Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 340–361

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361 УДК 517.927.25

О КРАТНОЙ ПОЛНОТЕ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ПУЧКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2017 г. **В. С. РЫХЛОВ**

Аннотация. В пространстве суммируемых с квадратом функций на конечном отрезке рассматривается класс полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов n-го порядка с постоянными коэффициентами и двухточечными (на концах основного промежутка) краевыми условиями. Предполагается, что корни характеристического уравнения пучков этого класса простые и отличны от нуля. Формулируются достаточные условия m-кратной полноты ($1 \leqslant m \leqslant n$) системы корневых функций пучков этого класса в пространстве суммируемых с квадратом функций на рассматриваемом отрезке.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

1.1. Постановка задачи. В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном отрезке $[0,1]$ дифференциальным выражением (д.в.):

$$\ell(y,\lambda) := p_n(x,\lambda)y^{(n)} + p_{n-1}(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + p_0(x,\lambda)y, \tag{1.1}$$

и линейно независимыми краевыми условиями:

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $p_j(x,\lambda) = \sum\limits_{s=0}^{n-j} p_{js}(x)\lambda^s$, $p_{js}(x) \in L_1[0,1]$, а $\alpha_{ij}(\lambda)$, $\beta_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ.

Далее будем использовать, не повторяя их в данной статье, известные определения собственных значений (с.з.), собственных и присоединенных функций или, кратко, корневых функций (к.ф.), производных (по Келдышу) цепочек из [5,6]. Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}$ есть множество всех с.з. пучка $L(\lambda)$, а $Y := \{y_k\}$ — множество всех к.ф. пучка $L(\lambda)$, соответствующих множеству Λ. Предполагается, что множество Λ счетное.

Определение 1.1. Система Y к.ф. пучка $L(\lambda)$ называется m-кратно полной в пространстве $L_2[0,1]$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1]$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$. Здесь обозначено

$$L_2^m[0,1] := \underbrace{L_2[0,1] \oplus \cdots \oplus L_2[0,1]}_{m \text{ раз}}.$$

Решается задача нахождения условий на коэффициенты пучка $L(\lambda)$, при которых имеет место или отсутствует n-кратная полнота к.ф. в $L_2[0,1]$. В последнем случае естественно возникает вопрос об m-кратной полноте при $1 \leqslant m \leqslant n-1$.

1.2. Краткая историческая справка. Основополагающей по этой проблеме является работа [4], в которой была сформулирована (без доказательства) теорема об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порожденного д.в. (1.1) со специальной главной частью

$$y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\}$$

и не зависящими от λ распадающимися краевыми условиями (1.2) (когда часть краевых условий берется только в конце 0 отрезка $[0,1]$, а остальные в 1). Эта теорема была доказана в [20] и, независимо, в [24] в случае аналитических коэффициентов д.в. и в [22] — в случае суммируемых коэффициентов. Обобщение этой теоремы на случай конечномерного возмущения вольтеррова оператора было сделано в [21]. Случай произвольной главной части д.в. (1.1) был рассмотрен в [19, 25]. В работах [3, 23], относящихся к общему виду (1.1)–(1.2) пучка $L(\lambda)$, получены достаточные условия n-кратной полноты в $L_2[0,1]$ системы к.ф. в терминах степенной ограниченности по параметру λ функции Грина пучка $L(\lambda)$ на некоторых лучах. Наиболее полное исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте к.ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1.1)–(1.2), д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия — полураспадающиеся (не менее половины краевых условий берутся только в одном конце) и не зависящие от λ, проведено в [1, 2].

Но для некоторых классов пучков $L(\lambda)$ даже с постоянными коэффициентами вопрос о кратной полноте системы к.ф. полностью еще не исследован. В данной статье рассматривается именно такой пучок $L_0(\lambda)$, действующий в пространстве $L_2[0,1]$ и порожденный д.в. n-го порядка

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{j+s \leqslant n} p_{js} \lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0,\ p_{0n} \neq 0, \tag{1.3}$$

и линейно независимыми двухточечными нормированными краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) = 0,\ i = \overline{1,l}, \\ U_i^0(y,\lambda) &:= \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y^{(j)}(0) + \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i1}} \lambda^s \beta_{ijs} y^{(j)}(1) = 0,\ i = \overline{l+1,n}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $\lambda, \alpha_{ijs}, \beta_{ijs} \in \mathbb{C}$, $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$.

Будем называть д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ *однородным*, если в сумме (1.3) $p_{js} = 0$ при $j+s < n$. Аналогично, будем называть i-е краевое условие (1.4) при $i = \overline{1,l}$ *однородным*, если $\alpha_{ijs} = 0$ при $j+s < \varkappa_{i0}$.

Пусть всюду далее выполняется основное предположение относительно д.в. $\ell_0(y,\lambda)$, а именно:

1°. *Корни* $\omega_j = r_j \exp(i\psi_j)$, $j = \overline{1,n}$, *характеристического уравнения* $\sum\limits_{\mu+s=n} p_{\mu s}\omega^\mu = 0$ (*кратко, характеристики*) *д.в.* $\ell_0(y,\lambda)$ *различны и отличны от нуля*.

Не нарушая общности, можно считать, что $\{\omega_j\}$ лежат на η лучах $(1 \leqslant \eta \leqslant n)$, исходящих из начала координат. Пусть при $\nu_0 = 0$ и $\nu_\eta = n$ справедливы соотношения

$$0 \leqslant \psi_{\nu_0+1} = \cdots = \psi_{\nu_1} < \cdots < \psi_{\nu_{\eta-1}+1} = \cdots = \psi_{\nu_\eta} < 2\pi. \tag{1.5}$$

В [1, 2] был детально рассмотрен пучок типа (1.3)–(1.4) в случае, когда

а) краевые условия не зависят от λ и $2l > n$, т. е. краевые условия полураспадающиеся;

б) существует прямая d, проходящая через начало координат, не содержащая ω-корней и делящая комплексную плоскость на две полуплоскости, внутри каждой из которых число этих корней не меньше, чем $n-l$.

Были получены условия n- и m-кратной полноты при $1 \leqslant m \leqslant n-1$ в пространстве $L_2[0,1]$ и показана точность этих результатов.

Когда $\eta = 2$ и $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi$ (случай $\eta = 1$ рассматривается здесь как частный случай $\eta = 2$), кратная полнота к.ф. пучка $L_0(\lambda)$, для которого условия а) или б) не выполняются (см. выше), исследовалась в [12,14,17,18]. Нарушение условий а) и б) возможно, когда краевые условия могут зависеть от спектрального параметра λ или когда $0 \leqslant l \leqslant n-1$ при некоторых значениях ν_1. Случай $l = n-1$ и $\nu_1 = n$ рассматривался в [12], случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\nu_1 = n$ рассматривался в [14], случай $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\nu_1 = n-1$ рассматривался в [18], и, наконец, случай $l = 0$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$ рассматривался в [17]. Когда по-прежнему $\eta = 2$, но $\psi_1 \neq \psi_2$ — произвольны, кратная полнота исследовалась в [27] при $l = 0$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$ и в [28] при $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $0 \leqslant \nu_1 \leqslant n$. Д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ во всех этих работах, кроме [27], предполагалось однородным.

В указанных статьях получены достаточные условия m-кратной полноты к.ф. в $L_2[0,1]$, где $m = \min\{\nu_1, n-l\} + \min\{n-\nu_1, n-l\}$.

В настоящей статье рассматривается пучок $L_0(\lambda)$ общего вида (неоднородный) с постоянными коэффициентами в случае простых и произвольных характеристик в предположении произвольности l, а именно: $0 \leqslant l \leqslant n-1$ (при $l = n$ получаем условия Коши, т. е. вырожденный пучок). Только при исследовании k-кратной полноты при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ будем предполагать однородность д.в. (1.3) и краевых условий (1.4) при $1 \leqslant i \leqslant l$. Это обусловлено методом доказательства кратной полноты к.ф. в этом случае.

В статьях [7,26] исследовалась кратная полнота системы к.ф. пучка, очень близкого к рассматриваемому. Но краевые условия предполагались полураспадающимися, д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ предполагалось однородным и требовалась определенная асимптотика характеристического определителя, условия существования которой не указывались. Некоторые из этих ограничений удалось снять.

1.3. Формулировка основных результатов. Чтобы сформулировать полученные в статье результаты, введем необходимые обозначения и предположения.

Помимо предположения 1°, далее будет использоваться еще следующее предположение:

2°. *Пусть $\upsilon \in [0,2\pi)$ есть любое число, для которого существует перестановка $\sigma(=\sigma(\upsilon)) = \{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n\}$ множества $\{1,2,\ldots,n\}$ и число $h(=h(\upsilon)) \in \{0,1,\ldots,n\}$ такие, что*

$$\mathrm{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_1}) < \cdots < \mathrm{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_h}) < 0 < \mathrm{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_{h+1}}) < \cdots < \mathrm{Re}(e^{i\upsilon}\omega_{\sigma_n}). \tag{1.6}$$

Обозначим множество таких υ через Υ. Это все числа из $[0,2\pi)$, кроме решений уравнений $\mathrm{Re}(e^{i\upsilon}\omega_i) = \mathrm{Re}(e^{i\upsilon}\omega_j)$, $i \neq j$ и $\mathrm{Re}(e^{i\upsilon}\omega_j) = 0$, $j = \overline{1,n}$. Имеется конечное число таких решений, и между ними перестановка σ и число h не меняются.

Далее считаем (без потери общности), что краевые условия (1.4) упорядочены таким образом, что при $s_0 = l$, $s_{r+1} = n$ справедливы соотношения

$$\chi_{s_0+1} = \cdots = \chi_{s_1} < \chi_{s_1+1} = \cdots = \chi_{s_2} < \cdots < \chi_{s_r+1} = \cdots = \chi_{s_{r+1}}, \tag{1.7}$$

где $\chi_i = \varkappa_{i1} - \varkappa_{i0}$.

Для $\upsilon \in \Upsilon$ пусть $\gamma\,(=\gamma(\upsilon))$, $\delta\,(=\delta(\upsilon))$ — такие индексы, что

$$s_\gamma + 1 \leqslant h+1 \leqslant s_{\gamma+1}, \qquad s_\delta + 1 \leqslant n-h+1 \leqslant s_{\delta+1}. \tag{1.8}$$

Считаем, что $\gamma = 0$ и $\delta = r+1$ в случае $h = 0$, а в случае $h = n$ полагаем $\gamma = r+1$ и $\delta = 0$.

Обозначим $[q]_+ = \max\{q,0\}$, $[p,q]_- = \min\{p,q\}$, $[a] = 1 + O(1/\lambda)$, $\varkappa_i = [\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1}]_-$ при $i = \overline{l+1,n}$ и для того же рассматриваемого υ при $j = \overline{1,n}$ положим

$$a_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}} \alpha_{i\nu s}\omega_{\sigma_j}^{\nu}, \quad i = \overline{1,n}, \quad b_{ij} = \sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}} \beta_{i\nu s}\omega_{\sigma_j}^{\nu}, \quad i = \overline{l+1,n}.$$

Пусть A и B суть определители, соответственно, вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1h} & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{s_\gamma,1} & \ldots & a_{s_\gamma,h} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{s_\gamma+1,1} & \ldots & a_{s_\gamma+1,h} & b_{s_\gamma+1,h+1} & \ldots & b_{s_\gamma+1,n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nh} & b_{n,h+1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_{1,h+1} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{s_\delta,h+1} & \ldots & a_{s_\delta,n} \\ b_{s_\delta+1,1} & \ldots & b_{s_\delta+1,h} & a_{s_\delta+1,h+1} & \ldots & a_{s_\delta+1,n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ b_{n1} & \ldots & b_{nh} & a_{n,h+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а a_1, a_2, b_1, b_2 — определители вида

$$a_1 = \det\big(a_{ij}\big)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}}, \quad a_2 = \det\big(a_{ij}\big)_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{n-l+1,n}}, \quad b_1 = \det\big(b_{ij}\big)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{l+1,n}}, \quad b_2 = \det\big(b_{ij}\big)_{i=\overline{l+1,n}}^{j=\overline{1,n-l}}.$$

Наряду с предположениями 1°-2°, будем использовать далее еще следующее предположение:

3°. *а) при* $h \leqslant l$ *пусть* $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$; *б) при* $h > l$ *пусть* $A \neq 0$;
в) при $h \geqslant n-l$ *пусть* $a_2 \neq 0$, $b_2 \neq 0$; *г) при* $h < n-l$ *пусть* $B \neq 0$.

В случае, когда д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ однородно, обозначим

$$c_{i\mu}(\lambda) := \lambda^{-\varkappa_{i0}} \sum_{s+j\leqslant\varkappa_{i0}} \lambda^{s+j}\alpha_{ijs}\omega_\mu^j, \quad i=\overline{1,l}, \quad \mu=\overline{1,n}. \tag{1.9}$$

Если к тому же и краевые условия (1.4) при $1 \leqslant i \leqslant l$ однородны, то справедливы равенства

$$c_{i\mu}(\lambda) = \lambda^{-\varkappa_{i0}} \sum_{s+j=\varkappa_{i0}} \lambda^{s+j}\alpha_{ijs}\omega_\mu^j = \sum_{s+j=\varkappa_{i0}} \alpha_{ijs}\omega_\mu^j =: c^\circ_{i\mu}, \quad i=\overline{1,l}, \quad \mu=\overline{1,n}, \tag{1.10}$$

т. е. $c_{i\mu}(\lambda)$ не зависят от λ.

При условии однородности д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ рассмотрим линейную алгебраическую систему

$$\sum_{\mu=1}^{n} c_{i\mu}(\lambda) d_\mu = 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{1.11}$$

относительно вектора неизвестных $(d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$. Пусть базис пространства решений системы (1.11) есть $\big(d_{s1}(\lambda), d_{s2}(\lambda), \ldots, d_{sn}(\lambda)\big)^T$, $s=\overline{1,n-l}$. Не нарушая общности, можно считать $d_{ij}(\lambda)$ многочленами. Составим матрицы

$$D_j(\lambda) := \begin{pmatrix} d_{1,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & d_{1,\nu_j}(\lambda) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n-l,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \ldots & d_{n-l,\nu_j}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,\eta},$$

и обозначим

$$m = \sum_{j=1}^{\eta} \operatorname{rank} D_j(\lambda). \tag{1.12}$$

Очевидно неравенство

$$m \leqslant \sum_{j=1}^{\eta} [\nu_j - \nu_{j-1}, n-l]_-.$$

В случае, когда д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ общего вида (т. е. не является однородным), будем рассматривать линейную алгебраическую систему

$$\sum_{\mu=1}^{n} c^\circ_{i\mu} d^\circ_\mu = 0, \quad i=\overline{1,l}, \tag{1.13}$$

относительно вектора неизвестных $(d^\circ_1, d^\circ_2, \ldots, d^\circ_n)^T$. Пусть базис пространства решений системы (1.13) есть $\big(d^\circ_{s1}, d^\circ_{s2}, \ldots, d^\circ_{sn}\big)^T$, $s=\overline{1,n-l}$. Составим матрицы

$$D^\circ_j := \begin{pmatrix} d^\circ_{1,\nu_{j-1}+1} & \ldots & d^\circ_{1,\nu_j} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d^\circ_{n-l,\nu_{j-1}+1} & \ldots & d^\circ_{n-l,\nu_j} \end{pmatrix}, \quad j=\overline{1,\eta},$$

и обозначим

$$m^\circ = \sum_{j=1}^{\eta} \operatorname{rank} D^\circ_j. \tag{1.14}$$

Очевидно неравенство

$$m^\circ \leqslant \sum_{j=1}^{\eta} [\nu_j - \nu_{j-1}, n-l]_-.$$

В частности, если $\ell_0(y,\lambda)$ является однородным д.в., то

$$m^\circ \leqslant m. \tag{1.15}$$

Если д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ и краевые условия (1.4) при $1 \leqslant i \leqslant l$ однородны, то

$$D_j(\lambda) \equiv D_j^\circ, \quad m = m^\circ. \tag{1.16}$$

Замечание 1.1. Остается открытым вопрос, зависит ли число m (или m°) от выбора базиса пространства решений системы (1.11) (или системы (1.13)). Если зависит, то из всех таких базисов нужно брать, естественно, такой, для которого m (или m°) будет наибольшим.

Наряду с предположениями 1°–3° будут использоваться еще такие предположения:

4°. *Д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ является однородным.*

5°. *Краевые условия* (1.4) *при $i=\overline{1,l}$ являются однородными.*

Теорема 1.1. *Пусть $l=0$ и при некотором $v \in \Upsilon$ выполняются предположения 1°–3°. Тогда система к.ф. пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$, если порядок хотя бы одного краевого условия* (1.4) *больше $n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае.*

Теорема 1.2. *Пусть $1 \leqslant l \leqslant n-1$, при некотором $v \in \Upsilon$ выполняются предположения 1°–3°, система* (1.4) *является системой полного ранга и $m^\circ = n$, где m° определена формулой* (1.14). *Тогда система к.ф. пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$, если порядок хотя бы одного краевого условия* (1.4) *больше $n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае.*

Очевидно, что $m^\circ = n$ только тогда, когда $\operatorname{rank} D_j^\circ = \nu_j - \nu_{j-1}$, $j=\overline{1,\eta}$.

Теорема 1.3. *Пусть $1 \leqslant l \leqslant n-1$, при некотором $v \in \Upsilon$ выполняются предположения 1°–4° и $m=n$, где m определена формулой* (1.12). *Тогда система к.ф. пучка $L(\lambda)$ n-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[n-1-\varkappa_i]_+$, если порядок хотя бы одного краевого условия* (1.4) *больше $n-1$, и с нулевым дефектом в противном случае.*

Очевидно, что $m=n$ только тогда, когда $\operatorname{rank} D_j(\lambda) = \nu_j - \nu_{j-1}$, $j=\overline{1,\eta}$.

Замечание 1.2. Так как выполняется неравенство (1.15), то, вообще говоря, возможны случаи, когда $m^\circ < m = n$, т. е. предположения теоремы 1.2 не выполняются, а предположения теоремы 1.3 выполняются. Интересно было бы найти такие примеры.

Теорема 1.4. *Пусть $1 \leqslant l \leqslant n-1$, при некотором $v \in \Upsilon$ выполняются предположения 1°–5° и $m^\circ < n$. Тогда система к.ф. пучка $L(\lambda)$ k-кратно полна в пространстве $L_2[0,1]$ при $k \leqslant m^\circ$ с возможным конечным дефектом, не превышающим числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n}[k-1-\varkappa_i]_+$.*

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству этих теорем. Схема доказательства соответствует схеме доказательства теорем 2.1–2.3 из [1, 2] и теорем 1–3 из [7] с модификациями, сделанными при доказательстве соответствующих теорем в [14, 17, 18, 27, 28]. Центральную роль в доказательстве играет лемма 2.4 об оценке, которая формулируется и доказывается в следующем разделе.

2. Вспомогательные результаты и лемма об оценке

В [1, с. 28–31] доказано, что уравнение $\ell_0(y,\lambda)=0$ имеет фундаментальную систему решений (ф.с.р.) $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$ с асимптотикой

$$y_j^{(k-1)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^{k-1} w_j(x) e^{\lambda\omega_j x}[1], \quad j,k=\overline{1,n}, \tag{2.1}$$

и аналитическую при $|\lambda| \gg 1$, где $w_j(x)$ — отличная от нуля всюду на $[0,1]$ непрерывно дифференцируемая функция.

Оказывается, формулы (2.1) имеют место и при $k = n, n+1, \ldots$.

Лемма 2.1. *Справедливы формулы*

$$y_j^{(k-1)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^{k-1} w_j(x) e^{\lambda\omega_j x}[1], \quad j = \overline{1,n}, \ k = 1,2,\ldots,n,n+1,\ldots. \tag{2.2}$$

Доказательство. При $k = \overline{1,n}$ формулы (2.2) уже имеют место в силу (2.1). Получим эти формулы при $k = n$. Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям в [23, с. 195].

Имеют место тождества $\ell_0(y_j,\lambda) \equiv 0$, $j = \overline{1,n}$. Выражая из них $y_j^{(n)}(x,\lambda)$, найдем

$$\begin{aligned} y_j^{(n)}(x,\lambda) \equiv -\frac{1}{p_{n0}}(p_{n-1,1}\lambda + p_{n-1,0}) y_j^{(n-1)}(x,\lambda) - \\ - \frac{1}{p_{n0}}(p_{n-2,2}\lambda^2 + p_{n-2,1}\lambda + p_{n-2,0}) y_j^{(n-2)}(x,\lambda) - \cdots - \\ - \frac{1}{p_{n0}}(p_{0n}\lambda^n + p_{0,n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_{01}\lambda + p_{00}) y_j(x,\lambda). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Используя справа уже установленные асимптотические формулы (2.2) при $k = \overline{1,n}$, получим

$$y_j^{(n)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^n w_j(x) e^{\lambda\omega_j x}\left(-\frac{p_{n-1,1}}{p_{n0}\omega_j} - \frac{p_{n-2,2}}{p_{n0}\omega_j^2} - \cdots - \frac{p_{0n}}{p_{n0}\omega_j^n} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right). \tag{2.4}$$

Учитывая здесь то, что ω_j суть корни характеристического уравнения $\sum\limits_{\mu+s=n} p_{\mu s}\omega_j^{\mu} = 0$ и, следовательно,

$$-\frac{p_{n-1,1}}{p_{n0}\omega_j} - \frac{p_{n-2,2}}{p_{n0}\omega_j^2} - \cdots - \frac{p_{0n}}{p_{n0}\omega_j^n} = 1, \tag{2.5}$$

получим из (2.4)

$$y_j^{(n)}(x,\lambda) = (\lambda\omega_j)^n w_j(x) e^{\lambda\omega_j x}[1],$$

т. е. (2.2) при $k = n+1$.

Дифференцируя тождество (2.3) по x, подставляя в правую часть уже установленные формулы (2.2) при $k = 1,\ldots,n+1$ и пользуясь опять соотношениями (2.5), получим формулы (2.2) при $k = n+2$. Этот процесс можно неограниченно продолжить (можно воспользоваться методом математической индукции). Лемма доказана. □

В случае, если д.в. $\ell_0(y,\lambda)$ является однородным, уравнение $\ell_0(y,\lambda) = 0$ имеет в качестве ф.с.р. чистые экспоненты

$$e^{\lambda\omega_j x}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Для единообразия многих выкладок далее удобно считать, что и в этом случае ф.с.р. и ее производные имеют вид (2.2), где $w_j(x) \equiv 1$, $[1] \equiv 1$.

Наряду с ф.с.р. (2.1) будет использоваться ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, удовлетворяющая начальным условиям

$$\tilde{y}_j^{(k-1)}(0,\lambda) = \delta_{jk}, \quad j,k = \overline{1,n},$$

где δ_{js} есть символ Кронекера. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $\tilde{y}_j(x,\lambda)$ являются целыми аналитическими функциями по λ.

Будем обозначать далее объекты, построенные по ф.с.р. $\{\tilde{y}_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, теми же буквами, что и аналогичные объекты, построенные по ф.с.р. $\{y_j(x,\lambda)\}_{j=1}^n$, но с волной наверху.

Хорошо известно [6, с. 26], что с.з. λ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, пучка (1.3)–(1.4) являются нулями целой функции $\tilde{\Delta}(\lambda) := \det\big(U_i^0(\tilde{y}_j(x,\lambda),\lambda)\big)_{i,j=1}^n$. Обозначим через $\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)$, $i = \overline{l+1,n}$, функции, получаемые из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ в результате замены i-й строки на строку $(\tilde{y}_1(x,\lambda),\ldots,\tilde{y}_n(x,\lambda))$. Непосредственно можно убедиться в том, что столбцы

$$\left.\left(\frac{\partial^j \tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\partial\lambda^j}, \ldots, \frac{\partial^j\big(\lambda^{k-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)\big)}{\partial\lambda^j}\right)^T\right|_{\lambda=\lambda_\nu}, \tag{2.6}$$

где $i = \overline{l+1,n}$, $j = \overline{0,s}$, являются производными по Келдышу k-цепочками для к.ф., соответствующих с.з. λ_ν, которое является нулем функции $\tilde{\Delta}(\lambda)$ кратности $s+1$.

Пусть m (или m°) определяется формулой (1.12) (или (1.14)) и $1 \leqslant k \leqslant m$ (или $1 \leqslant k \leqslant m^\circ$). Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^k \frac{\lambda^{j-1}\tilde{\Phi}_i(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} h_j(x)\,dx, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{2.7}$$

где $h_j(x) \in L_2[0,1]$, и обозначим $h(x) := \big(h_1(x),\ldots,h_k(x)\big)^T$.

Перепишем (2.7) в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) = \frac{\tilde{\Delta}_i(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{2.8}$$

где $\tilde{\Delta}_i(\lambda)$ получается из $\tilde{\Delta}(\lambda)$ заменой i-й строки строкой $(\tilde{u}_{n+1,1}(\lambda),\ldots,\tilde{u}_{n+1,n}(\lambda))$, в которой

$$\tilde{u}_{n+1,j}(\lambda) = \int\limits_0^1 \sum_{\nu=1}^k h_\nu(x)\lambda^{\nu-1}\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx = \lambda^{k-1}\int\limits_0^1 h_k(x,\lambda)\tilde{y}_j(x,\lambda)\,dx$$

и $h_k(x,\lambda) = \sum\limits_{\nu=1}^k h_\nu(x)\lambda^{\nu-k}$.

В [2, с. 48-49] доказаны следующие два простых утверждения.

Лемма 2.2. *В случае $l=0$ функции $\tilde{\Phi}_1,\ldots,\tilde{\Phi}_n$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, а в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$ функции $\tilde{\Phi}_{l+1}(x,\lambda)$, ..., $\tilde{\Phi}_n(x,\lambda)$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, удовлетворяющими первым l краевым условиям* (1.4) *в точке* 0.

Лемма 2.3. *Функции $\tilde{\Theta}_{l+1}(\lambda)$, ..., $\tilde{\Theta}_n(\lambda)$ $(0 \leqslant l \leqslant n-1)$ не зависят от выбора ф.с.р. уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$.*

Из (2.8) и леммы 2.3 получим

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \Theta_i(\lambda) \equiv \frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad i = \overline{l+1,n}. \tag{2.9}$$

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\Pi^+_{\varepsilon,\upsilon} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in [\upsilon-\varepsilon, \upsilon+\varepsilon]\Big\}, \quad \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon} = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg\lambda \in [\pi+\upsilon-\varepsilon, \pi+\upsilon+\varepsilon]\Big\},$$

где $\varepsilon > 0$ и достаточно мало.

Справедлива следующая лемма об оценке, которая является основной при доказательстве теорем 1.1–1.4.

Лемма 2.4. *Пусть выполняются предположения* 1°-2° *и условия* (1.7)-(1.8) *для некоторого $\upsilon \in \Upsilon$. Тогда при $|\lambda| \gg 1$ справедливы оценки*

$$|\Theta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon,\upsilon)|\lambda|^{k-\frac{3}{2}-\varkappa_i}, \quad i = \overline{l+1,n}, \tag{2.10}$$

где $C(\varepsilon,\upsilon)$ суть константы, зависящие только от ε и υ, при следующих условиях:

1. *в случае $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ выполняется предположение 3°(а,б),*
2. *в случае $\lambda \in \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon}$ выполняется предположение 3°(в,г).*

Доказательство. Ради краткости будем использовать следующие обозначения при $j = \overline{1,n}$:

$$\hat{a}_{ij} := w_{\sigma_j}(0)a_{ij},\ i = \overline{1,n}, \quad \hat{b}_{ij} := w_{\sigma_j}(1)b_{ij},\ i = \overline{l+1,n}.$$

Так как все числа $w_{\sigma_j}(0)$, $w_{\sigma_j}(1)$ отличны от нуля, то определители $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{a}_1$, $\hat{a}_2$, $\hat{b}_1$, $\hat{b}_2$, аналогичные соответствующим определителям A, B, a_1, a_2, b_1, b_2, но построенные по числам $\hat{a}_{ij}$ и $\hat{b}_{ij}$, будут отличны от нуля тогда и только тогда, когда отличны от нуля соответствующие определители без крышки.

Так как справедливы соотношения (2.9), то, чтобы оценить сверху $\Theta_i(\lambda)$, предварительно оценим снизу $|\Delta(\lambda)|$. Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\lambda \in \Pi^{+}_{\varepsilon,\upsilon}$. Исходя из вида (2.2) ф.с.р. и ее производных, в этом случае будем иметь следующие асимптотические формулы:

(i) $i=\overline{1,l}$, $j=\overline{1,n}$ (при $l=0$ этот пункт отсутствует):

$$U_i(y_{\sigma_j},\lambda)=\sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{\sigma0}}\alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s}w_{\sigma_j}(0)[1]=\lambda^{\varkappa_{i0}}\left(w_{\sigma_j}(0)\sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}}\alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}+O\big(1/\lambda\big)\right)=$$
$$=\lambda^{\varkappa_{i0}}[\hat a_{ij}];\quad(2.11)$$

(ii) $i=\overline{l+1,n}$, $j=\overline{1,h}$ (когда $h=0$, этот случай отсутствует):

$$U_i(y_{\sigma_j},\lambda)=\sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i0}}\alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s}w_{\sigma_j}(0)[1]+\sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i1}}\beta_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s}w_{\sigma_j}(1)[1]e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}=$$
$$=\lambda^{\varkappa_{i0}}\left(w_{\sigma_j}(0)\sum_{\nu+s=\varkappa_{i0}}\alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}+O\left(1/\lambda\right)+O\big(\lambda^{\chi_i}e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}\big)\right)=\lambda^{\varkappa_{i0}}[\hat a_{ij}];\quad(2.12)$$

(iii) $i=\overline{l+1,n}$, $j=\overline{h+1,n}$ (когда $h=n$, этот случай отсутствует):

$$U_i(y_{\sigma_j},\lambda)=\sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i0}}\alpha_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s}w_{\sigma_j}(0)[1]+\sum_{\nu+s\leqslant\varkappa_{i1}}\beta_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}\lambda^{\nu+s}w_{\sigma_j}(1)[1]e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}=$$
$$=\lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}\left(w_{\sigma_j}(1)\sum_{\nu+s=\varkappa_{i1}}\beta_{i\nu s}\omega^{\nu}_{\sigma_j}+O\big(1/\lambda\big)+O\big(\lambda^{-\chi_i}e^{-\lambda\omega_{\sigma_j}}\big)\right)=\lambda^{\varkappa_{i1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_j}}[\hat b_{ij}].\quad(2.13)$$

Следовательно, подставляя (2.11)–(2.13) в $\Delta(\lambda)$ и вынося множители $\lambda^{\varkappa_{i0}}$ из всех строк, получим

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{i0}}\times\begin{vmatrix}[\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [\hat a_{1,h+1}] & \dots & [\hat a_{1n}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [\hat a_{l,h+1}] & \dots & [\hat a_{ln}]\\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{l+1,n}]\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{nn}]\end{vmatrix}.\quad(2.14)$$

Далее необходимо рассмотреть два случая: $h\leqslant l$ и $h>l$.

а) $h\leqslant l$ и пусть выполняется предположение 3°(a). В этом случае разложим этот определитель по минорам последних $n-l$ строк и выделим главную часть. Так как имеют место неравенства (1.6), $n-h\geqslant n-l$ и выполняется предположение 3°(a), главным членом является слагаемое, которое есть произведение минора $(n-l)$-го порядка, образованного элементами, стоящими в $n-l$ столбцах с номерами от $l+1$ до n, на его алгебраическое дополнение l-го порядка.

Поэтому из (2.14) при $|\lambda|\gg1$ получим

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}}e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\times$$
$$\times\det(\hat a_{\mu j})^{j=\overline{1,l}}_{\mu=\overline{1,l}}\times\det(\hat b_{\mu j})^{j=\overline{l+1,n}}_{\mu=\overline{l+1,n}}[1].\quad(2.15)$$

Следовательно, в рассматриваемом случае при $\lambda\in\Pi^{+}_{\varepsilon,\upsilon}$ и $|\lambda|\gg1$ получим следующую оценку снизу (при выполнении предположения 3°(a)):

$$|\Delta(\lambda)|\geqslant C(\varepsilon,\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^{l}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=l+1}^{n}\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|,\quad(2.16)$$

где $C(\varepsilon,\upsilon)>0$ есть константа, зависящая только от ε, υ и параметров пучка $L_0(\lambda)$.

б) $h > l$ и пусть выполняется предположение 3°(б). Вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_{\sigma_\nu}}$ из последних $n-h$ столбцов определителя (2.14), получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{i0}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}} \begin{vmatrix} [\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [0] & \dots & [0] \\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{s_\gamma+1,1}] & \dots & [\hat a_{s_\gamma+1,h}] & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{h+1,1}] & \dots & [\hat a_{h+1,h}] & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{s_{\gamma+1},1}] & \dots & [\hat a_{s_{\gamma+1},h}] & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{nn}] \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по минорам первых h столбцов и выделим главную часть. Ввиду соотношений (1.7), (1.8) и предположения 3°(б) главная часть состоит из слагаемых, которые являются произведениями миноров первых h столбцов, образованных элементами, стоящими в строках с номерами от $\underline{1 \text{ до } s_\gamma}$ подряд и с добавленными к ним любыми $h - s_\gamma$ строками с номерами из диапазона $\overline{s_\gamma+1, s_{\gamma+1}}$, на их алгебраические дополнения $(n-h)$-го порядка. Все эти слагаемые имеют один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-h)\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{i=h+1}^{n}\chi_i.$$

Затем только главные члены опять свернем в определитель. Получим с учетом предположения 3°(б)

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{n}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=h+1}^{n}(\varkappa_{i1}-\varkappa_{i0})} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\Big(\hat A + O(1/\lambda)\Big) = \lambda^{\sum\limits_{i=1}^{h}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=h+1}^{n}\varkappa_{i1}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\hat A[1].$$

Следовательно, в рассматриваемом случае при $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ и $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку снизу (при выполнения предположения 3°(б)):

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant C(\varepsilon,\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{i=1}^{h}\varkappa_{i0}+\sum\limits_{i=h+1}^{n}\varkappa_{i1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|, \tag{2.17}$$

где $C(\varepsilon,\upsilon) > 0$ есть некоторая константа.

В соответствии с формулами (2.9) оценим теперь $\Delta_i(\lambda)$ при $i = \overline{l+1,n}$ сверху. Учитывая определение $\Delta_i(\lambda)$, выносля множитель λ^{k-1} из i-й строки и раскладывая этот определитель по элементам этой строки, получим

$$\Delta_i(\lambda) = \lambda^{k-1}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}(\lambda)\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}\,d\xi, \quad i=\overline{l+1,n}, \tag{2.18}$$

где $\Delta_{ij}(\lambda)$ есть минор элемента (i,j) в определителе $\Delta(\lambda)$, т. е. с учетом формул (2.11)–(2.13) будем иметь

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\varkappa_{\mu0}-\varkappa_{i0}} \begin{vmatrix} [\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [\hat a_{1,h+1}] & \dots & [\hat a_{1n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [\hat a_{l,h+1}] & \dots & [\hat a_{ln}] \\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{l+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_{h+1}}}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}e^{\lambda\omega_{\sigma_n}}[\hat b_{nn}] \end{vmatrix}_{ij}. \tag{2.19}$$

Обозначим последний определитель как Δ°_{ij}.

Оценим сверху определитель Δ°_{ij} при $|\lambda| \gg 1$. Здесь опять необходимо рассмотреть два существенно различных случая: $h \leqslant l$ и $h > l$.

а) $h \leqslant l$. Рассмотрим два подслучая: $h+1 \leqslant j \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant h$.

а.1) $h+1 \leqslant j \leqslant n$. В этом подслучае разложим определитель Δ°_{ij} по минорам первых l строк и выделим главную часть. Так как здесь $n-l-1 \leqslant n-h-1$, то главная часть есть слагаемое, которое является произведением минора l-го порядка на его алгебраическое дополнение $(n-l-1)$-го порядка с элементами, стоящими в $n-l-1$ столбцах с номерами от $l+2$ до n в случае $h+1 \leqslant j \leqslant l+1$, и с номерами от $l+1$ до $j-1$ и от $j+1$ до n в случае $l+2 \leqslant j \leqslant n$.

Следовательно, аналогично формуле (2.15) получим следующие формулы:

а.1.1) $h+1 \leqslant j \leqslant l+1$. В этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \chi_\mu - \chi_i} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \times \\ \times \Big(\det\big(\hat a_{\beta\tau}\big)_{\beta=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,j-1};\overline{j+1,l+1}} \times \det\big(\hat b_{\beta\tau}\big)_{\beta=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{l+2,n}} + O\big(1/\lambda\big)\Big).$$

Следовательно, в рассматриваемом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{l} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \right|. \tag{2.20}$$

а.1.2) $l+2 \leqslant j \leqslant n$. В этом подслучае при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \chi_\mu - \chi_i} e^{\lambda \left(\sum\limits_{\nu=l+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} \times \\ \times \Big(\det\big(\hat a_{\beta\tau}\big)_{\beta=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,l}} \times \det\big(\hat b_{\beta\tau}\big)_{\beta=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{l+1,j-1};\overline{j+1,n}} + O\big(1/\lambda\big)\Big).$$

Следовательно, в рассматриваемом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{l} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \left(\sum\limits_{\nu=l+1}^{n} \omega_{\sigma_\nu} - \omega_{\sigma_j}\right)} \right|. \tag{2.21}$$

а.2) $1 \leqslant j \leqslant h$. В этом подслучае аналогично формуле (2.15) получим следующую формулу при $|\lambda| \gg 1$:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n} \varkappa_{\mu 0} - \varkappa_{i0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \chi_\mu - \chi_i} e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \times \\ \times \Big(\det\big(\hat a_{\beta\tau}\big)_{\beta=\overline{1,l}}^{\tau=\overline{1,j-1};\overline{j+1,l+1}} \times \det\big(\hat b_{\beta\tau}\big)_{\beta=\overline{l+1,i-1};\overline{i+1,n}}^{\tau=\overline{l+2,n}} + O\big(1/\lambda\big)\Big).$$

Следовательно, в рассматриваемом подслучае при $|\lambda| \gg 1$ получим следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{l} \varkappa_{\mu 0} + \sum\limits_{\mu=l+1}^{n} \varkappa_{\mu 1} - \varkappa_{i1}} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=l+2}^{n} \omega_{\sigma_\nu}} \right|. \tag{2.22}$$

б) $h > l$. Рассмотрим два подслучая: $1 \leqslant j \leqslant h$ и $h+1 \leqslant j \leqslant n$.

б.1) $1 \leqslant j \leqslant h$. Используя формулу (2.19) и вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_{\sigma_\nu}}$ из последних $n-h$ столбцов, получим следующее представление

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\varkappa_{\mu 0}-\varkappa_{i0}} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}} \times$$

$$\times \left|\begin{matrix} [\hat a_{11}] & \dots & [\hat a_{1h}] & [0] & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{l1}] & \dots & [\hat a_{lh}] & [0] & \dots & [0] \\ [\hat a_{l+1,1}] & \dots & [\hat a_{l+1,h}] & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{l+1}}[\hat b_{l+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{s_\gamma+1,1}] & \dots & [\hat a_{s_\gamma+1,h}] & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_\gamma+1}}[\hat b_{s_\gamma+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{h+1,1}] & \dots & [\hat a_{h+1,h}] & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{h+1}}[\hat b_{h+1,n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{s_{\gamma+1},1}] & \dots & [\hat a_{s_{\gamma+1},h}] & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_{s_{\gamma+1}}}[\hat b_{s_{\gamma+1},n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [\hat a_{n1}] & \dots & [\hat a_{nh}] & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{n,h+1}] & \dots & \lambda^{\chi_n}[\hat b_{nn}] \end{matrix}\right|_{ij}.$$

Обозначим последний определитель как $\mathcal{D}_{ij}$, разложим его по минорам первых $h-1$ столбцов и выделим главную часть. Вид главной части зависит от соотношений между числами i, $h+1$, s_γ и $s_{\gamma+1}$. С учетом (1.8) имеем неравенства $s_\gamma+1 \leqslant h+1 \leqslant s_{\gamma+1}$. Возможны следующие подслучаи:

б.1.а) $l+1 \leqslant i < h+1$;

б.1.б) $h+1 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, подслучай б.1.а). В этом подслучае главная часть $\mathcal{D}_{ij}$ состоит из слагаемых, которые суть произведения миноров первых $h-1$ столбцов на их алгебраические дополнения $(n-h)$-го порядка и таковы, что образованы элементами, стоящими в последних $n-h$ столбцах и любых $n-h$ строках с номерами из диапазона $\overline{s_{\gamma+1}+1,n}$ в обязательном порядке и любыми $s_{\gamma+1}-h$ строками из диапазона $\overline{s_\gamma+1,s_{\gamma+1}}$. Все эти слагаемые имеют один и тот же наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-h)\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \dots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\mu=h+1}^{n}\chi_\mu.$$

Сворачивая только слагаемые главной части обратно в определитель $(n-1)$-го порядка, получим

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\varkappa_{\mu 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\chi_\mu} e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}[(\hat A)_{ij}].$$

Следовательно, в подслучае б.1.а) при $|\lambda| \gg 1$ имеем следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu 1}} \left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \tag{2.23}$$

В подслучае б.1.б) аналогично получим оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h-1}\varkappa_{\mu 0}+\sum\limits_{\mu=h}^{n}\varkappa_{\mu 1}-\varkappa_{i1}} \left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \tag{2.24}$$

б.2) $h+1 \leqslant j \leqslant n$. Вынося экспоненты $e^{\lambda\omega_{\sigma_\nu}}$ из последних $n-h-1$ столбцов в (2.19) с номерами от $h+1$ до $j-1$ и от $j+1$ до n, получим следующее представление:

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\varkappa_{\mu 0}-\varkappa_{i0}} e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}-\omega_{\sigma_j}\right)}\mathcal{D}_{ij}.$$

Разложим теперь определитель $\mathcal{D}_{ij}$ по минорам первых h столбцов и выделим главную часть. Ее вид зависит от соотношения величин i, $h+2$, $s_{\gamma+1}$. Ввиду (1.8) имеем неравенства $s_\gamma+2 \leqslant h+2 \leqslant s_{\gamma+1}+1$. Возможны только следующие подслучаи:

б.2.а) $l+1 \leqslant i < h+2$;
б.2.б) $h+2 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим подробно, например, подслучай б.2.а). В этом подслучае главная часть $\mathcal{D}_{ij}$ состоит из слагаемых, которые являются произведениями миноров первых h столбцов на их алгебраические дополнения $(n-h-1)$-го порядка, состоящие из элементов, стоящих в любых $n-h-1$ строках с обязательными номерами из всего диапазона $\overline{s_{\gamma+1}+1, n}$ и любыми $s_{\gamma+1}-h-1$ строками из диапазона $\overline{s_\gamma+1, s_{\gamma+1}}$. Все эти слагаемые имеют наибольший порядок по λ, равный

$$(s_{\gamma+1}-(h-1))\chi_{s_{\gamma+1}} + (s_{\gamma+2}-s_{\gamma+1})\chi_{s_{\gamma+2}} + \cdots + (s_{r+1}-s_r)\chi_{r+1} = \sum_{\sigma=h+2}^{n} \chi_\sigma.$$

Сворачивая только члены главной части обратно в определитель $(n-1)$-го порядка, получим

$$\Delta_{ij}(\lambda) = \lambda^{\sum\limits_{\mu=1}^{n}\varkappa_{\mu0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+2}^{n}\chi_\mu} e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}-\omega_{\sigma_j}\right)}[\hat{A}_{ij}].$$

Таким образом, в подслучае б.2.а) при $|\lambda| \gg 1$ будем иметь следующую оценку сверху:

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h+1}\varkappa_{\mu0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+2}^{n}\varkappa_{\mu1}} \left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}-\omega_{\sigma_j}\right)}\right|. \tag{2.25}$$

В подслучае б.2.б) аналогичным образом получим при $|\lambda| \gg 1$ оценку

$$|\Delta_{ij}(\lambda)| \leqslant C(\upsilon)|\lambda|^{\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu1}-\varkappa_{i1}} \left|e^{\lambda\left(\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}-\omega_{\sigma_j}\right)}\right|. \tag{2.26}$$

Воспользуемся полученными оценками для $|\Delta_{ij}(\lambda)|$ в (2.18). Как и перед этим, опять рассмотрим два существенно различных случая: $h \leqslant l$ и $h > l$.

а) $h \leqslant l$. Используя оценки (2.20)–(2.22) в (2.18), получим

$$\Delta_i(\lambda) = O\Bigg(|\lambda|^{k-1+\sum\limits_{\mu=1}^{l}\varkappa_{\mu0}+\sum\limits_{\mu=l+1}^{n}\varkappa_{\mu1}-\varkappa_{i1}} \left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right| \Bigg(\sum_{j=1}^{h}\left|e^{-\lambda\omega_{\sigma_{l+1}}}\right| \left|\int_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}\,d\xi\right| +$$
$$+\sum_{j=h+1}^{l+1}\left|e^{\lambda(\omega_{\sigma_j}-\omega_{\sigma_{l+1}})}\right| \left|\int_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}\,d\xi\right| + \sum_{j=l+2}^{n}\left|\int_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}\,d\xi\right|\Bigg)\Bigg). \tag{2.27}$$

Оценим интеграл $\int\limits_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}[1]\,d\xi$ при $j=\overline{1,h}$. Предположим $\lambda = re^{i(\psi+\upsilon)}$, где $\psi \in [-\varepsilon,\varepsilon]$. Из (1.6) следует, что $\pi/2+\delta \leqslant \upsilon+\psi_{\sigma_j} \leqslant 3\pi/2-\delta$ для достаточно малых $\delta(=\delta(\upsilon)) \in (0,\pi/2)$ и

$$r_{\sigma_1}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_1}) < \cdots < r_{\sigma_h}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_h}) < 0.$$

Следовательно, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < \delta)$ будем иметь при $j=\overline{1,h}$

$$r_{\sigma_j}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_j}+\psi) < r_{\sigma_h}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_h}+\psi) \leqslant$$
$$\leqslant r_{\sigma_h}\cos(\pi/2+\delta-\varepsilon) = -r_{\sigma_h}\sin(\delta-\varepsilon) \leqslant (-2/\pi)r_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon).$$

Используя эти оценки и неравенство Коши—Буняковского, получим при $j=\overline{1,h}$ и $|\lambda|\gg 1$

$$\left|\int_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}[1]\,d\xi\right|\leqslant 2\int_0^1 |h_k(\xi,\lambda)|e^{rr_{\sigma_j}\cos(\upsilon+\psi_{\sigma_j}+\psi)\xi}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^1 |h_k(\xi,\lambda)|e^{-\frac{2}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)\xi}\,d\xi\leqslant 2\|h_k(\cdot,\lambda)\|_2\left(\int_0^1 e^{-\frac{4}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)\xi}\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant C(h(\cdot))\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)}}\left(1-e^{-\frac{4}{\pi}rr_{\sigma_h}(\delta-\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}},\quad (2.28)$$

где $\|\cdot\|_2:=\|\cdot\|_{L_2[0,1]}$.

Подобным образом получим при $j=\overline{h+1,n}$ и $|\lambda|\gg 1$

$$\left|\int_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}[1]\,d\xi\right|\leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}. \quad (2.29)$$

Используя оценки (2.28)-(2.29) в (2.27), в итоге будем иметь при $1\leqslant i\leqslant h$ и $|\lambda|\gg 1$

$$|\Delta_i(\lambda)|\leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\sigma=1}^{l}\varkappa_{\mu 0}+\sum\limits_{\mu=l+1}^{n}\varkappa_{\mu 1}-\varkappa_{i0}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=l+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \quad (2.30)$$

б) $h>l$. Здесь нужно рассмотреть два подслучая: $l+1\leqslant i\leqslant h$, and $h+1\leqslant i\leqslant n$.

б$_1$) $l+1\leqslant i\leqslant h$. Используя оценки (2.23), (2.25), из (2.18) получим при $|\lambda|\gg 1$

$$\Delta_i(\lambda)=O\Bigg(|\lambda|^{k-1+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu 1}}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{h}\left|\int_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}\xi}\,d\xi\right|+|\lambda|^{-\chi_{h+1}}\sum_{j=h+1}^{n}\left|\int_0^1 h_k(\xi,\lambda)e^{\lambda\omega_{\sigma_j}(\xi-1)}\,d\xi\right|\right)\Bigg).$$

Опять учитывая для интегралов оценки (2.28)-(2.29), получим следующие оценки для этого подслучая при $|\lambda|\gg 1$:

$$|\Delta_i(\lambda)|\leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu 0}-\varkappa_{i0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu 1}-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \quad (2.31)$$

б$_2$) $h+1\leqslant i\leqslant n$. Рассуждая так же, как и перед этим, из (2.24)–(2.26) получим в этом подслучае при $|\lambda|\gg 1$

$$|\Delta_i(\lambda)|\leqslant C(\varepsilon,\upsilon,h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu 0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu 1}-\varkappa_{i1}+[\chi_h]_+}\left|e^{\lambda\sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}}\right|. \quad (2.32)$$

Так как в подслучае $l+1\leqslant i\leqslant h$ при условии $\chi_{h+1}\geqslant 0$ справедливы неравенства $-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+\leqslant-\varkappa_{i0}$, а при условии $\chi_{h+1}<0$ имеем неравенства $-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+\leqslant-\varkappa_{i1}$ (так как $-\chi_{h+1}\leqslant-\chi_i$), то при $l+1\leqslant i\leqslant h$ в целом получим

$$-\varkappa_{i0}+[-\chi_{h+1}]_+\leqslant-\varkappa_i. \quad (2.33)$$

Аналогично, если $h+1\leqslant i\leqslant n$, получим неравенства

$$-\varkappa_{i1}+[\chi_h]_+\leqslant-\varkappa_i. \quad (2.34)$$

Учитывая (2.33) в (2.31), а (2.34) в (2.32), в результате получим следующие оценки для всего случая б) при $|\lambda| \gg 1$:

$$|\Delta_i(\lambda)| \leqslant C(\varepsilon, \upsilon, h(\cdot))|\lambda|^{k-\frac{3}{2}+\sum\limits_{\mu=1}^{h}\varkappa_{\mu 0}+\sum\limits_{\mu=h+1}^{n}\varkappa_{\mu 1}-\varkappa_i} \left| e^{\lambda \sum\limits_{\nu=h+1}^{n}\omega_{\sigma_\nu}} \right|. \tag{2.35}$$

Следовательно, если $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ и $|\lambda| \gg 1$, в итоге получим оценки (2.10):

1.а) при выполнении предположения 3°(а) из оценок (2.16), (2.30) и формул (2.9);

1.б) при выполнении предположения 3°(б) из оценок (2.17), (2.35) и формул (2.9).

2) Пусть теперь $\lambda \in \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon}$. Если мы сделаем замену $\hat{\lambda} = -\lambda$, обозначим $\hat{h} = n - h$, $\hat{\gamma} = \delta$, $\hat{\omega}_{\sigma_\nu} = \omega_{\sigma_{n+1-\nu}}$ при $\nu = \overline{1,n}$, $\hat{a}_{ij} = a_{i,n+1-j}$, $\hat{b}_{ij} = b_{i,n+1-j}$ при $i, j = \overline{1,n}$, воспользуемся уже полученными неравенствами (2.10) (при $\lambda \in \Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$) для параметров с крышками и затем вернемся от параметров с крышками к исходным параметрам, получим оценки (2.10) также и в случае $\lambda \in \Pi^-_{\varepsilon,\upsilon}$ при $|\lambda| \gg 1$ при выполнении условий 3°(в) и 3°(г).

Следовательно, лемма 2.4 доказана. □

3. Доказательство теорем полноты

В доказательстве теорем полноты используются следующие леммы.

Лемма 3.1. *Пусть выполняются предположения* 1°–3° *и вектор-функция* $\bar{h} := (\bar{h}_1, \dots \bar{h}_k)^T \in L_2^k[0,1]$ *ортогональна всем производным* k*-цепочкам* (2.6). *Тогда при дополнительном условии ортогональности* $\bar{h}$ *некоторому конечному набору из* $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [k-1-\varkappa_i]_+$ *вектор-функций справедливо тождество*

$$\int\limits_0^1 y(x,\lambda)\mathfrak{h}_k(x,\lambda)\,dx \equiv 0 \tag{3.1}$$

для любого решения $y(x,\lambda)$ *уравнения* $\ell_0(y,\lambda) = 0$ *в случае* $l = 0$ *или для любого решения уравнения* $\ell_0(y,\lambda) = 0$, *удовлетворяющего первым* l *краевым условия* (1.4) *в конце* 0, *в случае* $1 \leqslant l \leqslant n-1$, *где* $\mathfrak{h}_k(x,\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda^{j-1} h_j(x)$.

Доказательство. Пусть $\bar{h} \in L_2^k[0,1]$ и ортогональна всем производным k-цепочкам (2.6). Тогда в силу (2.7)–(2.9) все особенности мероморфных функций $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$, $i = \overline{l+1,n}$, устранимы и они являются целыми функциями. Согласно оценкам (2.10) и принципу Фрагмена—Линделефа функции $\tilde{\Theta}_i(\lambda)$ суть полиномы степени $k-2-\varkappa_i$ при $k-2-\varkappa_i \geqslant 0$, которые можно записать в виде

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv \lambda^{k-2-\varkappa_i}(\bar{h}, \zeta_{i0}) + \lambda^{k-3-\varkappa_i}(\bar{h}, \zeta_{i1}) + \dots + (\bar{h}, \zeta_{i,k-2-\varkappa_i}),$$

где $\zeta_{i\nu} \in L_2^k[0,1]$ суть вполне определенные вектор-функции, а при $k-2-\varkappa_i < 0$ справедливы тождества

$$\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0.$$

В случае $k-2-\varkappa_i \geqslant 0$ в дефектном подпространстве производных k-цепочек выберем подпространство H_k, ортогональное вектор-функциям $\zeta_{i\nu}(x)$, $\nu = \overline{0, k-2-\varkappa_i}$, $i = \overline{l+1,n}$. Очевидно, число таких функций равно $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [k-1-\varkappa_i]_+$.

Пусть теперь $\bar{h} \in H_k$. Тогда $\tilde{\Theta}_i(\lambda) \equiv 0$, $i = \overline{l+1,n}$, и, следовательно, в силу (2.8)

$$\tilde{\Delta}_i(\lambda) = \int\limits_0^1 \tilde{\Phi}_i(x,\lambda)\mathfrak{h}_k(x,\lambda)\,dx \equiv 0, \quad i = \overline{l+1,n}.$$

Далее, в случае $l = 0$ по лемме 2.2 система функций $\tilde{\Phi}_1, \dots, \tilde{\Phi}_n$ является системой линейно независимых решений уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$ и, следовательно, тождество (3.1) выполняется для любого решения уравнения $l_0(y,\lambda) = 0$.

В случае же $1 \leqslant l \leqslant n-1$ в силу той же леммы 2.2 система функций $\tilde{\Phi}_{l+1}, \dots, \tilde{\Phi}_n$ является системой линейно независимых решений уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющих краевым условиям (1.4) при $i = \overline{1,l}$. Отсюда следует утверждение (3.1) доказываемой леммы и в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$. Лемма доказана. □

Пусть $1 \leqslant l \leqslant n-1$. По доказанной лемме 3.1 тождества (3.1) справедливы для любого решения $y(x,\lambda)$ уравнения $\ell_0(y,\lambda) = 0$, удовлетворяющего краевым условиям (1.4) при $i = \overline{1,l}$. Ищем такое решение в виде
$$y(x,\lambda) = d_1 y_1(x,\lambda) + d_2 y_2(x,\lambda) + \dots + d_n y_n(x,\lambda), \tag{3.2}$$
где $d_1, d_2, \dots, d_n$ — пока неизвестные параметры.

Удовлетворяя (3.2) краевым условиям (1.4) при $i = \overline{1,l}$, получим для нахождения неизвестных следующую линейную алгебраическую систему:
$$\sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) d_\mu = 0, \quad i = \overline{1,l}, \tag{3.3}$$
где
$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) = \lambda^{-\varkappa_{i0}} \sum_{j+s \leqslant \varkappa_{i0}} \lambda^s \alpha_{ijs} y_\mu^{(j)}(0,\lambda), \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n}.$$

С учетом соотношений (2.2) будем иметь следующие асимптотические формулы при $|\lambda| \gg 1$
$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) \equiv w_\mu(0)[c^\circ_{i\mu}], \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n},$$
где $c^\circ_{i\mu}$ определяются формулами (1.10).

В случае выполнения предположений 4°-5° будут иметь место точные формулы
$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) \equiv c^\circ_{i\mu}, \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n}.$$

Если же выполняется только предположение 4°, то будем иметь формулы
$$\mathfrak{c}_{i\mu}(\lambda) \equiv c_{i\mu}(\lambda), \quad i = \overline{1,l},\ \mu = \overline{1,n},$$
где $c_{i\mu}(\lambda)$ определяются формулами (1.9).

Если система (1.13) полного ранга (т. е. максимально возможного), то нетрудно установить, что система (3.3) при $|\lambda| \gg 1$ имеет базис пространства решений $\big(\mathfrak{d}_{s1}(\lambda), \mathfrak{d}_{s2}(\lambda), \dots, \mathfrak{d}_{sn}(\lambda)\big)^T$, $s = \overline{1, n-l}$, такой, что
$$\mathfrak{d}_{i\mu}(\lambda) \equiv \frac{1}{w_\mu(0)}[d^\circ_{s\mu}], \quad s = \overline{1,n-l},\ \mu = \overline{1,n}, \tag{3.4}$$
где $d^\circ_{s\mu}$ были ранее определены в подразделе 1.3.

В случае выполнения предположений 4°-5° будут иметь место точные формулы
$$\mathfrak{d}_{i\mu}(\lambda) \equiv d^\circ_{s\mu}, \quad s = \overline{1,n-l},\ \mu = \overline{1,n}. \tag{3.5}$$

Если же выполняется только предположение 4°, то будут справедливы тождества
$$\mathfrak{d}_{i\mu}(\lambda) \equiv d_{s\mu}(\lambda), \quad s = \overline{1,n-l},\ \mu = \overline{1,n}, \tag{3.6}$$
где $d_{s\mu}(\lambda)$ также уже были определены в подразделе 1.3.

Составим матрицы
$$\mathfrak{D}_j(\lambda) := \begin{pmatrix} \mathfrak{d}_{1,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \dots & \mathfrak{d}_{1,\nu_j}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{d}_{n-l,\nu_{j-1}+1}(\lambda) & \dots & \mathfrak{d}_{n-l,\nu_j}(\lambda) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,\eta}.$$

Лемма 3.2. *Пусть выполняются условия леммы* 3.1 *и* $1 \leqslant l \leqslant n-1$. *Тогда имеют место тождества*
$$\sum_{\mu=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} \mathfrak{d}_{s\mu}(\lambda) Y_\mu(\lambda) \equiv 0, \quad s = \overline{1,n-l},\ j = \overline{1,\eta}, \tag{3.7}$$
где $Y_\mu(\lambda) := \int\limits_0^1 y_\mu(x,\lambda) \mathfrak{h}_k(x,\lambda)\, dx$, $\mu = \overline{1,n}$.

Доказательство. На основании леммы 3.1 в случае $1 \leqslant l \leqslant n-1$ справедливо тождество (3.1) для любого решения уравнения $\ell_0(y,\lambda)=0$, удовлетворяющего краевым условия (1.4) при $i=\overline{1,l}$. В частности, в качестве таких решений можно брать функции (3.2), где вектор $(d_1,d_2,\dots,d_n)^T$ есть вектор базиса пространства решений системы (3.3). В результате из (3.1) и (3.2) получим тождества

$$\sum_{\mu=1}^{n} \mathfrak{d}_{s\mu}(\lambda)Y_\mu(\lambda) \equiv 0, \quad s=\overline{1,n-l}. \tag{3.8}$$

Используя теперь предположение 2° и соотношения (1.5), на основе теории роста целых функций из (3.8) получим утверждение (3.7) доказываемой леммы. Лемма доказана. □

3.1. Доказательство теорем 1.1, 1.2 и 1.3.

Лемма 3.3. *При выполнении условий леммы* 3.1 *и теорем* 1.1, 1.2, 1.3 *при* $|\lambda| \gg 1$ *справедливы тождества*

$$Y_\mu(\lambda) \equiv 0, \quad \mu=\overline{1,n}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Если $l=0$, в случае выполнения условий теоремы 1.1 и леммы 3.1 доказываемое утверждение следует непосредственно из леммы 3.1.

Пусть теперь $1 \leqslant l \leqslant n-1$, выполняются предположения теоремы 1.2 и условия леммы 3.1. В этом случае при фиксированном $j=\overline{1,\eta}$ имеем в силу (3.4) при $|\lambda| \gg 1$

$$\operatorname{rank}\mathfrak{D}_j(\lambda)=\operatorname{rank}D_j^\circ=\nu_j-\nu_{j-1}.$$

Но тогда утверждение (3.9) доказываемой леммы в этом случае с очевидностью вытекает из утверждения леммы 3.2.

Если же $1 \leqslant l \leqslant n-1$, выполняются предположения теоремы 1.3 и условия леммы 3.1, то при фиксированном $j=\overline{1,\eta}$ будем иметь в силу (3.6)

$$\operatorname{rank}\mathfrak{D}_j(\lambda)=\operatorname{rank}D_j(\lambda)=\nu_j-\nu_{j-1}.$$

Отсюда, как и перед этим, получаем утверждение (3.9) доказываемой леммы и в этом случае. Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *При выполнении условий леммы* 3.1 *и теорем* 1.1, 1.2, 1.3 *справедливо равенство* $\bar h(x)=0$ *для п.в.* $x\in[0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\ell_0^*(z,\lambda)=\bar{\mathfrak{h}}_n(x,\lambda), \quad z(0)=\dots=z^{(n-1)}(0)=0, \tag{3.10}$$

где $\ell_0^*(z,\lambda)$ есть сопряженное д.в. к $\ell_0(y,\lambda)$. Хорошо известно, что решение задачи (3.10) есть целая функция по $\bar\lambda$, для которой справедливо следующее представление при $|\lambda| \gg 1$:

$$z(x,\lambda)=\int_0^x \sum_{j=1}^{n} z_j(x,\lambda)\bar y_j(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi,$$

где $z_j(x,\lambda)$ суть решения уравнения $\ell_0^*(z,\lambda)=0$ вида

$$z_j(x,\lambda)=\frac{\bar\Omega_{nj}}{\bar\lambda^{n-1}\bar\Omega}e^{-\bar\lambda\bar\omega_i x}, \quad j=\overline{1,n}, \tag{3.11}$$

Ω есть определитель Вандермонда чисел $\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_n$, а Ω_{nj} есть алгебраическое дополнение элемента ω_j^{n-1} в определителе Ω.

При $\lambda\in\Pi^+_{\varepsilon,\upsilon}$ имеем

$$z(x,\lambda)=\int_0^1 \sum_{j=1}^{n} z_j(x,\lambda)\bar y_j(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi+$$
$$+\int_0^x \sum_{j=h+1}^{n} z_{\sigma_j}(x,\lambda)\bar y_{\sigma_j}(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi-\int_x^1 \sum_{j=1}^{h} z_{\sigma_j}(x,\lambda)\bar y_{\sigma_j}(\xi,\lambda)\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda)\,d\xi.$$

Из леммы 3.3, соотношений (1.6) и формул (3.11) получим оценку $|z(x,\lambda)| \leqslant C$ при $\lambda \in \Pi^{+}_{\varepsilon,\upsilon}$.

Подобным образом можно получить аналогичную оценку и для $\lambda \in \Pi^{-}_{\varepsilon,\upsilon}$.

Тогда по теореме Лиувилля будем иметь $z(x,\lambda) \equiv C$. Но ввиду нулевых начальных условий (3.10) отсюда получим $z(x,\lambda) \equiv 0$. Учитывая это в дифференциальном уравнении (3.10), найдем

$$\bar{\mathfrak{h}}_n(\xi,\lambda) \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \bar{\lambda}^{\nu-1}\bar{h}_\nu(x) = 0 \text{ для п.в. } x \in [0,1].$$

Отсюда следует, что $\bar{h}_\nu = 0$, $\nu = \overline{1,n}$, или $\bar{h}(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Лемма доказана. □

Из доказанной леммы следуют утверждения теорем 1.1, 1.2 и 1.3. При этом в случае, если хотя бы для одного краевого условия его порядок будет больше $n-1$, будем иметь возможный конечный дефект системы к.ф., не превышающий числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [n-1-\varkappa_i]_+$. Если же $\varkappa_{i0}, \varkappa_{i1} \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ для всех краевых условий в (1.4), то в этом случае дефект системы к.ф. рассматриваемого пучка будет равен нулю, так как в этом случае этот пучок можно линеаризовать в пространстве $L_2^n[0,1]$ и воспользоваться утверждением леммы 2.1 из [2, с. 49].

Теоремы 1.1, 1.2 и 1.3 тем самым доказаны.

3.2. Доказательство теоремы 1.4. Доказательство теоремы проведем для случая $k = m^\circ$ (случай $k < m^\circ$ рассматривается аналогично; изменится только возможный конечный дефект — вместо числа $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [m^\circ - 1 - \varkappa_i]_+$ будет число $\sum\limits_{i=l+1}^{n} [k - 1 - \varkappa_i]_+$). Схема доказательства повторяет схему доказательства теорем 1.1, 1.2 и 1.3 до леммы 3.2 включительно. Далее следуем схеме доказательства [1, 7].

Так как в рассматриваемом случае краевые условия (1.4) при $i = \overline{1,l}$ однородны, то, как уже отмечалось ранее, матрицы $\mathfrak{D}_j(\lambda)$ не зависят от λ и $\mathfrak{D}_j(\lambda) \equiv D_j^\circ$ (см. (3.5)). Обозначим

$$\operatorname{rank} D_j^\circ = \theta_j - \theta_{j-1}, \quad j = \overline{1,\eta},\ \theta_0 = 0,\ \theta_\eta = m^\circ.$$

Не нарушая общности, можно считать, что при фиксированном $j = \overline{1,\eta}$ в каждой группе из $n-l$ соотношений (3.7) линейно независимыми являются первые $\theta_j - \theta_{j-1}$ соотношений.

Обозначим

$$\hat{d}_{\theta_{j-1}+i,\mu} = d^\circ_{i\mu}, \quad \mu = \overline{\nu_{j-1}+1,\nu_j},\ i = \overline{1,\theta_j - \theta_{j-1}},\ j = \overline{1,\eta}.$$

Тогда соотношения (3.7) будут эквивалентны соотношениям

$$\sum_{\mu=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} \hat{d}_{i\mu} Y_\mu(\lambda) \equiv 0, \quad i = \overline{\theta_{j-1}+1,\theta_j},\ j = \overline{1,\eta}. \tag{3.12}$$

Покажем, что из (3.12) следует $\bar{h}_j(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, $j = \overline{1,m^\circ}$. Для этого разложим $\exp(\lambda\omega_j x)$ в ряд по степеням λ, подставим эти разложения в (3.12), выпишем и приравняем нулю коэффициенты при λ^N, где N — любое натуральное число, большее m°. Получим систему

$$\left\{ \sum_{\mu=\nu_{j-1}+1}^{\nu_j} \left(\hat{d}_{i\mu}\omega_\mu^N\right) H_1^{(N)} + \cdots + \left(\hat{d}_{i\mu}\omega_\mu^{N-m+1}\right) H_{m^\circ}^{(N)}, \quad i = \overline{\theta_{j-1}+1,\theta_j},\ j = \overline{1,\eta}, \right. \tag{3.13}$$

где

$$H_s^{(N)} = \frac{1}{(N-s+1)!} \int_0^1 h_s(x) x^{N-s+1}\, dx.$$

Очевидно, (3.13) есть линейная однородная система m° уравнений с m° неизвестными $H_1^{(N)}, H_2^{(N)}, \ldots, H_{m^\circ}^{(N)}$. Покажем, что определитель этой системы отличен от нуля. Матрицу системы можно представить следующим образом:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{1\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{1\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{1\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{\theta_1,\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{\theta_1,\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=1}^{\nu_1} \hat{d}_{\theta_1,\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{m^\circ\mu}\omega_\mu^N & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{m^\circ\mu}\omega_\mu^{N-1} & \ldots & \sum\limits_{\mu=\nu_{\eta-1}+1}^{n} \hat{d}_{m^\circ\mu}\omega_\mu^{N-m^\circ+1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{d}_{11} & \ldots & \hat{d}_{1,\nu_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ \hat{d}_{\theta_1,1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_1,\nu_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \hat{d}_{\theta_1+1,\nu_1+1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_1+1,\nu_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \hat{d}_{\theta_2,\nu_1+1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_2,\nu_2} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,\nu_{\eta-1}+1} & \ldots & \hat{d}_{\theta_{\eta-1}+1,n} \\ \ldots & & & & & & & & & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \hat{d}_{m^\circ,\nu_{\eta-1}+1} & \ldots & \hat{d}_{m^\circ n} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \omega_1^N & \ldots & \omega_1^{N-m^\circ+1} \\ \omega_2^N & \ldots & \omega_2^{N-m^\circ+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_n^N & \ldots & \omega_n^{N-m^\circ+1} \end{pmatrix} = \mathcal{B}\mathcal{C}.$$

Для нахождения определителя матрицы $\mathcal{A}$ воспользуемся формулой Бине—Коши

$$\det\mathcal{A} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix} = \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_{m^\circ}\leqslant n} \mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_{m^\circ} \end{pmatrix} \times \mathcal{C}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \ldots & k_{m^\circ} \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix}.$$

Исследуем выражение, стоящее справа. Если в $\mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1 & k_2 & \ldots & k_{m^\circ} \end{pmatrix}$ попадают два линейно зависимых столбца из одного диагонального блока матрицы $\mathcal{B}$, то этот определитель равен нулю. Обозначим через $k_1^\circ, k_2^\circ, \ldots, k_{\theta_1}^\circ$ номера линейно независимых столбцов, содержащихся в 1-м диагональном блоке матрицы $\mathcal{B}$, через $k_{\theta_1+1}^0, k_{\theta_1+2}^0, \ldots, k_{\theta_2}^0$ номера линейно независимых столбцов, содержащихся во 2-м диагональном блоке матрицы $\mathcal{B}$ и т. д., через $k_{\theta_{\eta-1}+1}^0, k_{\theta_{\eta-1}+2}^0, \ldots, k_{m^\circ}^0$ номера линейно независимых столбцов, содержащихся в η-м диагональном блоке матрицы $\mathcal{B}$. Тогда

$$\det\mathcal{A} = \mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1^\circ & k_2^\circ & \ldots & k_{m^\circ}^\circ \end{pmatrix} \times \mathcal{C}\begin{pmatrix} k_1^0 & k_2^0 & \ldots & k_{m^\circ}^0 \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix}.$$

Но, очевидно,

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m^\circ \\ k_1^\circ & k_2^\circ & \ldots & k_{m^\circ}^\circ \end{pmatrix} \neq 0,$$

так как столбцы этого определителя линейно независимы. Кроме того,

$$\mathcal{C}\begin{pmatrix} k_1^\circ & k_2^\circ & \ldots & k_{m^\circ}^\circ \\ 1 & 2 & \ldots & m^\circ \end{pmatrix} \neq 0$$

в силу предположения о простоте корней $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

Таким образом, $\det \mathcal{A} \neq 0$. Следовательно,

$$(\forall N > m^\circ) \quad \int\limits_0^1 h_s(x) x^{N-s+1}\, dx = 0, \quad s = \overline{1, m^\circ},$$

откуда в силу полноты системы степеней в $L_2[0,1]$ получим $h_s(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, $s = \overline{1, m^\circ}$. Поэтому $\bar{h}(x) = 0$ для п.в. $x \in [0,1]$, что доказывает утверждение теоремы 1.4. Тем самым теорема 1.4 доказана.

4. Заключение

В статье получены достаточные условия n-кратной и m-кратной ($1 \leqslant m \leqslant n-1$) полноты к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ вида (1.3)-(1.4) в пространстве $L_2[0,1]$, а именно, доказаны теоремы 1.1–1.4. Что будет, если предположения этих теорем не будут выполняться? В этом направлении автором также проводились исследования и получены некоторые результаты. Более подробно об этом можно узнать, например, в [8–11, 13, 15, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вагабов А.И.* Разложения в ряды Фурье по главным функциям дифференциальных операторов и их применения. — Дисс. д.ф.-м.н., Москва, 1988.
2. *Вагабов А.И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1994.
3. *Гасымов М.Г., Магеррамов А.М.* О кратной полноте системы собственных и присоединенных функций одного класса дифференциальных операторов// Докл. АН Азерб. ССР. — 1974. — *30*, № 12. — С. 9–12.
4. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*, № 1. — С. 11–14.
5. *Келдыш М.В.* О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов// Усп. мат. наук. — 1971. — *26*, № 4. — С. 15–41.
6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
7. *Рыхлов В.С.* Кратная полнота собственных функций обыкновенного дифференциального полиномиального пучка// В сб.: «Исследования по теории операторов». — Уфа: БНЦ УрО АН СССР, 1988. — С. 128–140.
8. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций квадратичных пучков обыкновенных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1992. — № 2. — С. 35–44.
9. *Рыхлов В.С.* О свойствах собственных функций обыкновенного дифференциального квадратичного пучка второго порядка// Интегр. преобраз. и специальные функции. Информ. бюллетень. — М.: Научно-исследоват. группа междун. журнала «Integral Transforms and Special Functions» и ВЦ РАН, 2001. — *2*, № 1. — С. 85–103.
10. *Рыхлов В.С.* О двукратной полноте собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов второго порядка// В сб.: «Теорія операторів, диференціальні рівняння і теорія функцій: Збірник праць Ін-ту математики НАН України». — 2009. — *6*, № 1. — С. 237–249.
11. *Рыхлов В.С.* О полноте корневых функций простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов с двучленными двухточечными краевыми условиями// Докл. РАН. — 2009. — *428*, № 6. — С. 740–743.
12. *Рыхлов В.С.* О полноте собственных функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2009. — № 6. — С. 42–53.
13. *Рыхлов В.С.* О свойствах собственных функций одного квадратичного пучка дифференциальных операторов// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2009. — *9*, № 1. — С. 31–44.
14. *Рыхлов В.С.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2010. — *10*, № 2. — С. 24–34.
15. *Рыхлов В.С.* О полноте корневых функций полиномиальных пучков обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2015. — № 1 (26). — С. 69–86.
16. *Рыхлов В.С.* Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков дифференциальных операторов// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2016. — № 1 (31). — С. 87–103.

17. *Рыхлов В. С., Блинкова О. В.* О кратной полноте корневых функций одного класса пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2014. — *14*, № 4, ч. 2. — С. 574–584.
18. *Рыхлов В. С., Парфилова О. В.* О кратной полноте корневых функций пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2011. — *11*, № 4. — С. 45–58.
19. *Тихомиров С. А.* Конечномерные возмущения интегральных вольтерровых операторов в пространстве вектор-функций. — Дисс. к.ф.-м.н., Саратов, 1987.
20. *Хромов А. П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов. — Дисс. д.ф.-м.н., Новосибирск, 1973.
21. *Хромов А. П.* О порождающих функциях вольтерровых операторов// Мат. сб. — 1977. — *102*, № 3. — С. 457–472.
22. *Шкаликов А. А.* О полноте собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора с нерегулярными краевыми условиями// Функц. анализ и его прилож. — 1976. — *10*, № 4. — С. 69–80.
23. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — № 9. — С. 190–229.
24. *Eberhard W.* Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme// Math. Z. — 1976. — *146*, № 3. — C. 213–221.
25. *Freiling G.* Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator büschel// Math. Z. — 1984. — *188*, № 1. — C. 55–68.
26. *Freiling G.* Über die mehrfache Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und assoziierten Funktionen irregulärer Operatorenbüschel in $L_2[0,1]$// ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 1985. — *65*, № 5. — C. 336–338.
27. *Rykhlov V. S.* Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients// Results Math. — 2015. — *68*, № 3-4. — C. 427–440. — doi: 10.1007/s00025-015-0450-6.
28. *Rykhlov V. S.* Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators// Results Math. — 2016. — C. 1–21. — doi: 10.1007/s00025-016-0599-7.

Виктор Сергеевич Рыхлов
Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
410026, г. Саратов, ул. Астраханская, 83
E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-340-361 UDC 517.927.25

On Multiple Completeness of the Root Functions of Ordinary Differential Polynomial Pencil with Constant Coefficients

© 2017 **V. S. Rykhlov**

Abstract. In the space of square integrable functions on a finite segment we consider a class of polynomial pencils of nth-order ordinary differential operators with constant coefficients and two-point boundary-value conditions (at the edges of the segment). We suppose that roots of the characteristic equation of pencils of this class are simple and nonzero. We establish sufficient conditions for m-multiple completeness ($1 \leqslant m \leqslant n$) of the system of root functions of pencils from this class in the space of square integrable functions on this segment.

REFERENCES

1. A. I. Vagabov, *Razlozheniya v ryady Fur'e po glavnym funktsiyam differentsial'nykh operatorov i ikh primeneniya* [Expansions into Fourier Series with Respect to Main Functions of Differential Operators and Their Applications], PhD Thesis, Moscow, 1988 (in Russian).
2. A. I. Vagabov, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators], Izd-vo Rost. un-ta, Rostov-na-Donu, 1994 (in Russian).
3. M. G. Gasymov and A. M. Magerramov, "O kratnoy polnote sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy odnogo klassa differentsial'nykh operatorov" [On multiple completeness of a system of eigenfunctions and adjoined functions of one class of differential operators], *Dokl. AN Azerb. SSR* [Rep. Acad. Sci. Azerbaijan SSR], 1974, **30**, No. 12, 9–12 (in Russian).
4. M. V. Keldysh, "O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh uravneniy" [On eigenvalues and eigenfunctions of some classes of nonself-adjoint equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, No. 1, 11–14 (in Russian).
5. M. V. Keldysh, "O polnote sobstvennykh funktsiy nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh lineynykh operatorov" [On completeness of eigenfunctions of some classes of nonself-adjoint linear operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 15–41 (in Russian).
6. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
7. V. S. Rykhlov, "Kratnaya polnota sobstvennykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo polinomial'nogo puchka" [Multiple completeness of eigenfunctions of ordinary differential polynomial pencil], In: *"Issledovaniya po teorii operatorov"* [Investigations in the Theory of Operators], BNTs UrO AN SSSR, Ufa, 1988, 128–140 (in Russian).
8. V. S. Rykhlov, "O polnote sobstvennykh funktsiy kvadratichnykh puchkov obyknovennykh differentsial'nykh operatorov" [On completeness of eigenfunctions of quadratic pencils of ordinary differential operators], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1992, No. 2, 35–44 (in Russian).
9. V. S. Rykhlov, "O svoystvakh sobstvennykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo kvadratichnogo puchka vtorogo poryadka" [On properties of eigenfunctions of ordinary differential quadratic pencil of second order], *Integr. preobraz. i spetsial'nye funktsii. Inform. byulleten'* [Integr. Transforms and Special Functions: Inform. Bull.], Nauchno-issledovat. gruppa mezhdun. zhurnala *Integral Transforms and Special Functions* i VTs RAN [Research group of Int. J. *Integral Transforms and Special Functions* and Comput. Center Russ. Acad. Sci.], Moscow, 2001, **2**, No. 1, 85–103 (in Russian).
10. V. S. Rykhlov, "O dvukratnoy polnote sobstvennykh funktsiy odnogo kvadratichnogo puchka differentsial'nykh operatorov vtorogo poryadka" [On double completeness of eigenfunctions of one quadratic pencil of second-order differential operators], In: *Teoriya operatoriv, diferentsial'ni rivnyannya i teoriya funktsiy: Zbirnik prats' In-tu matematiki NAN Ukraini* [Oper. Theory, Diff. Equ., and Function Theory: Proc. Math. Inst. Acad. Sci. Ukraine], 2009, **6**, No. 1, 237–249 (in Russian).
11. V. S. Rykhlov, "O polnote kornevykh funktsiy prosteyshikh sil'no neregulyarnykh differentsial'nykh operatorov s dvuchlennymi dvukhtochechnymi kraevymi usloviyami" [On completeness of root functions of simplest strongly irregular differential operators with two-term, two-point boundary-value conditions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **428**, No. 6, 740–743 (in Russian).
12. V. S. Rykhlov, "O polnote sobstvennykh funktsiy odnogo klassa puchkov differentsial'nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On completeness of eigenfunctions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2009, No. 6, 42–53 (in Russian).
13. V. S. Rykhlov, "O svoystvakh sobstvennykh funktsiy odnogo kvadratichnogo puchka differentsial'nykh operatorov" [On properties of eigenfunctions of one quadratic pencil of differential operators], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2009, **9**, No. 1, 31–44 (in Russian).
14. V. S. Rykhlov, "O kratnoy polnote kornevykh funktsiy odnogo klassa puchkov differentsial'nykh operatorov" [On multiple completeness of root functions of one class of pencils of differential operators], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2010, **10**, No. 2, 24–34 (in Russian).
15. V. S. Rykhlov, "O polnote kornevykh funktsiy polinomial'nykh puchkov obyknovennykh differentsial'nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On completeness of root functions of polynomial pencils of

ordinary differential operators with constant coefficients], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2015, No. 1 (26), 69–86 (in Russian).
16. V. S. Rykhlov, "Kratnaya polnota kornevykh funktsiy nekotorykh neregulyarnykh puchkov differentsial'nykh operatorov" [Multiple completeness of root functions of some irregular pencils of differential operators], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2016, No. 1 (31), 87–103 (in Russian).
17. V. S. Rykhlov and O. V. Blinkova, "O kratnoy polnote kornevykh funktsiy odnogo klassa puchkov differentsial'nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On multiple completeness of root functions of one class of pencils of differential operators with constant coefficients], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2014, **14**, No. 4, ch. 2, 574–584 (in Russian).
18. V. S. Rykhlov and O. V. Parfilova, "O kratnoy polnote kornevykh funktsiy puchkov differentsial'nykh operatorov s postoyannymi koeffitsientami" [On multiple completeness of root functions of pencils of differential operators with constant coefficients], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inform.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inform.], 2011, **11**, No. 4, 45–58 (in Russian).
19. S. A. Tikhomirov, *Konechnomernye vozmushcheniya integral'nykh vol'terrovykh operatorov v prostranstve vektor-funktsiy* [Finite-Dimensional Perturbations of Integral Volterra Operators in the Space of Vector Functions], PhD Thesis, Saratov, 1987 (in Russian).
20. A. P. Khromov, *Konechnomernye vozmushcheniya vol'terrovykh operatorov* [Finite-Dimensional Perturbations of Volterra Operators], Doctoral Thesis, Novosibirsk, 1973 (in Russian).
21. A. P. Khromov, "O porozhdayushchikh funktsiyakh vol'terrovykh operatorov" [On generating functions of Volterra operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1977, **102**, No. 3, 457–472 (in Russian).
22. A. A. Shkalikov, "O polnote sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo operatora s neregulyarnymi kraevymi usloviyami" [On completeness of eigenfunctions and adjoined functions of ordinary differential operators with irregular boundary-value conditions], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1976, **10**, No. 4, 69–80 (in Russian).
23. A. A. Shkalikov, "Kraevye zadachi dlya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s parametrom v granichnykh usloviyakh" [Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in boundary-value conditions], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, No. 9, 190–229 (in Russian).
24. W. Eberhard, "Zur Vollständigkeit des Biorthogonalsystems von Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme," *Math. Z.* , 1976, **146**, No. 3, 213–221.
25. G. Freiling, "Zur Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und Hauptfunktionen irregulärer Operator büschel," *Math. Z.*, 1984, **188**, No. 1, 55–68.
26. G. Freiling, "Über die mehrfache Vollständigkeit des Systems der Eigenfunktionen und assoziierten Funktionen irregulärer Operatorenbüschel in $L_2[0,1]$," *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 1985, **65**, No. 5, 336–338.
27. V. S. Rykhlov, "Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators with constant coefficients," *Results Math.*, 2015, **68**, No. 3-4, 427–440, `doi: 10.1007/s00025-015-0450-6`.
28. V. S. Rykhlov, "Multiple completeness of the root functions for a certain class of pencils of ordinary differential operators," *Results Math.*, 2016, 1–21, `doi: 10.1007/s00025-016-0599-7`.

V. S. Rykhlov
Chernyshevskii Saratov National Research State University
83 Astrahanskaya st., 410026 Saratov, Russia
E-mail: RykhlovVS@yandex.ru