Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 362–372

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-362-372 УДК 517.984

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ С УСЛОВИЯМИ РАЗРЫВА ВО ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКЕ

© 2017 г. **В. А. ЮРКО**

Аннотация. Исследуются дифференциальные операторы высших порядков на конечном интервале с условиями разрыва внутри интервала. Установлены свойства спектральных характеристик и доказаны теоремы о разложении и о полноте корневых функций для этого класса операторов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Рассмотрим краевую задачу L для дифференциального уравнения

$$\ell y(x) := y^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} p_j(x) y^{(j)}(x) = \lambda y(x), \quad 0 < x < T, \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$y^{(\nu-1)}(0) = y^{(\nu-1)}(T) = 0, \quad \nu = \overline{1,m}, \tag{1.2}$$

и условиями разрыва во внутренней точке $a \in (0,T)$:

$$y^{(\nu-1)}(a+0) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{\nu j} y^{(j-1)}(a-0), \quad \nu = \overline{1,n}. \tag{1.3}$$

Здесь $n = 2m$, $p_j(x)$ — комплекснозначные функции, $p_j^{(\nu)}(x)$ абсолютно непрерывны при $\nu = \overline{0,j-1}$, $x \in [0,T]$, и $a_{\nu j}$ — комплексные числа, $a_{\nu\nu} \neq 0$. Таким образом, условия разрыва порождаются матрицей перехода $A = [a_{\nu j}]_{\nu,j=\overline{1,n}}$, где $a_{\nu j} = 0$ при $\nu < j$ и $\det A \neq 0$.

Пусть функции $\varphi_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,n}$, являются решениями уравнения (1.1), удовлетворяющими условиям разрыва (1.3) и начальным условиям

$$\varphi_j^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu j}, \ \nu = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

где $\delta_{\nu j}$ — символ Кронекера. Ясно, что

$$\det[\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{\nu,j=\overline{1,n}} = \eta(x), \tag{1.5}$$

где $\eta(x) := 1$ при $x < a$ и $\eta(x) := \det A$ при $x > a$. Обозначим

$$\Delta(\lambda) := \det[\varphi_j^{(\nu-1)}(T,\lambda)]_{j=\overline{m+1,n};\, \nu=\overline{1,m}}. \tag{1.6}$$

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (проект 1.1660.2017/PCh) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00015, 17-51-53180).

Функция $\Delta(\lambda)$ является целой по λ порядка $1/n$; ее нули $\{\lambda_l\}_{l\geqslant 0}$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевой задачи L вида (1.1)–(1.3). Функция $\Delta(\lambda)$ называется характеристической функцией краевой задачи L. Пусть $\{\varphi_l(x)\}_{l\geqslant 0}$ — система собственных и присоединенных функций (корневых функций) задачи L.

Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала часто встречаются в математике, механике, физике, геофизике и других областях естествознания. Как правило, такие задачи связаны с разрывными или негладкими свойствами среды. Например, разрывные задачи возникают в электронике при конструировании параметров неоднородных линий передач с желаемыми техническими характеристиками [2,3]. Разрывные задачи возникают также при изучении проводимости одномерных разрывных сред [11,13]. Краевые задачи с условиями разрыва внутри интервала возникают также в геофизических моделях структуры Земли [7,12]. Прямые и обратные спектральные задачи для дифференциальных операторов без разрывов изучены достаточно подробно (см. [1,4,8,9,15] и библиографию в них). Наличие разрывов вносит существенные качественные изменения в исследование операторов. Разрывные краевые задачи для операторов Штурма—Лиувилля рассматривались в [5, 6, 10, 13, 14] и других работах. Краевые задачи для дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва внутри интервала еще не изучались.

В данной статье в разделе 2 изучаются свойства спектральных характеристик краевой задачи L. В разделе 3 доказываются теоремы о разложении и о полноте корневых функций задачи L.

2. Свойства спектральных характеристик

Пусть $\lambda = \rho^n$. Обозначим

$$S_{k_0} = \{\rho:\ \arg\rho \in \Big(\frac{k_0\pi}{n}, \frac{(k_0+1)\pi}{n}\Big)\}, \quad k_0 = \overline{-n, n-1}.$$

В каждом секторе S_{k_0} корни $R_k,\ k = \overline{1,n}$, уравнения $R^n - 1 = 0$ могут быть занумерованы так, чтобы

$$\mathrm{Re}\,(\rho R_1) < \mathrm{Re}\,(\rho R_2) < \ldots < \mathrm{Re}\,(\rho R_n), \quad \rho \in S_{k_0}.$$

Ясно, что $R_k = \exp(i\pi\omega_k/m)$, где ω_k — перестановка чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Известно [4, Ch. 1], что в каждом секторе S_{k_0} существует фундаментальная система решений (ФСР) $B = \{y_k(x,\rho)\}_{k=\overline{1,n}}$ уравнения (1.1) такая, что

$$y_k^{(\nu-1)}(x,\rho) = (\rho R_k)^{\nu-1}\exp(\rho R_k x)[1], \quad \rho \in \overline{S_{k_0}},\ |\rho| \to \infty,\ k, \nu = \overline{1,n},\ x \in [0,T], \tag{2.1}$$

где $[1] = 1 + O(\rho^{-1})$. Функции $y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)$ являются аналитическими по $\rho \in S_{k_0}$, $|\rho| > \rho_*$, при каждом $x \in [0,T]$ и непрерывными при $x \in [0,T]$, $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $|\rho| \geqslant \rho_*$. При $|\rho| \to \infty,\ \rho \in \overline{S_{k_0}}$,

$$\det[y_k^{(\nu-1)}(x,\rho)]_{k,\nu=\overline{1,n}} = \rho^{n(n-1)/2}\det[R_k^{\nu-1}]_{k,\nu=\overline{1,n}}\,[1].$$

Изучим асимптотическое поведение функций $\varphi_j(x,\lambda)$ при достаточно больших $|\rho|$. Обозначим $J_- := \{x:\ x \in [0, a-0]\}$, $J_+ := \{x:\ x \in [a+0, T]\}$. Используя ФСР B, получаем

$$\varphi_j(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}^{\pm}(\rho) y_k(x,\rho), \quad x \in J_\pm. \tag{2.2}$$

Согласно (1.4) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}^{-}(\rho) y_k^{(\nu-1)}(0,\rho) = \delta_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1,n}.$$

Решая эту линейную алгебраическую систему по правилу Крамера и используя (2.1), вычисляем

$$A_{jk}^{-}(\rho) = \alpha_{jk}\rho^{1-j}[1], \quad \alpha_{jk} := R_k^{1-j}/n,\ \rho \in \overline{S_{k_0}},\ |\rho| \to \infty. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и используя (2.1), выводим

$$\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\rho R_k)^{\nu-j}\exp(\rho R_k x)[1], \quad x \in [0, a-0],\ \rho \in \overline{S_{k_0}},\ |\rho| \to \infty. \tag{2.4}$$

Обозначим
$$\gamma^0_{ks} := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{jj}\Big(\frac{R_s}{R_k}\Big)^{j-1}.$$
Учитывая (1.3), получаем
$$A^+_{jk}(\rho) = \sum_{s=1}^{n}\gamma^+_{ks}(\rho)A^-_{js}(\rho), \tag{2.5}$$
где
$$\gamma^+_{ks}(\rho) = (\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_s - R_k)a),\ \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty,\quad \det[\gamma^+_{ks}(\rho)]_{k,s=\overline{1,n}} \equiv \det A. \tag{2.6}$$
Из (2.3), (2.5) и (2.6) вытекает, что
$$A^+_{jk}(\rho) = \frac{1}{n\rho^{j-1}}\sum_{s=1}^{n} R_s^{1-j}(\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_s - R_k)a),\quad \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty. \tag{2.7}$$
Подставляя (2.7) в (2.2) и используя (2.1), получаем при $x\in[a+0,T],\ \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty$:
$$\varphi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda) = \frac{1}{n\rho^{j-1}}\sum_{k=1}^{n}(\rho R_k)^{\nu-1}\exp(\rho R_k(x-a))\sum_{s=1}^{n} R_s^{1-j}(\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho R_s a). \tag{2.8}$$
Отметим, что (2.8) следует также из (1.3) и (2.4).

Обозначим
$$\Delta_{k\nu}(\lambda) := (-1)^{k+\nu}\det[\varphi_j^{(\mu-1)}(T,\lambda)]_{\nu=\overline{1,n-k},\, j=\overline{k,n}\setminus\nu},\quad k=\overline{1,n-1},\quad \nu=\overline{k,n}. \tag{2.9}$$
Функции $\Delta_{k\nu}(\lambda)$ являются целыми по λ порядка $1/n$, и их нули $\{\lambda_{lk\nu}\}_{l\geqslant 0}$ (с учетом кратностей) совпадают с собственными значениями краевых задач $L_{k\nu}$ для уравнения (1.1) с условиями разрыва (1.3) и с краевыми условиями
$$y^{(\mu-1)}(0) = y^{(\xi-1)}(T) = 0,\quad \mu=\overline{1,k-1},\nu;\quad \xi=\overline{1,n-k}.$$
Функции $\Delta_{k\nu}(\lambda)$ называются характеристическими функциями для краевых задач $L_{k\nu}$. В частности, $L_{mm} = L$. Из (1.6) и (2.9) вытекает, что $\Delta_{mm}(\lambda) = \Delta(\lambda)$, $\lambda_{lmm} = \lambda_l$.

Ввиду (2.9) и (2.2) имеем
$$\Delta_{kk}(\lambda) = \sum_{1\leqslant s_1<\ldots<s_{n-k}\leqslant n}\det[A^+_{\mu,s_j}(\rho)]_{\mu=\overline{k+1,n},\, j=\overline{1,n-k}}\cdot\det[y_{s_j}^{(\nu-1)}(T,\rho)]_{j,\nu=\overline{1,n-k}}.$$
Из (2.7) следует, что
$$A^+_{jk}(\rho) = \sum_{s=1}^{n}\alpha^+_{js}(\rho)b_{sk}(\rho),\quad \alpha^+_{js}(\rho) = \alpha_{js}\rho^{1-j},\ b_{sk}(\rho) = (\gamma^0_{ks} + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_s - R_k)a).$$
Учитывая (2.1), вычисляем при $k=\overline{1,n-1},\ \rho\in\overline{S_{k_0}},\ |\rho|\to\infty$:
$$\Delta_{kk}(\lambda) = \frac{1}{\rho^{\sigma_k}}\exp\Big(\rho T\sum_{j=k+1}^{n} R_j\Big)\Big((\Delta^0_k + O(\rho^{-1})) + (\Delta^{01}_k + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_k - R_{k+1})a)$$
$$+(\Delta^{10}_k + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_k - R_{k+1})(T-a)) + (\Delta^1_k + O(\rho^{-1}))\exp(\rho(R_k - R_{k+1})T)\Big), \tag{2.10}$$
где $\sigma_k = n(n-1)/2 - k(k-1)/2 - (n-k)(n-k-1)/2$,
$$\Delta^0_k = \theta^0_k\alpha^0_k\Gamma^0_k,\quad \Delta^{01}_k = \theta^0_k\alpha^1_k\Gamma^{01}_k,\quad \Delta^{10}_k = \theta^1_k\alpha^0_k\Gamma^{10}_k,\quad \Delta^1_k = \theta^1_k\alpha^1_k\Gamma^1_k,$$
$$\theta^0_k = \det[R_j^\nu]_{j=\overline{k+1,n},\,\nu=\overline{0,n-k-1}},\quad \theta^1_k = \det[R_j^\nu]_{j=\overline{k,n}\setminus k+1,\,\nu=\overline{o,n-k-1}},$$
$$\alpha^0_k = \det[\alpha_{j\nu}]_{j,\nu=\overline{k+1,n}}\quad \alpha^1_k = \det[\alpha_{j\nu}]_{j=\overline{k+1,n},\,\nu=\overline{k,n}\setminus k+1},$$
$$\Gamma^0_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j,\nu=\overline{k+1,n}},\quad \Gamma^{01}_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j=\overline{k+1,n},\,\nu=\overline{k,n}\setminus k+1},$$
$$\Gamma^{10}_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j=\overline{k,n}\setminus k+1,\,\nu=\overline{k+1,n}},\quad \Gamma^1_k = \det[\gamma^0_{j\nu}]_{j,\nu=\overline{k,n}\setminus k+1}.$$
Ясно, что $\theta^0_k\theta^1_k \neq 0$, $\alpha^0_k\alpha^1_k \neq 0$. Будем предполагать, что $\Gamma^0_k \neq 0$ при $k=\overline{1,n-1}$. Это условие называется *условием регулярности* склейки. Контрпример в конце статьи показывает важность

условия регулярности для спектрального анализа дифференциальных операторов с условиями разрыва внутри интервала. Если $A = E$ (E — единичная матрица), то условие регулярности всегда выполняется. Отметим, что (2.10) следует также из (2.8) и (2.9).

Используя (2.10), известным методом (см., например, [4]) получены следующие свойства характеристических функций $\Delta_{kk}(\lambda)$:

1. При $\rho \in \overline{S_{k_0}}$, $|\rho| \to \infty$:

$$\Delta_{kk}(\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho^{\sigma_k}} \exp\Big(\rho T \sum_{j=k+1}^{n} R_j\Big)\Big).$$

2. Пусть $\lambda_{lkk} = \rho_{lkk}^n$. Обозначим $G_{\delta,k} := \{\rho : \ |\rho - \rho_{lkk}| \geqslant \delta, \ \forall l\}$. Тогда

$$|\Delta_{kk}(\lambda)| \geqslant \frac{C}{|\rho|^{\sigma_k}} |\exp\Big(\rho T \sum_{j=k+1}^{n} R_j\Big)|, \quad \rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_{\delta,k}. \tag{2.11}$$

3. Существуют положительные числа $r_N \to \infty$ такие, что при достаточно малом $\delta > 0$ окружности $|\rho| = r_N$ лежат в $G_\delta := \bigcap\limits_k G_{\delta,k}$ при всех N.

Аналогично, используя (2.9), получаем

$$\Delta_{k\nu}(\lambda) = O\Big(\frac{1}{\rho^{\sigma_{k\nu}}} \exp\Big(\rho T \sum_{j=k+1}^{n} R_j\Big)\Big), \quad \rho \in \overline{S_{k_0}}, \ |\rho| \to \infty, \tag{2.12}$$

где $\sigma_{k\nu} := \sigma_k + k - \nu$.

Пусть $\Phi_k(x,\lambda)$, $k = \overline{1,n}$ — решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условиям разрыва (1.3) и краевым условиям

$$\Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda) = \delta_{\nu k}, \ \nu = \overline{1,k}, \quad \Phi_k^{(\xi-1)}(T,\lambda) = 0, \ \xi = \overline{1,n-k}. \tag{2.13}$$

Функции $\Phi_k(x,\lambda)$ называются решениями типа Вейля. Обозначим

$$M_{k\nu}(\lambda) := \Phi_k^{(\nu-1)}(0,\lambda).$$

Функции $M_{k\nu}(\lambda)$ называются функциями типа Вейля, а матрица $M(\lambda) = [M_{k\nu}(\lambda)]_{k,\nu=\overline{1,n}}$ называется матрицей типа Вейля. Очевидно, что $M_{k\nu}(\lambda) \equiv \delta_{k\nu}$ при $k \geqslant \nu$ и $\det M(\lambda) \equiv 1$. Из (1.4), (1.5) и (2.13) вытекает, что

$$\Phi_k(x,\lambda) = \varphi_k(x,\lambda) + \sum_{\nu=k+1}^{n} M_{k\nu}(\lambda)\varphi_\nu(x,\lambda), \quad M_{k\nu}(\lambda) = \frac{\Delta_{k\nu}(\lambda)}{\Delta_{kk}(\lambda)}, \tag{2.14}$$

$$\det[\Phi_k^{(\nu-1)}(x,\lambda)]_{\nu,k=\overline{1,n}} = \eta(x), \tag{2.15}$$

В силу (2.11)-(2.12) вычисляем

$$|M_{k\nu}(\lambda)| \leqslant C|\rho|^{\nu-k}, \ \rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta.$$

Используя ФСР B, имеем

$$\Phi_j(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}^{\pm}(\rho) y_k(x,\rho), \quad x \in J_\pm. \tag{2.16}$$

Учитывая (1.3) и (2.13), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} B_{jk}^{-}(\rho) y_k^{(\nu-1)}(0,\rho) = \delta_{\nu j}, \quad \nu = \overline{1,j},$$

$$\sum_{k=1}^{n} B_{jk}^{+}(\rho) y_k^{(\nu-1)}(T,\rho) = 0, \quad \nu = \overline{1,n-j},$$

$$B_{jk}^{+}(\rho) = \sum_{s=1}^{n} \gamma_{ks}^{+}(\rho) B_{js}^{-}(\rho).$$

Эти соотношения образуют линейную алгебраическую систему с определителем

$$D_j(\rho) = D_j^0 \rho^{m(n-1)} \Delta_{jj}(\lambda), \quad D_j^0 \neq 0.$$

Решая эту систему по правилу Крамера и используя (2.1), (2.6) и (2.11), получаем при $\rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta$:

$$|B_{jk}^-(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j}, \ k = \overline{1,j}, \quad |B_{jk}^-(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j} \exp(\rho(R_j - R_k)a), \ k = \overline{j,n},$$

$$|B_{jk}^+(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j} \exp(\rho(R_j - R_k)a), \ k = \overline{1,j}, \quad |B_{jk}^+(\rho)| \leqslant C|\rho|^{1-j} \exp(\rho(R_j - R_k)T), \ k = \overline{j,n}.$$

Подставляя эти соотношения в (2.16) и используя (2.1), находим

$$|\Phi_j^{(\nu-1)}(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{\nu-j} |\exp(\rho R_j x)|, \quad \rho \in \overline{S_{k_0}} \cap G_\delta, \ x \in [0,T], \ j,\nu = \overline{1,n}. \tag{2.17}$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell^* z(x) := z^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j (p_j(x) z(x))^{(j)} = \lambda z(x). \tag{2.18}$$

Тогда

$$\ell^* z(x) = z^{(n)}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} p_j^*(x) z^{(j)}(x),$$

где функции $p_j^{*(\nu)}(x), \ \nu = \overline{0, j-1}$ являются абсолютно непрерывными при $x \in [0,T]$. Используя интегрирование по частям, мы находим

$$\int_0^T \ell y(x) \cdot z(x)\,dx = \Big|_0^T < y(x), z(x) > + \int_0^T y(x) \cdot \ell^* z(x)\,dx,$$

где

$$< y(x), z(x) >:= \sum_{\nu,j=0}^{n-1} \mathcal{L}_{\nu j}(x) y^{(\nu)}(x) z^{(j)}(x),$$

$$\mathcal{L}_{\nu j}(x) := \sum_{s=j}^{n-\nu-1} C_s^j p_{s+\nu+1}^{(s-j)}(x), \ \nu + j \leqslant n-1, \quad C_s^j := \frac{s!}{j!(s-j!)},$$

и $\mathcal{L}_{\nu j}(x) := 0$ при $\nu + j > n-1$. Обозначим $U_{\nu s}(y) := y^{(\nu-1)}(sT), \ s = 0,T, \ \nu = \overline{1,n}$. Определим линейные формы $U_{\nu s}^*(z)$ из соотношения

$$< y(x), z(x) >_{|x=sT} = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} U_{n-\nu+1,s}^*(z) U_{\nu s}(y).$$

Введем матрицу $A^* = [a_{kj}^*]_{k,j=\overline{1,n}}$ из соотношения

$$< y(x), z(x) >_{|x=a+0} = < y(x), z(x) >_{|x=a-0},$$

где $y(x)$ удовлетворяет (1.3). Тогда $a_{kj}^* = 0$ при $k < j$ и $a_{kk}^* = (a_{n-k+1,n-k+1})^{-1}$.

Определим условия разрыва для ℓ^* следующим образом:

$$z^{(\nu-1)}(a+0) = \sum_{j=1}^{\nu} a_{\nu j}^* z^{(j-1)}(a-0), \quad \nu = \overline{1,n}. \tag{2.19}$$

Пусть $\{\lambda_l^*\}_{l \geqslant 0}$ — собственные значения краевой задачи L^* для уравнения (2.18) с условиями разрыва (2.19) и краевыми условиями $U_{\nu s}^*(z) = 0, \ s = 0,T, \ \nu = \overline{1,m}$. Тогда $\lambda_l^* = \lambda_l$, $l \geqslant 0$. Обозначим

$$\varphi_k^*(x,\lambda) := \frac{1}{\eta(x)} \det[\varphi_j^{(\nu)}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n}\setminus n-k+1}, \tag{2.20}$$

$$\Phi_k^*(x,\lambda) = \frac{1}{\eta(x)} \det[\Phi_j^{(\nu)}(x,\lambda)]_{\nu=\overline{0,n-2};\, j=\overline{1,n}\setminus n-k+1}. \tag{2.21}$$

Учитывая (1.4), (1.5), (2.13) и (2.15), нетрудно проверить, что функции $\varphi_k^*(x,\lambda)$ и $\Phi_k^*(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (2.18) и удовлетворяют условиям разрыва (2.19) и краевым условиям

$$U_{\nu 0}^*(\varphi_k^*) = \delta_{\nu k},\ \nu=\overline{1,n},\quad U_{\nu 0}^*(\Phi_k^*) = \delta_{\nu k},\ \nu=\overline{1,k},\quad U_{\xi T}^*(\Phi_k^*) = 0,\ \xi=\overline{1,n-k}.$$

Из (2.21) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}^{(n-1)}(x,\lambda)\Phi_k^*(x,\lambda)\equiv 1,\ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^{*(n-1)}(x,\lambda)\equiv 1. \tag{2.22}$$

Аналогично (2.17) имеем

$$|\Phi_j^{*(\nu-1)}(x,\lambda)| \leqslant C|\rho|^{\nu-j}|\exp(\rho R_j^* x)|,\quad \rho\in\overline{S_{k_0}}\cap G_\delta,\ x\in[0,T],\ R_j^* = -R_{n-j+1}. \tag{2.23}$$

3. Теоремы о разложении и о полноте

3.1. Теорема о разложении. Обозначим

$$g(x,t,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\varphi_{n-k+1}(x,\lambda)\varphi_k^*(t,\lambda), & x\geqslant t,\\ 0 & x<t,\end{cases} \tag{3.1}$$

и построим функцию $G(x,t,\lambda)$ по формуле

$$G(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^m}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} \varphi_{m+1}(x,\lambda) & \dots & \varphi_n(x,\lambda) & g(x,t,\lambda)\\ \varphi_{m+1}(T,\lambda) & \dots & \varphi_n(T,\lambda) & g(T,t,\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \varphi_{m+1}^{(m-1)}(T,\lambda) & \dots & \varphi_n^{(m-1)}(T,\lambda) & \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}g(x,t,\lambda)_{|x=T}\end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Функция $G(x,t,\lambda)$ называется функцией Грина для краевой задачи L. В силу (3.2) функция $G(x,t,\lambda)$ является мероморфной по λ с полюсами в точках $\lambda=\lambda_l$, где $\{\lambda_l\}_{l\geqslant 0}$ — нули функции $\Delta(\lambda)$. Для оценки функции Грина нам потребуется другое ее представление с помощью решений типа Вейля.

Лемма 3.1. *Справедливо соотношение*

$$G(x,t,\lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^*(t,\lambda), & x\geqslant t,\\ \sum\limits_{k=1}^{m}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^*(t,\lambda), & x<t.\end{cases} \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно (3.1) и (2.20) имеем

$$g(x,t,\lambda) = \frac{1}{\eta(t)}\det[\varphi_j(t,\lambda),\dots,\varphi_j^{(n-2)}(t,\lambda),\varphi_j(x,\lambda)]_{j=\overline{1,n}},\quad x\geqslant t.$$

Учитывая (2.14) и (1.6), получаем

$$g(x,t,\lambda) = \frac{1}{\eta(t)}\det[\Phi_j(t,\lambda),\dots,\Phi_j^{(n-2)}(t,\lambda),\Phi_j(x,\lambda)]_{j=\overline{1,n}},\quad x\geqslant t, \tag{3.4}$$

$$\Delta(\lambda) = \det[\Phi_j^{(\nu-1)}(T,\lambda)]_{j=\overline{m+1,n},\ \nu=\overline{1,m}}, \tag{3.5}$$

$$G(x,t,\lambda) = \frac{(-1)^m}{\Delta(\lambda)}\begin{vmatrix} \Phi_{m+1}(x,\lambda) & \dots & \Phi_n(x,\lambda) & g(x,t,\lambda)\\ \Phi_{m+1}(T,\lambda) & \dots & \Phi_n(T,\lambda) & g(T,t,\lambda)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \Phi_{m+1}^{(m-1)}(T,\lambda) & \dots & \Phi_n^{(m-1)}(T,\lambda) & \dfrac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}g(x,t,\lambda)_{|x=T}\end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

Из (2.21) и (3.4) вытекает, что

$$g(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Phi_k^*(t,\lambda),\quad x\geqslant t. \tag{3.7}$$

В (3.6) мы подставляем (3.7) и (3.5), если $x \geqslant t$, и (3.5) и соотношение $g(x,t,\lambda)=0$, если $x<t$. Разлагая числитель в (3.6) по первой строке и учитывая (2.13), приходим к (3.3). Лемма 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,a]$ и $[a,T]$, $f(0)=f(T)=0$ и $f(a+0)=a_{11}f(a-0)$. Тогда*

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0\leqslant x\leqslant T}\Big|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r_N^n} Y(x,\lambda)\,d\lambda - f(x)\Big| = 0, \tag{3.8}$$

где

$$Y(x,\lambda)=\int\limits_0^T G(x,t,\lambda)f(t)\,dt. \tag{3.9}$$

Отметим, что по теореме о вычетах интеграл в (3.8) равен частичной сумме ряда Фурье для $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям краевой задачи L, и следовательно, теорема 3.1 дает достаточные условия для разложения $f(x)$ в равномерно сходящийся ряд по собственным и присоединенным функциям краевой задачи L (см. следствие 3.1).

Доказательство. Подставляя (3.3) в (3.9), получаем

$$Y(x,\lambda)=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_0^x f(t)\Phi_k^*(t,\lambda)\,dt$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f(t)\Phi_k^*(t,\lambda)\,dt.$$

Пусть для определенности $x\geqslant a$; для случая $x<a$ рассуждения аналогичны. Так как функции $\Phi_k^*(x,\lambda)$ являются решениями уравнения (2.18), то

$$Y(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Big(\int\limits_0^a+\int\limits_a^x\Big)f(t)\Big(\Phi_k^{*(n)}(t,\lambda)+\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f(t)\Big(\Phi_k^{*(n)}(t,\lambda)+\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt.$$

Выполним здесь интегрирование по частям в главных слагаемых с n-ми производными. Используя (2.22) и условия $f(0)=f(T)=0$, получаем

$$Y(x,\lambda)=\frac{f(x)}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{4}F_k(x,\lambda), \tag{3.10}$$

где

$$F_1(x,\lambda):=f(a-0)\Phi_k^{*(n-1)}(a-0,\lambda)-f(a+0)\Phi_k^{*(n-1)}(a+0,\lambda),$$

$$F_2(x,\lambda):=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Big(\int\limits_0^a+\int\limits_a^x\Big)f'(t)\Phi_k^{*(n-1)}(t,\lambda)\,dt,$$

$$F_3(x,\lambda):=\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f'(t)\Phi_k^{*(n-1)}(t,\lambda)\,dt,$$

$$F_4(x,\lambda):=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k-1}\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\Big(\int\limits_0^a+\int\limits_a^x\Big)f(t)\Big(\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt$$

$$+\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\Phi_{n-k+1}(x,\lambda)\int\limits_x^T f(t)\Big(\sum_{j=0}^{n-2}p_j^*(t)\Phi_k^{*(j)}(t,\lambda)\Big)\,dt.$$

Так как $\Phi_k^{*(n-1)}(a+0,\lambda)=a_{nn}^*\Phi_k^{*(n-1)}(a-0,\lambda),\ f(a+0)=a_{11}f(a-0)$, и $a_{nn}^*=(a_{11})^{-1}$, то

$$F_1(x,\lambda)\equiv 0. \tag{3.11}$$

Учитывая (2.17) и (2.23), вычисляем

$$|F_4(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{-1},\quad \rho\in G_\delta,\ x\in[0,T]. \tag{3.12}$$

Для $F_2(x,\lambda)$ и $F_3(x,\lambda)$ имеем в виду (2.17) и (2.23):

$$|F_k(x,\lambda)|\leqslant C_0\int\limits_0^T|g(t)|\,dt,\quad k=2,3,\quad \rho\in G_\delta,\ x\in[0,T],$$

где $g(t):=f'(t)\in L(0,T),\ C_0>0$. Если функция $g(t)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$, то интегрирование по частям дает

$$|F_k(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{-1}\quad k=2,3,\quad \rho\in G_\delta,\ x\in[0,T].$$

В общем случае, когда $g(t)\in L(0,T)$, зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем абсолютно непрерывную функцию $g_\varepsilon(x)$ такую, что

$$\int\limits_0^T|g_\varepsilon(x)-g(x)|\,dx<\frac{\varepsilon}{2C_0}.$$

Представим $F_k(x,\lambda)$ как сумму двух слагаемых

$$F_k(x,\lambda)=F_k(x,\lambda;g_\varepsilon)+F_k(x,\lambda;g-g_\varepsilon),$$

относящихся к функциям g_ε и $g-g_\varepsilon$ соответственно. Тогда

$$|F_k(x,\lambda)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{C}{|\rho|},$$

и следовательно, $|F_k(x,\lambda)|<\varepsilon$ для достаточно больших $|\rho|$. Это дает

$$\max_{x\in[0,T]}|F_k(x,\lambda)|=o(1),\quad |\rho|\to\infty,\ \rho\in G_\delta,\ k=2,3. \tag{3.13}$$

Из (3.10)–(3.13) вытекает, что

$$\max_{x\in[0,T]}\Big|Y(x,\lambda)-\frac{f(x)}{\lambda}\Big|=o\Big(\frac{1}{\lambda}\Big),\quad |\rho|\to\infty,\ \rho\in G_\delta,$$

и следовательно, верно (3.8). Теорема 3.1 доказана. □

Пусть $\{\varphi_l^*(x)\}_{l\geqslant 0}$ — корневые функции краевой задачи L^* такие, что

$$\int\limits_0^T\varphi_k(x)\varphi_l^*(x)\,dx=\delta_{kl}.$$

Следствие 3.1. *Пусть функция $f(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0,a]$ и $[a,T]$, $f(0)=f(T)=0$ и $f(a+0)=a_{11}f(a-0)$. Тогда*

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\varphi_l(x),\quad a_l=\int\limits_0^T f(t)\varphi_l^*(t)\,dt,$$

где ряд сходится «со скобками»:

$$\sum_{l=0}^{\infty}:=\lim_{N\to\infty}\sum_{|\lambda_l|<r_N^n}.$$

3.2. Теорема о полноте.

Теорема 3.2. *Система $\{\varphi_l(x)\}_{l\geqslant 0}$ корневых функций краевой задачи L полна в $L_2(0,T)$.*

Доказательство. Пусть $f(x)\in L_2(0,T)$ и

$$\int_0^T f(x)\varphi_l(x)\,dx=0,\quad l\geqslant 0. \tag{3.14}$$

Рассмотрим функцию

$$Z(x,\lambda):=\int_0^T G^*(x,t,\lambda)f(t)\,dt,$$

где $G^*(x,t,\lambda)=G(t,x,\lambda)$. В силу (3.3) имеем

$$\ell^* Z-\lambda Z=f(x). \tag{3.15}$$

Используя (3.14), известным методом (см. [4, Ch. 1]) нетрудно проверить, что при каждом фиксированном x функция $Z(x,\lambda)$ является целой по λ. С другой стороны, из (3.3), (2.17) и (2.23) вытекает, что

$$|Z(x,\lambda)|\leqslant C|\rho|^{1-n},\quad \rho\in G_\delta,\quad x\in[0,T],$$

и следовательно, $Z(x,\lambda)\equiv 0$. Учитывая (3.15), получаем $f(x)=0$ п.в. на $(0,T)$. Теорема 3.2 доказана. □

Рассмотрим контрпример, показывающий важность условия регулярности. Для этого рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\left.\begin{aligned} -y''=\lambda y,\quad 0<x<\pi,\quad \lambda=\rho^2,\\ y(0)=y(\pi)=0,\quad y^{(k)}(a+0)=(-1)^k y^{(k)}(a-0),\ k=0,1,\ a=3\pi/4. \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Для этой задачи условие регулярности не выполняется, а характеристическая функция имеет вид

$$\Delta(\lambda)=\rho^{-1}\sin\rho(2a-\pi).$$

Собственные значения $\lambda_l=\rho_l^2$ краевой задачи (3.16) суть $\rho_l=2l,\ l\geqslant 1$, а собственные функции имеют вид

$$y_l(x)=\begin{cases}\sin 2lx, & x\leqslant 3\pi/4,\\ (-1)^{l-1}\sin 2lx, & x>3\pi/4.\end{cases}$$

Система функций $\{y_l(x)\}_{l\geqslant 1}$ не является полной в $L_2(0,\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. — М.: Наука, 1970.
2. *Литвиненко О. Н., Сошников В. И.* Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. — М.: Сов. радио, 1964.
3. *Мещанов В. П., Фельдштейн А. Л.* Автоматизированное проектирование направленных ответвителей СВЧ. — М.: Связь, 1980.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
5. *Юрко В. А.* О краевых задачах с условиями разрыва внутри интервала// Дифф. уравн. — 2000. — *36*, № 8. — С. 1139-1140.
6. *Amirov R., Ozkan A.* Discontinuous Sturm—Liouville problems with eigenvalue dependent boundary conditions// Math. Phys. Anal. Geom. — 2014. — *17*, № 3-4. — С. 483–491.
7. *Anderssen R. S.* The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth// Geophys. J. R. Astr. Soc. — 1997. — *50*. — С. 303–309.
8. *Beals R., Deift P., Tomei C.* Direct and inverse scattering on the line. — Providence: Am. Math. Soc., 1988.
9. *Freiling G., Yurko V. A.* Inverse Sturm—Liouville problems and their applications. — New York: NOVA Science Publishers, 2001.
10. *Hald O. H.* Discontinuous inverse eigenvalue problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1984. — *37*. — С. 539–577.

11. *Krueger R. J.* Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties// J. Math. Phys. — 1982. — *23*, № 3. — С. 396–404.
12. *Lapwood F. R., Usami T.* Free oscillations of the Earth. — Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
13. *Shepelsky D. G.* The inverse problem of reconstruction of the medium‘s conductivity in a class of discontinuous and increasing functions// Adv. Sov. Math. — 1994. — *19*. — С. 209–231.
14. *Yurko V. A.* Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems// Integral Transforms Spec. Funct. — 2000. — *10*, № 2. — С. 141–164.
15. *Yurko V. A.* Method of spectral mappings in the inverse problem theory. — Utrecht: VSP, 2002.

Вячеслав Анатольевич Юрко
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-362-372 UDC 517.984

Spectral Analysis of Higher-Order Differential Operators with Discontinuity Conditions at an Interior Point

 V. A. Yurko

Abstract. Higher-order differential operators on a finite interval with jump conditions inside the interval are studied. Properties of spectral characteristics are obtained, and completeness and expansion theorems are proved for this class of operators.

REFERENCES

1. B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Vvedenie v spektral’nuyu teoriyu* [Introduction to Spectral Theory], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
2. O. N. Litvinenko, V. I. Soshnikov, *Teoriya neodnorodnykh liniy i ikh primenenie v radiotekhnike* [Theory of Nonhomogeneous Lines and Their Applications in Radio Engineering], Sov. radio, Moscow, 1964 (in Russian).
3. V. P. Meshchanov and A. L. Feldstein, *Avtomatizirovannoe proektirovanie napravlennykh otvetviteley SVCh* [Automatic Design of Directional Couplers], Svyaz’, Moscow, 1980 (in Russian).
4. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
5. V. A. Yurko, “O kraevykh zadachakh s usloviyami razryva vnutri intervala” [On boundary-value problems with discontinuity conditions inside the interval], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 8, 1139-1140 (in Russian).
6. R. Amirov and A. Ozkan, “Discontinuous Sturm—Liouville problems with eigenvalue dependent boundary conditions,” *Math. Phys. Anal. Geom.*, 2014, **17**, No. 3-4, 483–491.
7. R. S. Anderssen, “The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of torsional eigenfrequencies of the Earth,” *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1997, **50**, 303–309.
8. R. Beals, P. Deift, and C. Tomei, *Direct and Inverse Scattering on the Line*, Am. Math. Soc., Providence, 1988.
9. G. Freiling and V. A. Yurko, *Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications*, NOVA Science Publishers, New York, 2001.
10. O. H. Hald, “Discontinuous inverse eigenvalue problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1984, **37**, 539–577.
11. R. J. Krueger, “Inverse problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties,” *J. Math. Phys.*, 1982, **23**, No. 3, 396–404.
12. F. R. Lapwood and T. Usami, *Free Oscillations of the Earth*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

13. D. G. Shepelsky, “The inverse problem of reconstruction of the medium‘s conductivity in a class of discontinuous and increasing functions,” *Adv. Sov. Math.*, 1994, **19**, 209–231.
14. V. A. Yurko, “Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2000, **10**, No. 2, 141–164.
15. V. A. Yurko, *Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory*, VSP, Utrecht, 2002.

V. A. Yurko
Chernyshevskii Saratov National Research State University
83 Astrahanskaya st., 410026 Saratov, Russia
E-mail: yurkova@info.sgu.ru