpha)-1}}-\frac{2-\alpha}{\sqrt{K^2+2\alpha K}}\right).
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

Для функций $F_3(L,\varepsilon a,\xi)$ на основе (4.5) выпишем оценки, аналогичные (4.12), (4.13):

$$
\begin{aligned}
-2\sum_{n=1}^{K}F_3(L,\varepsilon a,n)\geqslant&-4\varepsilon aL\left(\frac{1}{\sqrt{L^2-1}}+\int_1^K\frac{d\xi}{\sqrt{L^2-\xi^2}}\right)=\\
&=-4\varepsilon aL\left(\frac{1}{\sqrt{L^2-1}}+\arcsin\left(\frac{K}{L}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{L}\right)\right)\geqslant-\frac{161}{625}\varepsilon a-2\pi\varepsilon aK.
\end{aligned}
$$

Из последней оценки, (4.22), (4.24), (4.25) выводим оценку для S_3:

$$
\begin{aligned}
&S_3(L,\varepsilon)\geqslant F_{11}(K,\alpha)-\frac{1411}{625}\varepsilon a-2\pi\varepsilon aK,\\
&F_{11}(K,\alpha):=K+\alpha-\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}+2\sqrt{(K+\alpha)^2-1}-\sqrt{(K+\alpha)^2-\alpha^2}-\\
&\qquad-\sqrt{(K+\alpha)^2-(2-\alpha)^2}+\alpha^2\left(\frac{K+1-\alpha}{\sqrt{2(K+\alpha)-1}}-\frac{2-\alpha}{\sqrt{K^2+2\alpha K}}\right).
\end{aligned}
$$

Для функции $F_{11}(K,\alpha)$ верна оценка

$$
\frac{F_{11}(K,\alpha)}{\sqrt{K}}\geqslant\frac{F_{11}(K,\alpha)}{\sqrt{K}}\Bigg|_{\substack{\alpha=\frac{39267}{62500}\\ K=+\infty}}=\frac{539772289\sqrt{2}}{78125\cdot 10^5}.
$$

Отсюда, из предыдущей оценки и (4.21) выводим:

$$
\begin{gathered}
M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max})-M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min})\geqslant Q_3(K,a,\varepsilon), \qquad (4.26)\\
Q_3(K,a,\varepsilon):=\frac{539772289\sqrt{2}}{78125\cdot 10^5}\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon}-2K(\pi a+1)-1-\frac{1411}{625}a
\end{gathered}
$$

при $K\geqslant 3$.

4.5. Случай $\dfrac{39267}{62500}\leqslant\alpha<1$**.** Как и в предыдущем случае, здесь считаем, что $K\geqslant 0$. Согласно (3.13), (2.2), (4.3) имеем:

$$
\begin{aligned}
&M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max})-M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min})=M_\varepsilon\left(L-\varepsilon a,\frac12\right)-M_\varepsilon(L+\varepsilon a,1-\alpha)=\\
&=\sum_{n=-K-1}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\left(n+\frac12\right)^2}}{\varepsilon}\right]-\sum_{n=-K-1}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]=\\
&=\sum_{n=-K-1}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\left(n+\frac12\right)^2}}{\varepsilon}\right]-\sum_{n=-K}^{K}\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]=\\
&=\sum_{n=0}^{K-1}\left(2\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\left(n+\frac12\right)^2}}{\varepsilon}\right]-\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]-\right.\\
&\qquad\left.-\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(n+\alpha)^2}}{\varepsilon}\right]\right)+2\left[\frac{\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\left(K+\frac12\right)^2}}{\varepsilon}\right]-\\
&\qquad-\left[\frac{\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(K+1-\alpha)^2}}{\varepsilon}\right],
\end{aligned}
$$

откуда вытекает

$$
M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max})-M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min})\geqslant\frac{S_4(L,\varepsilon)}{\varepsilon}-2K-2, \qquad (4.27)
$$

где

$$
S_4(L,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{K-1}F_{12}(L,n,\varepsilon)+F_{13}(L,\varepsilon), \qquad (4.28)
$$

$$
\begin{aligned}
&F_{12}(L,n,\varepsilon):=2\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\left(\xi+\frac12\right)^2}-\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi+1-\alpha)^2}-\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(\xi+\alpha)^2},\\
&F_{13}(L,\varepsilon):=2\sqrt{(L-\varepsilon a)^2-\left(K+\frac12\right)^2}-\sqrt{(L+\varepsilon a)^2-(K+1-\alpha)^2}. \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

Случаи $K=0,1,2$ вновь рассматриваем отдельно:

$$
\begin{aligned}
&S_4(L,\varepsilon)=2\sqrt{(\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac14}-\sqrt{\alpha^2-(1-\alpha)^2}\quad\text{при}\quad K=0,\\
&S_4(L,\varepsilon)=2\sqrt{(1+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac14}-\sqrt{(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}-\sqrt{(1+\alpha)^2-\alpha^2}+\\
&\qquad+2\sqrt{(1+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac94}-\sqrt{(1+\alpha)^2-(2-\alpha)^2}\quad\text{при}\quad K=1,\\
&S_4(L,\varepsilon)=2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac14}-\sqrt{(2+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}-\sqrt{(2+\alpha)^2-\alpha^2}+
\end{aligned}
$$

$$+2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac{9}{4}}-\sqrt{(2+\alpha)^2-(2-\alpha)^2}-\sqrt{(2+\alpha)^2-(1+\alpha)^2}+$$
$$+2\sqrt{(2+\alpha-2\varepsilon a)^2-\frac{25}{4}}-\sqrt{(2+\alpha)^2-(3-\alpha)^2}\quad \text{при}\quad K=2.$$

Минимумы этих функций достигаются при $\alpha=\dfrac{39267}{62500}$, $\varepsilon a=\varepsilon_0$:

$$S_4(L,\varepsilon)>7\varepsilon_0\quad \text{при}\quad K=0,1,$$
$$S_4(L,\varepsilon)>\left(6+\frac{1}{10^3}\right)\varepsilon_0\quad \text{при}\quad K=2.$$

Таким образом, с учетом (4.27) при $K=0,1,2$ справедливо неравенство

$$M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max})-M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min})>\frac{1}{10^3}. \tag{4.30}$$

Переходим к случаю $K\geqslant 3$. Функцию $F_{12}(L,\xi,\varepsilon)$ переписываем в виде

$$F_{12}(L,\xi,\varepsilon)=F_0\left(L+\varepsilon a,\xi+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\alpha\right)-2F_3\left(L,\varepsilon a,\xi+\frac{1}{2}\right).$$

Аналогично (4.10), (4.11) оцениваем:

$$\sum_{n=0}^{K-1}F_0\left(L+\varepsilon a,n+\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)\geqslant F_0\left(L+\varepsilon a,\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)+\int\limits_0^{K-1}F_0\left(L+\varepsilon a,\xi+\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}\right)d\xi \tag{4.31}$$

и

$$\int\limits_0^{K-1}F_0\left(L+\varepsilon a,\xi+\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\alpha\right)d\xi=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\int\limits_0^{K-1}\frac{(K+\alpha)^2+(2\alpha-1)(\xi+1-\alpha)}{\left((K+\alpha)^2-(\xi+1-\alpha)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=$$
$$=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\int\limits_{1-\alpha}^{K-\alpha}\frac{(K+\alpha)^2+(2\alpha-1)\xi}{\left((K+\alpha)^2-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\xi+2\alpha-1}{\sqrt{(K+\alpha)^2-\xi^2}}\Bigg|_{1-\alpha}^{K-\alpha}= \tag{4.32}$$
$$=\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{K+\alpha-1}{2\sqrt{\alpha K}}-\frac{\alpha}{\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}}\right).$$

В силу (4.12), (4.13) получаем:

$$-2\sum_{n=0}^{K-1}F_3\left(L,\varepsilon a,\xi+\frac{1}{2}\right)\geqslant -4\varepsilon aL\left(\frac{1}{\sqrt{L^2-\frac{1}{4}}}+\arcsin\left(\frac{K-\frac{1}{2}}{L}\right)-\arcsin\left(\frac{1}{2L}\right)\right)>$$
$$>-2\pi\varepsilon aK+\left(\pi-\frac{20639}{10^4}\right)\varepsilon a.$$

Отсюда и из (4.31), (4.32), (4.28) выводим:

$$S_4(L,\varepsilon)\geqslant F_{14}(K,\alpha,\varepsilon)-2\pi\varepsilon aK+\left(\pi-\frac{20639}{10^4}\right)\varepsilon a, \tag{4.33}$$
$$F_{14}(K,\varepsilon a):=2\sqrt{(K+\alpha-2\varepsilon a)^2-\left(K+\frac{1}{2}\right)^2}-\sqrt{(K+\alpha)^2-(K+1-\alpha)^2}+$$
$$+\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{K+\alpha-1}{2\sqrt{\alpha K}}-\frac{\alpha}{\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}}\right)+$$
$$+2\sqrt{(K+\alpha)^2-\frac{1}{4}}-\sqrt{(K+\alpha)^2-\alpha^2}-\sqrt{(K+\alpha)^2-(1-\alpha)^2}.$$

Для функции F_{14} верна оценка

$$\frac{F_{14}(K,\alpha,\varepsilon a)}{\sqrt{K}} \geqslant \frac{F_{14}(K,\varepsilon a)}{\sqrt{K}}\bigg|_{K=2,\,\alpha=\frac{39267}{62500},\,\varepsilon a=\varepsilon_0} > \frac{157271}{10^6}$$

Из этой оценки, (4.33) и (4.25) окончательно получаем:

$$\begin{gathered} M_\varepsilon(L-\varepsilon a,\tau_{max}) - M_\varepsilon(L+\varepsilon a,\tau_{min}) \geqslant Q_4(K,a,\varepsilon), \\ Q_4(K,a,\varepsilon) := \frac{157271}{10^6}\frac{\sqrt{K}}{\varepsilon} - 2(\pi a+1)K + \left(\pi - \frac{20639}{10^4}\right)a - 2. \end{gathered} \tag{4.34}$$

4.6. Завершение доказательства. Как следует из оценок (4.8), (4.17), (4.23), (4.30), неравенство (3.11) выполнено для $K=0,1,2$ и $\alpha\in[0,1)$, где K и α связаны с L формулой (4.2), и всех $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. В терминах L это означает, что

$$L < 3-\varepsilon a. \tag{4.35}$$

Выясним, при каких иных K выполнено неравенство (3.11). Для этого мы используем оценки (4.14), (4.20), (4.26), (4.34) и выясним, в каком случае правые части $Q_j(K,a,\varepsilon)$ всех этих оценок положительны. Минимальные значения правых частей достигаются при $a=1$, поэтому далее мы будем рассматривать их именно при таком значении a.

Непосредственными вычислениями несложно проверить, что

$$Q_4(K,1,\varepsilon) > Q_3(K,1,\varepsilon), \quad Q_2(K,1,\varepsilon) > Q_3(K,1,\varepsilon).$$

Поэтому далее мы рассматриваем лишь функции Q_1 и Q_3.

Решая неравенства $Q_1>0$ и $Q_3>0$ как квадратные относительно $\sqrt{K}$, заключаем, что величина K должна удовлетворять неравенству:

$$\sqrt{K} < \frac{\mu_1(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad \sqrt{K} < \frac{\mu_2(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

где

$$\mu_i(\varepsilon) := \beta_i + \sqrt{\beta_i^2 - 4\gamma_i\varepsilon^2},$$

$$\beta_1 := \frac{1369\sqrt{2}}{4\cdot 10^4\pi}, \quad \gamma_1 := \frac{1}{2} - \frac{105697}{10^5\pi}, \quad \beta_2 := \frac{539772289\sqrt{2}}{15625\cdot 10^6(\pi+1)}, \quad \gamma_2 := \frac{1018}{625(\pi+1)}.$$

Функция $\mu_2(\varepsilon)$ вещественна лишь для

$$\varepsilon \leqslant \frac{\beta_2}{2\sqrt{\gamma_2}} = \varepsilon_1 < \varepsilon_0.$$

Это означает, что только при таких ε функция $Q_3(K,1,\varepsilon)$ принимает положительные значения. Поэтому далее рассматриваем только такие значения ε.

Непосредственными вычислениями легко проверяем, что

$$\mu_1(\varepsilon_1) > \mu_2(\varepsilon_1), \quad \frac{\varepsilon^2}{\big(\mu_1'(\varepsilon)\big)^2} > \frac{\varepsilon^2}{\big(\mu_2'(\varepsilon)\big)^2},$$

откуда уже следует, что

$$\mu_1(\varepsilon) > \mu_2(\varepsilon), \quad \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Следовательно, функции Q_1, Q_3 будут положительны при

$$K < \frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}.$$

и неравенство (3.11) будет выполнено для

$$L < \left[\frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right] + 1 - \varepsilon a.$$

Так как спектр оператора — замкнутое множество и положительность функции Q_3 может нарушаться лишь при $K = \dfrac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, можно считать, что

$$L \leqslant \left[\frac{\mu_2^2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right] + 1 - \varepsilon a.$$

Если целая часть в последнем неравенстве меньше двух, то с учетом сказанного в начале данного раздела (см. (4.35)), ее всегда можно заменить на два. Поэтому неравенство (3.11) будет гарантированно выполнено при

$$L \leqslant \max\left\{3, \left[\frac{\mu_2(\varepsilon)^2}{\varepsilon^2}\right] + 1\right\} - \varepsilon a,$$

откуда уже вытекает утверждение теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисов Д. И.* Об отсутствии лакун в нижней части спектра Лапласиана с частым чередованием краевых условий в полосе// Теор. мат. физ. — принято к печати.
2. *Либ Э., Лосс М.* Анализ. — Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. *Сеник Н. Н.* Усреднение периодического эллиптического оператора в полосе при различных граничных условиях// Алгебра и анализ. — 2013. — *25*, № 4. — С. 182–259.
4. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов// Тр. МИАН. — 1985. — *171*. — С. 3–122.
5. *Скриганов М. М., Соболев А. В.* Асимптотические оценки для спектральных зон периодических операторов Шредингера// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 1. — С. 276–288.
6. *Суслина Т. А.* Об усреднении периодического эллиптического оператора в полосе// Алгебра и анализ. — 2004. — *16*, № 1. — С. 269–292.
7. *Barbatis G., Parnovski L.* Bethe—Sommerfeld conjecture for pseudo-differential perturbation// Commun. Part. Differ. Equ. — 2009. — *34*, № 4. — С. 383–418.
8. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition// Ann. Henri Poincaré. — 2010. — *11*, № 8. — С. 1591–1627.
9. *Borisov D., Bunoiu R., Cardone G.* Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics// Z. Angew. Math. Phys. — 2013. — *64*, № 3. — С. 439–472.
10. *Borisov D., Cardone G.* Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions// J. Phys. A. Math. Gen. — 2009. — *42*, № 36. — Id 365205.
11. *Borisov D., Cardone G., Durante T.* Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve// Proc. R. Soc. Edin. Sec. A. Math. — 2016. — *146*, № 6. — С. 1115–1158.
12. *Borisov D., Cardone G., Faella L., Perugia C.* Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary// J. Differ. Equ. — 2013. — *255*, № 12. — С. 4378–4402.
13. *Dahlberg B. E. J., Trubowitz E.* A remark on two dimensional periodic potentials// Comment. Math. Helv. — 1982. — *57*, № 1. — С. 130–134.
14. *Helffer B., Mohamed A.* Asymptotics of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential// Duke Math. J. — 1998. — *92*, № 1. — С. 1–60.
15. *Karpeshina Y.* Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case// Commun. Math. Phys. — 2004. — *251*, № 3. — С. 473–514.
16. *Mohamed A.* Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential// J. Math. Phys. — 1997. — *38*, № 8. — С. 4023–4051.
17. *Parnovski L.* Bethe—Sommerfeld conjecture// Ann. Henri Poincaré. — 2008. — *9*, № 3. — С. 457–508.
18. *Parnovski L., Sobolev A.* On the Bethe—Sommerfeld conjecture for the polyharmonic operator// Duke Math. J. — 2001. — *107*, № 2. — С. 209–238.
19. *Parnovski L., Sobolev A. V.* Bethe—Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations// Invent. Math. — 2010. — *181*, № 3. — С. 467–540.
20. *Skriganov M. M., Sobolev A. V.* Variation of the number of lattice points in large balls// Acta Arith. — 2005. — *120*, № 3. — С. 245–267.

Денис Иванович Борисов
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН,
450008, Уфа, ул. Чернышевского, 112;

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы,
450000, Уфа, ул. Октябрьской революции, 3а;
Университет Градца Кралове,
500 03, Градец Кралове, Чешская Республика, Рокитанскего 62
E-mail: borisovdi@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-3-373-391 UDC 517.958, 517.984, 519.21

On Lacunas in the Lower Part of the Spectrum of the Periodic Magnetic Operator in a Strip

© 2017 **D. I. Borisov**

Abstract. We consider the Schrödinger periodic magnetic operator in an infinite flat straight strip. We prove that if the magnetic potential satisfies certain conditions and the period is small enough, then the lower part of the band spectrum has no inner lacunas. The length of the lower part of the band spectrum with no inner lacunas is calculated explicitly. The upper estimate for the small parameter allowing these results is calculated as a number as well.

REFERENCES

1. D. I. Borisov, "Ob otsutstvii lakun v nizhney chasti spektra Laplasiana s chastym cheredovaniem kraevykh usloviy v polose" [On absence of lacunas in the lower part of Laplacian spectrum with fast alternation of boundary-value conditions in a strip], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], to be published (in Russian).
2. E. Lieb and M. Loss, *Analiz* [Analysis], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 1998 (Russian translation).
3. N. N. Senik, "Usrednenie periodicheskogo ellipticheskogo operatora v polose pri razlichnykh granichnykh usloviyakh" [Averaging of a periodic elliptic operator in a strip under various boundary conditions], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2013, **25**, No. 4, 182–259 (in Russian).
4. M. M. Skriganov, "Geometricheskie i arifmeticheskie metody v spektral'noy teorii mnogomernykh periodicheskikh operatorov" [Geometric and arithmetic methods in the spectral theory of multidimensional periodic operators], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1985, **171**, 3–122 (in Russian).
5. M. M. Skriganov and A. V. Sobolev, "Asimptoticheskie otsenki dlya spektral'nykh zon periodicheskikh operatorov Shredingera" [Asymptotic estimates for spectral zones of periodic Schrödinger operators], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 1, 276–288 (in Russian).
6. T. A. Suslina, "Ob usrednenii periodicheskogo ellipticheskogo operatora v polose" [On averaging of periodic elliptic operator in a strip], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2004, **16**, No. 1, 269–292 (in Russian).
7. G. Barbatis and L. Parnovski, "Bethe–Sommerfeld conjecture for pseudo-differential perturbation," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2009, **34**, No. 4, 383–418.
8. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, "On a waveguide with frequently alternating boundary conditions: homogenized Neumann condition," *Ann. Henri Poincaré*, 2010, **11**, No. 8, 1591–1627.
9. D. Borisov, R. Bunoiu, and G. Cardone, "Waveguide with non-periodically alternating Dirichlet and Robin conditions: homogenization and asymptotics," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2013, **64**, No. 3, 439–472.
10. D. Borisov and G. Cardone, "Homogenization of the planar waveguide with frequently alternating boundary conditions," *J. Phys. A. Math. Gen.*, 2009, **42**, No. 36, ID 365205.
11. D. Borisov, G. Cardone, and T. Durante, "Homogenization and uniform resolvent convergence for elliptic operators in a strip perforated along a curve," *Proc. R. Soc. Edin. Sec. A. Math.*, 2016, **146**, No. 6, 1115–1158.
12. D. Borisov, G. Cardone, L. Faella, and C. Perugia, "Uniform resolvent convergence for a strip with fast oscillating boundary," *J. Differ. Equ.*, 2013, **255**, No. 12, 4378–4402.
13. B. E. Dahlberg and E. Trubowitz, "A remark on two dimensional periodic potentials," *Comment. Math. Helv.*, 1982, **57**, No. 1, 130–134.
14. B. Helffer and A. Mohamed, "Asymptotics of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electric potential," *Duke Math. J.*, 1998, **92**, No. 1, 1–60.

15. Y. Karpeshina, “Spectral properties of the periodic magnetic Schrödinger operator in the high-energy region. Two-dimensional case,” *Commun. Math. Phys.*, 2004, **251**, No. 3, 473–514.
16. A. Mohamed, “Asymptotic of the density of states for the Schrödinger operator with periodic electromagnetic potential,” *J. Math. Phys.*, 1997, **38**, No. 8, 4023–4051.
17. L. Parnovski, “Bethe–Sommerfeld conjecture,” *Ann. Henri Poincaré*, 2008, **9**, No. 3, 457–508.
18. L. Parnovski and A. Sobolev, “On the Bethe–Sommerfeld conjecture for the polyharmonic operator,” *Duke Math. J.*, 2001, **107**, No. 2, 209–238.
19. L. Parnovski and A. V. Sobolev, “Bethe–Sommerfeld conjecture for periodic operators with strong perturbations,” *Invent. Math.*, 2010, **181**, No. 3, 467–540.
20. M. M. Skriganov and A. V. Sobolev, “Variation of the number of lattice points in large balls,” *Acta Arith.*, 2005, **120**, No. 3, 245–267.

Denis I. Borisov
Institute of Mathematics with Computer Center, Ufa Science Center, Russian Academy of Sciences,
112 Chernyshevskogo st., 450008 Ufa, Russia;
Bashkir State Pedagogical University,
3a Oktyabr’skoy Revolutsii st., 450000 Ufa, Russia;
University of Hradec Králové,
62 Rokitanského st., 500 03 Hradec Králové, Czech Republic
E-mail: borisovdi@yandex.ru