Современная математика. Фундаментальные направления. Том 63, № 2 (2017). С. 316–339

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-316-339 УДК 517.95+517.98

СПЕКТРАЛЬНЫЕ И НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

© 2017 г. **К. А. РАДОМИРСКАЯ**

Аннотация. На базе уже рассмотренного ранее подхода (см. [18]) к абстрактным краевым задачам сопряжения разобраны спектральные задачи сопряжения для одной и двух областей. Подробно изучен возникший операторный пучок с самосопряженными операторными коэффициентами, действующий в гильбертовом пространстве и зависящий от двух параметров. Рассматривается оба возможных случая, когда один из параметров спектральный, а другой является фиксированным, в зависимости от этого выведены свойства решений. Также изучены начально-краевые задачи математической физики, порождающие задачи сопряжения. Получены теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Данная работа является продолжением изучения смешанных краевых задач сопряжения на базе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа. В предыдущей статье [18] был разработан общий подход к изучению смешанных краевых задач сопряжения. С помощью этого подхода разобраны также спектральные задачи сопряжения и получена спектральная проблема для соответствующего операторного пучка. В данной статье рассмотрены свойства решений этого пучка в зависимости от параметров задачи.

В первом разделе изучаются спектральные проблемы для смешанных краевых задач в одной и двух примыкающих областях. Установлено, что в обоих случаях исходные спектральные проблемы математической физики приводятся к исследованию одного и того же операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами. Пучок зависит от двух комплексных параметров λ и μ, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным.

Во втором разделе рассматриваются свойства решений операторного пучка в двух случаях, когда параметр μ — спектральный, а λ — фиксированный, и наоборот. Доказаны теоремы о структуре спектра и базисности системы собственных и присоединенных элементов.

В третьем разделе исследованы начально-краевые задачи математической физики, порождающие изученные спектральные проблемы. Получены теоремы о существовании и единственности сильного решения со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве.

©Российский университет дружбы народов, 2017

1. Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами и задачами сопряжения

1.1. Смешанная спектральная задача в одной области. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$, рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \ (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \tag{1.1}$$

$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u =: \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u =: \psi_3 \ (\text{на } \Gamma_3), \tag{1.2}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u =: \psi_4 \ (\text{на } \Gamma_4), \quad \partial_k u := (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k}. \tag{1.3}$$

Здесь на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 — условие М. С. Аграновича (см. [29]) или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_3 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_4 — условие типа С. Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжелой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а другой — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [29]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В. И. Горбачук (см. [11]).

Задачу (1.1)–(1.3) будем исследовать с помощью общего подхода, который рассматривался в предыдущей работе (см. [18]). По этой схеме будем использовать одну так называемую первую вспомогательную задачу С. Крейна и три вторых вспомогательных задач С. Крейна (см. ниже (1.5)–(1.8)).

В силу однородного условия Дирихле на Γ_1, слабое решение задачи (1.1)–(1.3) естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1)\}.$$

Решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ будем искать в виде суммы решений четырех задач, т. е.

$$u = \sum_{k=1}^{4} u_k, \ u_k \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{1.4}$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$\begin{gathered} u_1 - \triangle u_1 = f := \lambda u \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \partial_2 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} u_2 - \triangle u_2 = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu\gamma_2 u \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} u_3 - \triangle u_3 = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda\gamma_3 u \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered} u_4 - \triangle u_4 = 0 \ (\text{в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1}\gamma_4 u \ (\text{на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Сама постановка задач (1.5)–(1.8) учитывает, что функции $\partial_k u$, заданные на Γ_k, продолжимы нулем на остальные куски границы. Для элементов из $H^1(\Omega)$ эти производные по нормали, как известно, принадлежат классам $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Если же они продолжимы нулем на оставшуюся часть границы $\partial\Omega$ в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$, то они являются элементами $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma_k)$, а те функции из $H^1(\Omega)$, у которых $\partial_k u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$, обозначаются как $\check{H}^1(\Omega)$ (см. [18]). В нашем случае

$$\check{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,4}\}.$$

Более того, с учетом граничного условия на Γ_1 следует в задачах использовать подпространство

$$\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.9}$$

Для элементов из $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ имеем формулу Грина (см. [18])

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=2}^{4} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall \, \eta, \ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{1.10}$$

$$u - \triangle u \in (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*, \ \ \gamma_k\eta \in H^{1/2}(\Gamma_k), \ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{2,4}.$$

Из этой формулы следует, что слабое решение задачи (1.5) определяется тождеством

$$(\eta, u_1)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, \lambda u\rangle_{L_2(\Omega)} \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

и это слабое решение имеет вид (см. [18])

$$u_1 = A^{-1}f = \lambda A^{-1}u, \tag{1.11}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Далее, слабое решение задачи (1.6) определяется тождеством

$$(\eta, u_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_2\eta, \psi_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \langle \gamma_2\eta, \mu\gamma_2 u\rangle_{L_2(\Gamma_2)} \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Это решение задается формулой

$$\begin{gathered} u_2 = V_2\psi_2 = \mu V_2\gamma_2 u, \ V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_2 = \gamma_2^*, \\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) := \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega), \ \ H^1_h(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0\}. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Аналогично рассматриваются задачи (1.7) и (1.8), и их решения выражаются формулами

$$\begin{gathered} u_3 = V_3\psi_3 = \lambda V_3\gamma_3 u, \ V_3 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_3 = \gamma_3^*, \\ u_4 = V_4\psi_4 = \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u, \ V_4 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_4);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)), \ V_4 = \gamma_4^*. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Складывая левые и правые части соотношений (1.11), (1.12), (1.13), получаем, что слабое решение u задачи (1.1)–(1.3) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3\gamma_3)u + \mu V_2\gamma_2 u + \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u, \ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{1.14}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства (см. [18])

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)), \ k = \overline{2,4}. \tag{1.15}$$

Действительно, представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v, \ v \in L_2(\Omega), \tag{1.16}$$

подставим это выражение в (1.14) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу (1.15)). Тогда взамен (1.14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A_1^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{1.17}$$

$$B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0, \ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \ \ k = \overline{2,4}, \tag{1.18}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать спектральным, другой — фиксированным.

Задача (1.17), (1.18) содержит в себе известные спектральные проблемы, встречающиеся в приложениях. Они будут более подробно разобраны в разделе 2.

1.2. Спектральная задача сопряжения для двух примыкающих областей. Теперь рассмотрим конфигурацию из двух примыкающих областей. На отдельных участках границы этих областей заданы однородные условия, содержащие спектральный либо фиксированный параметр.

Будем считать, что две области Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}^m$ с липшицевыми границами примыкают друг к другу, как это показано на рис. 1.

Их внешние границы Γ_{11} и Γ_{22} являются липшицевыми кусками и сами разбиты на липшицевы куски:

$$\Gamma_{kk} = (\bigcup_{j=1}^{4} \Gamma_{kk,j}) \cup \partial\Gamma^0_{kk}, \ k = 1,2,$$

а граница стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ разбита на семь липшицевых кусков:

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (\bigcup_{j=1}^{7} \Gamma_{21,j}) \cup \partial\Gamma^0_{21}, \ \Gamma_{21,j} = \Gamma_{12,j}.$$

Здесь символом $\partial\Gamma^0_{kl}$ обозначено объединение внутренних границ при разбиении Γ_{kl} на части $\Gamma_{kl,j}$.

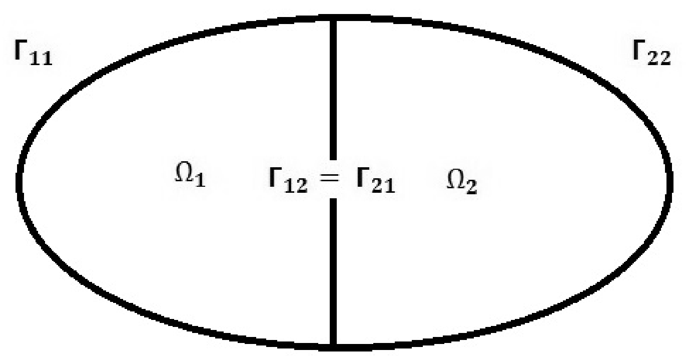

Рис. 1

Сформулируем постановку спектральной задачи сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях $\Omega_k,\ k=1,2$, с соответствующими граничными условиями. Имеем: в областях Ω_1 и Ω_2 —

$$u_1 - \triangle u_1 = f_1 := \lambda u_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad u_2 - \triangle u_2 = f_2 := \lambda u_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{1.19}$$

на внешних границах:

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}),\ \gamma_{22,1} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}); \tag{1.20}$$

$$\begin{gathered}
\partial_{11,2} u_1 = \psi_{11,2} := \mu \gamma_{11,2} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \qquad \partial_{22,2} u_2 = \psi_{22,2} := \mu \gamma_{22,2} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}); \\
\partial_{11,3} u_1 = \psi_{11,3} := \lambda \gamma_{11,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \qquad \partial_{22,3} u_2 = \psi_{22,3} := \lambda \gamma_{22,3} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3}); \\
\partial_{11,4} u_1 = \psi_{11,4} := \lambda^{-1} \gamma_{11,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), \quad \partial_{22,4} u_2 = \psi_{22,4} := \lambda^{-1} \gamma_{22,4} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4});
\end{gathered} \tag{1.21}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1} u_1 - \gamma_{12,1} u_2 = 0, \quad \partial_{21,1} u_1 + \partial_{12,1} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}); \tag{1.22}$$

$$\gamma_{21,2} u_1 - \gamma_{12,2} u_2 = 0,\ \ \partial_{21,2} u_1 + \partial_{12,2} u_2 = \psi_{21,2} := \mu \gamma_{21,2} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{1.23}$$

$$\gamma_{21,3} u_1 - \gamma_{12,3} u_2 = 0,\ \partial_{21,3} u_1 + \partial_{12,3} u_2 = \psi_{21,3} := \lambda \gamma_{21,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{1.24}$$

$$\gamma_{21,4} u_1 - \gamma_{12,4} u_2 = 0,\ \ \partial_{21,4} u_1 + \partial_{12,4} u_2 = \psi_{21,4} := \lambda^{-1} \gamma_{21,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4}); \tag{1.25}$$

$$\partial_{21,5} u_1 = -\partial_{12,5} u_2 = \psi_{21,5} := \lambda(\gamma_{21,5} u_1 - \gamma_{12,5} u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,5}); \tag{1.26}$$

$$\partial_{21,6} u_1 = -\partial_{12,6} u_2 = \psi_{21,6} := \lambda(\gamma_{21,6} u_1 - \gamma_{12,6} u_2) \ (\text{на } \Gamma_{21,6}); \tag{1.27}$$

$$\partial_{21,7} u_1 = -\partial_{12,7} u_2 = \psi_{21,7} := \lambda^{-1}(\gamma_{21,7} u_1 - \gamma_{12,7} u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,7}). \tag{1.28}$$

Здесь λ и μ, как и в задаче (1.1)–(1.3), — параметры, один из которых является спектральным, а другой — фиксированным. Отметим еще, что условия (1.23), (1.25), (1.27) называют условиями первой задачи сопряжения, а (1.24), (1.26), (1.28) — условиями второй задачи сопряжения (см. [29]).

Из постановки задачи (1.19)–(1.28) видно (см. (1.20)), что ее слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2)$. Более того, это решение должно принадлежать подпространству $\mathbb{H}^1_{\Gamma}(\Omega)$ тех элементов, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) однородные краевые условия на стыках — это группа первых условий в (1.22)–(1.25). Значит,

$$\mathbb{H}^1_{\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2) \in H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2) : \gamma_{21,k} u_1 - \gamma_{12,k} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21,k}),\ k = \overline{1,4}\}.$$

Представим решение задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых неоднородности, т. е. формально считаемые заданными функции в (1.19)–(1.28), содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий. Для элементов из $\mathbb{H}^1_{\Gamma}(\Omega)$ воспользуемся обобщенной формулой Грина в следующем виде:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, u_k - \triangle u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{4}\langle\gamma_{kk,j}\eta_k,\partial_{kk,j}u_k\rangle_{L_2(\Gamma_{kk,j})}+\sum_{j=1}^{4}\langle\gamma_{21,j}\eta_1,\partial_{21,j}u_1+\partial_{12,j}u_2\rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})}+$$

$$+\sum_{j=5}^{7}\langle\gamma_{21,j}\eta_1-\gamma_{12,j}\eta_2,\partial_{21,j}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})}, \tag{1.29}$$

где следы $\gamma_{kl,j}\eta_l \in H^{1/2}(\Gamma_{kl,j})$, а производные по нормали $\partial_{kl,j}u_l \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{kl,j})$, т. е. из сопряженного пространства (см. (1.9), (1.10)).

Отметим еще, что пространство $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1)\oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H^1_0(\Omega_1)\oplus H^1_0(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Идя по схеме, уже изложенной для задачи (1.1)–(1.3), приходим к выводу, что первая вспомогательная задача Крейна, отвечающая неоднородным членам лишь в уравнениях (1.19) с заданными f_1 и f_2, определяется как слабое решение $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12})$ на основе тождества

$$(\eta, u_{(1)})_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2}\langle\eta_k, f_k\rangle_{L_2(\Omega_k)},\ \eta = (\eta_1;\eta_2)\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

следующего из формулы Грина (1.29). Поэтому

$$u_{(1)} = A^{-1}f = \lambda A^{-1}u,\ f = (f_1, f_2) \in (\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega); L_2(\Omega))$.

Далее, заданным функциям $\psi_{11,2}$ и $\psi_{22,2}$ из (1.27) отвечают слабые решения $u^I_{(2)}$ и $u^{II}_{(2)}$ соответственно, определяемые тождествами

$$(\eta, u^I_{(2)})_{H^1(\Omega)} = \langle\gamma_{11,2}\eta_1, \psi_{11,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{11,2})}\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

$$(\eta, u^{II}_{(2)})_{H^1(\Omega)} = \langle\gamma_{22,2}\eta_2, \psi_{22,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{22,2})}\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

Обозначая эти решения через $V_{11,2}\psi_{11,2}$ и $V_{22,2}\psi_{22,2}$, приходим к выводу, что

$$u_{(2)} = u^I_{(2)} + u^{II}_{(2)} = \mu(V_{11,2}\gamma_{11,2}p_1 + V_{22,2}\gamma_{22,2}p_2)u,$$

где $p_k u = p_k(u_1; u_2) := u_k,\ k = 1, 2$. Отметим еще, что имеют место свойства (см. [18])

$$V_{kk,2} = (\gamma_{kk,2}p_k)^*,\ k = 1, 2.$$

Аналогично определяются слабые решения задач, отвечающие элементам $\psi_{11,3}$ и $\psi_{11,4}$ соответственно. Тогда

$$u_{(3)} = \lambda(V_{11,3}\gamma_{11,3}p_1 + V_{22,3}\gamma_{22,3}p_2)u,\ \ V_{kk,3} = (\gamma_{kk,3}p_k)^*,\ k = 1, 2.$$

Таким же образом имеем

$$u_{(4)} = \lambda^{-1}(V_{11,4}\gamma_{11,4}p_1 + V_{22,4}\gamma_{22,4}p_2)u,\ \ V_{kk,4} = (\gamma_{kk,4}p_k)^*,\ k = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь вспомогательные задачи, отвечающие заданным элементам $\psi_{21,j}$ из (1.23)–(1.25), $j = \overline{2,4}$. Решение, соответствующее $\psi_{21,2}$, определяется из тождества

$$(\eta, u_{(5)})_{H^1(\Omega)} = \langle\gamma_{21,2}\eta_1, \psi_{21,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,2})},\ \eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

и при $\psi_{21,2}\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,2})$ имеем единственное решение

$$u_{(5)} = V_{21,2}\psi_{21,2} = \mu V_{21,2}\gamma_{21,2}p_1u,\ \ V_{21,2} = (\gamma_{21,2}p_1)^*.$$

Аналогично получаем формулы, отвечающие $\psi_{21,3}$ и $\psi_{21,4}$:

$$u_{(6)} = \lambda V_{21,3}\gamma_{21,3}p_1u,\quad V_{21,3} = (\gamma_{21,3}p_1)^*,$$

$$u_{(7)} = \lambda^{-1}V_{21,4}\gamma_{21,4}p_1u,\quad V_{21,4} = (\gamma_{21,4}p_1)^*.$$

Перейдем теперь к рассмотрению решений, отвечающих элементам $\psi_{21,j},\ j = \overline{5,7}$, из (1.26)–(1.28). Решение $u_{(8)}$, отвечающее $\psi_{21,5}$, как следует из формулы Грина (1.29), определено тождеством

$$(\eta, u_{(8)})_{H^1(\Omega)} = \langle\gamma_{21,5}\eta_1 - \gamma_{12,5}\eta_2, \psi_{21,5}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,5})}\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

При любом $\psi_{21,5} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,5})$ существует единственное решение

$$u_{(8)} = V_{21,5}\psi_{21,5} = \mu V_{21,5}(\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)u, \ \ V_{21,5} = (\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)^*.$$

Аналогичным образом получаем формулы для оставшихся двух решений $u_{(9)}$ и $u_{(10)}$ вспомогательных задач, отвечающих заданным $\psi_{21,6}$ и $\psi_{21,7}$ соответственно из (1.27), (1.28). Имеем

$$u_{(9)} = \lambda V_{21,6}(\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)u, \quad V_{21,6} = (\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)^*,$$

$$u_{(10)} = \lambda^{-1} V_{21,7}(\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)u, \quad V_{21,7} = (\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)^*.$$

Итогом проведенных построений является такой вывод. Слабое решение $u = (u_1; u_2)$ задачи (1.19)–(1.28) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{j=1}^{10} u_{(j)} = \lambda(A^{-1} + C_3)u + \mu C_2 u + \lambda^{-1} C_4 u, \quad u \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega), \tag{1.30}$$

$$C_2 := V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*,$$

$$C_3 := V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,6}V_{21,6}^*,$$

$$C_4 := V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{21,7}V_{21,7}^*.$$

Таким образом, для спектральной проблемы сопряжения (1.19)–(1.28) получилось уравнение (1.30) такого же общего вида, как уравнение (1.14) для более простой спектральной проблемы (1.1)–(1.3).

Осуществляя еще в (1.30) такую же замену, как в (1.16), т. е.

$$u = A^{-1/2}v, \ v \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2),$$

и действуя оператором $A^{1/2}$, приходим окончательно к спектральной задаче

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{1.31}$$

$$0 \leqslant B_k = A^{1/2}C_kA^{-1/2} = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \ k = \overline{2,4}, \tag{1.32}$$

равносильной исходной проблеме (1.19)–(1.28).

Очевидно, что решение задачи (1.31), (1.32) обладает теми же общими свойствами, что и (1.17).

2. О свойствах решений спектральных проблем

2.1. Свойства решений при спектральном параметре μ. Рассмотрим подробнее полученную спектральную задачу (см. (1.17)

$$L(\lambda, \mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \ \ \lambda, \ \mu \in \mathbb{C}, \tag{2.1}$$

$$H = L_2(\Omega), \ \ 0 \leqslant B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \ k = \overline{2,4}, \ 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H). \tag{2.2}$$

Операторный пучок $L(\lambda, \mu)$ содержит два параметра: λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим случай, когда в пучке $L(\lambda, \mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

2.1.1. Отрицательные значения параметра. Рассмотрим задачу (2.1)-(2.2) при $\lambda < 0$. Обозначим

$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4. \tag{2.3}$$

Так как $T(\lambda) < 0$, то оператор $I - T(\lambda) \geqslant I$ равномерно по λ. Значит, существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1}$, $\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1$.

Заметим теперь, что оператор $B_2 = (A^{1/2}V_2)(\gamma_2 A^{-1/2})$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в подпространство

$$L_{2,h}(\Omega) := \{\varphi \in L_2(\Omega) : \varphi = A^{1/2}u_2,\ u_2 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) \subset H^1(\Omega)\}$$

(см. (1.12)) и потому $\ker B_2 = L_{2,0}(\Omega) = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$.

Кроме того, этот оператор неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$. Далее, $T(\lambda)$ также компактен и отрицателен. Это позволяет преобразовать проблему (2.1), (2.2) к спектральной задаче на собственные значения компактного положительного оператора и воспользоваться теоремой Гильберта—Шмидта.

Пусть P_0 и P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы, отвечающие разложению:

$$H = H_0 \oplus H_1,\ H_0 := \ker B_2 = L_{2,0}(\Omega),\ H_1 = H \ominus H_0 = \overline{\mathcal{R}(B_2)} = L_{2,h}(\Omega),$$

а I_0 и I_1 — единичные операторы в H_0 и H_1 соответственно. Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$:

$$(I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2\varphi_0 + \mu\widetilde{B_2}\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1, \tag{2.4}$$

где $\widetilde{B_2} = P_1B_2P_1,\ B_2\varphi_0 = 0,\ \varphi_0 = P_0\varphi_0,\ \varphi_1 = P_1\varphi_1,\ B_2 = P_1B_2$.

Применив к обеим частям уравнения (2.4) ортопроекторы P_0 и P_1, имеем

$$P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_0\widetilde{B_2}\varphi_1 = 0, \tag{2.5}$$

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_1\widetilde{B_2}\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1. \tag{2.6}$$

Оператор $P_0(I - T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0T(\lambda)P_0 \geqslant I_0$ в H_0, и потому существует его обратный, причем $\|(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}\| \leqslant 1$ равномерно по $\lambda < 0$. Тогда из (2.5) имеем

$$\varphi_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1). \tag{2.7}$$

Подставим полученное выражение в (2.6) и будем иметь уравнение для φ_1:

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1,\ \varphi_1 \in H_1, \tag{2.8}$$

$$T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_1T(\lambda)P_1. \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. *Имеет место свойство*

$$\ker(I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = 0, \tag{2.10}$$

где $T_1(\lambda)$ определен в (2.9). Введем φ_0 по формуле (2.7) и подставим в (2.10). Тогда будем иметь формулу (2.6) с $\mu = 0$:

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = 0, \tag{2.11}$$

а из (2.10) получаем (2.5).

Полученное уравнение (2.11) или система уравнений (2.5), (2.6) с $\mu = 0$ равносильны уравнению

$$(I - T(\lambda))\varphi = 0,\ \ \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

которое имеет тривиальное решение $\varphi = 0$, так как $I - T(\lambda) \geqslant I \gg 0$. Поэтому и $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. □

Заметим теперь, что при $\lambda < 0$ оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ из (2.9) самосопряжен и положительно определен. В самом деле, если имеется связь (2.7), то

$$((I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1),\ \varphi_0 + \varphi_1)_{L_2(\Omega)} = ((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1,\ \varphi_1)_{L_2(\Omega)} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha\Big(\|\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\Big) \geqslant \alpha\|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)},\ \ \alpha > 0, \tag{2.12}$$

так как $I - T(\lambda) \gg 0$. Отсюда и следует свойство

$$I_1 - T_1(\lambda) \gg 0.$$

Опираясь на этот факт, осуществим в (2.8) замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}\varphi_1 = \psi_1 \tag{2.13}$$

и подействуем слева (ограниченным) оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$. Тогда возникает задача

$$\psi_1 = \mu\widehat{B}_2\psi_1, \ \ \psi_1 \in H_1 = L_{2,h}(\Omega), \tag{2.14}$$

$$\widehat{B}_2 := (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}P_1B_2P_1(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = \widehat{B}_2^* > 0, \ \ \widehat{B}_2 \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)).$$

Теорема 2.1. *При* $\lambda < 0$ *задача* (2.1) *имеет дискретный спектр, состоящий из положительных конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $+\infty$. *Собственные элементы* $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, *отвечающие собственным значениям* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, *после проектирования на подпространство* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, *т. е. элементы* $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, *образуют базис Рисса в* H_1, *причем* $\varphi_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k}$, *где* $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ *— ортонормированный базис, отвечающий оператору* $\widehat{B}_2$ *из* (2.14). *Более того, элементы* φ_{1k} *для* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *образуют* p *— базис в* H_1 *при*

$$p > p_0 = m - 1. \tag{2.15}$$

Доказательство. Первое утверждение о дискретном и положительном спектре и базисе Рисса следует из теоремы Гильберта—Шмидта, примененной к проблеме (2.14), и свойства $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_1)$.

Докажем теперь свойство (2.15). Из формулы (2.3) следует, что $T(\lambda)$ принадлежит классу компактных операторов $\mathfrak{S}_p(L_2(\Omega))$, где

$$p > p_0 = \max(p_{A^{-1}};\ p_{B_3};\ p_{B_4}). \tag{2.16}$$

Однако, можно убедиться, что собственные значения $\lambda_k(A^{-1})$ положительного самосопряженного компактного оператора A^{-1} суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|A^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}\Big/\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)}/\|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_1}}(\Omega), \ u = A^{-1/2}\varphi \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Поэтому их асимптотика при $k \to \infty$ дается классической формулой Вейля

$$\lambda_k(A^{-1}) = (a_m(\Omega))^{2/m}k^{-2/m}[1 + o(1)] \ \ (k \to \infty), \ \ a_m(\Omega) > 0, \ \ a_3(\Omega) = \frac{|\Omega|}{6\pi^2}, \tag{2.17}$$

и потому $p_{A^{-1}} > m/2$.

Для оператора B_3 аналогично устанавливаем, что его положительные собственные значения суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|\gamma_3 A^{-1/2}\varphi\|_{L_2(\Gamma)}/\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Gamma_3}|u|^2 d\Gamma_3/\int\limits_{\Omega}(|u|^2 + |\nabla u|^2)d\Omega, \ \ u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Отсюда и из [9] получаем, что асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(B_3)$ таково:

$$\lambda_k(B_3) = (d_{m,3}(\Gamma_3))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \ \ (k \to \infty), \ \ d_{m,3}(\Gamma_3) > 0, \ d_{3,3}(\Gamma_3) = \frac{|\Gamma_3|}{4\pi}. \tag{2.18}$$

Значит, $p_{B_3} > m - 1$.

Для оператора B_4 те же рассуждения приводят к формуле

$$\lambda_k(B_4) = (d_{m,4}(\Gamma_4))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)] \ \ (k \to \infty), \ \ d_{m,4}(\Gamma_4) > 0, \ d_{3,4}(\Gamma_4) = \frac{|\Gamma_4|}{4\pi}, \tag{2.19}$$

и потому $p_{B_4} > m - 1$. Из (2.17), (2.18), (2.19) и из (2.16) теперь следует, что $T(\lambda)$ из (2.3) принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > p_0 = m - 1$.

Заметим, наконец, что

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \widetilde{T}_1(\lambda), \ \widetilde{T}_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_p, \ p > p_0 = m - 1.$$

Отсюда и из (2.13) следует свойство p-базисности элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ при $p > m - 1$. □

2.1.2. Положительные значения параметра λ.. Будем теперь считать, что в задаче (2.1), (2.2) параметр λ положителен, однако

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.20}$$

Тогда так же, как и в пункте 2.1.1, можно перейти от проблемы (2.1) путем проектирования на подпространства $H_0 = L_{2,0}(\Omega)$ и $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ и исключения φ_0 (см. (2.5)–(2.7)) к уравнению (2.8) с $T_1(\lambda)$ из (2.9).

Здесь снова справедливо утверждение леммы 2.1, причем $T_1(\lambda)$ — компактный самосопряженный оператор, действующий в H_1. Отсюда следует, что оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ может иметь не более конечного числа (с учетом их кратностей) отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку 1. Обозначая количество отрицательных собственных значений через κ_1, приходим к выводу, что квадратичная форма оператора $I_1 - T_1(\lambda)$ индефинитна, а все пространство H_1 разбивается на ортогональную сумму κ_1-мерного отрицательного подпространства H_- и бесконечномерного положительного подпространства H_+. Таким образом, возникает индефинитная метрика — пространство Понтрягина

$$H_1 = \Pi_{\kappa_1} = \Pi_- \oplus \Pi_+, \ \ \Pi_- = H_-, \ \ \Pi_+ = H_+, \ \ \dim \Pi_- = \kappa_1, \ \ \dim \Pi_+ = \infty. \tag{2.21}$$

Теорема 2.2. *Пусть $\lambda > 0$ и выполнено условие* (2.20)*, причем имеет место разложение* (2.21)*. Тогда спектр исходной задачи* (2.1)*,* (2.2) *вещественный, дискретный и состоит из κ_1 штук отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку $\mu = +\infty$:*

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{\kappa_1} < 0 < \mu_{\kappa_1+1} \leqslant \ldots \leqslant \mu_k \leqslant \ldots, \ \ \lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty. \tag{2.22}$$

При этом собственные элементы (*присоединенных нет*) *задачи* (2.8) *образуют ортонормированный по форме $I_1 - T_1(\lambda)$ базис и базис Рисса в $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими соотношениям*

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k}, \ \varphi_{1j})_{H_1} = \begin{cases} -\delta_{kj}, & 1 \leqslant k, \ j \leqslant \kappa_1, \\ \delta_{kj}, & k, \ j \geqslant \kappa_1 + 1, \\ 0, & k \geqslant \kappa_1, \ \ j \geqslant \kappa_1 + 1, \end{cases} \tag{2.23}$$

$$(\widetilde{B}_2 \varphi_{1k}, \ \varphi_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}| \delta_{kj}.$$

Доказательство. Учитывая (2.20) и (2.21), представим оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде

$$I_1 - T_1(\lambda) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_{\kappa_1} |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \tag{2.24}$$

где J_{κ_1} — каноническая симметрия:

$$J_{\kappa_1} = J_{\kappa_1}^* = J_{\kappa_1}^{-1}. \tag{2.25}$$

Тогда с учетом (2.24) задача (2.8) преобразуется к виду

$$v_1 = \mu J_{\kappa_1} \widetilde{B_2}(\lambda) v_1, \tag{2.26}$$

$$v_1 = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} \varphi_1, \ \ \widetilde{B_2}(\lambda) := |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} \widetilde{B_2} |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}. \tag{2.27}$$

Так как оператор $\widetilde{B_2}(\lambda)$ компактен и положителен, то оператор $J_{\kappa_1}\widetilde{B_2}(\lambda)$ — компактный и J_{κ_1} — положительный, т. е.

$$[J_\kappa \widetilde{B_2}(\lambda) v_1, \ v_1] := (J_\kappa (J_\kappa \widetilde{B_2}(\lambda)) v_1, \ v_1) = (\widetilde{B_2}(\lambda) v_1, \ v_1) > 0, \ \ v_1 \neq 0.$$

Поэтому по теореме Л. С. Понтрягина (см. [24]) получаем, что задача (2.26), (2.27) имеет дискретный вещественный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ со свойствами (2.22), а собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, образуют базис Рисса в H_1. Отсюда, а также из замены (2.27) приходим к выводу, что собственные элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ $\varphi_{1k} = |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} v_{1k}$ образуют базис Рисса в H_1. Наконец, из условий ортонормировки

$$[v_{1k}, v_{1j}] = (J_{\kappa_1} \varphi_{1k}, \varphi_{1j})_{H_1} = \pm\delta_{kj}, \ \ (\widetilde{B_2} \varphi_{1k}, \varphi_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}| \delta_{kj},$$

получаем, что справедливы формулы (2.23). □

2.1.3. Случай общего положения. Рассмотрим теперь более общий случай, когда

$$\mathrm{Im}\lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.28}$$

Как хорошо известно, операторный пучок типа С. Г. Крейна

$$I - T(\lambda) := I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1} B_4, \quad A^{-1},\ B_3,\ B_4\ \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{2.29}$$

может иметь вне вещественной оси не более конечного числа невещественных собственных значений, симметрично расположенных относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

В частности, если $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$, то из неравенства

$$\|(I - T(\lambda))\varphi\|_H \cdot \|\varphi\|_H \geqslant |((I - T(\lambda))\varphi, \varphi)_H| \geqslant \mathrm{Re}((I - T(\lambda))\varphi, \varphi)_H \geqslant \|\varphi\|_H^2 \tag{2.30}$$

получаем, что при $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0,\ \ \mathrm{Im}\lambda \neq 0$,

$$\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1 \tag{2.31}$$

равномерно по λ. При этом также

$$\|(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}\| \leqslant 1,$$

так как в силу (2.30)

$$((I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)\varphi_0,\ \varphi_0)_H = ((I - T(\lambda))\varphi_0, \varphi_0)_H \geqslant \|\varphi_0\|_H^2,\ \varphi_0 \in H_0.$$

Отсюда снова следует, что от исходной задачи (2.1), (2.2) можно в рассматриваемом случае перейти к уравнению (2.8) с $T_1(\lambda)$ из (2.9), причем для связи (2.7) снова оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ ограниченно обратим. Тогда задачу (2.8) можно переписать в виде

$$\varphi_1 = \mu(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} \widetilde{B}_2 \varphi_1, \quad \varphi_1 \in H_1 = L_{2,h},\ \widetilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1. \tag{2.32}$$

Теорема 2.3. *Пусть в задаче* (2.1), (2.2) *выполнены условия* (2.28). *Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\mu) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon,\ \mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\ \mu = -\mathrm{sign}\ \mathrm{Im}\ \lambda\}. \tag{2.33}$$

Система собственных и присоединенных элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{1k} = P_1 \varphi_k$, *т. е. система собственных и присоединенных элементов задачи* (2.1), (2.2), *после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, *является полной в* H_1, *более того, она образует базис Абеля—Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в* H_1. *Наконец, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_2)[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \tag{2.34}$$

$$\lambda_k(B_2) = (d_{m,2}(\Gamma_2))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)} [1 + o(1)], \quad k \to \infty,\ d_{m,2}(\Gamma_2) > 0,\ d_{3,2}(\Gamma_2) = \frac{|\Gamma_2|}{4\pi}. \tag{2.35}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что асимптотическая формула (2.35), так же, как и асимптотические формулы (2.17), (2.18), следует из работы [9]. Далее, из условий (2.28) получаем, что от задачи (2.1) можно перейти к задаче (2.8) и затем к (2.32).

Поэтому к проблеме (2.32) можно применить теоремы М. В. Келдыша (см. [12]), так как в силу (2.35) оператор $\widetilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1$ имеет те же ненулевые собственные значения, что и оператор B_2, а потому $\widetilde{B}_2$ — полный положительный компактный оператор класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > m-1$. Кроме того, оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} = I_1 + T_2(\lambda),\ T_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ и, очевидно, обратим. Отсюда и следуют первые утверждения теоремы.

В частности, свойство из (2.33), определяющее связь знаков $\mathrm{Im}\mu$ и $\mathrm{Im}\lambda$, следует непосредственно из соотношения

$$((I - T(\lambda))\varphi,\ \varphi)_H = \mu(B_2\varphi, \varphi)_H$$

с учетом формулы (2.29) для $T(\lambda)$ и свойств операторов $A^{-1},\ B_2,\ B_3,\ B_4$.

Свойство базисности по Абелю—Лидскому порядка $\alpha > m-1$ следует также из (2.35) и утверждения из [29]. Наконец, асимптотическая формула (2.34) следует из результатов А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [21]), примененных к уравнению

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu \widetilde{B}_2\varphi_1,$$

так как $T_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, а числа $\lambda_k(\widetilde{B}_2) = \lambda_k(B_2)$ и имеют асимптотику (2.35). □

2.2. Свойства решений при спектральном параметре λ. Рассмотрим теперь случай, когда в задаче

$$L(\lambda,\mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H = L_2(\Omega), \tag{2.36}$$

параметр $\mu \in \mathbb{C}$ фиксирован, а λ — спектральный.

2.2.1. Неположительные значения фиксированного параметра. Если $\mu \leqslant 0$, то $I - \mu B_2 \geqslant I \gg 0$ и $\|(I-\mu B_2)^{-1}\| \leqslant 1$. Осуществим в этом случае в (2.36) замену

$$(I-\mu B_2)^{1/2}\varphi = \psi. \tag{2.37}$$

Тогда возникает задача

$$\psi = \lambda(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2}\psi + \lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}\psi, \tag{2.38}$$

т. е. задача на собственные значения для операторного пучка С. Крейна. В самом деле, здесь оператор $(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2}$ — компактный и положительный, а $(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}$ — компактный и неотрицательный.

Будем далее предполагать, что выполнено условие

$$4\|A^{-1}+B_3\| \cdot \|B_4\| < 1. \tag{2.39}$$

Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} 4\|(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2}\| \cdot \|(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}\| \leqslant \\ \leqslant 4\|(I-\mu B_2)^{-1}\|^2 \cdot \|A^{-1}+B_3\| \cdot \|B_4\| \leqslant 4\|A^{-1}+B_3\| \cdot \|B_4\| < 1, \end{aligned} \tag{2.40}$$

достаточное для факторизации операторного пучка

$$I - \lambda(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2} - \lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}, \tag{2.41}$$

отвечающего задаче (2.38) (см., например, [13, с. 82–86]).

Теорема 2.4. *Пусть в задаче* (2.36) *выполнено условие* (2.39). *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.36) *при* $\mu \leqslant 0$ *имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками* 0 *и* $+\infty$.

2°. *Предельной точке* $\lambda = 0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ *изолированных конечнократных собственных значений, расположенных на отрезке*

$$(0, r_-), \ \ r_\pm := \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\|A^{-1}+B_3\| \cdot \|B_4\|}\right)/(2\|A^{-1}+B_3\|). \tag{2.42}$$

Соответствующая система собственных элементов (*присоединенных нет*) *после проектирования на подпространство* $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \ker(I-\mu B_2)^{-1/2}B_2(I-\mu B_2)^{-1/2}$, *образует базис Рисса в* H_1. *Более того, эта система элементов образует в* H_1 *p-базис при* $p > p_0 = (m-1)/2$.

3°. *Предельной точке* $\lambda = +\infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, *расположенных на промежутке* $(r_+, +\infty)$, *а отвечающая этой ветви система собственных элементов задачи* (2.36) *образует базис Рисса в* $H = L_2(\Omega)$ *и даже p-базис при тех же* $p > p_0 = (m-1)/2$.

4°. *Собственные значения* λ_k° *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^\circ = \lambda_k(B_4)[1+o(1)] = (d_{m,3}(\Gamma_4))^{-1/(m-1)}k^{1/(m-1)}[1+o(1)], \ \ k \to \infty, \tag{2.43}$$

а собственные значения λ_k^∞ — *асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^\infty = \lambda_k^{-1}(A^{-1}+B_3)[1+o(1)] = \lambda_k^{-1}(B_3)[1+o(1)] = (d_{m,3}(\Gamma_3))^{-1/(m-1)}k^{1/(m-1)}[1+o(1)], \ \ k \to \infty. \tag{2.44}$$

Доказательство. Оно почти дословно повторяет доказательство теорем 3.1.2 и 3.2.1 из [13, с. 83–92] с учетом того, что при условии (2.39) пучок (2.41) допускает каноническую факторизацию, является самосопряженным, а для собственных значений $\lambda_k(A^{-1}+B_3)$ и $\lambda_k(B_4)$ имеют место асимптотические формулы (2.17), (2.18), а также формула

$$\lambda_k(A^{-1}+B_3)=\lambda_k(B_3)[1+o(1)],\quad k\to\infty$$

При этом асимптотические формулы (2.43), (2.44) следуют из теорем А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [20–22]). □

2.2.2. Вещественная часть μ не положительна. Будем теперь считать, что

$$\mathrm{Re}\mu\leqslant 0,\ \mathrm{Im}\mu\neq 0. \tag{2.45}$$

Тогда в силу неравенств

$$\|(I-\mu B_2)\varphi\|\cdot\|\varphi\|\geqslant|((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi)|\geqslant \mathrm{Re}((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi)\geqslant\|\varphi\|^2$$

получаем, что при условиях (2.45) имеет место оценка

$$\|(I-\mu B_2)^{-1}\|\leqslant 1. \tag{2.46}$$

Применяя слева в (2.36) оператор $(I-\mu B_2)^{-1}$, приходим к задаче

$$\varphi=\lambda(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)\varphi+\lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi. \tag{2.47}$$

Здесь снова возникает спектральная задача для пучка С. Крейна, однако теперь этот пучок не является самосопряженным.

Теорема 2.5. *Пусть в задаче* (2.47) *выполнены условия* (2.45)*, а также условие* (2.39)*. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача* (2.47) *имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками $\lambda=0$ и $\lambda=\infty$ соответственно.*

2°. *Предельной точке $\lambda=0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda|\leqslant r_-,\ \ r_\pm=(1-\sqrt{1-4\|A^{-1}+B_3\|\cdot\|B_4\|})/(2\|A^{-1}+B_3\|),$$

причем для $\forall\varepsilon>0$ все собственные значения λ_k°, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе

$$|\mathrm{arg}\lambda|<\varepsilon. \tag{2.48}$$

При этом система собственных и присоединенных (*корневых*) *элементов $\{\varphi_k^\circ\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$, после ее проектирования на подпространство $H_1=H\ominus H_0$, $H=L_2(\Omega)$, $H_0=\ker B_4$, является полной в H_1 и образует в H_1 базис Абеля—Лидского порядка $\alpha>m-1$.*

3°. *Предельной точке $\lambda=\infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ конечнократных собственных значений, расположенных в области $|\lambda|\geqslant r_+$, причем для $\forall\varepsilon>0$ все собственные значения λ_k^∞, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе* (2.48).

При этом система корневых элементов $\{\varphi_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, является полной в $H=L_2(\Omega)$ и образует в H базис Абеля—Лидского порядка $\alpha>m-1$.

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в [13, с. 82–86]. Поэтому здесь приведем лишь некоторые построения, относящиеся к утверждению 2°. Если выполнено условие (2.39), то пучок $L(\lambda)$, отвечающий уравнению (2.47), допускает факторизацию

$$\lambda L(\lambda):=\lambda I-(I-\mu B_2)^{-1}B_4-\lambda^2(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)=$$
$$=Y^{-1}(I-\lambda Y(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3))(\lambda I-Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4), \tag{2.49}$$

причем при $|\lambda|\leqslant t\in(r_-,r_+)$ оператор-функция $I-\lambda Y(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y=I+(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4Y. \tag{2.50}$$

Кроме того, спектр
$$\sigma(Z) := \sigma(Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r_-\}. \tag{2.51}$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим задачу на собственные значения
$$Z\varphi = Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi = (I+(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)Y(I-\mu B_2)^{-1}Y)(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi =$$
$$=: (I+\Phi)B_4\varphi = \lambda\varphi,\ \varphi \in L_2(\Omega) = H,\ |\lambda| \leqslant r_-. \tag{2.52}$$
Здесь $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и $(I+\Phi)$ обратим, а $B_4 = B_4^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0 = \ker B_4$.

Представим теперь φ в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,\ \varphi_0 \in H_0,\ \varphi_1 \in H_1 = H \ominus H_0$, и спроектируем обе части (2.52) на H_0 и H_1 соответственно с помощью ортопроекторов P_0 и P_1. С учетом соотношений $P_0B_4 = 0,\ P_1B_4P_1 =: \widetilde{B}_4 > 0$ (в H_1) будем иметь
$$P_0(I+\Phi)P_1 \cdot \widetilde{B}_4\varphi_1 = \lambda\varphi_0,\ \ (I_1 + P_1\Phi P_1)\cdot\widetilde{B}_4\varphi_1 = \lambda\varphi_1. \tag{2.53}$$
Так как по постановке задачи $\lambda \neq 0$, то из первого соотношения (2.53) можно выразить φ_0 через φ_1, а второе уравнение не содержит φ_0. Кроме того, можно доказать (см., например, [13, с. 85]), что оператор $I_1 + P_1\Phi P_1$ обратим в H_1. Наконец, из асимптотической формулы (2.19) следует, что $\widetilde{B}_4 \in \mathfrak{S}_p(H_1)$ при $p > m-1$.

Эти свойства показывают, что ко второму уравнению (2.53) применима теорема М. В. Келдыша о свойствах спектра слабо возмущенного самосопряженного оператора класса $\mathfrak{S}_p(H)$ (см. [12, с. 313–320]). Отсюда следуют утверждения из 2° о локализации спектра в исходной задаче (2.47) при $|\lambda| \leqslant r_-$, а также о полноте проекций корневых элементов в пространстве H_1. Утверждение о базисности по Абелю—Лидскому этих корневых элементов следует из [29, с. 292], а также из асимптотической формулы (2.19).

Утверждения 3° доказываются аналогично, однако без проектирования на H_1, так как оператор $A^{-1}+B_3$ полный, т. е. $\ker(A^{-1}+B_3) = \{0\}$. При этом также используется тот факт, что $\lambda_k(A^{-1}+B_3) = \lambda_k(B_3)[1+o(1)]$ $(k\to\infty)$, и асимптотическая формула (2.18). Кроме того, в пучке $L(\lambda)$ следует сделать замену $\lambda \to \tilde{\lambda}^{-1}$ и использовать вместо (2.49) аналогичную факторизацию для пучка $\tilde{\lambda}L(\tilde{\lambda}^{-1})$ (см. [13, с. 86]). □

Замечание 2.1. В задаче (2.36) при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ имеются две ветви конечнократных собственных значений $\{\lambda_k^\circ\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Эти ветви имеют асимптотическое поведение (2.43) и (2.44) соответственно. Этот результат следует из теоремы А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см. [21]).

3. Некоторые начально-краевые задачи, порождающие спектральные задачи сопряжения

Спектральные задачи, разобранные в предыдущем разделе, порождаются начально-краевыми задачами, в которых производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Здесь будет рассмотрено несколько таких примеров.

3.1. Первая задача. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, разбитой на 3 липшицевых куска Γ_1, Γ_2 и Γ_3 с липшицевыми контурами $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$ и $\partial\Gamma_3$, сформулируем сначала спектральную проблему
$$L_0u = \lambda u\ (\text{в}\ \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\text{на}\ \Gamma_1),\ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u\ (\text{на}\ \Gamma_2),\ \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u\ (\text{на}\ \Gamma_3),$$
$$L_0 u = u - \triangle u,\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k},\ \gamma_k u = u|_{\Gamma_k},\ k = \overline{1,3}, \tag{3.1}$$
где λ и μ — параметры, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным.

Нетрудно видеть, что если рассматривать начально-краевую задачу
$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_0 u = f\ (\text{в}\ \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\text{на}\ \Gamma_1),\ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u + \psi_2\ (\text{на}\ \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_3 u) = \psi_3\ (\text{на}\ \Gamma_3),\ \ u(0,x) = u^0(x),\ x \in \Omega, \tag{3.2}$$
и разыскивать ее решения при $f \equiv 0,\ \psi_2 \equiv 0,\ \psi_3 \equiv 0$ в виде
$$u(t,x) = \exp(-\lambda t)u(x),\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

то для амплитудной функции $u(x)$, $x \in \Omega$, возникает спектральная проблема (3.1), где λ — искомый спектральный параметр.

Опираясь на построения и методы разделов 1 и 2, а также на использованные выше операторы вспомогательных краевых задач, можно исследовать задачу (3.2) и доказать теорему о ее сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени.

Представим, как и выше, решение $u(t,x)$ задачи (3.1) в виде суммы решений четырех вспомогательных задач, в каждой из которых неоднородности входят в уравнение либо в краевое условие лишь в одном месте. Не выписывая формулировки этих задач, сразу представим решение в виде

$$u = A^{-1}(f - \frac{\partial u}{\partial t}) + V_2(\mu\gamma_2 u + \psi_2) + V_3(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 u), \tag{3.4}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$, а V_2 и V_3 — операторы вспомогательных задач Неймана (см. (1.5)–(1.7) при $\Gamma_4 = \varnothing$). Тогда возникает дифференциальное уравнение для функции $u = u(t)$ со значениями в пространстве $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$:

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{du}{dt} + (I - \mu V_2\gamma_2)u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3. \tag{3.5}$$

Если здесь еще сделать замену искомой функции

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t), \ \ \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.6}$$

то получаем задачу Коши

$$(A^{-1} + B_3)\frac{d\eta}{dt} + (I - \mu B_2)\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_2\psi_2 + A^{1/2}V_3\psi_3 =: f_1(t), \ \ \eta(0) = A^{1/2}u^0, \tag{3.7}$$

$$B_k = (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = (\gamma_k A^{-1/2})^*(\gamma_k A^{-1/2}) : L_2(\Omega) \to L_{2,h}(\Omega) \subset L_2(\Omega), \ k = \overline{1,3}.$$

Свойства коэффициентов A^{-1} и B_k уже описаны выше.

Осуществим в (3.7) еще одну замену

$$(A^{-1} + B_3)\eta =: w. \tag{3.8}$$

Тогда возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}w = f_1(t), \ \ w(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}u^0. \tag{3.9}$$

Определение 3.1. Назовем функцию $w(t)$ со значениями в $L_2(\Omega)$ сильным решением задачи (3.9) на отрезке $[0,T]$, если

$$w(t) \in C^1([0,T];\ L_2(\Omega)) \cap C([0,T];\ \mathcal{D}((A^{-1} + B_3)^{-1}) \tag{3.10}$$

и для нее выполнено уравнение (3.10), где все слагаемые принадлежат $C([0,T];\ L_2(\Omega))$, а также выполнено условие $u(0) = u^0$.

Далее будем полагать, что

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Пусть в исходной задаче* (3.2) *выполнены условия*

$$f(t,x) \in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*), \ \psi_2(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2)),$$

$$\psi_3(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)), \ 0 < \beta \leqslant 1, \ \ u^0(x) \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{3.12}$$

а также условие (3.11).

Тогда задача (3.9) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$ *в смысле определения* 3.1. *При этом исходная начально-краевая задача имеет единственное решение на отрезке* $[0,T]$

$$u(t,x) \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)), \tag{3.13}$$

причем для этого решения выполнено уравнение в Ω, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, *граничные условия на* Γ_k, $k = 2,3$, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, *а также начальное условие.*

Доказательство. Если выполнены условия (3.12), то в силу свойств операторов A^{-1} и B_k, $k = 2,3$, функция $f_1(t)$ в (3.9) является элементом из $C^{\beta}([0,T];\ L_2(\Omega))$, а $w^0 \in \mathcal{D}((A^{-1}+B_3)^{-1})$. Далее, так как $(A^{-1}+B_3)^{-1}$ — самосопряженный положительно определенный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$, а $B_2 \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, то оператор $-(I-\mu B_2)(A^{-1}+B_3)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы, а уравнение (3.9) — абстрактное параболическое. Поэтому при сформулированных свойствах для $f_1(t)$ и w^0 задача Коши (3.9) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Отсюда следует, что существует единственное сильное решение задачи Коши (3.7), где все слагаемые являются элементами из $C([0,T];L_2(\Omega))$. Тогда в силу (3.11) получаем, что

$$\eta(t) \in C([0,T];L_2(\Omega)),$$

а потому ввиду замены (3.6) имеем в задаче (3.5) (либо (3.4))

$$u(t) \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)). \tag{3.14}$$

Далее, соотношение (3.4), в свою очередь, показывает, что $u = u_1 + u_2 + u_3$, причем

$$L_0u_1 = f - \frac{du}{dt}\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_3),$$

$$L_0u_2 = 0\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u_2 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_2 = \mu\gamma_2 u + \psi_2\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u_2 = 0\ (\text{на } \Gamma_3),$$

$$L_0u_3 = 0\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u_3 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_3 = 0\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u_3 = \psi_3 - \frac{d}{dt}(\gamma_3 u)\ (\text{на } \Gamma_3).$$

Отсюда приходим к выводу, что для функции u выполнены все уравнения и краевые условия задачи (3.2).

При этом из (3.14) и свойств дифференциального выражения L_0u (для обобщенной формулы Грина, см. (1.10)) получаем, что $L_0u \in (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*$, а потому в уравнении в Ω из (3.2) все слагаемые являются элементами из $C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$. Аналогично из (3.14) получаем, что $\partial_k u \in C([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3$, а потому все слагаемые в граничных условиях на Γ_2 и Γ_3 являются элементами из $C([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3$, соответственно. □

3.2. Вторая задача. Будем теперь считать, что μ — спектральный, а λ — фиксированный параметр в проблеме (3.1), и приведем постановку начально-краевой задачи, отвечающей этому случаю. Тогда будем иметь следующее уравнение и краевые условия:

$$L_0u = \lambda u + f\ (\ \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\text{на } \Gamma_1),$$
$$\partial_2 u + \frac{\partial}{\partial t}\gamma_2 u = \psi_2\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u + \psi_3\ (\text{на } \Gamma_3). \tag{3.15}$$

Снова считая, что $u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ есть сумма решений трех вспомогательных задач, приходим для искомой функции $u = u(t,x)$ к уравнению (см. (3.4))

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda\gamma_3 u + \psi_3), \tag{3.16}$$

и соответствующей задаче Коши

$$V_2\gamma_2\frac{du}{dt} + (I - \lambda(A^1 + V_3\gamma_3))u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3,\ \ u(0) = u^0. \tag{3.17}$$

Отсюда после замены

$$u = A^{-1/2}\eta,\ \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.18}$$

получаем задачу

$$B_2\frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1} + B_3))\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_2\psi_2 + A^{1/2}V_3\psi_3 =: f(t),\ \ \eta(0) = \eta^0 = A^{1/2}u^0. \tag{3.19}$$

Особенностью этой задачи, в отличие от аналогичной проблемы (3.7), является тот факт, что оператор $B_2 = (A^{1/2}V_2)(\gamma_2 A^{-1/2}) = (\gamma_2 A^{-1/2})^*(\gamma_2 A^{-1/2})$ лишь неотрицателен и имеет бесконечномерное ядро $\ker B_2$.

Учитывая это обстоятельство, рассмотрим проблему вида (3.19) в абстрактной форме. Именно, будем считать, что исследуется в произвольном гильбертовом пространстве H задача Коши

$$B\frac{d\eta}{dt} + (I - \Phi)\eta = f(t),\ \eta(0) = \eta^0, \tag{3.20}$$

где B — неотрицательный компактный оператор, имеющий ненулевое ядро:

$$H_0 := \ker B \neq \{0\}, \tag{3.21}$$

а $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$.

Воспользуемся разложением $H = H_0 \oplus H_1$, $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B)}$, и преобразуем задачу (3.20) к задаче Коши для дифференциального уравнения в подпространстве H_1. С этой целью представим $\eta = \eta_0 + \eta_1$, $\eta_0 = P_0\eta = P_0\eta_0 \in H_0$, $\eta_1 = P_1\eta = P_1\eta_1 \in H_1$, где P_0 и P_1 — ортопроекторы на H_0 и H_1 соответственно.

Будем далее предполагать, что выполнены условия

$$\ker(I - \Phi) = \{0\},\ \ker(I_0 - P_0\Phi P_0) = \{0\}. \tag{3.22}$$

Тогда в силу второго условия оператор $(I_0 - P_0\Phi P_0)$ обратим и возникает задача Коши

$$B_1\frac{d\eta_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)\eta_1 = f_1(t),\ \eta_1(0) = \eta_1^0 = P_1\eta^0, \tag{3.23}$$

$$B_1 := P_1BP_1,\ \Phi_1 = P_1\Phi P_1 + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}(P_0\Phi P_1),$$
$$f_1 := P_1f + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}P_0f,$$
$$\eta_0 = (I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}[(P_0\Phi P_1)\eta_1 + P_0f].$$

Здесь оператор $B_1 : H_1 \to H_1$ — положительный и компактный, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$.

Осуществляя еще в (3.23) замену искомой функции

$$B_1\eta_1 = \xi_1, \tag{3.24}$$

придем к задаче Коши

$$\frac{d\xi_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)B_1^{-1}\xi_1 = f_1(t),\ \ \xi_1(0) = B_1\eta_1(0) = B_1P_1\eta^0. \tag{3.25}$$

Лемма 3.1. *Пусть в задаче* (3.20), (3.21) *выполнены условия* (3.22), *а также условия*

$$f(t) \in C^\beta([0,T];H_1),\ \ \eta^0 \in H. \tag{3.26}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $\eta(t) \in C([0,T];H)$, для которого все слагаемые в уравнении (3.20) *являются непрерывными функциями t со значениями в H и выполнено начальное условие* (3.20).

Доказательство. Если выполнены условия (3.26), то в задаче (3.25)

$$f_1(t) \in C^\beta([0,T];H_1),\ \ \xi_1(0) \in \mathcal{D}((B_1)^{-1}), \tag{3.27}$$

Далее, уравнение (3.25) является абстрактным параболическим, так как B_1^{-1} — положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$. Отсюда следует, что задача (3.25) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0,T]$, т. е. $\xi_1(t) \in C^1([0,T],\ H_1) \cap C([0,T],\ \mathcal{D}(B_1^{-1}))$. Отсюда получаем, что существует единственное решение $\eta(t)$ задачи (3.23), для которого все слагаемые в уравнении — элементы из $C([0,T];H_1)$. Так как $I_1 - \Phi_1$ обратим в силу условий (3.22), то получаем свойство $\eta_1(t) \in C([0,T];H_1)$.

Возвращаясь теперь от (3.23) к исходной задаче (3.20) (см. соотношения для f_1 и η_0 в (3.23)), получаем утверждение леммы. □

Следствием леммы 3.1 является такое утверждение относительно разрешимости задачи (3.15).

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (3.15) *выполнены условия*

$$f \in C^\beta([0,T];(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\ \ \psi_k \in C^\beta([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)),\ \ 0 < \beta \leqslant 1,\ k = 1,2, \tag{3.28}$$
$$u(0) = u^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

а также условия

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3)) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0),\ \ P_0H := \ker B_2. \tag{3.29}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $u \in C([0,T];\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$, для которого каждое слагаемое в уравнении в Ω является элементом из $C([0,T];(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементом из $C([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3$.

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в теореме 3.1, с учетом утверждения леммы 3.1.

Именно, при выполнении условий (3.28), (3.29) из леммы 3.1 получаем, что задача (3.23) имеет единственное решение $\eta_1(t) \in C([0,T]; H_1)$, $H_1 := L_2(\Omega) \ominus \ker B_1$. Возвращаясь теперь от (3.23) к (3.17), (3.16) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, приходим к утверждению данной теоремы. □

Замечание 3.1. Выясним теперь, как выглядят в явной форме условия (3.29). Что касается первого из них, то, очевидно, здесь исключительные значения таковы:

$$\lambda = \lambda_k^{-1}(A^{-1} + B_3), \;\; k = 1, 2, \ldots$$

Это характеристические числа компактного положительного оператора $A^{-1} + B_3$, они образуют счетное множество на положительной оси и имеют предельную точку $\lambda = +\infty$. В терминах исходной задачи (3.1) можно проверить, что эти исключительные значения λ суть собственные значения задачи Стефана

$$L_0 u = \lambda u \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \;\; \partial_2 u = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \;\; \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3). \tag{3.30}$$

Что касается второго условия (3.29), то оказывается, что здесь исключительными являются собственные значения следующей видоизмененной задачи Стефана:

$$L_0 u = \lambda u \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \;\; \gamma_2 u = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \;\; \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3). \tag{3.31}$$

В самом деле, легко устанавливаем, что для $B_2 = (\gamma_2 A^{-1/2})^*(\gamma_2 A^{-1/2})$

$$\ker B_2 = \{\eta_0 \in L_2(\Omega) : \eta_0 = A^{1/2} u_0, \; u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \; \gamma_2 u_0 = 0\}. \tag{3.32}$$

Поэтому здесь вместо (3.30) возникает задача на собственные значения

$$P_0 \eta = \lambda P_0 (A^{-1} + B_3) P_0 \eta, \;\; \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.33}$$

которая имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\lambda = +\infty$. Они являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)} / (\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma_3 u_0\|^2_{L_2(\Gamma_3)}), \;\; u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1 \cup \Gamma_2}(\Omega). \tag{3.34}$$

Таким образом, в начально-краевой задаче (3.15) множество исключительных значений λ представляют собой объединение спектров вспомогательных задач Стефана (3.30) и (3.31).

3.3. Третья задача. Рассмотрим, наконец, вариант, когда граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита не на три липшицевых куска, как в задаче (3.1), а на четыре с дополнительным краевым условием на Γ_4:

$$\begin{gathered} L_0 u = \lambda u \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \;\; \partial_2 u = \mu\gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \;\; \lambda\partial_4 u = \gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{3.35}$$

Здесь (при спектральном параметре μ) порождающая ее начально-краевая задача выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} L_0 u = \lambda u + f \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \;\; \partial_2 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_2 u) = \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u + \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \;\; \partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u + \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4), \;\; u(0) = u^0. \end{gathered} \tag{3.36}$$

Проводя те же рассуждения, что и в первой задаче (см. (3.4)–(3.9)), приходим по аналогии с (3.9) к задаче Коши

$$B_2 \frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1} B_4)\eta = f(t), \;\; \eta(0) = \eta^0 = A^{1/2} u^0, \tag{3.37}$$

$$f(t) = A^{-1/2} f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2} V_k \psi_k.$$

Не приводя подробных обсуждений, сформулируем сразу итоговый результат; он получается так же, как в проблеме (3.19), но с некоторыми усложнениями.

Теорема 3.3. *Пусть в задаче* (3.36) *выполнены условия*

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0 - \lambda^{-1}P_0B_4P_0), \tag{3.38}$$

где $P_0 : L_2(\Omega) \to \ker B_2 =: H_0$ *— ортопроектор на* H_0*, а также условия*

$$f \in C^{\beta}([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\quad \psi_k \in C^{\beta}([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)),\ \ 0 < \beta \leqslant 1,\ k = 2,3,4, \tag{3.39}$$

$$u(0) = u^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $u \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$*, для которого каждое слагаемое в уравнении в* Ω *(см.* (3.36)*) является элементом из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$*, а в граничных условиях — элементом из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$*,* $k = 2,3,4$*, соответственно.*

Замечание 3.2. Можно убедиться, что первое условие (3.38) требует, чтобы λ не являлось собственным значением задачи Крейна—Стефана

$$L_0u = \lambda u\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \partial_2 u = 0\ (\text{на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u = \lambda\gamma_3 u\ (\text{на } \Gamma_3),\ \lambda\partial_4 u = \gamma_4 u\ (\text{на } \Gamma_4), \tag{3.40}$$

которая, как известно, имеет две ветви конечнократных положительных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$, а также не более конечного числа невещественных комплексно сопряженных пар конечнократных собственных значений.

Что касается второго требования в (3.38), то, по аналогии с рассуждениями из замечания 3.1, можно убедиться, что здесь исключительными числами являются собственные значения модифицированной задачи Крейна—Стефана (см. (3.31))

$$L_0u = \lambda u\ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \gamma_2 u = 0\ (\text{на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u = \lambda\gamma_3 u\ (\text{на } \Gamma_3),\ \lambda\partial_4 u = \gamma_4 u\ (\text{на } \Gamma_4). \tag{3.41}$$

Общие свойства спектра этой задачи — такие же, как задачи (3.40).

3.4. Четвертая задача. Эта задача порождает спектральную проблему (3.35), если μ — фиксированный, а λ — спектральный параметр. Здесь предварительно удобно, как и в задаче гидродинамики (проблема С. Крейна), ввести вместо поля скоростей $u(t,x)$ поле перемещений сплошной среды $w(t,x)$, $u(t,x) = \partial w/\partial t$. Тогда начально-краевая задача, отвечающая проблеме (3.35), формируется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_0\frac{\partial w}{\partial t} = f; (\text{в } \Omega),\ w = 0\ (\text{на } \Gamma_1),$$
$$\partial_2\frac{\partial w}{\partial t} = \mu\gamma_2\frac{\partial w}{\partial t} + \psi_2\ (\text{на } \Gamma_2),\ \partial_3\frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_3\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \psi_3\ (\text{на } \Gamma_3), \tag{3.42}$$
$$\partial_4\frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_4 w = \psi_4\ (\text{на } \Gamma_4),\ \ w(0) = w^0,\ \frac{\partial w}{\partial t}(0) = w^1 = u^0.$$

Пользуясь теми же общими приемами, которые были использованы выше, приходим к выводу, что искомое решение $w = w(t)$ со значениями в $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1}(f - \frac{d^2w}{dt^2}) + V_2(\psi_2 + \mu\gamma_2\frac{dw}{dt}) + V_3(\psi_3 - \gamma_3\frac{d^2w}{dt^2}) + V_4(\psi_4 - \gamma_4 w). \tag{3.43}$$

Тогда возникает задача Коши

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{d^2w}{dt^2} + (I - \mu V_2\gamma_2)\frac{dw}{dt} + V_4\gamma_4 w = A^{-1}f + \sum_{k=2}^{4} V_k\psi_k, \tag{3.44}$$

$$w(0) = w^0,\ \ \frac{dw}{dt}(0) = w^1 = u^0.$$

Эта задача после замены $w = A^{-1/2}\eta$ переходит в проблему

$$(A^{-1} + B_3)\frac{d^2\eta}{dt^2} + (I - \mu B_2)\frac{d\eta}{dt} + B_4\eta = A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2}V_k\psi_k =: f(t), \tag{3.45}$$

$$\eta(0) = A^{1/2}w^0, \;\; \frac{d\eta}{dt}(0) = A^{1/2}w^1 = A^{1/2}u^0.$$

Осуществляя здесь еще одну замену

$$\frac{d\eta}{dt} = (A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi, \tag{3.46}$$

приходим к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi + \int\limits_0^t B_4(A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi(s)ds = -B_4A^{1/2}w^0 + A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2}V_k\psi_k,$$
$$\varphi(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}w^1. \tag{3.47}$$

Чтобы исследовать проблему разрешимости задачи (3.47), сейчас понадобится одно утверждение, доказательство которого можно найти в [14, теоремы 1.3.2, 1.3.4, с. 21–25]. В несколько ослабленной форме оно выглядит следующим образом.

Лемма 3.2. *Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка, рассматриваемого в гильбертовом пространстве H, т. е. в задаче*

$$\frac{du}{dt} = A_0u + \int\limits_0^t G(t,s)A_1u(s)ds + f(t), \;\; u(0) = u^0, \tag{3.48}$$

выполнены следующие условия:

1°. A_0 *является генератором аналитической полугруппы;*
2°. $\mathcal{D}(A_1) \supset \mathcal{D}(A_0)$;
3°. $G(t,s), \; \partial G(t,s)/dt \in C(\triangle_T; H), \; \triangle_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \in T\}$;
4°. $f(t) \in C^\beta([0,T]; H), \; 0 < \beta \leqslant 1$;
5°. $u^0 \in \mathcal{D}(A_0)$.

Тогда задача (3.48) *имеет единственное сильное решение*

$$u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)) \cap C^1([0,T]; H), \tag{3.49}$$

для которого все слагаемые в (3.48) *являются элементами из* $C([0,T]; H)$ *и выполнено начальное условие.*

Воспользуемся леммой 3.2 применительно к задаче (3.47). В этой задаче оператор $-(I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы, причем области определения этого генератора и оператора, стоящего под знаком интеграла, совпадают. Далее, можно считать, что в (3.47) $G(t,s) \equiv I$ и потому выполнено условие 3° леммы 3.2.

Отсюда приходим к следующему выводу.

Лемма 3.3. *Если в задаче* (3.48) *выполнены условия*

$$w^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \;\; w^1 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{3.50}$$

$$f(t) \in C^\beta([0,T]; \; (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*), \;\; \psi_k \in C^\beta([0,T]; \; \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)), \;\; k = 2,3,4, \;\; 0 < \beta \leqslant 1, \tag{3.51}$$

то эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, *и для этого решения все слагаемые в уравнении* (3.47) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_2(\Omega)$.

Это утверждение позволяет установить такой факт.

Теорема 3.4. *Пусть в задаче* (3.42) *выполнены условия* (3.50), (3.51), *а также условие*

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \tag{3.52}$$

Тогда эта задача имеет сильное решение

$$w \in C^2([0,T]; \; (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*) \cap C^1([0,T]; \; \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)), \tag{3.53}$$

для которого выполнены уравнение (3.42)*, где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$*, граничные условия* (3.42)*, где все слагаемые на* Γ_k *являются элементами из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$*,* $k=2,3,4$*, а также начальные условия* (3.42).

Доказательство. При выполнении условий (3.50), (3.51) по лемме 3.3 задача (3.47), а потому и задача (3.45) имеют решения, для которых все слагаемые в этих уравнениях являются элементами из $C([0,T];\ L_2(\Omega))$. Тогда в силу условия (3.52) имеем $d\eta/dt \in C([0,T];\ L_2(\Omega))$. Отсюда получаем, что в задаче (3.44), а потому и в (3.43) $dw/dt \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$. Следовательно, $L_0(dw/dt) \in C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, $\partial_k(dw/dt) \in C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$.

Далее устанавливаем, опираясь на представление (3.43), как и выше, что для $w(t,x)$ выполнены уравнение и краевые условия (3.42), а потому в силу доказанных свойств в уравнении (3.42) все слагаемые — элементы из $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементы из $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k=2,3,4$.

Отсюда также приходим к выводу, что имеет место свойство (3.53) и, кроме того, свойство $\gamma_3 w \in C^2([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3))$. Наконец, выполнены также начальные условия (3.50). □

Отметим в заключение, что подход, продемонстрированный в данном разделе для спектральной задачи (2.1)-(2.2), можно применить и для спектральной задачи сопряжения (1.19)–(1.28): исследовать свойства ее решений на основе операторного пучка (1.31), (1.32), а также рассмотреть начально-краевые задачи, порождающие спектральную проблему (1.19)–(1.28).

Автор благодарит проф. Копачевского Н. Д. за постановку задач, обсуждение возникающих здесь проблем и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
2. *Агранович М. С., Амосов Г. А., Левитин М.* Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии// Росс. ж. мат. физ. — 1999. — *6*, № 3. — С. 247–281.
3. *Агранович М. С., Менникен Р.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности// Мат. сб. — 1999. — *30*, № 1. — С. 29–68.
4. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
5. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1362–1392.
6. *Войтицкий В. И.* Абстрактная спектральная задача Стефана// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2006. — *19 (58)*, № 2. — С. 20–28.
7. *Войтицкий В. И.* О спектральных задачах, порожденных задачей Стефана с условиями Гиббса—Томсона// Нелин. гранич. задачи — 2007. — *17*. — С. 31–49.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
9. *Вулис И. Л., Соломяк М. З.* Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1974. — *38*, № 6. — С. 1343–1371.
10. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Высш. шк., 1989.
11. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб. «Функциональные и численные методы математической физики». Ин-т мат. и мех.: сб. научн. трудов. — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
13. *Копачевский Н. Д.* Спектральная теория операторных пучков. Специальный курс лекций. — 2009.
14. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: ФЛП «Бондаренко О. А.», 2012.
15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.

16. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения// Межд. науч. конф. «Соврем. методы и пробл. теор. опер. и гарм. анализа и их прилож. — V». — Ростов-на-Дону, 2015. — С. 211.
17. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения// XXVI Крым. осен. мат. шк.-симп. по спектр. и эволюц. задачам. — Батилиман (Ласпи), 2015.
18. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *61*. — С. 67–102.
19. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
20. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
21. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* О базисности некоторой части собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка// Мат. сб. — 1987. — *133 (175)*, № 3(7). — С. 293–313.
22. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Базисность подсистемы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка// Функц. анализ и его прилож. — 1987. — *21*, № 1. — С. 82–82.
23. *Михлин С. Г.* Прямые методы в математической физике. — М.: Гос. изд-во тех.-теор. лит., 1950.
24. *Понтрягин Л. С.* Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1944. — *8*, № 6. — С. 243–280.
25. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1985. — *8*.
26. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15(64)*, № 2. — С. 82–88.
27. *Старков П. А.* О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2003. — *1*. — С. 118–131.
28. *Старков П. А.* Примеры многокомпонентных задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2005. — *18(57)*, № 1. — С. 89–94.
29. *Agranovich M. S., Katsenelenbanm B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory. — Berlin: Wiley-VCN, 1999.
30. *Gohberg I., Goldberg S.* Basic operator theory. — Boston: Birkhauser, 1980.
31. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2001.
32. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint problems for viscous fluid. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 2003.
33. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
34. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.* On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations// В сб. «Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Vol. 2: Differential operators and mechanics». — Basel: Birkhauser, 2009. — С. 373–386.

К. А. Радомирская
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: radomirskaya@mail.ru

DOI: 10.22363/2413-3639-2017-63-2-316-339 UDC 517.95+517.98

Matching Spectral and Initial-Boundary Value Problems

© 2017 **K. A. Radomirskaya**

Abstract. Based on the approach to abstract matching boundary-value problems introduced in [18], we consider matching spectral problems for one and two domains. We study in detail the arising operator pencil with self-adjoint operator coefficients. This pencil acts in a Hilbert space and depends on two parameters. Both possible cases are considered, where one parameter is spectral and the other is fixed, and properties of solutions are obtained depending on this. Also we study initial-boundary value problems of mathematical physics generating matching problems. We prove theorems on unique solvability of a strong solution ranging in the corresponding Hilbert space.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. M. S. Agranovich, G. A. Amosov, and M. Levitin, "Spektral'nye zadachi dlya sistemy Lame v gladkikh i negladkikh oblastyakh so spektral'nym parametrom v kraevom uslovii" [Spectral problems for the Lamé system in smooth and nonsmooth domains with a spectral parameter in the boundary-value condition], *Ross. zh. mat. fiz.* [Russ. J. Math. Phys.], 1999, **6**, No. 3, 247–281 (in Russian).
3. M. S. Agranovich and R. Menniken, "Spektral'nye zadachi dlya uravneniya Gel'mgol'tsa so spektral'nym parametrom v granichnykh usloviyakh na negladkoy poverkhnosti" [Spectral problems for the Helmholtz equation with a spectral parameter in the boundary-value conditions on a nonsmooth surface], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **30**, No. 1, 29–68 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineinykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoi metrikoi* [Essentials of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
5. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of the spectrum of differential equations], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1362–1392 (in Russian).
6. V. I. Voytitskiy, "Abstraktnaya spektral'naya zadacha Stefana" [The abstract Stefan spectral problem], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2006, **19 (58)**, No. 2, 20–28 (in Russian).
7. V. I. Voytitskiy, "O spektral'nykh zadachakh, porozhdennykh zadachey Stefana s usloviyami Gibbsa—Tomsona" [On spectral problems generated by the Stefan problem with the Gibbs–Thomson conditions], *Nelin. granich. zadachi* [Nonlinear Bound. Value Probl.], 2007, **17**, 31–49 (in Russian).
8. V. I. Voytitskiy, N. D. Kopachevskii, and P. A. Starkov, "Mnogokomponentnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel'nye abstraktnye kraevye zadachi" [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
9. I. L. Vulis and M. Z. Solomyak, "Spektral'naya asimptotika vyrozhdayushchikhsya ellipticheskikh operatorov vtorogo poryadka" [Spectral asymptotics of degenerating elliptic operators of second order], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1974, **38**, No. 6, 1343–1371 (in Russian).
10. Dzh. Goldsteyn, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Their Applications], Vyssh. shk., Kiev, 1989 (in Russian).
11. V. I. Gorbachuk, "Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy," In: *Funktsional'nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki. In-t matem. i mekhaniki: sb. nauchn. trudov* [Functional and numeric methods of mathematical physics. Inst. Math. Mech.: Digest Sci. Proc.], Naukova dumka, Kiev, 1998, 60–63 (in Russian).

©Peoples' Friendship University of Russia, 2017

12. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Nonself-adjoint Operators in a Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
13. N. D. Kopachevskii, *Spektral'naya teoriya operatornykh puchkov: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Spectral Theory of Operator Pencils: Special Course], OOO "FORMA," Simferopol', 2009 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskii, *Integrodifferentsial'nye uravneniya Vol'terra v gil'bertovom prostranstve. Spets. kurs lektsiy* [Integrodifferential Volterra Equations in a Hilbert Space. Special Course], FLP "O. A. Bondarenko," Simferopol', 2012 (in Russian).
15. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye zadachi sopryazheniya" [Abstract mixed boundary-value conjugation problems], *Mezhd. nauch. konf. "Sovrem. metody i probl. teor. oper. i garm. analiza i ikh prilozh. – V"* [Int. Sci. Conf. "Contemp. Methods Probl. Theor. Oper. Harm. Anal. Appl. – V"], Rostov-na-Donu, 2015, 211 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya" [Abstract boundary-value and spectral conjugation problems], *XXVI Krym. osen. mat. shk.-simp. po spektr. i evolyuts. zadacham* [XXVI Crimean Autumn Math. School-Symp. Spectr. Evolution Probl.], Batiliman (Laspi), 2015 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskii and K. A. Radomirskaya, "Abstraktnye smeshannye kraevye i spektral'nye zadachi sopryazheniya i ikh prilozheniya" [Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **61**, 67–102 (in Russian).
19. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
20. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
21. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "O bazisnosti nekotoroy chasti sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov samosopryazhennogo operatornogo puchka" [On the basis consisting of a subset of eigenvectors and adjoined vectors of a self-adjoint operator pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1987, **133 (175)**, No. 3(7), 293–313 (in Russian).
22. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Bazisnost' podsistemy sobstvennykh i prisoedinennykh vektorov samosopryazhennogo operatornogo puchka" [Basis consisting of a subsystem of eigenvectors and adjoined vectors of a self-adjoint operator pencil], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1987, **21**, No. 1, 82–82 (in Russian).
23. S. G. Mikhlin, *Pryamye metody v matematicheskoy fizike* [Direct Methods in Mathematical Physics], Gos. izd-vo tekh.-teor. lit., Moscow, 1950 (in Russian).
24. L. S. Pontryagin, "Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoy metrikoy" [Hermit operators in a space with indefinite metrics], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1944, **8**, No. 6, 243–280 (in Russian).
25. G. V. Rozenblyum, M. Z. Solomyak, and M. A. Shubin, "Spektral'naya teoriya differentsial'nykh operatorov" [Spectral theory of differential operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1985, **8** (in Russian).
26. P. A. Starkov, "Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya" [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 1, 58–62 (in Russian).
27. P. A. Starkov, "O bazisnosti sistemy sobstvennykh elementov v zadachakh sopryazheniya" [On basic system of eigenelements in conjugation problems], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2003, **1**, 118–131 (in Russian).
28. P. A. Starkov, "Primery mnogokomponentnykh zadach sopryazheniya" [Examples of multicomponent conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Vernadskii Tavria Nats. Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2005, **18(57)**, No. 1, 89–94 (in Russian).
29. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbanm, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory*, Wiley-VCN, Berlin, 1999.

30. I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic Operator Theory*, Birkhauser, Boston, 1980.
31. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2001.
32. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
33. W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
34. V. I. Voytitsky and N. D. Kopachevsky, "On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations," *В сб. «Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Vol. 2: Differential operators and mechanics»*., Basel: Birkhauser, 2009, 373–386.

K. A. Radomirskaya
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
4 Vernadsky Avenue, 295007 Simferopol, Russia
E-mail: radomirskaya@mail.ru